

arshad-bargh.blog.ir

سلام

جزوه‌ای که پیش رو دارید، خلاصه‌ای از درس الکترومغناطیس است که به منظور جمع‌بندی مطالب و نظم بخشیدن به آموخته‌های شما عزیزان تهیه شده است. با توجه به اثر جادویی! خلاصه‌نویسی، توصیه می‌کنم زمان مناسبی را برای مرور این جزوه اختصاص دهید.

با آرزوی موفقیت روزافزون شما

علی عبدالعالی

در جدول ذیل دروس به سرفصلهای مهم آن طبقه بندی شده و مشخص شده است که در هر سال از هر مبحث چند تست سوال شده است و دانشجوی محترم می تواند زمان باقیمانده تا کنکور را با توجه به اهمیت مباحث مدیریت نماید.

رشته: مهندسی برق							درس: الکترومغناطیس	
ردیف	مبحث	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	مجموع ۵ سال	نسبت از کل
		تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست	تعداد تست		
1	قانون کولمب	1	0	0	0	1	2	3%
2	پتانسیل الکتریکی	2	1	1	2	3	9	12%
3	دو قطبی الکتریکی	0	0	1	2	1	4	5%
4	شار الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
5	قانون گاوس	1	2	0	1	0	4	5%
6	انرژی الکتریکی	0	0	1	2	0	3	4%
7	گشتاور الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
8	معادله خطوط میدان الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
9	هادی ها در میدان الکتریکی	0	1	1	0	0	2	3%
10	عایق ها در میدان الکتریکی	2	2	1	0	0	5	7%
11	ظرفیت خازن	0	0	2	0	1	3	4%
12	جریان الکتریکی و رسانندگی	0	0	0	0	0	0	0%
13	مقاومت الکتریکی	2	1	1	0	0	4	5%
14	تئوری تصویر	1	1	1	1	0	4	5%
15	معادله لاپلاس و پواسون	0	0	0	0	1	1	1%
16	شرایط مرزی در الکتریسیته ساکن	0	0	1	0	0	1	1%
17	انرژی الکتریکی در خازن ها	0	0	0	0	0	0	0%
18	نیروی الکتریکی	0	0	0	0	0	0	0%
19	محاسبه ی نیرو و گشتاور با استفاده از انرژی در الکتریسیته ساکن	0	0	0	0	0	0	0%
20	قانون بیوساوار	3	1	0	0	0	4	5%
21	قانون آمپر	0	0	0	0	1	1	1%
22	شار مغناطیسی	0	1	0	0	0	1	1%
23	پتانسیل مغناطیسی برداری	0	0	0	0	3	3	4%
24	پتانسیل مغناطیسی اسکالر	0	0	0	1	0	1	1%
25	دو قطبی مغناطیسی	0	0	0	1	0	1	1%
26	نیروی مغناطیسی	0	2	2	0	0	4	5%
27	گشتاورمغناطیسی	0	0	1	0	0	1	1%
28	انرژی مغناطیسی	1	0	0	1	2	4	5%
29	محاسبه ی نیرو و گشتاور با استفاده از انرژی در مغناطیس	0	0	0	0	0	0	0%
30	ماده ی مغناطیسی	1	0	0	2	0	3	4%
31	شرایط مرزی در مغناطیس	0	3	1	0	0	4	5%
32	ضریب خودالقائی	0	0	1	0	0	1	1%
33	ضریب القای متقابل	1	0	0	0	1	2	3%
34	قانون القای فارادی	0	0	0	2	0	2	3%
35	مدار مغناطیسی	0	0	0	0	1	1	1%
	جمع	15	15	15	15	15	75	100%

فصل دوم: قانون کولن و میدان الکتریکی

تو این فصل سه تا بحث داشتیم:

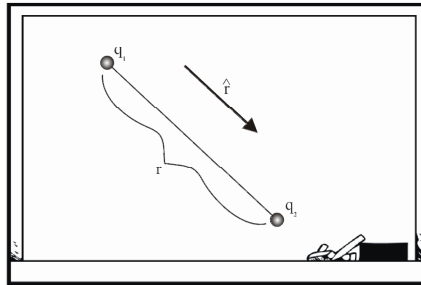


(۱) قانون کولن

(۲) میدان الکتریکی

(۳) خطوط میدان الکتریکی

قانون کولن می فرمود:



$$F_{12} = F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

جهت چی؟



جهت در راستای دافعه


$$\leftarrow 0 < q_1 q_2$$

جهت در راستای جاذبه

$$\leftarrow 0 > q_1 q_2$$

نپرسین دیگه استاد، وقتی



آفرین، سعی می کنیم تا جای ممکن جهت را با  تعیین کنیم.



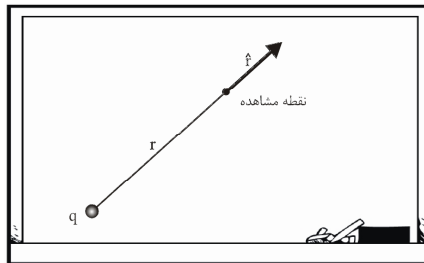
نقطه کور، نقطه ای بود که اگر باری در آن جا می گذاشتیم، هیچ نیرویی به آن وارد نمی شد.



$$\left. \begin{aligned} 1- \text{ دو بار همنام: نقطه‌ای بود که بین دو بار} & \leftarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(r-x)^2} \\ 2- \text{ دو بار غیرهمنام: نقطه کور خارج فاصله بین دو بار} & \leftarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(r+x)^2} \end{aligned} \right\}$$



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

میدان الکتریکی ناشی از بارهای گسسته:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{r}_i$$

و یادمون هست که این \sum ، همان جمع برداری است.

میدان الکتریکی ناشی از بارهای پیوسته:

$$1- \text{ خطی} \quad \vec{E} = \int \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$2- \text{ سطحی} \quad \vec{E} = \int \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= \int \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{۱- خطی} \\ \vec{E} &= \int \frac{\rho_s ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{۲- سطحی} \\ \vec{E} &= \int \frac{\rho_v dv}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad \text{۳- حجمی} \end{aligned} \right\}$$

راستی، اگه دوست داشتی اون فرمول کله گنده هم به خاطر بسپار!



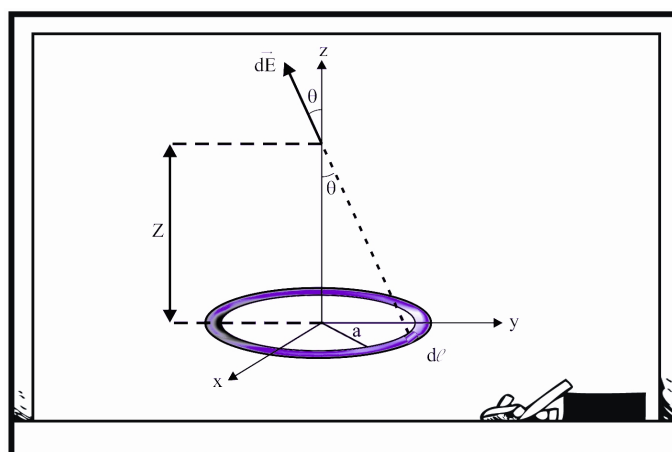
$$\vec{E} = \int \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



کل بحث میدان همین بود ولی توصیه می کنم این چند تا فرمول هم به یاد داشته باشید، حتماً به درد می خورد.



۱- حلقه به شعاع a و چگالی بار خطی ρ_l :



$$\vec{E} = \frac{\rho_l a \cdot z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \hat{z}$$

میدان دیسک رو هم می تونی بگی:



ترجیح می دهم حفظ نکنم. همین فرمول بالایی رو دارم با یک کم زحمت به نتیجه دلخواهم می رسم.



چه جوری؟

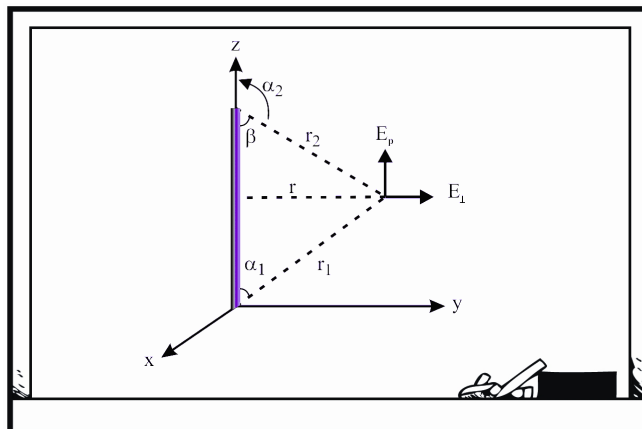


اینجوری...



$$\vec{E} = \int \frac{\rho_s r \cdot z}{2\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dr = \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right] \hat{z}$$

۲- میدان ناشی از میله‌ای محدود با چگالی ρ_l در فاصله عمودی z :



$$\vec{E} = \underbrace{\frac{\rho \ell}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \alpha_1 + \cos \beta)}_{\text{مؤلفه عمود بر محور میله}} \hat{r} + \underbrace{\frac{\rho \ell}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)}_{\text{مؤلفه موازی با محور میله}} \hat{z}$$

میدان ناشی از میله نامحدود و میله از یک طرف نامحدود... با یک کم بازی با این فرمول به دست می‌آوریم:



۳- میدان ناشی از صفحه نامحدود:



$$\vec{E} = \left| \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \right| \hat{n}$$

خطوط میدان الکتریکی: جهت حرکت بار الکتریکی در میدان \vec{E} را مشخص می‌کرد.



دکارتی:

$$\frac{dy}{E_y} = \frac{dx}{E_x} = \frac{dz}{E_z}$$

استوانه‌ای:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\phi}{E_\phi} = \frac{dz}{E_z}$$

کروی:

$$\frac{dR}{E_R} = \frac{R d\theta}{E_\theta} = \frac{R \sin \theta d\phi}{E_\phi}$$



واسه یافتن جهت میدان برای هر نوع باری (خطی، سطحی، حجمی) و یا توزیعی (پیوسته یا گسسته)، نگاه می‌کنیم،



ببینیم میدان ناشی از این بارها در چه راسته‌هایی، هم را خنثی و در چه راسته‌هایی هم را تقویت می‌کنند، فی الواقع جهت

را نه از روی محاسبه، بلکه آن را پیش از محاسبه به دست می‌یاریم و میدان را فقط در همان راستا محاسبه می‌کنیم و از انجام کار اضافی می‌پرهیزیم.



در محاسبه اندازه هم، تصویر یک  میدان ناشی از یک  بار (خطی، سطحی، حجمی) را در جهتی

که قبلاً به دست آوردیم، به دست می‌یاریم. و روی آن انتگرال می‌گیریم.^۲



البته در بسیاری مسایل اندازه این مورچه میدان‌ها را حفظیم و فقط کافی است در بازه‌ای روی آن انتگرال بگیریم. برای

نمونه مثال ۱۱ فصل ۲ را، یه بار دیگه بخون.



چگالی جریان‌ها بر حسب بار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{I} = \rho_{\ell} \times \mathbf{v}$$

$$\bar{\mathbf{J}}_s = \rho_s \times \bar{\mathbf{v}} = \rho_s \times \mathbf{r}\bar{\omega}$$

$$\mathbf{J}_v = \rho_v \times \bar{\mathbf{v}} = \rho_v \times \mathbf{r}\bar{\omega}$$

فصل سوم: قانون گاوس



تو این فصل با آقای گاوس و قانونش و روابط حسنهٔ ایشان با میدان الکتریکی آشنا شدیم.

گاوس عزیز می‌گفتند: «همیشه، همیشه و همیشه، شار الکتریکی گذرنده از هر سطح بسته‌ای، سطح بسته‌ای^۱، برابر است با جمع جبری، جبری، بارهای داخل آن سطح همیشه بسته» یعنی:

$$\varphi = \int \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q_{in}$$

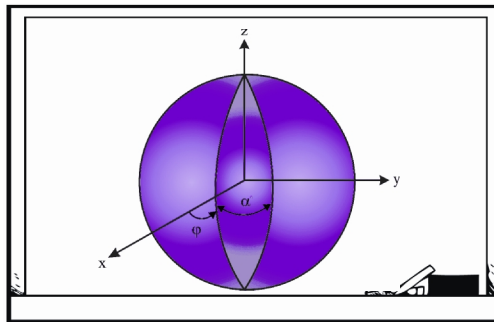


و یاد گرفتیم چگونه حتی شار سطوحی که می‌توانند قسمتی از سطوح بسته‌ای باشند، هم با شعبده‌بازی‌هایی به نام

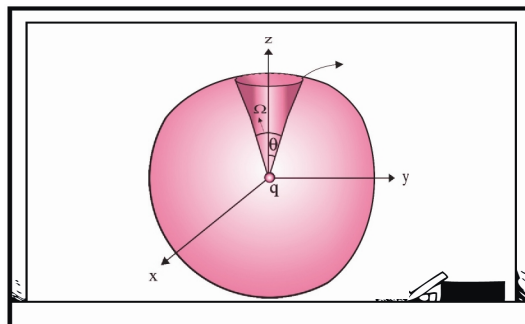
تقارن، قاچ و عرقچین ... به دست بیاوریم.



فقط جهت یادآوری کوچولو:



(البته به شرط تقارن) $\varphi_{\text{قاچ}} = \varphi_{\text{کل کره}} \times \frac{\alpha}{2\pi}$



^۱ این اشتباه تاپیی نیست، بلکه برای تأکید است!

$$\varphi = \frac{q}{2} (1 - \cos \theta)$$

با مهربونی‌های گاوس و داشتن تقارن کروی دیدیم:



$$\vec{E} = \frac{Q_{in}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{R}$$

و در تقارن استوانه‌ای:

$$\vec{E} = \frac{Q_{in}}{2\pi r h \epsilon_0} \hat{r}$$

فی‌الواقع، گاوس مهربون را دور زده و به روابط سهل‌الوصل فوق برای دستیابی به میدان رسیدیم.



بالفرض برای کره‌ای به شعاع a و چگالی بار حجمی ρ_v :

$$\vec{E}_{\text{درون کره}} = \frac{\rho_v}{3\epsilon_0} R \hat{R}$$

$$\vec{E}_{\text{بیرون کره}} = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 R^2} \cdot \hat{R}$$

واسه استوانه طویل با چگالی بار $\rho_v \left(\frac{C}{m^3}\right)$ و شعاع a هم، روابط این‌گونه بود:



$$\vec{E}_{\text{درون}} = \frac{\rho_v r}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{بیرون}} = \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0 r} \hat{r}$$

در انتهای فصل به رابطه‌ای رسیدیم که من خیلی بی‌دلیل، ازش خوشم میاد. (فرم نقطه‌ای قانون گاوس)



$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{حجمی}}$$

فصل چهارم: پتانسیل الکتریکی



مفهوم پتانسیل الکتریکی^۱...



به دو طریق برحسب شرایط می‌توانیم پتانسیل را محاسبه کنیم.

$$v = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad \text{۱- on path integration (در حضور میدان)}$$

$$v = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{۲- on source Integration (در حضور بار)}$$

$\rho \ell d\ell$ $\rho_s ds$ $\rho_v dv$
 \swarrow \uparrow \nearrow
 dq
 \swarrow \downarrow \searrow
 ℓ s v
 خطی سطحی حجمی



یادتون نره که انتگرال اولی، انتگرال‌گیری روی مسیر است و از آنجاکه میدان پایستار بود، مسیر انتگرال‌گیری اهمیت نداشت

و در انتگرال دوم، بازه انتگرال فقط محدوده بار را شامل می‌شود و ربطی به موقعیت نقطه مشاهده ندارد و انتخاب هر یک از این دو فرمول بسته به شرایط مسئله است.

و از اینجا به بعد هر چی فرمول ببینیم نتیجه مستقیم یا غیرمستقیم همین دو فرمول است. مثلاً:

$$v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{۱- پتانسیل نقطه‌ای به فاصله R از بار q:}$$

$$v = \sum \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad \text{۲- پتانسیل ناشی از بارهای گسسته:}$$

جمع جبری

$$v = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{۳- پتانسیل ناشی از بارهای پیوسته:}$$

۱- رجوع شود به همان‌جا که با مفهوم میدان الکتریکی آشنا شدید.

جهت چی؟



استاد بازم !! پتانسیل که جهت نداره.



و برای محاسبه میدان به وسیله پتانسیل:



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}v$$

و صد البته بهتر است در جاهایی که جهت میدان را می دانیم از $E = -\frac{dv}{dl}$ استفاده می کنیم.



گرادیان همان مشتق جهتی است که بر سر یک اسکالر عمل کرد و نتیجه اش بردار است و برابر است با:



$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial R} \hat{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

۱- دکارتی:

۲- استوانه‌ای:

۳- کروی:

در صورت هم‌راستا بودن \vec{E} با $d\vec{\ell}$:

$$\vec{E} = -\frac{dv}{d\ell} \Big|_{\max} \times \hat{\ell}$$

هر گاه دیورژانس، کرل و گرادیان بر سر عبارت ثابت بیابند حاصل صفر است.





من می‌گم! پتانسیل موجودی بیرون گرا، میدان موجودی درون گراست.

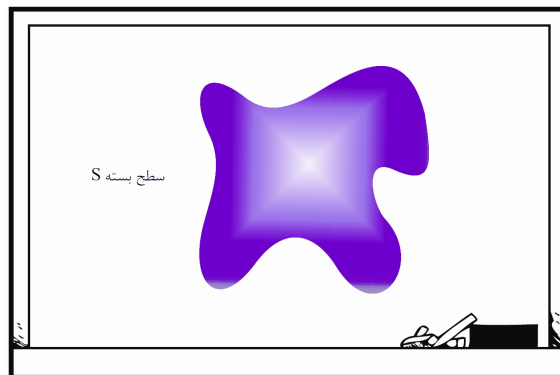


میدان برای یافتن هویت خود، همیشه به بارهای داخل نگاه می‌کند و پتانسیل به بیرون خود.

بیابن یک مقدار در مورد شکل زیر حرف بزنیم. که البته هیچ باری داخل آن نیست و تمامی نقاط دارای پتانسیل معلوم v_0



می‌باشند.



۱- پتانسیل تمام نقاط داخل سطح یکسان است. چون میدان داخل سطح بسته، صفر است.



$$v_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \rightarrow v_{AB} = 0 \rightarrow v_A = v_B$$

۲- یا میدان بر سطح عمود است یا مقدار آن صفر است.

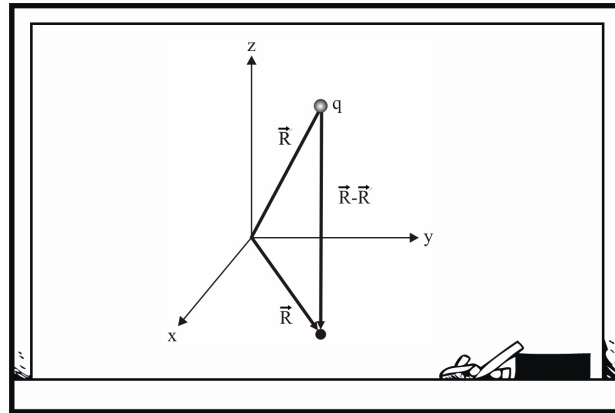
$$v_{AB} = 0 = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \rightarrow \begin{cases} E = 0 \\ E \perp \ell \end{cases}$$



$$V_0 \text{ در مبدأ} = \frac{\text{کل پتانسیل روی سطح کره}}{\text{سطح کره}}$$

در ضمن فرمول پتانسیل را گاهی چنین هم می‌نویسند:



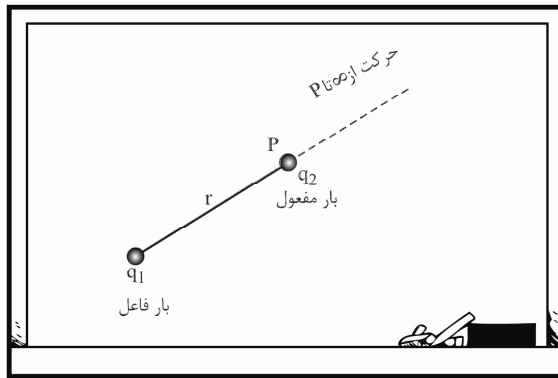
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R} - \vec{R}'|}$$

فصل پنجم: انرژی الکتریکی



برای انتقال بار q از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر، کار انجام می‌شود. این کار به صورت انرژی پتانسیل الکتریکی در سیستم

ذخیره می‌شود، در بیانی دیگر، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه کار لازم برای جابه‌جایی واحد بار مثبت است، به عبارت فرمولی:



$$v = \frac{w}{q} \rightarrow w = q_2 v_1 = \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

q_2 بار مفعول و q_1 فاعل است.



انرژی یعنی پتانسیل ناشی از بار فاعل (q_1 یعنی) در محل بار مفعول (q_2 یعنی) \times خود بار مفعول (q_2 یعنی)



با دانستن این نکته طلایی که انرژی ذخیره شده توسط یک سیستم در کل فضا، همان انرژی لازم برای ساخت این



سیستم است، انرژی سیستم‌های گسسته و پیوسته از این قرار می‌شوند:

۱- سیستم‌های گسسته:

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i v_i \quad \text{یا} \quad w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$



این فرموله می‌گه، این انرژی برابر با کار لازم جهت گردآوری همه این بارها کنار یکدیگر است.



یه مثال کوچولو می‌زنیم واسه اون‌ها که دچار آلزایمر زودرس هستند... ولی نه، پشیمون شدم، مثال ۴ فصل پنجم را

یک‌بار، نه دوبار بخونین.



اگر سیستمی به هر علتی یک یا چند تا از بارهاشو از دست بده، Δw برابر می‌شود با:

$$\Delta w = q \sum_{i=1}^{N-1} v_i$$

↓
از دست رفته یا حتی اضافه شده

حالتی از بقیه بارها



قبل از اینکه بیماری نکته‌گویی دوستمون بیشتر از این حاد شود، اینجوری می‌گوییم که، کار لازم برای ایجاد هرگونه


تغییری در سیستم اعم از دست رفتن قسمتی از بار یا کم و زیاد شدن فاصله بارها و... می‌شود:

$$\Delta w = w - w$$

قبل از تغییر سیستم - w بعد از تغییر سیستم

۲- انرژی سیستم‌های پیوسته:

$$w = \frac{1}{2} \int \rho_v v dv \quad \text{یا} \quad w = \frac{1}{2} \int \rho_s v ds \quad \text{یا} \quad w = \frac{1}{2} \int \rho_l v d\ell$$

v ، پتانسیل در محل  بار «خطی، سطحی یا حجمی» است.



محاسبه انرژی از این طریق، انرژی مربوط به کل فضا را می‌دهد، برای به دست آوردن انرژی قسمتی از فضا، از رابطه زیر


استفاده می‌کنیم:

$$w = \int U_e dv$$

هر حجم از فضا

U_e چگالی انرژی الکتریکی است و برابر است با:

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 = \frac{1}{2} \frac{|D|^2}{\epsilon_0}$$

اگر U_e یکنواخت بود می‌توان به سادگی خوردن  چنین گفت:



$$W = U_e \times V$$

↓
حجم مورد نظر

انرژی در تمام فضا ذخیره می‌شود و انرژی ذخیره شده در کل فضا باید مستقل از r باشد.



فصل نهم: هادی‌ها و جریان الکتریکی



هادی ماده‌ای است سرشار از الکترون آزاد، که این الکترون‌های آزاد در حضور میدان \vec{E} ، حرکت منظمی می‌یابند، به این

حرکت منظم جریان می‌گویند.

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S}$$

۱- چگالی جریان ثابت:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

۲- چگالی جریان غیر ثابت:



همیشه به یادمون می‌مونه که چگالی جریان برداری و خود جریان اسکالر است.



چگالی جریان (\vec{J}) به دو عامل بستگی داشت:

$$I = \vec{J} \cdot \vec{S}$$

۱- زور میدان (\vec{E})

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

۲- جنس محیط (σ) یا همان ضریب هدایت الکتریکی رسانا



در صفحه ۲۰۵ کتاب الکترومغناطیس، بعد از یک کم فرمول‌بازی به معادله زیر رسیدیم:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

این معادله می‌گفت که در اثر گذشت زمان چه بلایی بر سر چگالی بار حجمی می‌آمد.

در هادی کامل: $\rho = 0 \Leftarrow \tau = 0 \Leftarrow \sigma \rightarrow \infty$

در عایق کامل: $\rho = cte \Leftarrow \tau = \infty \Leftarrow \sigma \rightarrow 0$

یک سری از ویژگی‌های هادی کامل عبارت است از:

۱- $R = 0 \Leftarrow \sigma \rightarrow \infty$ (یعنی مقاومتش صفره)

۲- هم‌پتانسیل بودن تمام نقاط هادی

۳- میدان بر سطح هادی عمود است و $E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$

۴- میدان داخل هادی صفر است.

۵- (برای یادگیری بهتر، به کتاب رجوع کن)

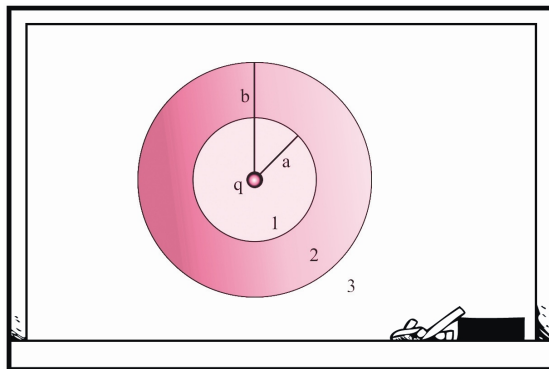
در مرزها پتانسیل پیوسته است ولی میدان می‌تواند، گسسته باشد.



در مثال ۲ فصل ششم دیدیم که میدان در جایی که محیط عایق بود به راحتی از گاوس قابل توجیه بود ولی در جایی



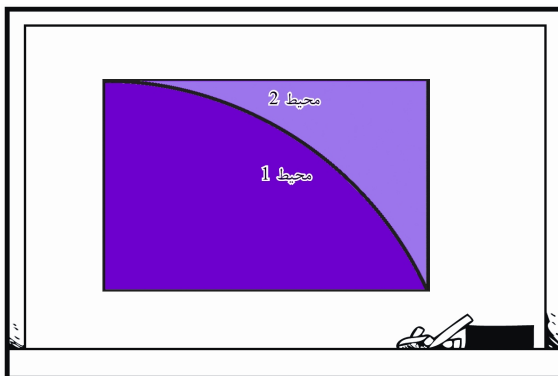
که به هادی می‌رسیدیم و میدان داخل جناب هادی را می‌خواستیم بدون هیچ زحمتی میدان صفر می‌شد و از دو طریق صفر شدن میدان را توجیه کردیم.



نوبتی هم که باشه، نوبت معشوقهٔ مهندس فهیم، یعنی «شرایط مرزی» است!



اگر بین دو محیط ۱ و ۲ مرز داشته باشیم.



$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} \\ D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \end{cases}$$

اندیس t : مؤلفه مماسی

اندیس n : مؤلفه عمودی

ρ_s : چگالی بارهای آزاد روی سطح



یکبار دیگه این شرایط رو در حالت‌های مختلف بررسی می‌کنیم.

۱- مرز هادی (محیط ۱) - هوا (محیط ۲)

میدان داخل هادی همیشه = صفر ←

$$E_{t_1} = E_{t_2} = 0$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \xrightarrow{D_{n_1}=0} D_{n_2} = \rho_s$$



و لذا اینجاست که به نتیجه زیبای زیر در نزدیکی آقاهادی می‌رسیم:

$$E_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$



و یک نتیجه زیبای دیگر باز در مجاورت هادی عزیز:

$$U_e = \frac{\rho_s^2}{\epsilon_0}$$

۲- مرز هادی (محیط ۱) - هادی (محیط ۲)

$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} = 0 \\ D_{n_1} - D_{n_2} = \rho_s = 0 \end{cases}$$

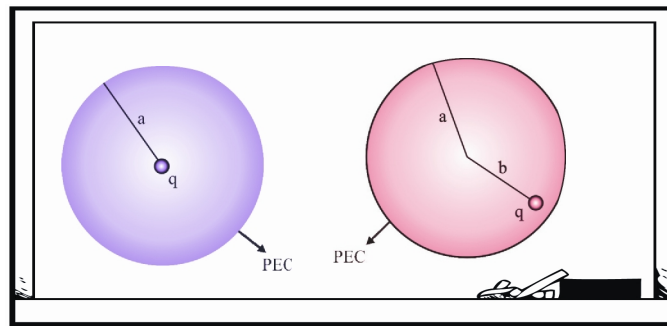
۳- مرز عایق (محیط ۱) - عایق (محیط ۲)

$$E_{n_1} = E_{n_2}$$

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \xrightarrow[\rho_s=0]{\text{محیط عایق}} D_{n_1} = D_{n_2}$$

طبق شرایط مرزی، میدان ناشی از دو سیستم زیر در نقطه‌ای بیرون کره هادی یکی است.





یعنی فرقی نمی‌کند، این بار در کجای سطح بسته قرار گرفته باشد. در هر صورت میدان هر دو سیستم یکی است.



پس در این مسائل برای محاسبه میدان، بار در هر کجا که بود، به ما مربوط نیست. ما میدان ناشی از بار در مرکز کره را

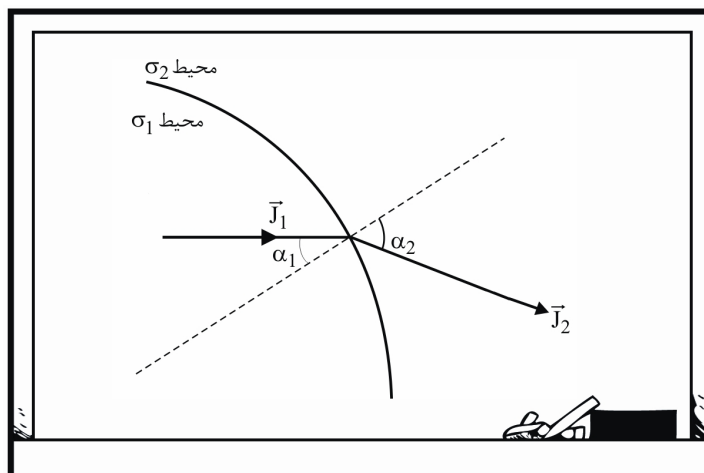


به دست می‌آوریم.

شرایط مرزی چگالی جریان هم از این قرارند:



$$\begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ J_{1t} = J_{2t} \\ \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$



$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \left(= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \right)$$

مقاومت



مقاومت یک ماده تابعی است از:

- ۱- هندسه ماده
- ۲- جنس ماده
- و دیگر هیچ...

جز مواردی محدود، برای محاسبه R از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$R = \int_{\ell} \frac{dl}{\int_s \sigma ds}$$

راستای جریان

سطح عمود بر جریان

و در صورتی که:

- ۱- سطح مقطع در طول مسیر یکنواخت باشد.
- ۲- σ یکنواخت باشد.

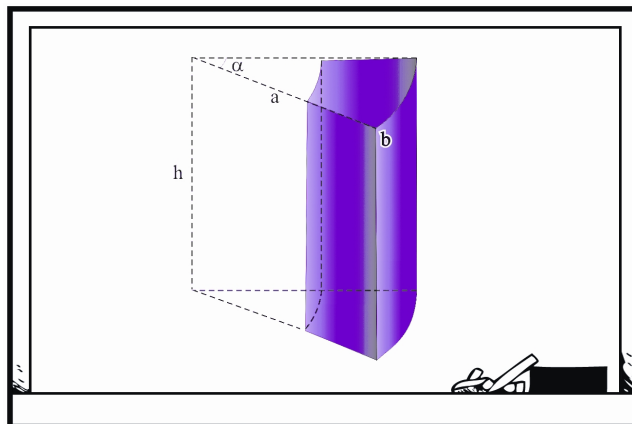


این فرمول به ظاهر ساده در رد گزینه، گاهی بسیار کارآمد است. (مثلاً $\sigma \rightarrow \infty \Leftrightarrow R = 0$)

$$R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

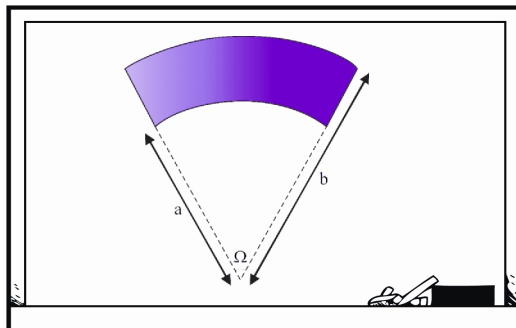


مقاومت بین دو سطح استوانه در یک قطاع با زاویه مرکزی α :



$$R = \frac{1}{\sigma h \alpha} \ln \frac{b}{a}$$

و اگر استوانه کامل باشد؛ $\alpha = 2\pi$ می‌گردد.
مقاومت بین دو سطح کروی با زاویه فضایی Ω :



$$R = \frac{1}{\Omega\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

$$R = \frac{1}{4\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

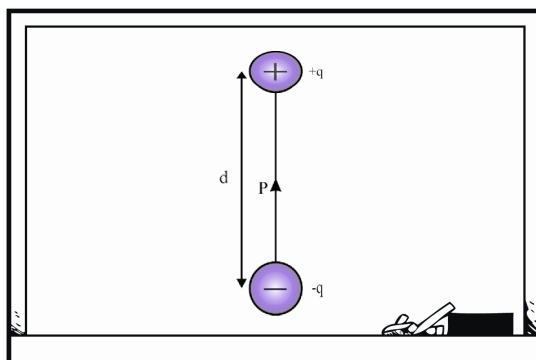
اگر گره‌ها کامل باشد:

فصل هفتم: مواد عایق «دی الکتریک»



دو بار هم‌اندازه و مختلف‌العلامة $\pm q$ را که در فاصله d از هم قرار داشته باشند، دوقطبی می‌نامند و بردار گشتاور

دوقطبی با رابطه $\vec{p} = q\vec{d}$ تعریف می‌شود.



اگر یک ماده عایق که سر شار از دوقطبی‌هاست، در یک میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، این میدان باعث می‌شود که دوقطبی‌های ساده، همگی در یک جهت منظم شوند و در این صورت میدان برآیند این دوقطبی، دیگر قابل ملاحظه می‌شود.



ثابت شد که هر عایقی را می‌توان با یک توزیع حجمی بار ρ_b (چگالی بار مقید حجمی) و یک توزیع سطحی بار ρ_{sb}

(چگالی بار مقید سطحی) مدل کرد، به طوری که:

$$\rho_{sb} = \vec{p} \cdot \hat{n}$$

\hat{n} : بردار یکه عمود بر سطح عایق به طرف خارج

$$\rho_b = -\vec{\nabla} \cdot \vec{p}$$

دوقطبی (دی الکتریک) و میدان



رابطه زیر را که خاطرتون هست؛

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$$

چند تا نکته مهم توی این رابطه بود:

۱- چگالی شار الکتریکی فقط و فقط، وابسته به بارهای آزاد و کاری به بارهای مقید ندارد.

۲- اما میدان الکتریکی وابسته به هر نوع بار (آزاد و مقید) است.

نتیجه اخلاقی: در عایق‌ها گاوس را برای عایق به کار می‌بریم تا نیازی به محاسبه بارهای مقید نباشد.

\vec{p} به دو چیز وابسته است:



- ۱- جنس محیط (X_e)
- ۲- زور میدان حاکم (\vec{E})

$$\vec{p} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{p} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$\vec{p} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \vec{D}$$

این قصه را یاد داشته باشید که وقتی \vec{p} را با دو بار مقید مدل کردیم، دیگر محیط ما ϵ_r نیست.



شرایط مرزی برای عایق‌ها هم، مانند گذشته است.



$$\begin{cases} E_{t_1} = E_{t_2} \\ D_{n_1} = D_{n_2} = \rho_s \end{cases}$$

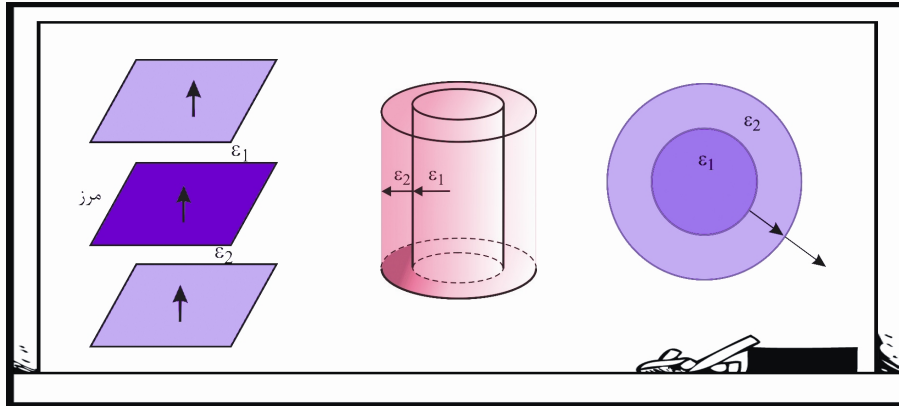
اگر هر دو محیط هم عایق کامل باشند آنگاه چون $\rho_s = 0 \Rightarrow D_{n_1} = D_{n_2}$



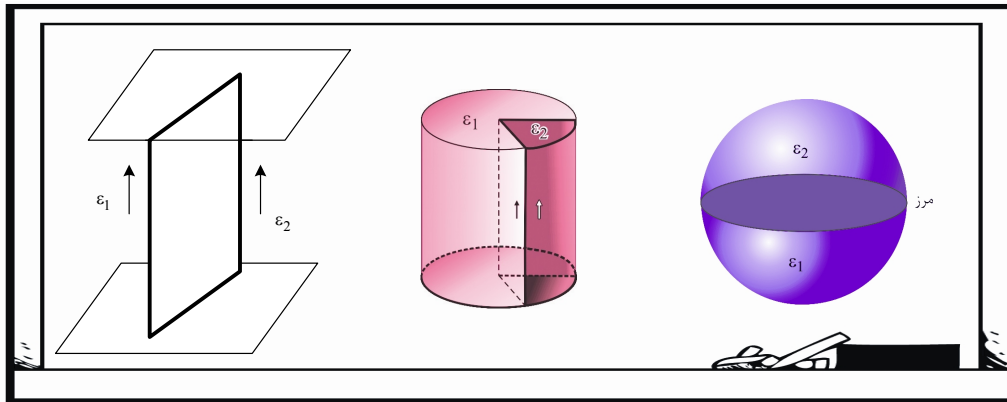
آن نکته‌ای که برای شرایط مرزی توی این بخش خیلی خیلی حائز اهمیت است؛ اینه:



(با شرط اینکه محیط‌های ما عایق - عایق باشند)

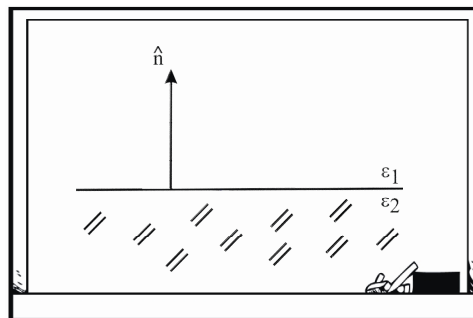


اگر میدان عمود بر مرز باشد $\Leftarrow D_{n_1} = D_{n_2} \Leftarrow \epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_2 \vec{E}_1 \Leftarrow$ برای حل مسئله از \vec{D} می‌آغازیم. ($D_1 = D_2$)



اگر میدان با مرز موازی است $\Leftarrow E_{t_1} = E_{t_2} \Leftarrow \frac{\vec{D}_1}{\epsilon_1} = \frac{\vec{D}_2}{\epsilon_2} \Leftarrow$ برای حل مسئله از \vec{E} می‌آغازیم. ($E_1 = E_2$)

شرط مرزی مربوط به \vec{P} را هم من دوست دارم، به خاطر داشته باشم (ترجیحاً) که اینجوریه:



$$P_{n_2} - P_{n_1} = \rho_{sb}$$

و دقت کنین که در اینجا ρ_{sb} چگالی بارهای مقید سطحی است.



فصل هشتم: خازن



می‌گویند.

نسبت بار به ولتاژ کمیتی است ثابت که فقط وابسته به شکل خازن و جنس عایق آن است، که به آن ظرفیت خازن

$$C = \frac{Q}{V} \leftarrow \begin{matrix} \nearrow \text{(کولن)} \\ \searrow \text{(ولت)} \end{matrix} \text{ (فاراد)}$$



برای محاسبه ظرفیت هر خازنی می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد:

$$\frac{1}{C} = \int_{u_1} \frac{du_1}{\int_{u_2} \int_{u_3} \frac{ds}{\epsilon h_2 h_3 du_2 du_3} h_1}$$

h_i ها ضرایب متریک و u_i ها محورهای یکه هر دستگاه مختصاتی می‌توانند باشند.

یا در حالت جزئی‌تر:

$$\frac{1}{C} = \int \frac{d\ell}{\int \int_{\text{سطح عمود بر جریان راستای جریان}} \epsilon ds}$$



فرمول‌هایی را که برای مقاومت تخت، استوانه‌ای و کروی به دست آوردید که به یاد دارید، حال با علم بر این نکته که

$$RC = \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

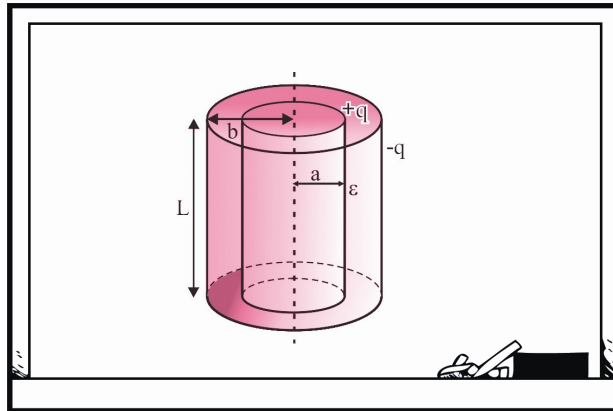


ظرفیت خازن مسطح، یعنی خازنی که اولاً مساحت صفحات هادی، برابر است و ثانیاً صفحات کاملاً با هم موازی‌اند و

ثالثاً (شکل ۳) محیط عایقی بین دو هادی «همگن» باشد، چنین است:

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

و برای خازن استوانه‌ای:

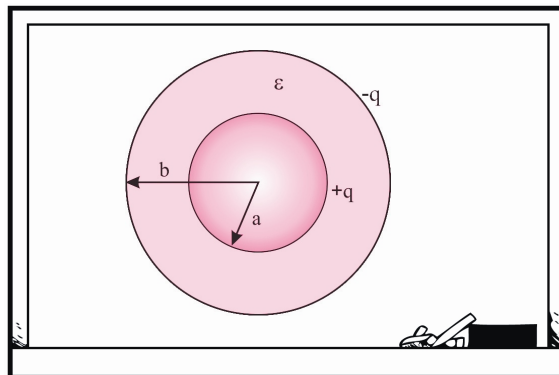


$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\frac{b}{a}}$$

و اگر به جای استوانه، قطاعی از آن باشد:

$$C = \frac{\alpha\epsilon\ell}{\ln\frac{b}{a}}$$

و در خازن کروی:



$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

و در صورتی که قطاعی از کره باشد:

$$C = \frac{\Omega\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

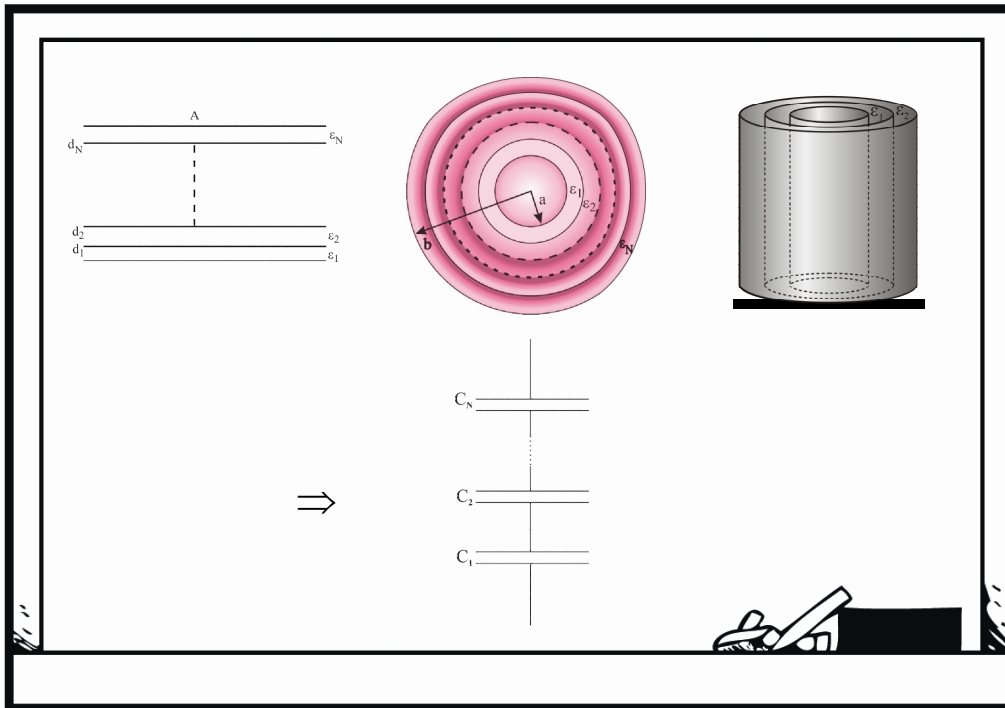
در تست‌ها به سوء استفاده‌ایی که از رابطه خازن مسطح، می‌شود استفاده کرد، دقت کنین:



- if $A \uparrow \Rightarrow C \uparrow$
- if $d \uparrow \Rightarrow C \downarrow$
- if $d \rightarrow 0 \Rightarrow C \rightarrow \infty$



بدون شرح ...



برای خازن‌های گسسته:

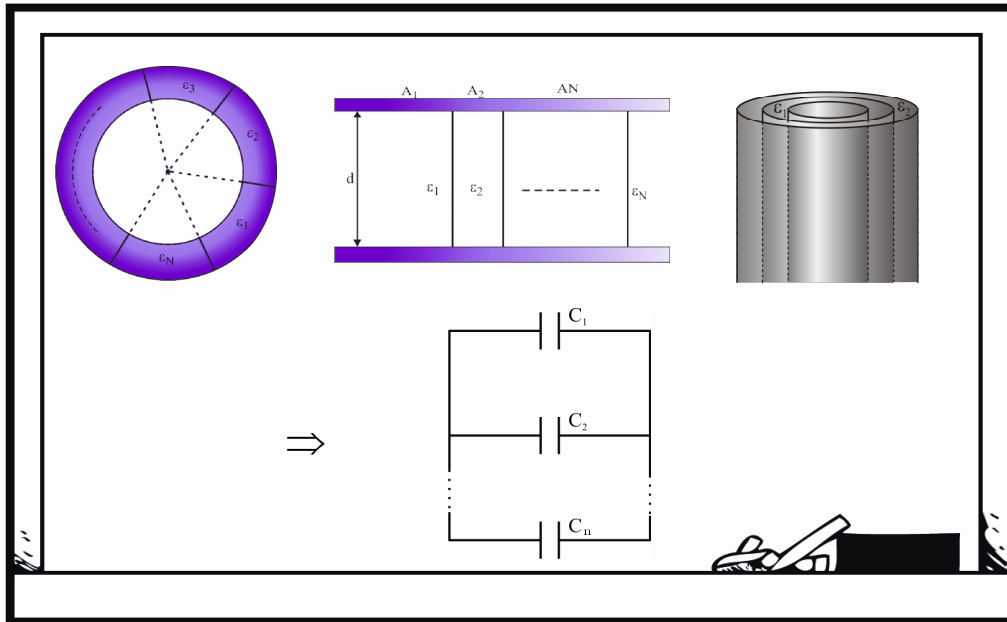
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

برای خازن‌های پیوسته:

$$\frac{1}{C} = \int_{\ell} \frac{d\ell}{\int_s \epsilon ds}$$

در اینجا میدان \perp مرز به عبارت دیگر جوشن \parallel مرز





برای خازن‌های گسسته:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

برای خازن‌های پیوسته:

$$C = \int dC$$

راستی برای انرژی خازن؛ در مسایل ولتاژ ثابت:

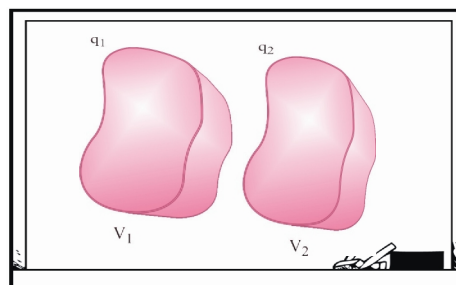


$$w = \frac{1}{2} CV^2$$

و در مسایل بار ثابت:

$$w = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

دوستداران جناب ماکسول، ماتریس زیر متعلق به جناب ماکسول می‌باشد:



$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

یعنی اثر متقابل هادی‌ها روی یکدیگر یکسان است. $C_{12} = C_{21}$



می‌تونید برای آشنایی بیشتر، تست ۵ فصل هشتم را مطالعه کنین (البته اگر تا به حال این کار را نکردین!)



رسیدیم به دوقطبی، این آفریده خارق‌العاده پروردگار هستی. رابطه میدانش را حتماً حفظ کنین:



$$\vec{E} = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0 R^3} [2 \cos \theta \hat{R} + \sin \theta \hat{\theta}]$$

فصل نهم: تئوری تصویر



هدف والای تئوری تصویر، ارضای شرایط مرزی است. یعنی در روی سطح رسانا، فقط مؤلفه عمودی میدان



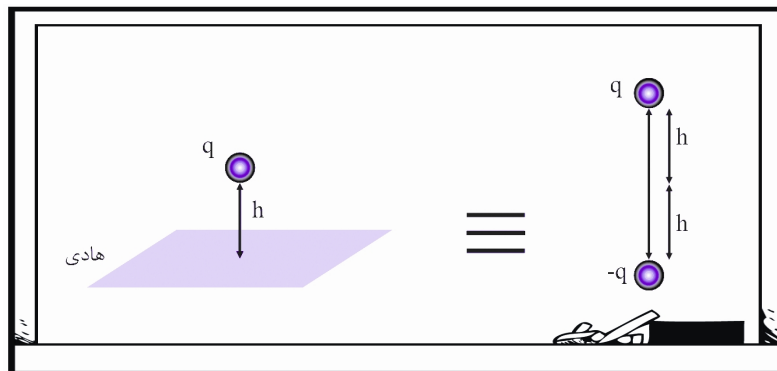
داشته باشیم پتانسیل درون هادی صفر شود و هر جا که نام و نشانی از یک صفحه رسانای زمین شده یا کره رسانا و... می آید به یاد تئوری تصویر بیافتید و به جای دست و پنجه نرم کردن با یک مسئله بی سرانجام، به لطف تئوری تصویر، مسئله‌ای بسیار ساده و دل‌نشین را حل کنید.



من شکل‌ها رو با تخته می‌کشم، برداشت و تفسیر با خودتون.



(الف)



به جای q هم می‌تواند هر باری با هر شکل و شمایلی باشد.



-q نماینده تمام‌الاختیار صفحه هادی است و برای محاسبه نیرو، انرژی و... بین بار و صفحه هادی دیگر نیازی به وجود صفحه هادی با تمام مشکلات آن نیست.

برای محاسبه نیرو:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4h^2}$$

و انرژی ذخیره شده در فضا:

$$w = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i v_i}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2h}$$

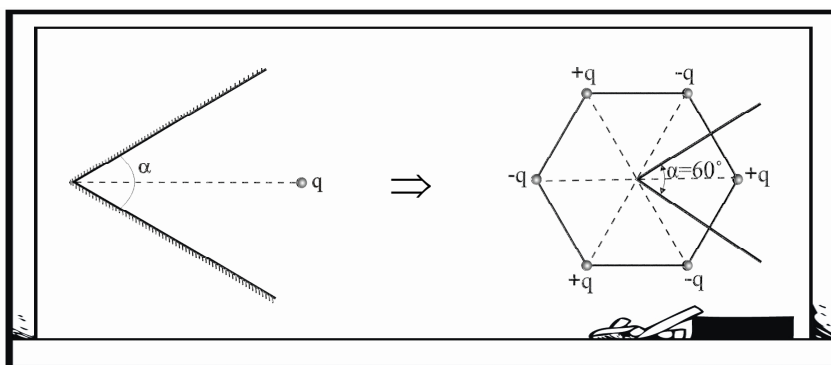


کسانی که هنوز فلسفه $\frac{1}{2}$ را نمی‌دانند، برای کسب اطلاعات بیشتر به کتاب الکترومغناطیس رجوع کند. (ص ۳۱۲)



برای هادی با صفحات متقاطع هم:

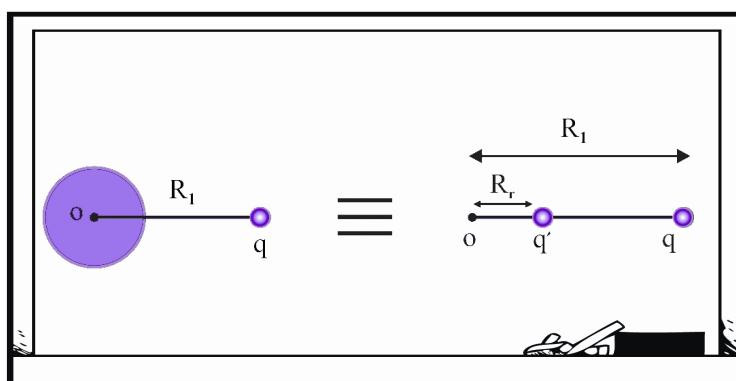
$$\text{تعداد تصویر} = \frac{360}{\alpha} - 1$$



و انرژی ذخیره شده توسط اون مثلاً برای حالت صفحات با زاویه 60° ماجرا از این قرار است:

$$w_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i v_i}{6}$$

(ب)



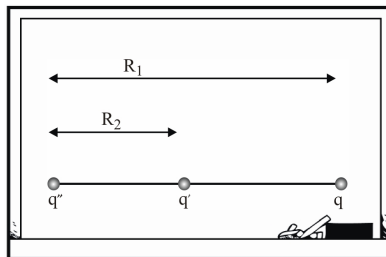
$$\begin{cases} q' = -q \frac{a}{R_1} \\ R_2 = \frac{a^2}{R_1} \end{cases}$$

به جای بار نقطه‌ای q ، اگر:

- ۱- کره به مرکز کره هادی (یا بخشی از آن)
 - ۲- حلقه‌ای به مرکز کره هادی (یا بخشی از آن)
 - ۳- پاره‌خط در امتداد شعاع کره هادی
- قرار بگیرند، باز هم، تصویرشان مانند خودشان است.



و اگر کره به پتانسیل V_0 وصل بود:

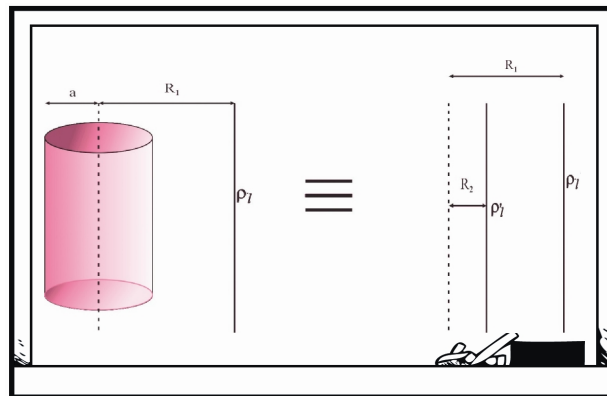


$$q'' = 4\pi\epsilon_0 a V_0$$

$$q'' = Q - q'$$

و اگر کره با بار Q ایزوله بود:

(ج)



$$\begin{cases} \rho_l = -\rho_l' \\ R_2 = \frac{a^2}{R_1} \end{cases}$$



اگر مسئله:

- با اندازه بار تصویر کار داشت ← می‌رویم سراغ $q' = -q \frac{a}{R_1}$
- با شکل بار تصویر کار داشت ← می‌رویم سراغ $R_2 = \frac{a^2}{R_1}$

فصل دهم: معادلات لاپلاس و پواسون

معادله پواسون:



$$\nabla^2 v = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

اگر در محیطی بار آزاد نداشته باشیم: ($\rho_v = 0$) و این معادله مختص جناب لاپلاس است.



به لطف لاپلاس و پواسن می توان میدان خیلی از محیطهایی را که با روشهای معمول قابل حل نیست، به دست آورد، البته

به شرطی که محیط همگن باشد.

با داشتن شرایط مرزی جواب یکتایی برای این معادلات به دست می آید.



لاپلاسین در دستگاههای:

دکارتی:

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

استوانه‌ای:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

کروی:

$$\nabla^2 v = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial v}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}$$

همان طور که قبلاً گفتیم، سعی کنین، سر جلسه کنکور به جای حل این معادلات راههای دیگری استفاده کنین؛ مثلاً:



۱- آشنایی با تیپ پاسخ

۲- صدق کردن پاسخ در معادله لاپلاس

۳- ارضای شرایط مرزی

۴- استفاده از امدادهای غیبی و...

arshad-bargh.blog.ir



در مسایلی که از طریق معادله لاپلاس یا پواسن حل می‌شوند با توجه به خواست مسئله طی مراحل زیر الزامی است.

حل: $\nabla^2 v = 0$ و یافتن $v \Leftarrow \vec{E} = -\nabla v$ و جستن $\vec{E} \Leftarrow$ دریابیدن ρ_s با توجه به:

$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s$ ، $D_{n_1} = 0$ (درون هادی)

\Leftarrow محاسبه $Q = \int_s \rho_s ds \Leftarrow$ در نهایت محاسبه ظرفیت خازن یا مقاومت $\left(RC = \frac{\epsilon}{\sigma}, C = \frac{Q}{v} \right)$



هر چند برای رسیدن به C و R راه خیلی بهتری بلدیم و تا وقتی چیزی به سرمان اصابت نکرده، از این راه به دنبال R

و C نمی‌گردیم.

$$\frac{1}{C} = \int \int \frac{du_1}{\epsilon_0 h_2 h_3 du_2 du_3 h_1}$$

$$R = \int \int \frac{du_1}{\sigma h_2 h_3 du_2 du_3 h_1}$$

احیاناً اگر با u و h ها، کاملاً آشنا نیستین به صفحه ۳۶۷ کتاب الکترومغناطیس مراجعه کنین.



چون به تفصیل معادلات لاپلاس تک‌متغیره در کتاب، بیان شده‌اند از بیان مجدد صرف‌نظر می‌کنیم و به خلاصه‌ای بسیار

کوتاه، اکتفا می‌کنیم.



در دستگاه دکارتی؛ وقتی پتانسیل فقط تابعی از z است؛ یعنی:

$$\nabla^2 v = 0 \rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \Rightarrow v = Az + B$$

A و B با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند.



در دستگاه دکارتی x و y و z با هم فرق نمی‌کنند.

دستگاه استوانه‌ای:



پتانسیل فقط تابعی از r :

$$v = A \ln r + B$$

پتانسیل فقط تابعی از φ :

$$v = A\varphi + B$$

دستگاه کروی:



پتانسیل فقط تابعی از R :

$$v = \frac{A}{R} + B$$

پتانسیل فقط تابعی از θ :

$$v = A \ln \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) + B$$

پتانسیل تابع z در دستگاه استوانه‌ای مانند z در دستگاه دکارتی است و پتانسیل تابع φ دو کروی مانند، پتانسیل در



استوانه‌ای است.



برای لاپلاس دو متغیره:

$$v = (A \sin \alpha x + B \cos \alpha x) (C e^{\alpha y} + D e^{-\alpha y})$$

در دستگاه دکارتی:

$$v = [AR^x + BR^{-x}] (C \sin k\varphi + D \cos k\varphi)$$

در دستگاه استوانه‌ای:

$$v = [AR^n + BR^{-(n+1)}] p_n(\cos \theta)$$

در دستگاه کروی:

فصل یازدهم: میدان مغناطیس ساکن

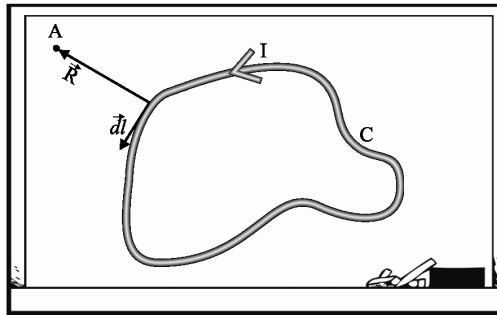


به دنیای مغناطیس سلام می‌کنیم و بی‌هیچ حرف اضافه‌ای وارد این دنیای آشنا می‌شویم.

منشأ میدان مغناطیسی جریان است و این میدان، بر جریان نیرو وارد می‌کند.

خوبی از اینجا به بعد کتاب الکترومغناطیس این است که بین این بخش‌ها و بخش‌های قبلی یک جور دوگانی برقرار است.

قانون بیوساوار دوگان قانون کولن:



میدان مغناطیسی \vec{H} :

$$\vec{H} = \int_C \frac{I d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi R^2}$$

$$\vec{H} = \int_s \frac{\vec{J}_s \times \hat{R}}{4\pi R^2} ds$$

$$\vec{H} = \int_v \frac{\vec{J}_v \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv$$

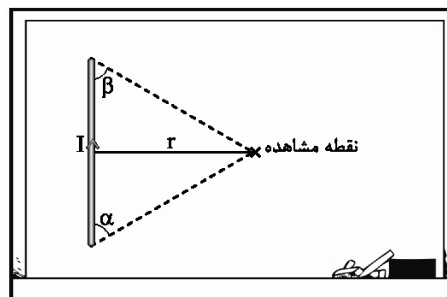
۱- توزیع خطی جریان:

۲- توزیع سطحی جریان:

۳- توزیع حجمی جریان:

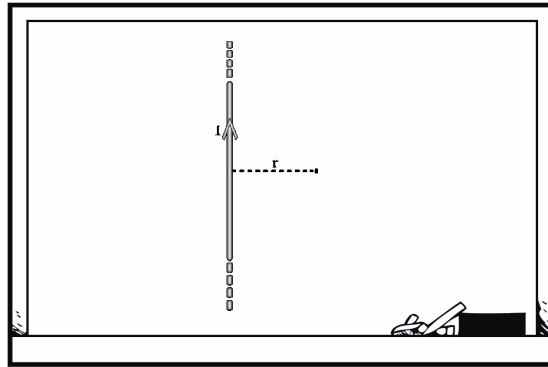


این چند تا فرمول را حتماً حفظ باشین، اگر نیستین!!!!



$$H = \frac{I}{4\pi r} [\cos \alpha + \cos \beta]$$

میدان ناشی از نیم خط، خط و... هم به سادگی از روی این فرمول به دست می‌آید. مثلاً برای سیم طویل:



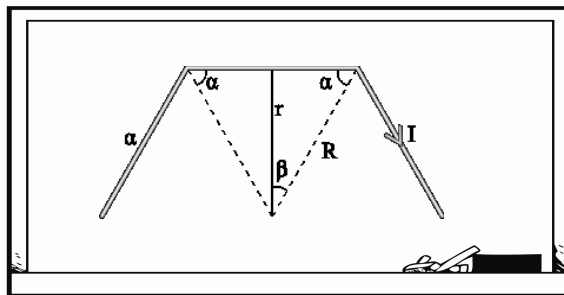
$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

اگر نقطه مشاهده در امتداد سیم جریان باشد:

$$H = 0$$



میدان مغناطیسی در مرکز N ضلعی منتظم:



$$H = \frac{NI}{2\pi R} \tan\left(\frac{\pi}{N}\right)$$



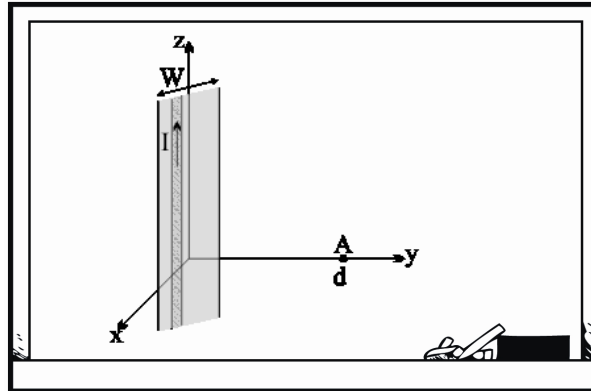
میدان مغناطیسی روی محور یک حلقه جریان به شعاع a

$$H = \frac{Ia^2}{2r^3} (\hat{z})$$

میدان در مرکز حلقه:

$$H = \frac{I}{2a} = \frac{\text{جریان}}{\text{قطر}}$$

میدان برای صفحه به عرض w و با چگالی جریان J_0 و طول ∞ در نقطه A ، روی عمودمنصف آن:



$$H = \frac{J_0}{\pi} \tan^{-1} \frac{w}{2d}$$

و برای صفحه با ابعاد بی‌نهایت:

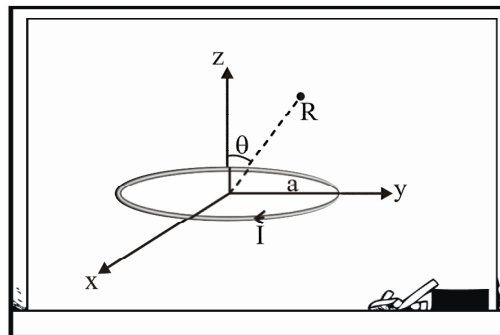
$$H = \frac{1}{2} J_s$$

در کتاب الکترومغناطیس کلی مثال داشتیم که به خوبی چگونگی بازی با این فرمول‌ها را نشان می‌دادند.



با یادگیری چگونگی استفاده بهینه از این فرمول‌ها، می‌تونید امیدوار باشین به اکثر سؤالات زمینی! بدون نیاز به استفاده مستقیم قانون بیوساوار به راحتی جواب‌گو باشین.^۱

میدان برای دوقطبی مغناطیسی از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$H = \frac{\pi a^2 I}{4\pi R^3} [2 \cos \theta \hat{R} + \sin \theta \hat{\theta}] \quad , \quad m = I\pi a^2$$

(m : ممان دوقطبی مغناطیسی)



چگالی شار مغناطیسی دوگان چگالی شار الکتریکی است و برابر است با:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} &\leftarrow \text{۱- یکنواخت } \vec{B} \\ \varphi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} &\leftarrow \text{۲- غیریکنواخت } \vec{B} \end{aligned} \right\}$$



قانون آمپر، دوگان قانون گاوس است:

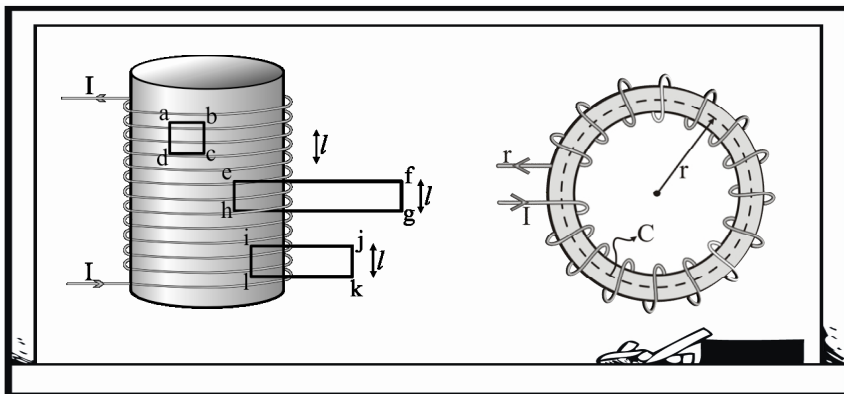
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{\text{جبری}} I_{in}$$

و وقتی \vec{H} ثابت باشد هنگامی که تقارن محوری یا استوانه‌ای داریم:

$$H = \frac{\sum I_{in}}{2\pi r}$$



ابزارهایی مانند سونولوئید، پیچه، چنبره، قابلیت ذخیره‌سازی انرژی مغناطیسی را دارند و داریم:



$$\left. \begin{aligned} \vec{H} = nI\hat{z} &\leftarrow \text{۱- سونولوئید} \\ \vec{H} = \frac{NI}{2a}\hat{z} &\leftarrow \text{۲- پیچه} \\ \vec{H} = \frac{NI}{2\pi r}\hat{\phi} &\leftarrow \text{۳- چنبره} \end{aligned} \right\} \text{میدان درون ایشان:}$$

N : تعداد دور سیم پیچ است.



با ۱ جازه استاد سخن آخر رو من می گم، در محاسبه میدان، جهت را با قانون دست راست تعیین می کنیم و مثل آنچه

در الکتریسیته برای محاسبه میدان انجام می دادیم، در اینجا هم اندازه میدان را فقط در راستایی که میدان حضور دارد، محاسبه می کنیم.

فصل دوازدهم: نیرو و گشتاور مغناطیسی

میدان مغناطیسی

میدان مغناطیسی به بار متحرک نیرو وارد می‌کند، و چنین است ماجرا:



$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

میدان مغناطیسی جهت سرعت ذره را تغییر می‌دهد ولی اندازه سرعت را نه.



نیروی وارد بر:



$$\vec{F} = \int_{\ell} I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = \int_s \vec{J}_s \times \vec{B} ds$$

$$\vec{F} = \int_v \vec{J}_v \times \vec{B} dv$$

۱- سیم حامل جریان

۲- صفحه حامل جریان

۳- توزیع جریان حجمی

و اگر میدان یکنواخت باشد:

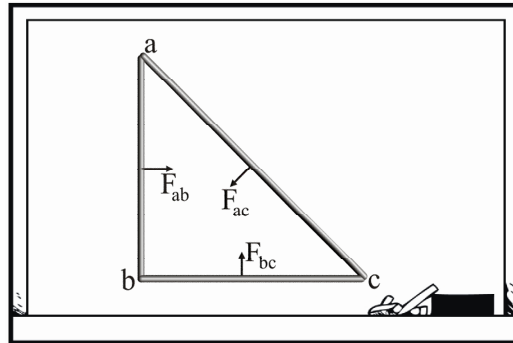
$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

$$F = BIL \sin \theta$$

I : جریان مفعول

\vec{L} : طول سیم مفعول

\vec{B} : میدان فاعل در محل مفعول



در سیستم‌هایی مانند شکل فوق، برآیند نیروی وارد شده در جهت جاذبه یا دافعه است. (یعنی راستای آن نیرو، عمود بر

سیم طویل مستقیم است) و نزدیک‌ترین سیم به سیم مستقیم تعیین‌کننده جاذبه یا دافعه بودن، است.



در هادی کامل مغناطیسی (PMC) $\mu \rightarrow \infty$ است و اگر یک سیم حامل جریان I در مجاورت یک صفحه PMC قرار بگیرد،

تصویرش به صورت یک سیم است که جریانش عیناً با همان جهت و اندازه است.



در این مسایل هم‌جهت را با قانون دست راست تعیین می‌کنیم.

گشتاور مغناطیسی



گشتاور مغناطیسی از رابطه به دست می‌آید:

arshad-bargh.blog.ir

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{d}$$

\vec{F} : نیرو

\vec{d} : بازوی گشتاور

$$\vec{\tau} = I a \vec{B} \times \vec{d} \Rightarrow \vec{\tau} = I \vec{S} \times \vec{B}$$

↓
در جهت نرمال سطح

$$\vec{m} = I s \hat{n}$$

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

\vec{m} : ممان مغناطیسی حلقه

\hat{n} : بردار نرمال عمود بر سطح

$$\vec{\tau} = \int d\vec{m} \times \vec{B}$$

اگر \vec{B} ثابت نباشد:



می‌رسیم به تعیین جهت گشتاور:



- | | |
|------------------------------------|---|
| ۱- بلدین ← آفرین! | } |
| ۲- بلد نیستین ← به کتاب رجوع کنین! | |

علت اینکه، اینقدر اصرار دارم، قبل از تعیین اندازه یک پارامتر، جهت را تعیین کنید، برای این است که در خیلی از



تست‌ها، فقط با تعیین جهت به جواب درست می‌رسید.

فصل سیزدهم: پتانسیل مغناطیسی

پتانسیل مغناطیسی



گاهی به جای محاسبه مستقیم \vec{B} از رابطه بیوساوار، ابتدا بردار پتانسیل مغناطیسی را حساب کرده و سپس از ایشان

کرل می گیریم، یعنی:

$$\vec{A} = \int_C \frac{\mu_0 I d\vec{\ell}}{4\pi R} = \int_s \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{4\pi R} ds = \int_v \frac{\mu_0 \vec{J}_v}{4\pi R} dv \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

بردار \vec{A} و I یا \vec{J}_s یا \vec{J}_v هم جهت اند.



کرل هم از خاندان مشتق است و روابط آن برای سه دستگاه دکارتی، استوانه‌ای و کروی از این قرار است:



در دستگاه دکارتی:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

در دستگاه استوانه‌ای:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial rA_\phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{z}$$

و بالاخره در دستگاه کروی:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{R} & R\hat{\theta} & R \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial R} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_R & RA_\theta & R \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{R \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\phi \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{R} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \phi} - \frac{\partial RA_\phi}{\partial R} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial RA_\theta}{\partial R} - \frac{\partial RA_R}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$$

در شرح حال قضیه استوکس همین بس که:



$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_s (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}$$

از دریچه دید آقای استوکس به قانون آمپر می‌نگریم و یکی از قوانین جناب ماکسول را مشاهده می‌کنیم:



$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

و مفهوم فیزیکی این قانون، این است که منبع برداری میدان مغناطیسی \vec{J} است. از طرفی:

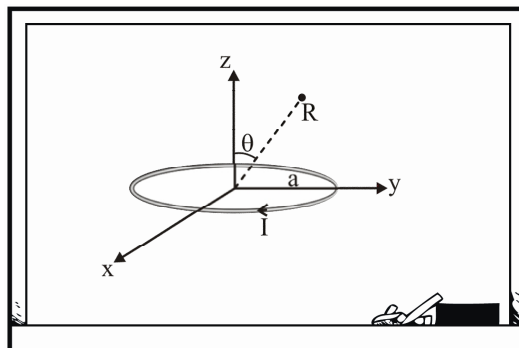


$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

و این یعنی میدان مغناطیسی منبع اسکالر تولیدکننده ندارد.



پتانسیل برداری دوقطبی مغناطیسی در ناحیه دور از رابطه زیر به دست می‌آید: (این رابطه را به خاطر بسپارید).



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{R}}{4\pi R^2}$$

$$A = \frac{\mu_0 I s \sin \theta}{4\pi R^2}$$

پتانسیل اسکالر مغناطیسی





با قرار دادن $\vec{J} = 0$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\text{if } \vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla} v_m$$

پتانسیل اسکالر مغناطیسی

$$v_{mA} - v_{mB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$$

یادمون باشه $\nabla^2 v_m = 0$  پایستار نیست. 



فصل چهاردهم: مواد مغناطیسی و شرایط مرزی در مغناطیس

مواد مغناطیسی و بردار مغناطیس شدگی



می‌کنیم:

چگالی جریان مقید حجمی:

مانند بحث الکتروستاتیک، می‌توان ماده مغناطیسی را به انداخته و به جای آن از دو جریان مقید زیر استفاده



$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

چگالی جریان مقید سطحی:

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n}$$

با این کار، دیگر فضای حل مسئله با μ نیست و خیلی شیرین، فضای آزاد یا هوایا همان μ_0 می‌شود.



در خیلی از مسایل، بدون جسارت به ساحت \vec{M} عزیز می‌توان مسئله را حلید. آن هم با کشف روابط بین \vec{H} و



\vec{B} . این گونه:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{یا} \quad \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \quad \text{یا} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

ضریب حساسیت مغناطیسی

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

یا در نهایت:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$$

در محیط‌هایی که طراح مهربان رفتار می‌کند، می‌توان $\mu_r = 1$ را گذاشت، $\leftarrow \vec{M} = 0$ باید بشود. ☺





کل جریان مقید، صفر است.



در ضمن هر جا $\vec{J} = 0$ آزاد داشتیم می‌گوییم $\vec{H} = 0$



.....^۱ اما خوشحالیم که اینجا اشتباه کردی، وقتی $\vec{J} = 0$ آزاد است، تنها نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$



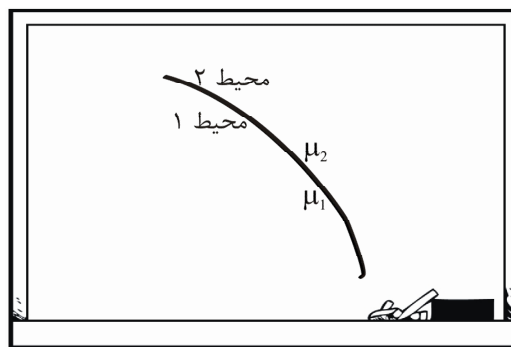
است و لاغیر.

شرایط مرزی در مغناطیس:

۲



در اینجا هم دو تا قانون داریم که همیشه برقرارند.



$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

\hat{n} : بردار نرمال سطح به سمت محیط ۲

۱- سانسورا!

۲- به علت هوش و در پی آن بی‌هوش شدن استاد، دانشجو اداره کلاس را تا اطلاع ثانوی به عهده می‌گیرد.

اگر \vec{J}_s در راستای عمود بر \vec{H}_1 و \vec{H}_2 باشد:

$$\left| H_{t1} - H_{t2} \right| = J_s \quad (\text{if } J_s = 0 \text{ then } H_{t1} = H_{t2})$$

قانون دوم هم اینجوریه:

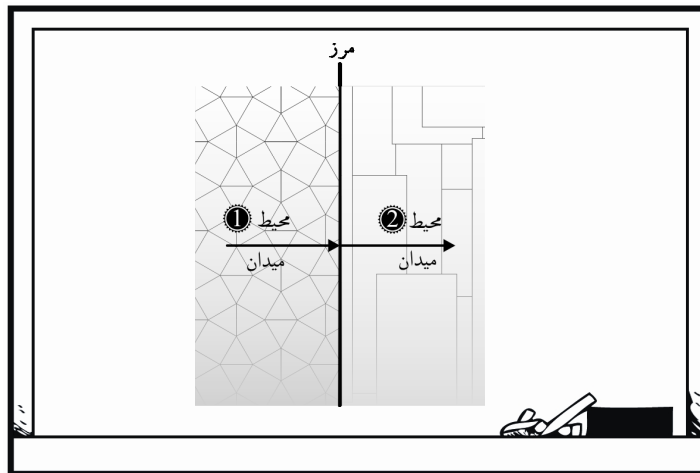
$$B_{n1} = B_{n2}$$

چگالی شرایط مغناطیسی در دو محیط پیوسته است.



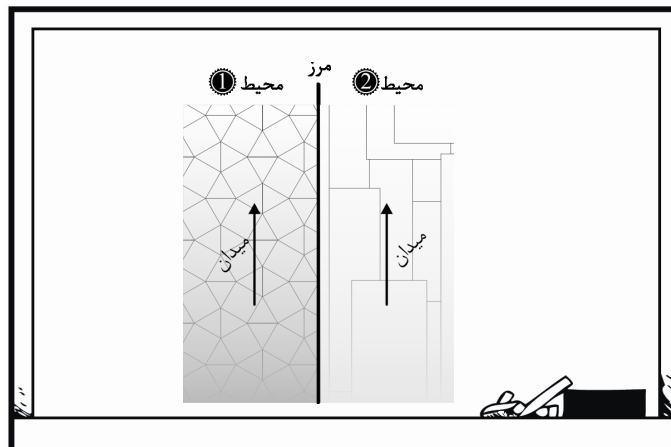
به شرط اینکه در مرز مشترک دو ماده مغناطیسی، جریان سطحی آزاد وجود نداشته باشد، آنگاه:

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$



$$\vec{B}_1 = \vec{B}_2 \Rightarrow \mu_1 \vec{H}_1 = \mu_2 \vec{H}_2$$

در اینصورت:



$$\vec{H}_1 = \vec{H}_2 \Rightarrow \frac{\vec{B}_1}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_2}$$

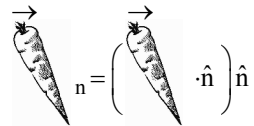
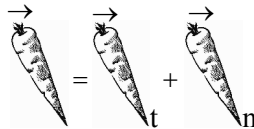
و در اینصورت:



نکته آخر...

$$\hat{n} \times (\vec{M}_2 - \vec{M}_1) = \vec{J}_{sb}$$

\hat{n} : بردار نرمال سطح به سمت محیط ۲



¹ استاد بعد از به هوش آمدن، پانتومیم‌هایی اجرا می‌کنند که مفهوم آن چنین است...

فصل پانزدهم: ضرب خودالقایی و القای متقابل و انرژی

ضرب خودالقایی و القای متقابل



برای شار مغناطیسی این یار دیرینه ما رابطه اینچنین است:

۱- \vec{B} یکنواخت:

۲- \vec{B} متغیر:

۳- s بسیار کوچک:

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha$$

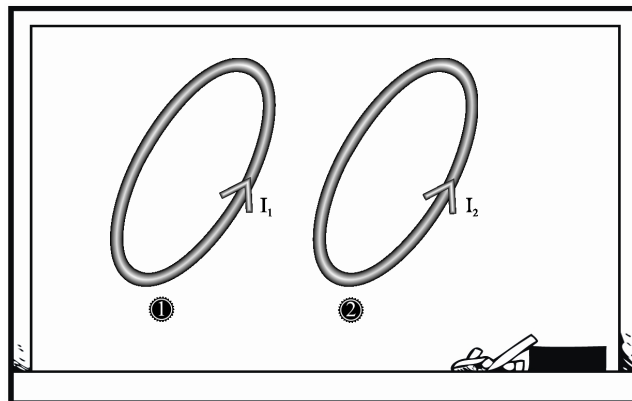
$$\varphi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$\varphi = Bs \cos \alpha$$



و اگر مسئله شامل N حلقه باشد:

$$\varphi = NBs \cos \alpha = N \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$





ضریب خودالقایی:

$$l = \frac{\Phi_{11}}{I_1}$$

Φ_{11} : شار ناشی از I_1 در مدار خودش
ضریب القای متقابل:

$$M = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

Φ_{21} : شار ناشی از I_1 در مدار دیگری



I_1 را از همان ابتدا، یک در نظر می‌گیریم که کار اضافی انجام ندهیم.

انرژی در میدان مغناطیسی



با توجه به عنایات نظام حاکم (دوگانی) بر الکتریسیته و مغناطیس داریم:

$$U_m = \frac{1}{2} \mu |H|^2 = \frac{1}{2} \frac{|B|^2}{\mu}$$

U_m ، چگالی حجمی انرژی مغناطیسی بوده و واحد آن $\left(\frac{J}{m^3}\right)$ است.

اگر میدان مغناطیسی ثابت یا حجم مورد نظر بسیار کوچک باشد، آنگاه رابطه ساده‌تر می‌شه:

$$w_m = U_m \times v$$

و آگه میدان متغیر باشد:

$$w_m = \int_v U_m dv$$



این رابطه هم که بیش از n بار دیده‌ایم:

$$w_m = \frac{1}{2} LI^2$$



این رابطه هم $n-1$ بار دیده‌اید:

$$w_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

علاقه‌مندان به سریال‌های 90 قسمتی بدانند $U_m = \frac{1}{2} \mu |H|^2 = \frac{|B|^2}{2\mu}$ و سپس یافتن w_m و بالاخره، هم‌ارز قرار دادن



با رابطه بالا، سریال در اوج زیبایی خود به پایان می‌رسد^۱...

نیرو در میدان مغناطیس



بدانید:

$$F = \frac{dw}{d\ell}, \quad w = \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{F} = \begin{cases} \vec{\nabla} M & \text{جریان ثابت} \\ -\vec{\nabla} M & \text{فشار ثابت} \end{cases}$$



در مسایلی که القای متقابل مطرح باشد:

$$F = I_1 I_2 \left(\frac{\partial M}{\partial \ell} \right)$$

و نیروی وارد بر سطح مشترک دو محیط را هم می‌توان از تفاضل چگالی انرژی مغناطیسی چنین به دست آورد:



$$\underbrace{= U_{m_1} - U_{m_2}}_{\text{سطح عمود بر جریان}} = \text{نیروی وارد بر واحد سطح}$$

فصل شانزدهم: قانون القای فارادی



تغییر شار مغناطیسی ایجاد نیروی محرکه الکتریکی می کند؛

$$\text{emf} = \varepsilon = \frac{-\Delta\varphi}{\Delta t} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

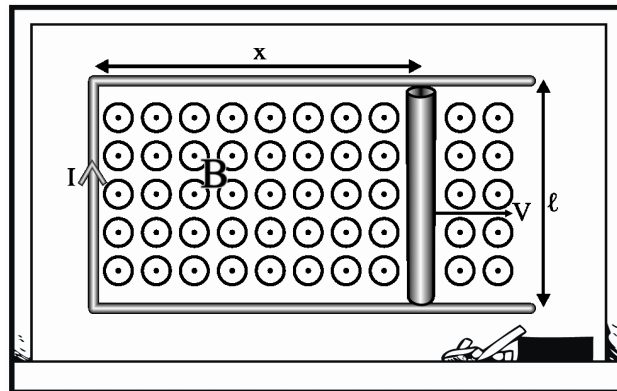
نیروی محرکه القایی متوسط نیروی محرکه القایی لحظه‌ای

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$\varphi = B s \cos \alpha$$



پارامترهای قابل تغییر برای ایجاد ε }
 α : زاویه بین \vec{B} و \vec{n} (نرمال سطح)



$$\varepsilon = \vec{\ell} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = Bv\ell \sin \theta$$

$$\varepsilon = \int_{\ell} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

در حالت \vec{B} ثابت:

در حالت \vec{B} متغیر:



θ : زاویه بین \vec{v} و \vec{B} است.



می توان این گونه جمع بندی کرد:

$$\varepsilon = \underbrace{\int_{\ell} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}_{\text{القای حرکتی}} + \underbrace{\int -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}}_{\text{القای انتقالی}}$$

در کل برای محاسبه نیروی محرکه القایی ε در یک مسئله، شار مغناطیسی و رابطه اش را درک کنیم، و بعد می گوییم



که $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$ ، حالا با توجه به نوع تکون خوردن (از تغییر شار یا تغییرات زمانی و...) نیرو محرکه را حساب کنیم.



راستی استاد، دلم می خواست یه تشکر ویژه از شما داشته باشیم به خاطر روش حل از آخر، چون نه تنها توی درس

مغناطیس خیلی باهش، کیف کردم بلکه خیلی جاهای دیگه مثل مدار، کنترل و حتی توی زندگی شخصیم، واسم خیلی کاربرد داشت. این که بدونیم چی می خواهیم و با توجه به خواسته مان قدم برداریم، بسیار مطلوب است.



.....

از صمیم قلب براتون آرزوی موفقیت دارم.