Subject
Date

«حل تمرین کنترل اتوماتیک»

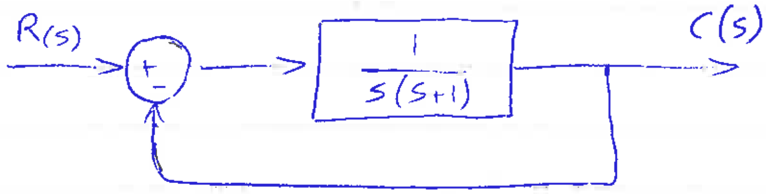
فاینال

تابع تبدیل حلقه باز

$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

تمرین ۵-۲ : فیدبک واحد

$t_r = ?$ $t_p = ?$ $M_p = ?$ $t_s = ?$

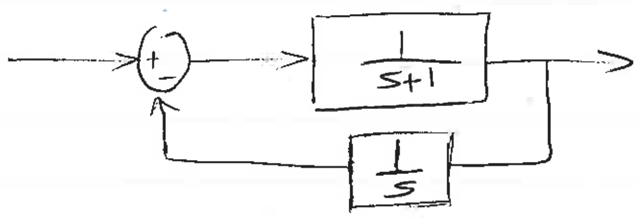


ابتدا تابع تبدیل حلقه بسته را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} G \rightarrow \frac{1}{s(s+1)} \\ H \rightarrow 1 \end{cases}$$

* نکته:

اگر می گفت تابع تبدیل حلقه باز $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ و فیدبک $\frac{1}{s}$



(تابع تبدیل حلقه باز برای سیستم حلقه بسته تعریف می شود.)

$$\begin{cases} G \rightarrow \frac{1}{s(s+1)} \\ H \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)} \times 1} = \frac{\frac{1}{\cancel{s(s+1)}}}{\frac{s(s+1)+1}{\cancel{s(s+1)}}}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

(۲)

Subject

Date

فرم استاندارد ۲ : $\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

به فرم استاندارد می باشد
چون ضریب s^2 یک است

$$2\zeta\omega_n = 1 \qquad \omega_n^2 = 1 \implies \omega_n = 1$$

$$2\zeta\omega_n = 2\zeta = 1 \implies \zeta = \frac{1}{2} = 0/5$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 0/5 \times 1 = 0/5$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1 \times \sqrt{1-0/5^2} = 0/866$$

$$t_r = \frac{\pi - tg^{-1}\left(\frac{\omega_d}{\sigma}\right)}{\omega_d} = \frac{\pi - tg^{-1}\left(\frac{0/866}{0/5}\right)}{0/866} \implies t_r = 2/42 \ sec$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{0/866} = 3/63 \ sec$$

معیار ۲٪

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{0/5} = 8 \ sec$$

$$M_p = e^{-\pi\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)} = e^{-\pi\left(\frac{0/5}{0/866}\right)} = 0/1630$$

$$M_p\% = 0/1630 \times 100 = 16/30\ \%$$

(۳)

Subject
Date

تمرین ۳_۵ :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^۲}{s^۲ + ۲\zeta\omega_n s + \omega_n^۲}$$

$M_p = ۵\%$ $\qquad M_p = e^{-\pi\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)} \times ۱۰۰\% = ۵\%$

$t_s = ۲\ sec$ معیار ۲٪ $\qquad e^{-\pi\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)} = \frac{۵\%}{۱۰۰\%} = ۰/۰۵$

از طرفین Ln $\Longrightarrow$ $\ln e^{-\pi\left(\frac{\sigma}{\omega_d}\right)} = \ln ۰/۰۵$

$$-\pi \frac{\sigma}{\omega_d} = \ln ۰/۰۵ \Longrightarrow \frac{\sigma}{\omega_d} = \frac{\ln ۰/۰۵}{-\pi} = ۰/۹۵۳$$

$$\frac{\sigma}{\omega_d} = ۰/۹۵۳ \qquad (1)$$

معیار ۲٪ $t_s = ۲ \Longrightarrow \frac{۴}{\sigma} = ۲ \Longrightarrow \sigma = \frac{۴}{۲} = ۲$

در رابطه (1) $\Longrightarrow \frac{۲}{\omega_d} = ۰/۹۵۳ \Longrightarrow \omega_d = \frac{۲}{۰/۹۵۳} = ۲/۱۰$

$$\begin{matrix}\sigma = ۲ \\ \omega_d = ۲/۱۰\end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases}\zeta\omega_n = ۲ & (۲) \\ \omega_n\sqrt{1-\zeta^۲} = ۲/۱۰ & (۳)\end{cases}$$

طرفین رابطه (۲) تقسیم رابطه (۳) $\Longrightarrow \frac{\zeta\omega_n}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^۲}} = \frac{۲}{۲/۱۰} \Longrightarrow \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^۲}} = ۰/۹۵۳$

Subject

Date

طرفین به توان ۲

$$\frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} = (0.953)^2 \Rightarrow \frac{\zeta^2}{1-\zeta^2} = 0.908$$

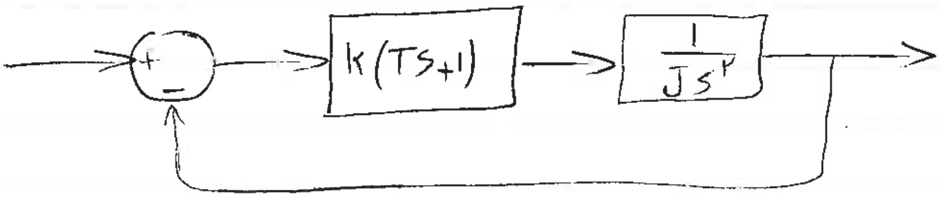
$$\Rightarrow \zeta^2 = (1-\zeta^2)\,0.908 \Rightarrow \zeta^2 = 0.908 - 0.908\,\zeta^2$$

$$\Rightarrow 1.908\,\zeta^2 = 0.908 \Rightarrow \zeta^2 = 0.476 \Rightarrow \zeta = 0.690$$

$$\zeta \omega_n = 2 \Rightarrow 0.690\,(\omega_n) = 2$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{2}{0.690} = 2.90$$

تمرین ۴_۵ :



$T = 2\ sec$

$\frac{K}{J} = \frac{2}{9}\ rad^2/sec^2$

$\zeta = ?$

حلقه بسته :

$$\begin{cases} G \rightarrow K(TS+1) \times \frac{1}{JS^2} \\ H \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K(TS+1) \times \frac{1}{JS^2}}{1 + K(TS+1) \times \frac{1}{JS^2}} = \frac{\frac{KTS+K}{JS^2}}{\frac{JS^2+KTS+K}{JS^2}}$$

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{KTS+K}{JS^2+KTS+K}$$

فرم استاندارد ۲ : $\frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$

(۵)

Subject

Date

صورت [illegible] تعمیم [illegible] : $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{kT}{J}s + \frac{k}{J}}{s^2 + \frac{kT}{J}s + \frac{k}{J}}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{2}{9}\times 3s + \frac{2}{9}}{s^2 + \frac{2}{9}\times 3s + \frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{3}s + \frac{2}{9}}{s^2 + \frac{2}{3}s + \frac{2}{9}}$$

مقایسه با فرم استاندارد ۲

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = 2\zeta\omega_n & (1)\ \text{ضریب } s \\ \frac{2}{9} = \omega_n^2 & (2)\ \text{ضریب } s^0\ \text{(عدد ثابت)} \end{cases}$$

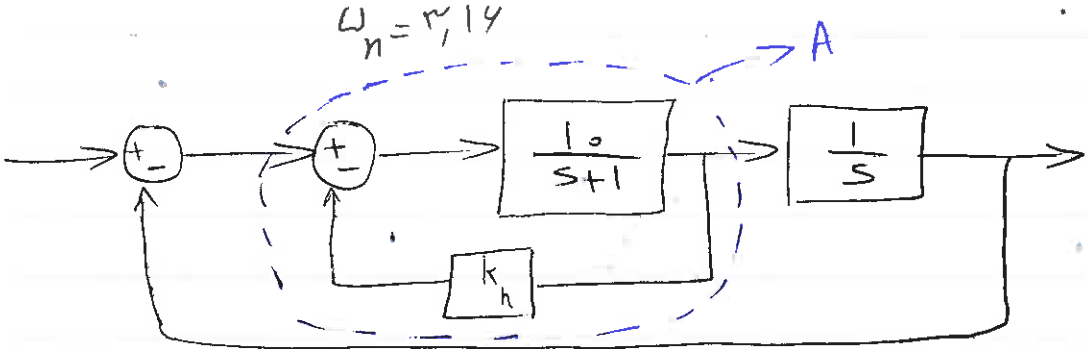
$(2):\ \omega_n = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0{,}471$

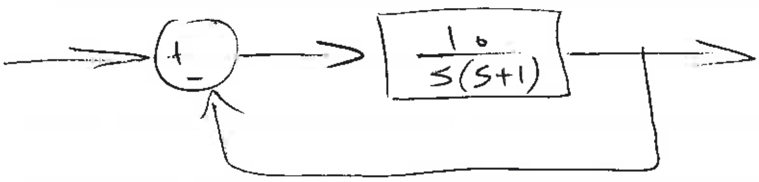
(1) در رابطه : $\frac{2}{3} = 2\zeta(0{,}471) \Longrightarrow \zeta = \frac{1}{3\times 0{,}471} = 0{,}708$

تمرین ۵-۹ :

الف) سیستم $\longrightarrow \zeta = 0{,}158$

$\omega_n = 3{,}16$





(۶)

Subject

Date

تابع تبدیل حلقه بسته :

$$\begin{cases} G \rightarrow \frac{10}{s+1} \\ H \rightarrow K_h \end{cases}$$

$$A = \frac{\frac{10}{s+1}}{1+\frac{10}{s+1}\times K_h} = \frac{\frac{10}{s+1}}{\frac{s+1+10K_h}{s+1}} = \frac{10}{s+(1+10K_h)}$$

$$\begin{cases} G \rightarrow A\times\frac{1}{s} \\ H \rightarrow 1 \end{cases} \qquad \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{A\times\frac{1}{s}}{1+A\times\frac{1}{s}\times 1}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{s+(1+10K_h)}\times\frac{1}{s}}{1+\frac{10}{s+(1+10K_h)}\times\frac{1}{s}} = \frac{\frac{10}{s(s+(1+10K_h))}}{1+\frac{10}{s(s+(1+10K_h))}}$$

$$\Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+(1+10K_h))}}{\frac{s(s+(1+10K_h))+10}{s(s+(1+10K_h))}} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2+(1+10K_h)s+10}$$

فرم استاندارد ۲ : $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\zeta\omega_n = (1+10K_h) & (1) \text{ ضریب } s \\ \omega_n^2 = 10 & (2) \text{ عدد ثابت} \end{cases}$$

Subject

Date

$$(2) \Rightarrow \omega_n = \sqrt{10} = 3.14$$

$$\zeta = 0.5 \xrightarrow{(1)} 2 \times (0.5)(3.14) = (1 + 10k_h)$$

$$3.14 = 1 + 10k_h \Rightarrow 10k_h = 2.14 \Rightarrow k_h = 0.214$$

پاسخ سیستم به ورودی پله واحد

$$c(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)$$

برای سیستم اول $\Rightarrow \zeta = 0.158$, $\omega_n = 3.14$

$$\Rightarrow \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3.14\sqrt{1-0.158^2} = 3.12$$

$$c(t) = 1 - e^{-0.158 \times 3.14 t}\left(\cos 3.12t + \frac{0.158}{\sqrt{1-0.158^2}}\sin 3.12t\right)$$

$$\Rightarrow c(t) = 1 - e^{-0.5t}\left(\cos 3.12t + 0.16\sin 3.12t\right)$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = 1 - \left(1 - e^{-0.5t}(\cos 3.12t + 0.16\sin 3.12t)\right)$$

ورودی پله واحد

$$e(t) = e^{0.5t}\left(\cos 3.12t + 0.16\sin 3.12t\right)$$

برای سیستم دوم: $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 3.14$

$$\Rightarrow \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 3.14\sqrt{1-0.5^2}$$

$$\omega_d = 2.72$$

پس

$$c(t) = 1 - e^{-0.5 \times 3.14 t}\left(\cos 2.72t + \frac{0.5}{\sqrt{1-0.5^2}}\sin 2.72t\right)$$

Subject

Date

$$c(t) = ۱ - e^{-۱,۵۸t}(\cos ۲,۷۴t + ۰,۵۷۷ \sin ۲,۷۴t)$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-۱,۵۸t}(\cos ۲,۷۴t + ۰,۵۷۷ \sin ۲,۷۴t)$$