به نام خدای مهربانی ها

امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۱

۱۷ دی ۱۴۰۱

مدت امتحان: ۱۰۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

---

۱. انتگرال های زیر را بدست آورید (۳ نمره).

$$a)\ \int \frac{1}{1+\sin(x)-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$b)\ \int \sin(2x)e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

---

۲. فقط یکی از دو سوال زیر را پاسخ دهید (۱.۵ نمره).

الف) سطح محصور به دایره $x^2+y^2=1$، محورxها و محور yها، واقع در ربع اول دستگاه مختصات را حول خط $x=-1$ دوران میدهیم، حجم حاصل از این دوران را بدست آورید.

ب) مساحت شکل محصور در داخل دایره $r=1$ و بیرون رز چهاربرگ $r=2\sin(2\theta)$ را محاسبه کنید.

---

۳. حدود زیر را بیابید (۳نمره).

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big(\tan(\frac{1}{n})+\tan(\frac{2}{n})+\ldots+\tan(1)\Big)$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt[3]{x}} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{2\sqrt[3]{x}}$$

---

۴. همگرایی یا واگرایی هریک از عبارت های زیر را بررسی کنید (۳ نمره).

$$a)\ \int_e^{\infty}\frac{\cos^2(x)}{x(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

$$b)\ \sum_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$$

---

۵. دامنه همگرایی سری توانی زیر را بیابید و در مورد نقاط کرانه آن بحث کنید (۱.۵ نمره).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2(x-1)^n}{(2n)!}$$

سربلند و پیروز باشید

حل سوال۱، قسمت الف: (سوال تکراری دی ۱۳۹۲ و دی ۱۳۹۸)

(سطح سوال: سخت)

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$$ تکنیک ۷ (مثلثاتی)

$$\begin{cases} t=\tan(\frac{x}{2}) \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{1}{1+t^2+2t-1+t^2}dt=\int\frac{1}{t^2+t}dt$$ تکنیک ۴ (تجزیه کسری)

$$=\int\frac{1}{t(t+1)}dt$$

$$=\int(\frac{1}{t}-\frac{1}{(t+1)})dt$$

$$=\underline{\ln|t|-\ln|t+1|+c} \quad , \quad t=\tan(\frac{x}{2})$$

حل سوال۱، قسمت ب :

(سطح سوال: متوسط)

$$=\int 2\sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}dx$$ تکنیک۱ (تغییرمتغیر) $$\begin{cases}\cos(x)=t\\ -\sin x dx=dt\end{cases}$$

$$=-2\int t\,e^{t}\,dt$$ تکنیک۶ (جزبه جز) $$\begin{cases}t=u\longrightarrow dt=du\\ e^{t}dt=dv\rightarrow e^{t}=v\end{cases}$$

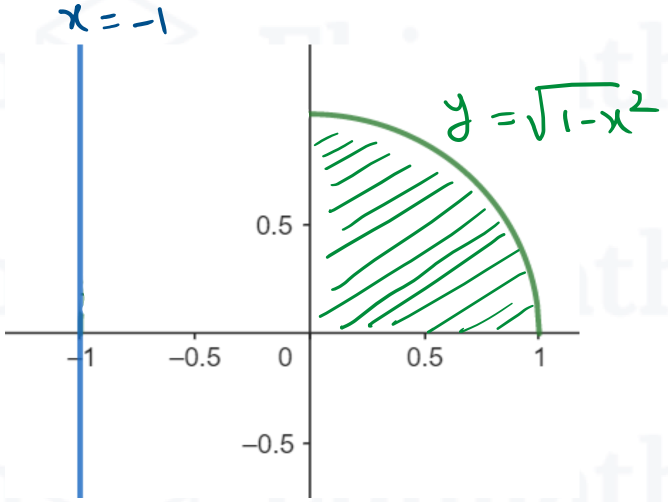
$$=-2\left(t\,e^{t}-\int e^{t}\,dt\right)=-2\left(te^{t}-e^{t}+c\right)$$

$$=2e^{t}(1-t)+\alpha$$

$$=\boxed{2e^{\cos(x)}(1-\cos(x))+\alpha}$$

حل سوال ۲، قسمت الف :
(سطح سوال: سخت)

حجم دوران $\boxed{v = 2\pi\int_a^b x f(x)dx}$ $\boxed{v = 2\pi\int_a^b (x-\alpha)f(x)dx}$



$$v = 2\pi\int_0^1 (x-(-1))\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = 2\pi\left(\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\right)$$

تکنیک ۲ (تغییر متغیر رادیکالی) تکنیک ۵ (تغییر متغیر مثلثاتی)

$$= 2\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx \begin{cases} 1-x^2 = t^2 \\ -2xdx = 2tdt \end{cases} = -\int_1^0 t^2dt = \int_0^1 t^2dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta d\theta \end{cases} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{\pi}{4}$$

حل سوال ۲، قسمت ب :
(سطح سوال: سخت)

مساحت قطبی $\boxed{A=\frac{1}{2}\int_a^b r^2\,d\theta}$

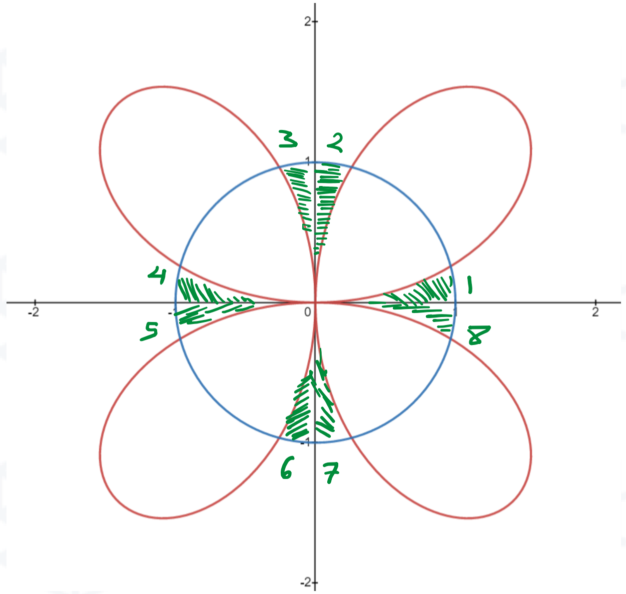
$$\to 2\sin(2\theta)=1\to \sin(2\theta)=\frac{1}{2}\to 2\theta=\frac{\pi}{6}\to\theta=\frac{\pi}{12}$$

$$A=8\times\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left((1)^2-(2\sin 2\theta)^2\right)d\theta\right]$$

$$=8\times\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left(1-4\sin^2 2\theta\right)d\theta\right]=8\times\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left(1-2(1-\cos 4\theta)\right)d\theta\right]$$

$$=8\times\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{12}}\left(-1+2\cos 4\theta\right)d\theta\right]=8\times\frac{1}{2}\left[\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{12}}\right]$$

$$=8\times\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\boxed{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}$$



حل سوال ۳، قسمت الف :

(سطح سوال: ساده)

حد انتگرالی
$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tan\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 \tan(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=-\ln|\cos x|\Big|_0^1$$

$$=\ln|\cos 0|-\ln|\cos 1|=\ln|1|-\ln|\cos 1|=\underline{-\ln|\cos 1|}=\underline{\ln|\sec 1|}$$

حل سوال ۳، قسمت ب :

(سطح سوال: ساده)

$$\boxed{y=\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt \to y'=u'(x)f(u)-v'(x)f(v)}$$ مشتق از انتگرال

$$=\frac{0}{0}\xrightarrow{Hop}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{2}=\frac{1}{2}$$

حل سوال۴، قسمت الف :

آزمون مقایسه:

(سطح سوال: ساده)

اگر داشته باشیم $g(x) \le f(x)$ آنگاه اگر $\int f(x)dx$ همگرا باشد $\int g(x)dx$ نیز همگراست. (بزرگه همگرا باشه کوچیکه هم همگراست.)

$$\int_e^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x(\ln x)^3}dx \xrightarrow{\text{صورت را بزرگ می کنیم}} \int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx \longrightarrow g(x) = \frac{\cos^2 x}{x(\ln x)^3} \le f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^3}$$

برای تعیین همگرایی انتگرال $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx$ مستقیم انتگرال را حل می کنیم :

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx \quad \text{(تکنیک ا (تغییرمتغیر}\quad \begin{cases} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{cases} = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{-1}{2t^2}\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{2}$$

حاصل انتگرال عدد است پس **همگرا** ست

بنابراین طبق آزمون **مقایسه** چون $\frac{\cos^2 x}{x(\ln x)^3} \le \frac{1}{x(\ln x)^3}$ و $\int_e^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx$ همگراست پس $\int_e^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x(\ln x)^3}dx$ نیز همگراست.

حل سوال ۴، قسمت ب :

(سطح سوال: متوسط)

آزمون ریشه $\rightarrow L=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=1^{\infty}$

$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}-1)n}=e^{-1}<1$ همگراست

حل سوال۵ : بازه همگرایی روش اول:

(سطح سوال: سخت)

$$\xrightarrow{\text{آزمون ریشه}} L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n!)^2}}{\sqrt[n]{(2n)!}}|x-1|$$

$$\xrightarrow{\boxed{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(kn)!}=\left(\frac{kn}{e}\right)^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n}{e})^2}{(\frac{2n}{e})^2}|x-1|=\frac{1}{4}|x-1|$$

$$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}}\frac{1}{4}|x-1|<1\to|x-1|<4\to-4<x-1<4\to\underline{-3<x<5}$$

$$\xrightarrow[\text{بررسی}]{x=-3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n$$ آزمون سری متناوب

$$\xrightarrow[\text{بررسی}]{x=5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$$ آزمون ریشه $$\to L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}}=1$$

آزمون ریشه و نسبت جواب نمی دهد و باید از آزمون رابه استفاده کرد.

حل سوال۵ : بازه همگرایی

روش دوم:

آزمون نسبت

$$\to L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}(x-1)^{n+1}}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}(x-1)}{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}\right|$$

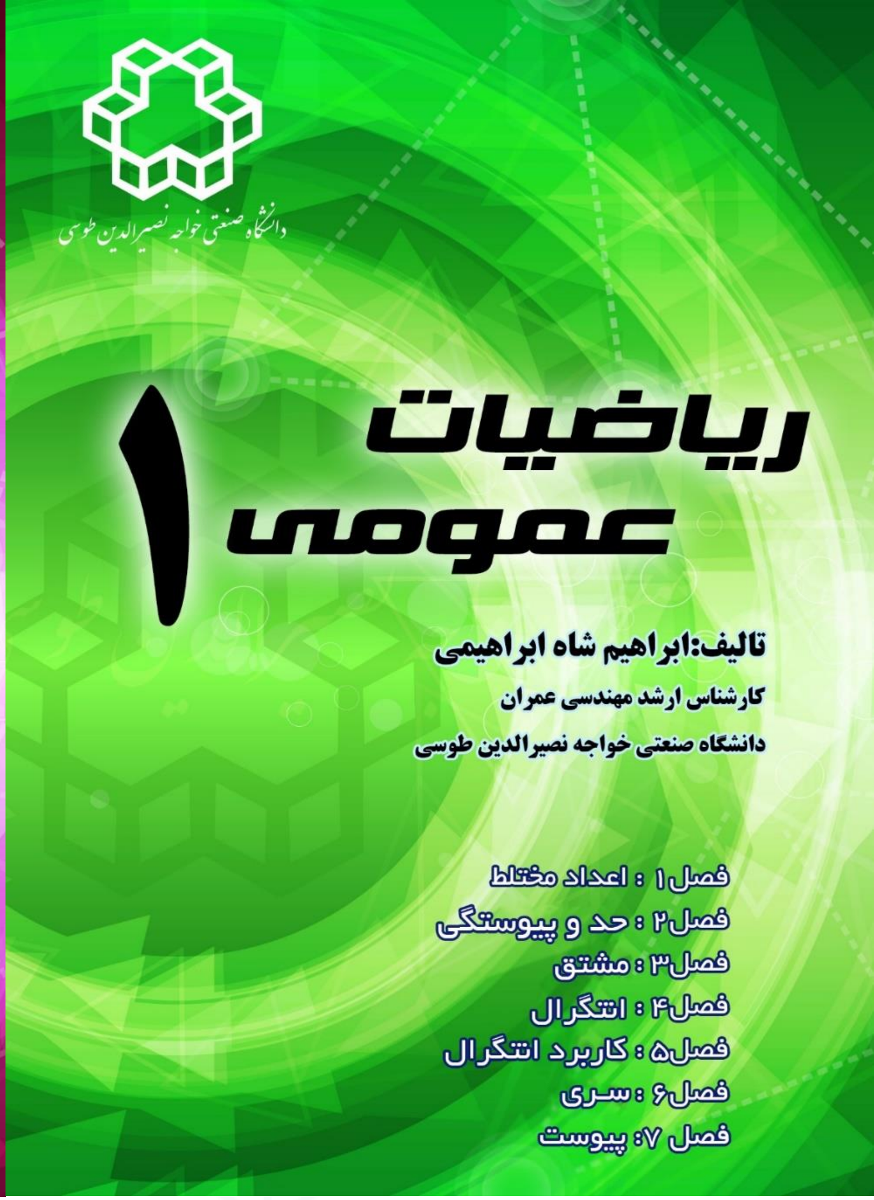
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}|(x-1)|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2}|(x-1)|=\frac{1}{4}|(x-1)|$$

$$\xrightarrow{\text{شرط همگرایی}}\frac{1}{4}|x-1|<1\to|x-1|<4\to-4<x-1<4\to\underline{-3<x<5}|$$

$$\xrightarrow[\text{بررسی}]{x=-3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n$$ آزمون سری متناوب

$$\xrightarrow[\text{بررسی}]{x=5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$$ آزمون ریشه $$\to L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}}=1$$

آزمون ریشه و نسبت جواب نمی دهد
و باید از آزمون رابه استفاده کرد.



برای دریافت جزوات و ویدئوهای اصلی کلاس و همچنین نمونه سوالات امتحانی به سایت **EbiMath.com**

و یا کانال تلگرامی **@EbiMath** مراجعه کنید.