تستهای تکمیلی فصل ۶ ـ مبحث اعداد مختلط (سؤالات سطح ۱)

اعمال جبری روی اعداد مختلط

۱. در رابطه $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$ اعداد x و y برابرند با: (سیستم ۷۲)

۱) $y = -2$ و $x = 1$ ۲) $y = 2$ و $x = 1$ ۳) $y = 2$ و $x = -1$ ۴) $y = -2$ و $x = -1$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$3x + 5y + (2y - x)i = 7 + 5i \implies \begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 2y - x = 5 \end{cases} \implies x = -1 \text{ و } y = 2$$

۲. اگر $z_1 = a + b^2 - 3i$ مزدوج $z_2 = 2 - ab^2 i$ باشد که $a, b \in \mathbb{R}$ در این صورت (b, a) کدام است؟

۱) $(\sqrt{3}, -1)$ ۲) $(-\sqrt{3}, 3)$ ۳) $(-\sqrt{3}, 1)$ ۴) $(1, \sqrt{3})$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$z_1 = \overline{z}_2 = 2 + ab^2 i \implies a + b^2 = 2 \text{ و } ab^2 = -3 \implies a = -1 \text{ و } b^2 = 3 \implies b = \pm\sqrt{3}$$

۳. حاصل $(1 + 2i)^3$ کدام است؟

۱) $13 - 2i$ ۲) $13 + 14i$ ۳) $-11 - 2i$ ۴) $-11 + 14i$

حل: گزینه ۳ درست است. اتحادهای جبری برای اعداد مختلط نیز قابل استفاده‌اند.

$$(1 + 2i)^3 = 1^3 + 3(1)^2(2i) + 3(1)(2i)^2 + (2i)^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i$$

۴. اگر $z = x + iy$، مقدار $\mathrm{Re}(z^2)$ برابراست با:

۱) $2xy$ ۲) $-2xy$ ۳) $x^2 - y^2$ ۴) $x^2 + y^2$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$z^2 = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \implies \mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$$

۵. z_1 و z_2 اعداد مختلط (غیر حقیقی و غیر موهومی محض) هستند ، کدام گزینه موهومی محض خواهد بود؟

۱) $\overline{z}_1 + z_1$ ۲) $\overline{z_1 z_2}$ ۳) $z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2$ ۴) $z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به ویژگی (۵) در صفحه ۴۵۰ کافی است مزدوج هر گزینه را محاسبه کنیم، گزینه‌ای که مزدوج آن قرینه خودش شود جواب است و در گزینه (۴):

$$\overline{z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2} = \overline{z_1\overline{z}_2} - \overline{\overline{z}_1 z_2} = \overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2 = -(z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2)$$

توجه کنید که در گزینه (۱) و (۳) مزدوج عدد با خودش برابر است و لذا این اعداد حقیقی هستند.

۶. اگر $z_1 = 3 - 2i$ و $z_2 = -1 + i$، آنگاه $\frac{z_1}{z_2}$ برابراست با: (سیستم ۷۲)

۱) $\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$ ۲) $\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$ ۳) $-\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$ ۴) $-\frac{5}{2} + \frac{i}{2}$

حل: گزینه ۳ درست است. صورت و مخرج را در مزدوج z_2 ضرب می‌کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - 2i}{-1 + i} \times \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{(-3 - 2) + (-3 + 2)i}{1^2 + 1^2} = -\frac{5}{2} - \frac{i}{2}$$

۷. اگر داشته باشیم $z = x + iy$ و $w = u + iv$ و $w = \frac{۲}{z}$ مقدار x برحسب u, v کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) $-\frac{v}{u^۲ + v^۲}$ ۲) $\frac{uv}{u^۲ + v^۲}$ ۳) $\frac{۲u}{u^۲ + v^۲}$ ۴) $\frac{۲u - v}{u^۲ - v^۲}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$z = \frac{۲}{w} \implies x + iy = \frac{۲}{w} = \frac{۲}{u + iv} = \frac{۲(u - iv)}{u^۲ + v^۲} \implies x = \frac{۲u}{u^۲ + v^۲}$$

۸. اگر $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط باشند، آنگاه کدام یک از روابط زیر در اعداد مختلط غیرقابل تعریف است؟

(تکنولوژی نساجی ۸۲)

۱) $z_۱ = z_۲$ ۲) $z_۱ \neq z_۲$ ۳) $z_۱ > z_۲$ ۴) $|z_۱| < |z_۲|$

حل: گزینه ۳ درست است. رابطه ترتیب(کوچکتر و بزرگتر) در مجموعه اعداد مختلط تعریف نمی‌شود. در گزینه (۴) دقت کنید که $|z_۱|$ و $|z_۲|$ حقیقی هستند و مقایسه آنها امکان‌پذیر است.

۹. در مجموعه اعداد مختلط معادله $\frac{z^۲}{۲} + z + ۲ = ۰$ در کدام یک از حالات زیر صدق می‌کند؟

(شیمی نساجی ۸۱)

۱) جواب ندارد. ۲) دو جواب حقیقی دارد.
۳) یک جواب حقیقی و یک جواب مختلط دارد. ۴) دو جواب مختلط دارد.

حل: گزینه ۴ درست است. معادله درجه دوم است و $\Delta = ۱^۲ - ۴(\frac{۱}{۲})(۲) = -۳ < ۰$ پس هر دو ریشه این معادله مختلط (غیر حقیقی) است.

۱۰. سه ریشه معادله $x^۳ - ۲x - ۴ = ۰$ عبارتند از: (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) $i - ۱$ و $i + ۱$ و -۲ ۲) $-i - ۱$ و $i + ۱$ و ۲
۳) $i - ۱$ و $i + ۱$ و ۲ ۴) $-i - ۱$ و $i + ۱$ و -۲

حل: گزینه ۳ درست است. $x = ۲$ در معادله صدق می‌کند و با تقسیم عبارت بر $x - ۲$ به معادله $x^۲ + ۲x + ۲ = ۰$ می‌رسیم که جواب‌های آن $x = \frac{-۲ \pm \sqrt{-۴}}{۲} = -۱ \pm i$ است.

۱۱. یکی از جواب‌های معادله $z^۳ + ۳z + ۲i = ۰$ کدام است؟ (عمران، کامپیوتر ۷۳)

۱) $۱ + i$ ۲) $۱ - i$ ۳) $۲i$ ۴) $۳i$

حل: گزینه ۳ درست است. عدد $۶i$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$z^۳ + ۳z + ۸i - ۶i = ۰ \implies (z^۳ - ۸i^۳) + (۳z - ۶i) = ۰$$

$$\implies (z - ۲i)(z^۲ + ۲iz + (۲i)^۲) + ۳(z - ۲i) = ۰ \implies (z - ۲i)(z^۲ + ۲iz - ۱) = ۰$$

$$\implies z = ۲i \text{ و } z^۲ + ۲iz - ۱ = ۰$$

۱۲. اگر $z^۲ = \frac{۴}{۱ + i} - i(۲ + i)$ آنگاه $|z|$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۳ ۴) ۵

حل: گزینه ۲ درست است.

$$z^۲ = \frac{۴(۱-i)}{۱+۱} - ۲i - i^۲ = ۲ - ۲i - ۲i + ۱ = ۳ - ۴i \implies |z^۲| = |۳ - ۴i| = ۵$$

پس $|z|^۲ = ۵$ و لذا $|z| = \sqrt{۵}$.

۱۳. اگر $z + \frac{۱}{z} = ۱$ حاصل $z^۳$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

۱) $-i$ ۲) -۱ ۳) i ۴) ۱

حل: گزینه ۲ درست است. با ضرب معادله در z به معادله درجه دوم $z^۲ - z + ۱ = ۰$ می‌رسیم که با ضرب آن در $(z+۱)$ داریم:

$$۰ = (z+۱)(z^۲ - z + ۱) = z^۳ + ۱ \implies z^۳ = -۱$$

۱۴. عدد مختلط z در رابطه $z + \frac{۱}{z} = ۱$ صدق می‌کند، $|z|$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به تست بالا:

$$z^۳ = -۱ \implies |z|^۳ = ۱ \implies |z| = ۱$$

شکل قطبی اعداد مختلط

۱۵. چنانچه $i = \sqrt{-۱}$ آنگاه $۲e^{\frac{\pi}{۳}i}$ برابر است با: (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $۱ - i\sqrt{۳}$ ۲) $-۱ + i\sqrt{۳}$ ۳) $۱ + i\sqrt{۳}$ ۴) $-۱ - i\sqrt{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به رابطه اویلر:

$$۲e^{\frac{\pi}{۳}i} = ۲\cos\frac{\pi}{۳} + ۲i\sin\frac{\pi}{۳} = ۱ + i\sqrt{۳}$$

۱۶. کدامیک از روابط زیر درست است؟ (عمران ۷۳)

۱) $\cos x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{۲i}$ ۲) $\sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲i}$ ۳) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲}$ ۴) $\sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. رابطه (۶ ـ ۳) در صفحه ۴۵۵ را ملاحظه کنید.

۱۷. با توجه به اینکه $z = x + iy$ حاصل $\mathrm{Re}(\sin z)$ کدام است؟ (هوافضا ـ آزاد ۸۱، عمران ـ آزاد ۸۲)

۱) $۲\sin x \sinh y$ ۲) $\sin x \sinh y$

۳) $\sin x \cosh y$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sin x(\sinh y + \cosh y)$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به رابطه (۶ ـ ۵) در صفحه ۴۵۵:

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y \implies \mathrm{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y$$

۱۸. چنانچه $i = \sqrt{-۱}$ باشد، آنگاه $\cosh z$ برابر است با: (برق ـ آزاد ۸۲)

۱) $i\cos iz$ ۲) $\cos iz$ ۳) $i\cos z$ ۴) $-i\cos z$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲}$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{۲} = \frac{e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}}{۲} = \cos(iz)$$

۱۹. چنانچه $i=\sqrt{-۱}$ آنگاه $\sin i\theta$ برابر است با: (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $i\sinh\theta$ ۲) $-i\sinh\theta$ ۳) $\sinh i\theta$ ۴) $-\sinh i\theta$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{۲i}\Longrightarrow \sin i\theta=\frac{e^{i^{۲}\theta}-e^{-i^{۲}\theta}}{۲i}=\frac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{۲i}=-\frac{۱}{i}\sinh\theta=i\sinh\theta$$

۲۰. زاویه قطبی در نمایش عدد مختلط $i+۱$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

حل: گزینه ۳ درست است. $i+۱$ در ربع اول است و $\tan\theta=\frac{۱}{۱}=۱$ پس $\theta=\frac{\pi}{۴}$.

۲۱. چنانچه $i=\sqrt{-۱}$ باشد آنگاه $i-\sqrt{۳}$ برابر است با: (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) $۲e^{-\frac{۵\pi}{۶}i}$ ۲) $۲e^{\frac{۳\pi}{۲}i}$ ۳) $۲e^{-\frac{۳\pi}{۲}i}$ ۴) $۲e^{\frac{۵\pi}{۶}i}$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر $i-\sqrt{۳}=re^{i\theta}$:

$$r=\sqrt{۱+۳}=۲\ \text{و}\ \tan\theta=\frac{۱}{-\sqrt{۳}}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Longrightarrow \theta=-\frac{\pi}{۶}\ \text{و}\ \frac{۵\pi}{۶}$$

چون $-\sqrt{۳}+i$ در ربع دوم است پس $\theta=\frac{۵\pi}{۶}$ قابل‌قبول است و $i-\sqrt{۳}=۲e^{\frac{۵\pi}{۶}i}$.

۲۲. اگر $a(\cos x+i\sin x)=۱-i$، x کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۴}$

حل: گزینه ۴ درست است. سمت چپ تساوی، نمایش قطبی $z=۱-i$ و این عدد در ربع چهارم است.

$$\tan x=-۱\Longrightarrow x=\frac{۷\pi}{۴}$$

۲۳. نمایش قطبی عدد $z=\sin\theta+i\cos\theta$ کدام است؟

۱) $e^{i\theta}$ ۲) $e^{i(\theta+\frac{\pi}{۲})}$ ۳) $e^{i(\theta-\frac{\pi}{۲})}$ ۴) $e^{i(\frac{\pi}{۲}-\theta)}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$z=\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=e^{i(\frac{\pi}{۲}-\theta)}$$

۲۴. اگر $z=۱-\sqrt{۳}i$ و $w=۲+۲i$ مقدار $\arg\frac{z}{w}$ برابر است با:

۱) $-\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۲) $-\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۱۲}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$z=۱-\sqrt{۳}i\Longrightarrow \tan\theta=-\sqrt{۳}\Longrightarrow \arg z=-\frac{\pi}{۳}$$

$$w=۲+۲i\Longrightarrow \tan\theta=۱\Longrightarrow \arg w=\frac{\pi}{۴}\Longrightarrow \arg\frac{z}{w}=\arg z-\arg w=-\frac{۷\pi}{۱۲}$$

۲۵. اگر z یک عدد مختلط باشد، $|ze^{\frac{\pi}{۳}i}-z|$ برابرکدام است؟ (مکانیک ۸۱)

۱) $|z|$ ۲) $\frac{۱}{۲}|z|$ ۳) $\frac{۱}{۲}|z+۱|$ ۴) $|z-i|$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\text{عبارت} = |z(e^{\frac{\pi}{۳}i} - ۱)| = |z|\left|\cos\frac{\pi}{۳} + i\sin\frac{\pi}{۳} - ۱\right| = |z|\left|-\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i\right| = |z|\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۴}} = |z|$$

۲۶. اگر $z_۱ = ۲(\cos\frac{۳\pi}{۷} + i\sin\frac{۳\pi}{۷})$ **و** $z_۲ = \sqrt{۳}(\cos\frac{۲\pi}{۷} + i\sin\frac{۲\pi}{۷})$**، حاصل** $z_۱z_۲^۲$ **کدام است؟**

(هواشناسی کشاورزی ۷۶)

۱) -۶ ۲) $-۶i$ ۳) ۶ ۴) $۶i$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\begin{cases} z_۱ = ۲e^{\frac{۳\pi}{۷}i} \\ z_۲ = \sqrt{۳}e^{\frac{۲\pi}{۷}i} \end{cases} \Longrightarrow z_۱z_۲^۲ = ۲e^{\frac{۳\pi}{۷}i} \times ۳e^{\frac{۴\pi}{۷}i} = ۶e^{\frac{۷\pi}{۷}i} = ۶e^{\pi i} = ۶(\cos\pi + i\sin\pi) = -۶$$

۲۷. اگر $z = \dfrac{\cos\phi - i\sin\phi}{\cos ۲\phi + i\sin ۲\phi}$**، مقدار** $\mathrm{Im}(z)$ **برابراست با:**

۱) $-\sin\phi$ ۲) $\cos\phi$ ۳) $-\sin ۳\phi$ ۴) $\sin\phi$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$z = \frac{e^{-i\phi}}{e^{۲i\phi}} = e^{-۳i\phi} \Longrightarrow \mathrm{Im}(z) = \sin(-۳\phi) = -\sin ۳\phi$$

۲۸. چنانچه $i = \sqrt{-۱}$ **باشد آنگاه مقدار** $(۱+i)^{۱۰}$ **برابراست با:** (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) ۳۲ ۲) $۳۲i$ ۳) -۳۲ ۴) $-۳۲i$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا $۱+i$ را به شکل قطبی می‌نویسیم. این عدد در ربع اول است.

$$z = ۱+i \Longrightarrow |z| = \sqrt{۱+۱} = \sqrt{۲} \quad \text{و} \quad \tan\theta = ۱ \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{۴} \Longrightarrow z = \sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}$$

$$\Longrightarrow z^{۱۰} = ۲^۵e^{\frac{۱۰\pi}{۴}i} = ۳۲e^{\frac{۵\pi}{۲}i} = ۳۲e^{\frac{\pi}{۲}i} = ۳۲i$$

۲۹. مقدار عدد مختلط $(۱+i)^{۲n}$ **و** $n = ۲, ۴, \cdots$ **برابر است با:** (علوم دریایی ـ آزاد ۸۲)

۱) ۲^n ۲) -۲^n ۳) $\pm ۲^n$ ۴) $\pm i۲^n$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $۱+i = \sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}$ پس:

$$(۱+i)^{۲n} = \left(\sqrt{۲}\right)^{۲n}e^{\frac{۲n\pi}{۴}i} = ۲^ne^{\frac{n\pi}{۲}i} = ۲^n\left(\cos\frac{n\pi}{۲} + i\sin\frac{n\pi}{۲}\right)$$

چون n اعداد زوج است پس $\sin\frac{n\pi}{۲} = ۰$ و $\cos\frac{n\pi}{۲} = \pm ۱$ پس حاصل $\pm ۲^n$ است.

۳۰. چنانچه $i = \sqrt{-۱}$ **باشد آنگاه مقدار** $(-۱ + \sqrt{۳}i)^{۱۰}$ **برابراست با:** (معدن ـ آزاد ۸۰)

۱) $-۵۱۲+۵۱۲\sqrt{۳}i$ ۲) -۵۱۲ ۳) $۵۱\sqrt{۳}i$ ۴) $۵۱۲ + ۵۱۲\sqrt{۳}i$

حل: گزینه ۱ درست است. عدد $-۱ + \sqrt{۳}i$ را به‌صورت قطبی می‌نویسیم.

$$z = -۱ + \sqrt{۳}i \Longrightarrow |z| = \sqrt{۱+۳} = ۲ \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{۳}}{-۱} = -\sqrt{۳}$$

z در ربع دوم است. $\Longrightarrow \theta = \dfrac{۲\pi}{۳} \Longrightarrow z = ۲e^{\frac{۲\pi}{۳}i}$

$$\Longrightarrow z^{۱۰} = ۲^{۱۰}e^{\frac{۲۰\pi}{۳}i} = ۲^{۱۰}e^{\frac{۲\pi}{۳}i} = ۲^{۱۰}\left(-\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}i\right) = -۵۱۲ + ۵۱۲\sqrt{۳}i$$

۳۱. مقدار عدد $(-۱+i\sqrt{۳})^{۲۴}$ برابراست با: (مدیریت نساجی ۸۱)

۱) $۴^{۲۴}$ ۲) $۲^{۲۴}$ ۳) $-۱+۳^{۱۲}i$ ۴) $۱+(\sqrt{۳})^{۲۴}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به تست قبل:

$$-۱+i\sqrt{۳}=۲e^{\frac{۲\pi}{۳}i} \Longrightarrow \text{عبارت}=\left(۲e^{\frac{۲\pi}{۳}i}\right)^{۲۴}=۲^{۲۴}e^{۱۶\pi i}=۲^{۲۴}$$

۳۲. قسمت حقیقی عدد مختلط $z=(۱+i)^{۵۰}$ برابر است با: (هسته‌ای ـ آزاد ۸۲)

۱) $۲^{۲۵}$ ۲) ۰ ۳) $(\sqrt{۲})^{۲۵}$ ۴) $(۰/۵)^{۲۵}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به اینکه $۱+i=\sqrt{۲}e^{\frac{\pi}{۴}i}$.

$$z=(\sqrt{۲})^{۵۰}e^{\frac{۵۰\pi}{۴}i}=۲^{۲۵}e^{\frac{۲۵\pi}{۲}i}=۲^{۲۵}e^{\frac{\pi}{۲}i}=۲^{۲۵}i \Longrightarrow \mathrm{Re}(z)=۰$$

۳۳. حاصل عبارت $\dfrac{(۱+i\sqrt{۳})^{۸}}{۲^{۷}(-۱+i\sqrt{۳})}$ کدام است؟ (مواد ۸۲)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$۱+i\sqrt{۳}=re^{i\theta} \text{ و } r=\sqrt{۱+۳}=۲ \text{ و } \tan\theta=\sqrt{۳} \Longrightarrow \theta=\frac{\pi}{۳}$$

$$\text{عبارت}=\frac{(۲e^{\frac{\pi}{۳}i})^{۸}}{۲^{۷}(-۱+i\sqrt{۳})}=\frac{۲^{۸}e^{\frac{۸\pi}{۳}i}}{۲^{۷}(-۱+i\sqrt{۳})}=\frac{۲e^{\frac{۲\pi}{۳}i}}{-۱+i\sqrt{۳}}=\frac{۲(\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳})}{-۱+i\sqrt{۳}}=\frac{-۱+i\sqrt{۳}}{-۱+i\sqrt{۳}}=۱$$

۳۴. $\left(\dfrac{۱+i}{۱-i}\right)^{۲۰۰۰}$ برابر است با: (ریاضی ۷۹)

۱) $-i$ ۲) -۱ ۳) i ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\frac{۱+i}{۱-i}=\frac{i(۱-i)}{۱-i}=i \Longrightarrow \text{عبارت}=i^{۲۰۰۰}=(i^{۲})^{۱۰۰۰}=(-۱)^{۱۰۰۰}=۱$$

۳۵. حاصل عبارت $\mathrm{Re}\big((۱+\cos\theta+i\sin\theta)^{n}\big)$ کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) $۲^{n}\sin^{n}\frac{\theta}{۲}$ ۲) $۲^{n}\sin^{n}\frac{\theta}{۲}\cos\frac{n\theta}{۲}$ ۳) $۲^{n}\cos^{n}\frac{\theta}{۲}\sin\frac{n\theta}{۲}$ ۴) $۲^{n}\cos^{n}\frac{\theta}{۲}\cos\frac{n\theta}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. تست ۱۰ در صفحه ۴۵۷ را ملاحظه کنید.

۳۶. ریشه پنجم‌های عدد $(۱+i)^{۳}$ برابر با $\sqrt[۱۰]{۸e^{i\theta}}$ است. θ عبارت است از:

۱) $\frac{\pi}{۲۰}+\frac{۶k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲۰}+\frac{۶k\pi}{۵}$ ۳) $\frac{\pi}{۲۰}+\frac{۲k\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲۰}+\frac{۲k\pi}{۵}$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر $\alpha=\arg(۱+i)^{۳}$ آنگاه زاویه ریشه پنجم آن یعنی θ برابر $\dfrac{۲k\pi+\alpha}{۵}$ است.

$$\alpha=۳\arg(۱+i)=\frac{۳\pi}{۴} \Longrightarrow \theta=\frac{۲k\pi}{۵}+\frac{۳\pi}{۲۰}$$

۳۷. اگر داشته باشیم $z^{۶}=۱$، یکی از اعداد z کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) $\cos\frac{\pi}{۱۲}+i\sin\frac{\pi}{۱۲}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\cos\frac{\pi}{۹}+i\sin\frac{\pi}{۹}$ ۴) $\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون برای عدد ۱ داریم $\theta=۰$ پس:

$$\sqrt[6]{1} = e^{\frac{0+2k\pi}{6}i} = e^{\frac{k\pi}{3}i} = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} \quad \text{و} \quad k = 0, 1, \ldots, 5$$

که به‌ازای $k = 2$ گزینه (۴) به‌دست می‌آید.

۳۸. کدام عدد مختلط یکی از ریشه‌های چهارم عدد $8i$ نیست؟ (مکانیک ۷۷)

۱) $8^{1/4}(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8})$ ۲) $8^{1/4}(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8})$

۳) $8^{1/4}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8})$ ۴) $8^{1/4}(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8})$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i} \implies \sqrt[4]{8i} = \sqrt[4]{8}e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}i} = 8^{1/4}e^{\frac{(4k+1)\pi}{8}i} \quad \text{و} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

به‌ازای مقادیر مختلف k آرگومان‌های $\sqrt[4]{8i}$ برابر $\frac{\pi}{8}$ و $\frac{5\pi}{8}$ و $\frac{9\pi}{8}$ و $\frac{13\pi}{8}$ به‌دست می‌آیند و لذا گزینه (۲) حاصل نمی‌شود.

۳۹. کدامیک از اعداد زیر ریشه ششم $-i$ است؟

۱) $\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}$ ۲) $\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}$ ۳) $\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$ ۴) $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$i = e^{-\frac{\pi}{2}i} \implies \sqrt[6]{-i} = e^{\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}i} = e^{\frac{(4k-1)\pi}{12}i} \quad \text{و} \quad k = 0, 1, \ldots, 5$$

به‌ازای $k = 0$ عدد $e^{-\frac{\pi}{12}i} = \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}$ به‌دست می‌آید.

۴۰. یکی از جذرهای عدد $-\frac{2}{i}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $1 - i$ ۲) $1 + i$ ۳) $\sqrt{2}i$ ۴) $-\sqrt{2}i$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به (۷) در صفحه ۴۵۳ زاویه عدد $-\frac{2}{i} = 2i$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

$$-\frac{2}{i} = 2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i} \implies \sqrt{-\frac{2}{i}} = \sqrt{2}e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}i} \quad \text{و} \quad k = 0, 1$$

$$k = 0 \implies \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 + i$$

۴۱. کدام عدد مختلط یکی از ریشه‌های سوم i است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) $\frac{-i+\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{-i+\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{i+\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i} \implies \sqrt[3]{i} = e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}i} \quad \text{و} \quad k = 0, 1, 2 \xrightarrow{k=0} e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

۴۲. یکی از ریشه‌های معادله $z^4 - 8 + 8\sqrt{3}i = 0$ که در آن z یک عدد مختلط و $i^2 = -1$ است برابر است با: (مکانیک و انرژی ـ آزاد ۸۱)

۱) $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{16} - i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$ ۲) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

۳) $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{8} - i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$ ۴) $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

حل: گزینه ۴ درست است. ریشه‌های معادله ریشه چهارم‌های عدد $8 - 8\sqrt{3}i$ هستند.

$z = ۸ - ۸\sqrt{۳}i = re^{i\theta}$ و $r = ۸\sqrt{۱+۳} = ۱۶$ و $\tan\theta = -\sqrt{۳} \Longrightarrow \theta = -\frac{\pi}{۳}$

$$\Longrightarrow \sqrt[۴]{z} = ۲e^{\frac{۲k\pi - \frac{\pi}{۳}}{۴}i} = ۲e^{\frac{(۶k-۱)\pi}{۱۲}i} \xrightarrow{k=۱} \sqrt[۴]{z} = ۲e^{\frac{۵\pi}{۱۲}i} = ۲\left(\cos\frac{۵\pi}{۱۲} + i\sin\frac{۵\pi}{۱۲}\right)$$

۴۳. قسمت حقیقی یکی از ریشه‌های معادله $z^۳ + i = ۰$ که در آن $i^۲ = -۱$ برابر است با:

(مکانیک و انرژی ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}$

حل: گزینه ۲ درست است. ریشه‌های معادله $\sqrt[۳]{-i}$ هستند و چون $-i = e^{\frac{۳\pi}{۲}i}$ پس

$$\sqrt[۳]{-i} = e^{\frac{۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}}{۳}i} = e^{(\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۲})i} = \cos(\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۲}) + i\sin(\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۲}) = -\sin\frac{۲k\pi}{۳} + i\cos\frac{۲k\pi}{۳}$$

و قسمت حقیقی $-\sin\frac{۲k\pi}{۳}$ است که به ازای $k = ۲$ به $-\sin\frac{۴\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌رسیم.

۴۴. اگر $z \neq ۱$ یکی از کعب‌های عدد ۱ باشد، حاصل $z + \frac{۱}{z}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $-i$ ۲) -۱ ۳) i ۴) ۱

حل: گزینه ۲ درست است. می‌توان $z = \sqrt[۳]{۱}$ را محاسبه و در عبارت داده شده جایگذاری کرد اما:

$$z = \sqrt[۳]{۱} \Longrightarrow z^۳ = ۱ \Longrightarrow z^۳ - ۱ = ۰ \Longrightarrow (z-۱)(z^۲ + z + ۱) = ۰ \xrightarrow{z \neq ۱} z^۲ + z + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{z \neq ۰} z + ۱ + \frac{۱}{z} = ۰ \Longrightarrow z + \frac{۱}{z} = -۱$$

مکان هندسی در صفحه مختلط

۴۵. معادله دایره به مرکز $(-۲, ۱)$ و شعاع ۴ کدام است؟ (مکانیک ۸۲)

۱) $|z + ۲ - i| = ۴$ ۲) $|z + ۲ + i| = ۴$ ۳) $|z - ۲ + i| = ۴$ ۴) $|z - ۲ - i| = ۴$

حل: گزینه ۱ درست است. مرکز دایره $z_۰ = -۲ + i$ و شعاع آن $r = ۴$ است پس $|z - (-۲ + i)| = ۴$ معادله دایره است.

۴۶. معادله دکارتی مجموعه نقاطی که در رابطه $|z - ۲| = ۱$ صدق می‌کنند، عبارت است از:

۱) $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۳ = ۰$ ۲) $x^۲ + y^۲ + ۴x + ۳ = ۰$

۳) $x^۲ + y^۲ - ۴y + ۳ = ۰$ ۴) $x^۲ + y^۲ + ۴y + ۳ = ۰$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله موردنظر دایره به مرکز $(۲, ۰)$ و شعاع ۱ را معرفی می‌کند.

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۱ \Longrightarrow x^۲ - ۴x + y^۲ + ۳ = ۰$$

۴۷. نقاط $M(x, y)$ متناظر با عدد مختلط z در رابطه $|z - i| = ۲$ صدق می‌کند. کدامین نقطه در خارج مکان هندسی M می‌باشد؟ (هواشناسی ۷۶)

۱) $D(۰, ۳)$ ۲) $C(۱, ۲)$ ۳) $B(۲, ۱)$ ۴) $A(۳, ۰)$

حل: گزینه ۴ درست است. معادلهٔ مطرح شده یک دایره را توصیف می‌کند. بنابراین نقاط خارج آن $|z - i| > ۲$ هستند پس گزینه‌ای که در معادلهٔ اخیر صدق کند، پاسخ تست است.

$A(۳,۰) \implies z=۳ \implies |۳-i|=\sqrt{۹+۱}=\sqrt{۱۰}>۲$

۴۸. مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z-i|+|z+i|=\sqrt{۵}$ صدق می‌کند، عبارت است از:

۱) پاره‌خط ۲) بیضی افقی ۳) بیضی قائم ۴) مجموعه تهی

حل: گزینه ۳ درست است. چون فاصله دو کانون $|i-(-i)|=۲>\sqrt{۵}$ پس شکل، بیضی است و چون $\mathrm{Re}(i)=\mathrm{Re}(-i)=۰$ پس بیضی قائم است.

۴۹. مکان هندسی نقاطی نظیر عدد مختلط $z=x+iy$ که در تساوی $\left|\frac{z-۱}{z+۱}\right|=۲$ صدق می‌کنند، کدام است؟

(ژئوفیزیک ۷۷)

۱) بیضی ۲) خط راست ۳) سهمی ۴) دایره

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به (۵) در صفحه ۴۶۱، چون $k=۲>۱$ مکان مورد نظر دایره است.

۵۰. معادله $\left|\frac{z-۳i}{z+i}\right|=۱$ در صفحه z ها معرف کدام شکل است؟ (مواد ۸۲)

۱) بیضی ۲) خط $y=۰$ ۳) خط $y=x$ و $y=-x$ ۴) خط $y=۱$

حل: گزینه ۴ درست است. مکان موردنظر، عمودمنصف پاره‌خط واصل $-i$ و $۳i$ است و لذا از وسط آنها یعنی i گذشته و بر محور y ها عمود است پس معادله آن $y=۱$ می‌باشد.

۵۱. مکان نقاط داخل صفحه اعداد مختلط که در رابطه $۱<|z-i|<۲$ صدق می‌کند، عبارت است از:

(مدیریت نساجی ۸۱)

۱) نقاط روی یک خط ۲) نقاط بین دو خط ۳) نقاط بین دو دایره ۴) نقاط خارج دو دایره

حل: گزینه ۳ درست است. معادله $|z-i|>۱$ نقاط خارج دایره به مرکز $z_۰=i$ و شعاع $r=۱$ و معادله $|z-i|<۲$ نقاط داخل دایره به مرکز $z_۰$ و شعاع ۲ است پس مکان موردنظر بین دو دایره واقع است.

۵۲. مجموعه نقاطی که در رابطه $۱<|z|<۲$ و $\pi<\arg z<\frac{۳\pi}{۲}$ صدق می‌کند، عبارت است از:

۱) نقاط بین دو دایره ۲) نقاط داخل یک دایره در ربع سوم

۳) نقاط بین دو دایره در ربع سوم ۴) نقاط خارج یک دایره در ربع سوم

حل: گزینه ۳ درست است. $۱<|z|<۲$ نقاط بین دو دایره به مرکز مبدأ و شعاع $r=۲$ و $r=۱$ است اما چون زاویه θ بین π و $\frac{۳\pi}{۲}$ است پس نقاط در ربع سوم واقع هستند.

۵۳. مکان اعداد مختلط $z=x+iy$ که در تساوی $\left|\frac{z+i}{z-i}\right|=\sqrt{۲}$ صدق کند، کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) خط $y=x$ است. ۲) دایره‌ای است به مرکز $(۰,۳)$ و شعاع $۲\sqrt{۲}$

۳) دایره‌ای است به مرکز $(۱,۱)$ و شعاع $۲\sqrt{۲}$ ۴) دایره‌ای است به مرکز $(۰,۳)$ و شعاع $۲\sqrt{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. با توجه به (۵) در صفحه ۴۶۱، مکان مورد نظر دایره‌ای است که مرکز آن بر خط واصل $\pm i$ یعنی محور y ها واقع است و فقط گزینه (۴) دارای این ویژگی است.

روش دوم. با قرار دادن $z=x+iy$ داریم:

$$\sqrt{۲}=\frac{|x+i(y+۱|}{|x+i(y-۱)|}=\frac{\sqrt{x^۲+(y+۱)^۲}}{\sqrt{x^۲+(y-۱)^۲}} \Longrightarrow x^۲+(y+۱)^۲=۲\left(x^۲+(y-۱)^۲\right)$$

$$\Longrightarrow x^۲+y^۲-۶y+۱=۰ \Longrightarrow x^۲+(y-۳)^۲=۸$$

معادله اخیر مربوط به دایره به مرکز $(۰,۳)$ و شعاع $۲\sqrt{۲}=\sqrt{۸}$ است.

۵۴. اگر $z=x+iy$ باشد، مکان $\mathrm{Re}(\frac{۱}{z})<۱$ در صفحه مختلط کدام است؟ (معدن ۸۱)

۱) خارج دایره به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$
۲) داخل دایره به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع ۱
۳) خارج دایره به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع ۱
۴) داخل دایره به مرکز $(۰,\frac{۱}{۲})$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\frac{۱}{z}=\frac{۱}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^۲+y^۲} \Longrightarrow \mathrm{Re}(\frac{۱}{z})=\frac{x}{x^۲+y^۲}<۱ \Longrightarrow x^۲+y^۲>x \Longrightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲+y^۲>\frac{۱}{۴}$$

که نقاط خارج دایره به مرکز $(\frac{۱}{۲},۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ است.

۵۵. اگر $z_۱$ و $z_۲$ دو نقطه دلخواه از صفحه مختلط باشند، آنگاه مکان هندسی نقاط $z=\alpha z_۱+\beta z_۲$ با شرط $\alpha+\beta=۱$ عبارت است از: (برق ۷۵، مکانیک ۸۱)

۱) خطی که نقطه $\alpha z_۱$ را به نقطه $\beta z_۲$ متصل می‌کند.
۲) خطی که مبدأ را به نقطه $z=\alpha z_۱+\beta z_۲$ متصل می‌کند.
۳) خطی که نقاط $z_۱$ و $z_۲$ را به‌هم وصل می‌کند.
۴) خطی که مبدأ را به نقطه $z_۱+z_۲$ متصل می‌کند.

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\beta=۱-\alpha$ پس $z=\alpha z_۱+(۱-\alpha)z_۲$ که با توجه به (۴) در صفحه ۴۶۱ خط واصل $z_۱$ و $z_۲$ است.

۵۶. مکان هندسی نقاطی که در رابطه $\mathrm{Im}(z^۲)=۴$ صدق می کند، عبارت است از:

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی

حل: گزینه ۴ درست است.

$$z=x+iy \Longrightarrow z^۲=x^۲-y^۲+۲ixy \Longrightarrow ۴=\mathrm{Im}(z^۲)=۲xy \Longrightarrow xy=۲$$

که معادله یک هذلولی مایل است.

۵۷. هرگاه $z=x+iy$ و $\bar{z}$ مزدوج z باشد، معادله $z\bar{z}=۳۶$ معرف چه شکلی است؟ (مکانیک ۸۲)

۱) دایره ۲) هذلولی ۳) بیضی ۴) سهمی

حل: گزینه ۱ درست است. چون $z\bar{z}=x^۲+y^۲$ پس معادله به صورت $x^۲+y^۲=۳۶$ است که یک دایره می‌باشد.

۵۸. مکان هندسی نقاط $z=x+iy$ که در رابطه $\mathrm{Re}(z^۳)=۰$ صدق می‌کند، عبارت است از:

۱) هذلولی ۲) دو خط متقاطع ۳) سه خط متقاطع ۴) بیضی و یک خط

حل: گزینه ۳ درست است. قرار می‌دهیم $z=x+iy$.

$$z^۳=x^۳+۳x^۲(iy)+۳x(iy)^۲+(iy)^۳ \Longrightarrow \mathrm{Re}(z^۳)=x^۳-۳xy^۲=۰ \Longrightarrow x=۰ \text{ و } x=\pm\sqrt{۳}y$$

که معادله سه خط متقاطع درمبدأ است.

تستهای تکمیلی فصل ۶ ـ مبحث اعداد مختلط (سؤالات سطح ۲)

۱. اگر $z+\frac{۱}{z}$ برای عدد غیر حقیقی z یک عدد حقیقی باشد، z کجا قرار دارد؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) خارج دایره به مرکز مبدأ به شعاع ۲
۲) روی دایره به مرکز مبدأ و به شعاع ۲
۳) روی دایره به مرکز مبدأ و به شعاع واحد
۴) داخل دایره به مرکز مبدأ و به شعاع واحد

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $z=x+iy$ که $y\neq ۰$ آنگاه:

$$z+\frac{۱}{z}=x+iy+\frac{۱}{x+iy}=x+iy+\frac{x-iy}{x^۲+y^۲}=x+\frac{x}{x^۲+y^۲}+i(y-\frac{y}{x^۲+y^۲})$$

چون $z+\frac{۱}{z}\in\mathbb{R}$ پس قسمت موهومی آن صفر است.

$$y-\frac{y}{x^۲+y^۲}=۰\implies \frac{y}{x^۲+y^۲}\Big((x^۲+y^۲)-۱\Big)=۰\xrightarrow{y\neq ۰}x^۲+y^۲=۱$$

۲. ساده شده تابع $f(\theta)=\frac{۱+\sin\theta+i\cos\theta}{۱+\sin\theta-i\cos\theta}$ کدام است؟ (مواد ۸۰)

۱) $\sin\theta+i\cos\theta$ ۲) $\sin\theta-i\cos\theta$ ۳) $\sin\frac{\theta}{۲}+i\cos\frac{\theta}{۲}$ ۴) $۱-i$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. چون $i=\frac{۱+i}{۱-i}$ پس $f(۰)$ پس گزینه‌های (۲) و (۴) نادرست هستند و چون $f(\frac{\pi}{۲})=۱$ پس فقط گزینه (۱) درست است.

روش دوم. با ضرب $f(\theta)$ در مزدوج مخرج یعنی $۱+\sin\theta+i\cos\theta$ عبارت را ساده می‌کنیم.

$$f(\theta)=\frac{(۱+\sin\theta+i\cos\theta)^۲}{(۱+\sin\theta)^۲+\cos^۲\theta}=\frac{۱+\sin^۲\theta-\cos^۲\theta+۲\sin\theta+۲i(۱+\sin\theta)\cos\theta}{۱+\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۲\sin\theta}$$

$$=\frac{۲\sin\theta(\sin\theta+۱)+۲i\cos\theta(۱+\sin\theta)}{۲(۱+\sin\theta)}=\sin\theta+i\cos\theta$$

۳. اگر z متغیر مختلط باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه $|z+۱|>|z-۱|$، کدام است؟ (هسته‌ای ۷۳)

۱) $\mathrm{Im}(z)>۰$ ۲) $\mathrm{Im}(z)<۰$ ۳) $\mathrm{Re}(z)>۰$ ۴) $\mathrm{Re}(z)<۰$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $z=x+iy$ را جایگذاری کنیم.

$$|x+۱+iy|>|x-۱+iy|\implies\sqrt{(x+۱)^۲+y^۲}>\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲}$$

$$\implies x^۲+۲x+۱+y^۲>x^۲-۲x+۱+y^۲\implies ۴x>۰\implies x>۰\implies x=\mathrm{Re}(z)>۰$$

۴. یکی از جوابهای عدد مختلط z از معادله $iz^۳+\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱-i)=۰$ به کدام صورت است؟ (هوافضا ۸۱)

۱) $\cos\frac{۳\pi}{۴}+i\sin\frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\cos\frac{۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۵\pi}{۴}$ ۴) $\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴}$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم.

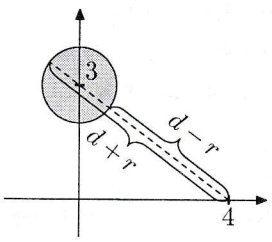
$$z^۳=-\frac{۱}{i}\cdot\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱-i)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-\frac{۱}{i}+۱)=\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{i}{\sqrt{۲}}=e^{\frac{\pi}{۴}i}$$

$$\implies z=\sqrt[۳]{e^{\frac{\pi}{۴}i}}=e^{\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۴}}{۳}i}=e^{\frac{(۸k+۱)\pi}{۱۲}i},\ k=۰,۱,۲$$

به ازای $k = ۱$ عدد $z = e^{\frac{۹\pi}{۱۲}i} = e^{\frac{۳\pi}{۴}i} = \cos\frac{۳\pi}{۴} + i\sin\frac{۳\pi}{۴}$ به دست می‌آید.

۵. z نقطه‌ای است که در رابطه $|z - ۳i| \leq ۱$ صدق می کند، حداقل و حداکثر مقدار $|z - ۴|$ عبارت است از:

۱) ۲ و ۶ ۲) ۲ و ۴ ۳) ۴ و ۶ ۴) ۵ و ۶



حل: گزینه ۳ درست است. z نقطه‌ای داخل یا روی دایره به مرکز $(۰, ۳)$ و شعاع $r = ۱$ است و مسأله یافتن حداقل و حداکثر فاصله نقطه $(۴, ۰)$ از نقاط دایره است. با توجه به شکل مقابل اگر d فاصله نقطه از مرکز دایره باشد حداقل و حداکثر فاصله از رابطه $d \pm r$ به‌دست می‌آید.

$$d = \sqrt{۴^۲ + ۳^۲} = ۵ \ , \ r = ۱ \implies d \pm r = ۶, ۴$$

۶. اگر دو عدد مختلط و غیر صفر $z_۱$ و $z_۲$ در رابطه $|z_۱ + z_۲| = |z_۱ - z_۲|$ صدق کنند، عدد $\frac{z_۲}{z_۱}$ چه وضعی دارد؟

۱) حقیقی ۲) موهومی محض ۳) غیر حقیقی ۴) نامشخص

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. اگر $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ آنگاه:

$$|z_۱ + z_۲| = |z_۱ - z_۲| \implies \big|(x_۱ + x_۲) + i(y_۱ + y_۲)\big| = \big|(x_۱ - x_۲) + i(y_۱ - y_۲)\big|$$

$$\implies (x_۱ + x_۲)^۲ + (y_۱ + y_۲)^۲ = (x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲ \implies ۴(x_۱x_۲ + y_۱y_۲) = ۰$$

$$\frac{z_۲}{z_۱} = \frac{z_۲\overline{z}_۱}{z_۱\overline{z}_۱} = \frac{(x_۲ + iy_۲)(x_۱ - iy_۱)}{x_۱^۲ + y_۱^۲} = \frac{(x_۲x_۱ + y_۱y_۲) + (x_۱y_۲ - x_۲y_۱)i}{x_۱^۲ + y_۱^۲}$$

با توجه به شرط به‌دست آمده، قسمت حقیقی $\frac{z_۲}{z_۱}$ صفر است و لذا این عدد، موهومی محض می‌باشد.

روش دوم. اگر $z_۱$ و $z_۲$ را به عنوان بردار در نظر بگیریم، با توجه به تذکر ۳ در صفحه ۴۵۰، $z_۲$، $z_۱ - z_۲$ و $z_۱ + z_۲$ قطرهای متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی $z_۱$ و $z_۲$ هستند و چون دو قطر با هم برابرند، شکل حاصل مستطیل است و لذا $z_۱$ و $z_۲$ بر هم عمودند. پس اگر $z_۱ = r_۱e^{i\theta_۱}$ آنگاه زاویه $z_۲$ به اندازه $\frac{\pi}{۲}$ با زاویه $z_۱$ اختلاف دارد و بنابراین $z_۲ = r_۲e^{i\theta_۲} = r_۲e^{(\frac{\pi}{۲} \pm \theta_۱)i}$ پس :

$$\frac{z_۲}{z_۱} = \frac{r_۲e^{i(\theta_۱ \pm \frac{\pi}{۲})}}{r_۱e^{i\theta_۱}} = \frac{r_۲}{r_۱}e^{\pm i\frac{\pi}{۲}} = \pm\frac{r_۲}{r_۱}i \implies \frac{z_۲}{z_۱} \text{ موهومی محض است.}$$

۷. اگر z در معادله $\overline{z} = z^۲$ صدق کند، $\mathrm{Re}(z)$ برابراست با:

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $z = x + iy$ را در نظر بگیریم، $\mathrm{Re}(z) = x$.

$$\overline{z} = x - iy \implies x - iy = (x + iy)^۲ = x^۲ - y^۲ + ۲ixy \implies \begin{cases} x = x^۲ - y^۲ \\ -y = ۲xy \end{cases}$$

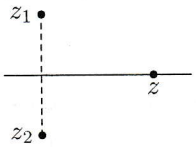
پس اگر در معادله دوم $y = 0$، از معادله اول $x = x^2$ که جواب آن $x = 0, 1$ است و اگر $y \neq 0$ داریم $x = -\frac{1}{2}$.

۸. اگر z عدد مختلط و $|z + ai| = |z + bi|$ (a و b اعداد حقیقی و $a \neq b$)مقدار $z - \bar{z}$ کدام است؟

(ریاضی ۷۹)

۱) $-(a+b)i$ ۲) $-(a-b)i$ ۳) $(a-b)i$ ۴) $(a+b)i$

حل: گزینه ۱ درست است. مکان هندسی عدد z خط عمودمنصف پاره خط واصل $z_1 = -ai$ و $z_2 = -bi$ است.



چون هر دو نقطه بر محور موهومی قرار دارند پس این خط بر محور y ها عمود بوده و از وسط z_1 و z_2 یعنی $\frac{z_1 + z_2}{2} = -\frac{a+b}{2}i$ عبور می‌کند و لذا دارای معادله $y = -\frac{a+b}{2}$ می‌باشد. بنابراین هر نقطه روی این خط به صورت $z = x - \frac{a+b}{2}i$ بوده و $z - \bar{z} = -(a+b)i$.

۹. با استفاده از قضیه دموآور و بسط دوجمله‌ای، $\cos 4\theta$ را بر اساس توانهای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ بیان نمایید.

(کامپیوتر ـ آزاد ۷۹)

۱) $\cos 4\theta = \cos^4\theta + i\sin\theta - i\sin^4\theta$ ۲) $\cos 4\theta = i\cos^4\theta + i\sin\theta\cos\theta - \sin^4\theta$

۳) $\cos 4\theta = \frac{1}{8}\cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$ ۴) $\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

حل: گزینه ۴ درست است. چون $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ برای نوشتن رابطه $\cos 4\theta$ باید $e^{4i\theta}$ را تشکیل دهیم. داریم $e^{4i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$ سمت چپ بنا به رابطه دموآور برابر $e^{4i\theta} = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$ و سمت راست با توجه به بسط دوجمله‌ای برابر است با:

$$\cos^4\theta + 4\cos^3\theta(i\sin\theta) + 6(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^2 + 4\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$$

$$= \left(\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\right) + i\left(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta\right)$$

و با مقایسه قسمت حقیقی دو سمت تساوی، گزینه (۴) حاصل می‌شود.

۱۰. اگر $z = e^{i\theta}$ دراین صورت $2\cos n\theta$ برابراست با:

۱) $z^n + z^{-n}$ ۲) $z^n - z^{-n}$ ۳) z^n ۴) $-z^n$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$z^n = e^{n\theta i} = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{و} \quad z^{-n} = (z^n)^{-1} = e^{-n\theta i} = \cos n\theta - i\sin n\theta \implies \cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$

۱۱. معادله $2 = \cos z$ وقتی که z متغیر مختلط است: (معماری کشتی ۸۰)

۱) دارای بینهایت جواب می‌باشد.

۲) دارای هیچ جواب نمی‌باشد چون $-1 < \cos z < 1$ است.

۳) دارای بینهایت جواب حقیقی می‌باشد.

۴) دارای تعداد محدودی جواب مختلط است.

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. با توجه به $\cos z = \cosh iz$ داریم:

$$\cosh iz = ۲ \implies iz = \cosh^{-۱} ۲ = \ln(۲+\sqrt{۳}) \implies z = \frac{۱}{i}\ln(۲+\sqrt{۳}) = -i\ln(۲+\sqrt{۳})$$

اما چون کسینوس تابع زوج با دوره تناوب ۲π است، پس $۲k\pi \pm i\ln(۲+\sqrt{۳})$ پاسخ سؤال است و لذا معادله دارای بینهایت جواب غیر حقیقی است.

روش دوم. با توجه به فرمول به رابطه (۶ ـ ۴) صفحه ۴۵۵:

$$\cos z = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = ۲ \implies \begin{cases}\sin x\sinh y = ۰\\ \cos x\cosh y = ۲\end{cases}$$

اگر از معادله اول $\sinh y = ۰$ آنگاه $y = ۰$ و لذا $\cosh y = ۱$ و از معادله دوم $\cos x = ۲$ به دست می‌آید که غیر ممکن است. پس باید $\sin x = ۰$ و لذا $x = m\pi$. اما $\cos m\pi = (-۱)^m$ و چون $\cosh y > ۰$ پس باید m زوج باشد. در این صورت $\cos m\pi = ۱$ و از معادله دوم $\cosh y = ۲$ پس $y = \cosh^{-۱} ۲ = \ln(۲+\sqrt{۳})$ و لذا $z = ۲k\pi + i\ln(۲+\sqrt{۳})$ جواب است.

تذکر ۱. اگر z حقیقی باشد آنگاه $|\cos z| \le ۱$ اما وقتی z را مختلط بگیریم، این محدودیت وجود ندارد.

۱۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $z + z^۲ = \overline{z} + \overline{z}^۲$ صدق کند، کدام است؟

۱) هذلولی و یک خط ۲) دو خط متقاطع ۳) یک خط ۴) دو خط موازی

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $w = z + z^۲$ توجه کنید که طرف راست تساوی $\overline{w}$ است پس باید نقاطی که $w = \overline{w}$ یعنی w عددی حقیقی است را بیابیم و لذا هدف محاسبه مجموعه نقاطی است که $\mathrm{Im}(w) = ۰$.

$$w = z + z^۲ = x + iy + x^۲ - y^۲ + ۲ixy \implies \mathrm{Im}(w) = y + ۲xy = ۰ \implies y = ۰, x = -\frac{۱}{۲}$$

۱۳. اگر a و b ریشه‌های مختلط معادله $z^۲ - ۲z + ۴ = ۰$ باشد، آنگاه مقدار $a^n + b^n + ab$ که در آن n عدد طبیعی است برابراست با: (مدیریت نساجی ۸۰)

۱) $۲^n\cos\frac{n\pi}{۳} + ۴$ ۲) $۲^n\sin\frac{n\pi}{۳} + ۴$ ۳) $۲^{n+۱}\sin\frac{n\pi}{۳} + ۴$ ۴) $۲^{n+۱}\cos\frac{n\pi}{۳} + ۴$

حل: گزینه ۴ درست است. ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$z = ۱ \pm \sqrt{-۳} = ۱ \pm i\sqrt{۳} \implies a = ۱ + i\sqrt{۳} = ۲e^{\frac{\pi}{۳}i} \text{ و } b = ۱ - i\sqrt{۳} = \overline{a} = ۲e^{-\frac{\pi}{۳}i} \implies ab = ۴$$

$$a^n = ۲^n e^{\frac{n\pi}{۳}i} \text{ و } b^n = ۲^n e^{-\frac{n\pi}{۳}i} \implies a^n + b^n + ab = ۲^n e^{\frac{n\pi}{۳}i} + ۲^n e^{-\frac{n\pi}{۳}i} + ۴ = ۲^{n+۱}\cos\frac{n\pi}{۳} + ۴$$

۱۴. کدامیک از معادلات زیر یک هذلولی افقی با طول قطر کانونی ۵ را نمایش می‌دهد؟

۱) $\big||z-۲i| - |z+۶i|\big| = ۵$ ۲) $\big||z-۲| - |z+۲|\big| = ۵$

۳) $\big||z-۲+i| - |z+۳+i|\big| = ۵$ ۴) $\big||z+۳-i| - |z-۳-i|\big| = ۵$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله هذلولی مورد نظر به صورت $\big||z-z_۱| - |z-z_۲|\big| = ۵$ است که $\mathrm{Im}(z_۱) = \mathrm{Im}(z_۲)$ و $|z_۱ - z_۲| > ۵$ که فقط گزینه (۴) در این شرایط صدق می‌کند.

خودآزمایی ٦ ـ سطح ١

١. اگر x و y اعداد حقیقی باشند و $x(٢+i)+y(١+٣i)+٢=٠$، مقدار $x+y$ کدام است؟

١) $-\frac{٦}{٥}$ ٢) $-\frac{٤}{٥}$ ٣) $\frac{٢}{٥}$ ٤) $\frac{١}{٥}$

٢. اگر $z_١=١+i$ و $z_٢=١-٢i$ و $\frac{١}{z}=\frac{١}{z_١}+\frac{١}{z_٢}$، مقدار $\mathrm{Im}(z)$ کدام است؟

١) $\frac{١}{٥}$ ٢) $\frac{٧}{٥}$ ٣) $-\frac{١}{٥}$ ٤) $-\frac{٧}{٥}$

٣. اگر $z=x+iy$ مقدار $z^٢+\overline{z^٢}$ برابر است با:

١) $x^٢+y^٢$ ٢) $x^٢-y^٢$ ٣) $٢x^٢+٢y^٢$ ٤) $٢x^٢-٢y^٢$

٤. $z_١$ و $z_٢$ دو عدد مختلط هستند، کدام گزینه عددی حقیقی را نمایش می‌دهد؟

١) $\overline{z_١}z_٢$ ٢) $\overline{z_٢}z_١$ ٣) $z_١\overline{z_٢}+\overline{z_١}z_٢$ ٤) $z_١-\overline{z_٢}$

٥. عدد مختلط z ریشه یک چندجمله‌ای درجه n و غیر ثابت $p(z)$ با ضرایب حقیقی است. کدام مورد برقرار است؟ (هوافضا ٨٢)

١) $\overline{z}$ ریشه $p(z)$ نیست.
٢) $z+\overline{z}$ ریشه $p(z)$ است.
٣) $\overline{z}$ ریشه $p(z)$ است.
٤) $z-\overline{z}$ ریشه $p(z)$ است.

٦. حاصل $e^{\frac{١}{٢}\pi i}$ برابر است با: (ژئوفیزیک ٧٦)

١) $-\frac{i}{٢}$ ٢) $-i$ ٣) $\frac{i}{٢}$ ٤) i

٧. اگر $z=\frac{١-i}{١+i}$ حاصل $ze^{i\frac{\pi}{٢}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ٧٩)

١) -١ ٢) $-١+i$ ٣) $١-i$ ٤) ١

٨. مقدار عدد مختلط $\big(٢(\cos ٢٥^\circ+i\sin ٢٥^\circ)\big)\big(٥(\cos ١١٠^\circ+i\sin ١١٠^\circ)\big)$ برابر است با:

(علوم دریایی ـ آزاد ٨٢)

١) $-٥\sqrt{٢}+٥\sqrt{٢}\,i$ ٢) $٥\sqrt{٢}-٥\sqrt{٢}\,i$ ٣) $٥\sqrt{٢}+٥\sqrt{٢}\,i$ ٤) $-٥\sqrt{٢}-٥\sqrt{٢}\,i$

٩. اگر $z=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)$ در این صورت $\mathrm{Im}(z)$ عبارت است از:

١) $\sin(\theta+\phi)$ ٢) $\sin(\theta-\phi)$ ٣) $\cos(\theta-\phi)$ ٤) $\cos(\theta+\phi)$

١٠. عدد مختلط $z=١+i\tan\theta$ را به کدام صورت زیر می‌توان نمایش داد؟

١) $\cos\theta e^{i\theta}$ ٢) $\sec\theta e^{i\theta}$ ٣) $\csc\theta e^{i(\frac{\pi}{٢}-\theta)}$ ٤) $\sec\theta e^{i(\frac{\pi}{٢}-\theta)}$

١١. اگر a و b مقادیر حقیقی باشند و $x+iy=\frac{١-ae^{ib}}{١+ae^{ib}}$ آنگاه: (معدن ٧٣)

١) $x=\frac{١-a^٢}{١+a^٢+٢a\cos b}$ ٢) $x=\frac{٢a\sin b}{١+a^٢+٢a\cos b}$
٣) $x=\frac{٢a\cos b}{١+a^٢+٢a\cos b}$ ٤) $x=\frac{٢a}{١+a^٢+٢a\cos b}$

۱۲. مقدار عبارت $(1+i)^{25}$ برابر است با:

۱) $2^{24}(1+i)$ ۲) $2^{12}(1-i)$ ۳) $2^{13}(1-i)$ ۴) $2^{12}(1+i)$

۱۳. اگر $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ باشد، مقدار $w=z^{100}(1-i)$ برابر کدام است؟ (مواد ۷۸)

۱) $-1-i$ ۲) $1-i$ ۳) $-1+i$ ۴) $1+i$

۱۴. حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

۱۵. کدام یک از اعداد زیر ریشه چهارم عدد $16i-$ است؟

۱) $2e^{\frac{3\pi}{2}i}$ ۲) $2e^{\frac{11\pi}{8}i}$ ۳) $2e^{\frac{9\pi}{8}i}$ ۴) $2e^{\frac{5\pi}{8}i}$

۱٦. اگر $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}=re^{i\theta}$ در این صورت θ برابر است با:

۱) $\frac{24k-17}{72}\pi$ ۲) $\frac{12k-17}{72}\pi$ ۳) $\frac{24k+17}{72}\pi$ ۴) هیچکدام

۱۷. جذرهای عدد $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$ عبارتند از:

۱) $\pm(\cos\theta+i\sin\theta)$ ۲) $\pm(\cos\theta-i\sin\theta)$ ۳) $\pm(\sin\theta-i\cos\theta)$ ۴) $\pm(\sin\theta+i\cos\theta)$

۱۸. پاسخ‌های معادله جبری $z^3=8$ که در فضای اعداد مختلط تعریف شده کدامند؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $z=-2,1\pm i\sqrt{3}$ ۲) $z=2,-1\pm i\sqrt{3}$ ۳) $z=2,-1\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$ ۴) $z=2,1\pm i\sqrt{3}$

۱۹. مقدار $\sqrt{i}$ برابر است با: (مکانیک ۷٦)

۱) $e^{i(\frac{\pi}{4}+k\pi)}$ ۲) $e^{i(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$ ۳) $e^{i(\frac{\pi}{2}+k\pi)}$ ۴) $e^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$

۲۰. چنانچه $z=x+iy$ باشد آنگاه $|z-2|=3$ (برق ـ آزاد ۸۱)

۱) یک خط است. ۲) یک دایره است. ۳) یک بیضی است. ۴) دو خط است.

۲۱. مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $|z+1-i|=2$ صدق می‌کند، کدام توصیف را دارند؟

۱) دایره به مرکز $(1,1)$ و به شعاع ۲ ۲) دایره به مرکز $(-1,i)$ و به شعاع ۲

۳) دایره به مرکز $(1,-1)$ و به شعاع ۲ ۴) خط گذرنده از $(1,-1)$

۲۲. مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که خارج دایره به مرکز $(1,-2)$ و شعاع ۲ نباشند، عبارت است از:

۱) $|z-2+i|\le 2$ ۲) $|z-2+i|<2$ ۳) $|z+2-i|<2$ ۴) $|z+2-i|\le 2$

۲۳. مجموعه نقاطی که در رابطه $|\frac{1}{z}|\le 2$ صدق کنند، عبارتند از:

۱) نقاط داخل دایره به شعاع ۲ ۲) نقاط داخل و روی دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ مگر مبدأ

۳) نقاط خارج دایره به شعاع $\frac{1}{2}$ ۴) نقاط خارج و روی دایره به شعاع $\frac{1}{2}$

۲۴. چنانچه $z=x+iy$ باشد، آنگاه $|z+3|+|z-3|=10$ چه شکلی است؟ (مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) خط ۲) دایره ۳) هذلولی ۴) بیضی

۲۵. مجموعه نقاطی از صفحه که در رابطه $\sqrt{2}=\big||z-i|-|z+i|\big|$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) بیضی ۲) هذلولی قائم ۳) هذلولی افقی ۴) نیم‌خط

۲۶. چنانچه $z = x + iy$ باشد، آنگاه $|z+۴| = |z+۲|$ چه شکلی است؟ (مواد ـ آزاد ۸۱)

۱) دایره ۲) بیضی ۳) خط ۴) هذلولی

۲۷. مکان هندسی نقاطی که در رابطه $|z+i| = |z-۱|$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) دایره ۲) عمود منصف پاره‌خط واصل $(۰,۱)$ و $(-۱,۰)$

۳) عمود منصف پاره‌خط واصل $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ ۴) عمود منصف پاره‌خط واصل $(۰,۱)$ و $(۰,-i)$

۲۸. معادله دکارتی مجموعه نقاطی که در رابطه $|z-۱-۲i| = |z-۳-۴i|$ صدق کنند، کدام است؟

۱) $x^۲+y^۲=۲۵$ ۲) $x-y=-۱$ ۳) $x+y=۵$ ۴) $x^۲+y^۲=۱۳$

۲۹. مکان هندسی نقاط $z = x+iy$ واقع در صفحه مختلط که در تساوی $\left|\frac{z+۱}{z-۱}\right| = ۴$ صدق کند، کدام است؟ (مواد ـ آزاد ۷۷)

۱) $(x-\frac{۱۷}{۱۵})^۲+y^۲=(\frac{۸}{۱۵})^۲$ ۲) $(x-\frac{۱}{۱۵})^۲+y^۲=(\frac{۸}{۱۵})^۲$

۳) $x+۲y=\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $۲x-y=\frac{۸}{۱۵}$

۳۰. مجموعه نقاطی که در رابطه $|\frac{z-۳}{z+۳}| < ۲$ صدق می‌کنند، چه توصیفی دارند؟

۱) نقاط داخل دایره به شعاع ۴ و مرکز $(-۵,۰)$ ۲) نقاط خارج دایره به شعاع ۳ و مرکز $(-۵,۰)$

۳) نقاط خارج دایره به شعاع ۴ و مرکز $(-۵,۰)$ ۴) نقاط داخل دایره به شعاع ۳ و مرکز $(-۵,۰)$

۳۱. مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $\mathrm{Im}(\frac{۱}{z}) = ۲$ صدق می‌کند، عبارت است از:

۱) نقاط روی دایره به مرکز $(-\frac{۱}{۴},۰)$ و به شعاع $\frac{۱}{۴}$

۲) نقاط روی دایره به مرکز $(-۱,۰)$ و به شعاع ۱ به‌جز مبدأ

۳) نقاط روی دایره به مرکز $(-\frac{۱}{۴},۰)$ و به شعاع $\frac{۱}{۴}$ به‌جز مبدأ

۴) نقاط روی دایره به مرکز $(\frac{۱}{۴},۰)$ و به شعاع $\frac{۱}{۴}$ به‌جز مبدأ

۳۲. مجموعه نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $۰ < \mathrm{Im}(z) < ۱$ صدق می‌کنند، کدام توصیف را دارد؟

۱) نقاط بین دو خط $y=۰$ و $y=۱$ ۲) نقاط بین و روی دو خط $y=۰$ و $y=۱$

۳) نقاط بین و روی دو خط $x=۰$ و $x=۱$ ۴) نقاط بین دو خط $x=۰$ و $x=۱$

۳۳. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $\mathrm{Re}(z^۲) = ۳$ صدق می‌کند، کدام است؟

۱) سهمی ۲) دایره ۳) هذلولی قائم ۴) هذلولی افقی

۳۴. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که $z^۲ = -\overline{z^۲}$ عبارت است از:

۱) هذلولی قائم ۲) دو خط متقاطع ۳) هذلولی افقی ۴) هذلولی مایل

۳۵. توابع $f,g : (۰,۱) \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌های $f(x)=x$ و $g(x) = x + x^۲e^{ix^{-۲}}$ در نظر بگیرید. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (ریاضی ۸۲)

۱) $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{g(x)} = ۱$ ۲) $\lim_{x\to ۰}\frac{f'(x)}{g(x)} = ۱$ ۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{۱}{۲}$ ۴) $\lim_{x\to ۰}\frac{f'(x)}{g'(x)} = ۰$

خودآزمایی ۶ ـ سطح ۲

۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط که در رابطه $\left|\frac{z-۱+i}{۴z-۳i}\right| = \frac{۱}{۴}$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) خط ۲) دایره ۳) بیضی ۴) هذلولی

۲. حاصل عبارت $\left(\frac{۱+i\tan\alpha}{۱-i\tan\alpha}\right)^n$ برابر است با:

۱) $\frac{۱-i\tan n\alpha}{۱+i\tan n\alpha}$ ۲) $\frac{۱+i\tan^n\alpha}{۱-i\tan^n\alpha}$ ۳) $\frac{۱+i\tan n\alpha}{۱-i\tan n\alpha}$ ۴) $\frac{۱-i\tan^n\alpha}{۱+i\tan^n\alpha}$

۳. یکی از ریشه‌های معادله $۸z^۳ - ۴z^۲ + ۲z = ۱$ به صورت $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ است. کمترین مقدار θ در بازه $[\frac{۲\pi}{۳}, ۲\pi]$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۳) π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۴. اگر $z = \sqrt{\frac{۱-i\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+i}}$ آنگاه کلیه مقادیر ممکن برای $\mathrm{Re}(z)$ برابر است با:

۱) $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵. فرض کنیم $z_۱$ و $z_۲$ دو عدد مختلط غیر صفر باشند به قسمی که $\left|\frac{z_۱-\bar{z}_۲}{z_۱+\bar{z}_۲}\right| = ۱$. در این صورت کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) $\mathrm{Re}(z_۱z_۲) < ۰$ ۲) $\mathrm{Im}(z_۱z_۲) > ۰$ ۳) $\mathrm{Re}(z_۱z_۲) = ۰$ ۴) $\mathrm{Im}(z_۱z_۲) = ۰$

۶. مجموع قسمت حقیقی تمام ریشه‌های معادله $z^۷ + z^۶ + \cdots + z + ۱ = ۰$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) -۱

۷. اگر x و y دو عدد مختلط باشند، حاصل $\overline{x+iy}$ کدام است؟

۱) $x-iy$ ۲) $\overline{x}+i\overline{y}$ ۳) $\overline{x}-i\overline{y}$ ۴) $x+iy$

۸. اعداد مختلط ۱ و z و $z^۲$ رئوس یک مثلث متساوی الساقین و قائم الزاویه با رأس قائمه در ۱ هستند، z کدامیک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) $i+۱$ ۲) $-۱+i$ ۳) $z = \frac{-۱+i\sqrt{۵}}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(۱+i)$

۹. یکی از جوابهای معادله $(۱+iz)^۵ - (۱-iz)^۵ = ۰$ کدام است؟

۱) $z = i\tan\frac{\pi}{۱۰}$ ۲) $z = i\tan\frac{۴\pi}{۵}$ ۳) $z = \tan\frac{۳\pi}{۱۰}$ ۴) $z = \tan\frac{۲\pi}{۵}$

۱۰. مکان هندسی عدد مختلط و غیر حقیقی z که در رابطه $z^۳ + ۲z^۲ - ۳z = (\bar{z})^۳ + ۲(\bar{z})^۲ - ۳(\bar{z})$ صدق کند، کدام است؟

۱) بیضی ۲) هذلولی ۳) سهمی ۴) خط