باسمه تعالی

۸۹٫۴٫۲۶

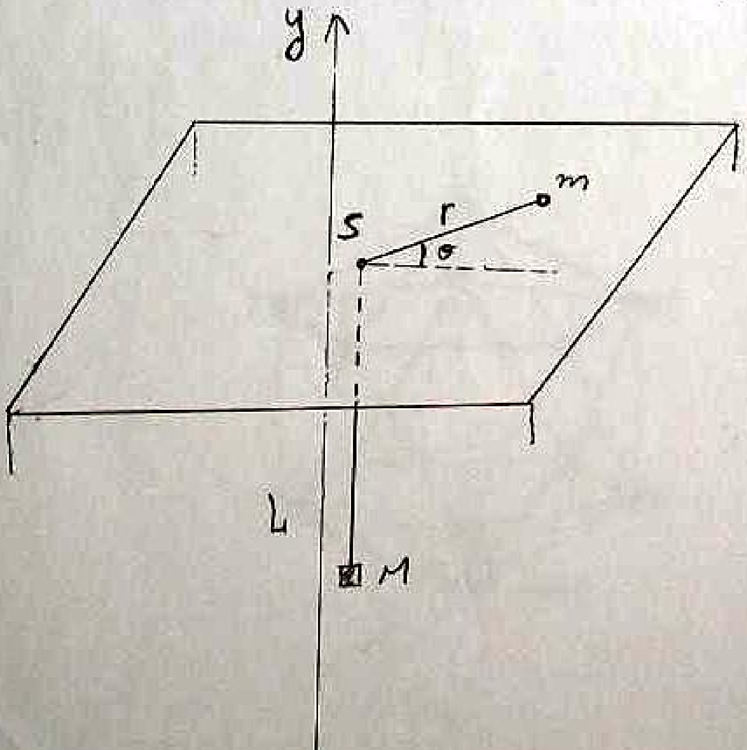
استان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹)

وقت: ۲٫۵ ساعت

مسئله‌ي 1) مهره ای به جرم m در انتهای ریسمانی به طول L بسته شده و در صفحه ای افقی و بدون اصطکاک حرکت می کند. ریسمان از سوراخ S گذشته و در انتهای دیگرش جرم M آویزان است. برای جرم m مختصات قطبی و برای جرم M مختصه قائم y را در نظر بگیرید. مبدا مختصات محور y را در فاصله L زیر سوراخ S و جهت مثبت آن را رو به بالا بگیرید. فرض کنید در لحظه $t = 0$ جسم m در فاصله a از سوراخ است و سرعت آن v_0 و عمود بر امتداد نخ است.

جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) قید مسئله رابیان کنید و در پاسخ‌نامه وارد کنید.
b) معادلات حرکت دو جسم را در مختصات یاد شده بنویسید.
c) با استفاده از معادلات حرکت نشان دهید کمیت $r^2\dot{\theta}$ در طول زمان ثابت است (r و θ مختصات قطبی m است). مقدار این ثابت را بر حسب داده های مسئله به دست آورید و از آنجا $\dot{\theta}$ را برحسب r و داده های مسئله حساب کنید و در پاسخ‌نامه وارد کنید.
d) بااستفاده ازنتیجه بند c و معادلات حرکت نشان دهید کمیت $U = \dot{r}^2 + f(r)$ در طول زمان ثابت است. اندازه ثابت U و تابع $f(r)$ را بر حسب داده های مسئله به دست آورید و در پاسخ‌نامه وارد کنید.

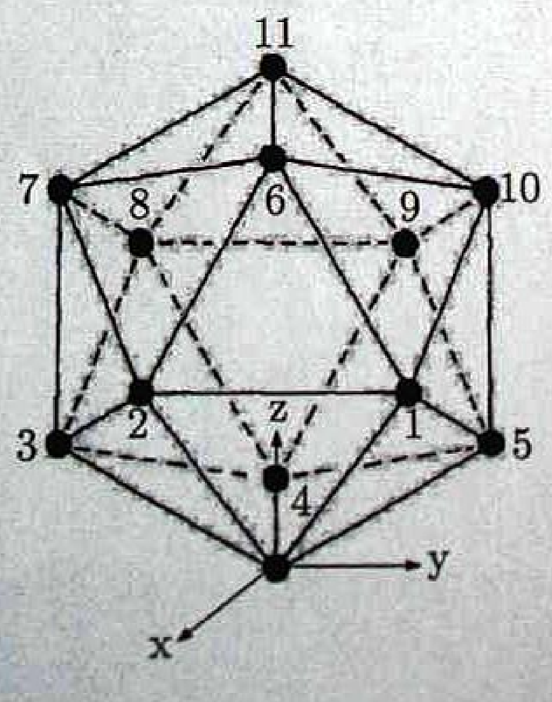


مسئله ۲) یک بیست وجهی منتظم دوازده رأس دارد و وجوه آن مثلث‌های متساوی الاضلاع اند. ۱۲ بار الکتریکی یکسان q واقع بر رأس‌های یک بیست‌وجهی منتظم به طول ضلع a در نظر بگیرید. مطابق شکل، مبدأ دستگاه مختصات xyz بر بار پایینی واقع، محور y موازی ضلع ۱ـ۲ و محور z عمود بر صفحه‌ی پنج‌ضلعی ۱ـ۲ـ۳ـ۴ـ۵ است. داریم $\sin(\frac{\pi}{10}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. جواب‌ها را تا جایی که امکان دارد ساده کنید (ولی به صورت اعشاری ننویسید).

آ) مختصات نقاط ۱، ۳، ۶، ۹ و ۱۱ را بر حسب a بدست آورید.

ب) بردار نیروی الکتریکی وارد بر بار الکتریکی ـ واقع در مبدأ مختصات از سوی بارهای الکتریکی ـ واقع در نقاط ۱، ۶ و ۱۱ را بدست آورید.

پ) نیروی الکتریکی وارد بر بار واقع در مبدأ از سوی یازده بار دیگر را بدست آورید.



مسئله ۳)

الف) میدان الکتریکی یک سیم مستقیم بسیار بلند با چگالی بار λ را در فاصله‌ی r از سیم به دست آورید.

ب) فرض کنید $2N+1$ سیم مستقیم بسیار بلند هر یک با چگالی بار λ به موازات هم چیده شده‌اند. فاصله‌ی بین هر دو سیم مجاور با هم a است. میدان الکتریکی را درست بالای سیم وسط و به فاصله‌ی d از آن به دست آورید.

ج) صفحه‌ی بی‌نهایت طویلی را در نظر بگیرید که دارای چگالی بار سطحی یکنواخت σ است. این صفحه را به صورت نوارهای طویلی با عرض Δx بگیرید و با توجه به جواب قسمت الف، میدان الکتریکی را در فاصله‌ی d از صفحه پیدا کنید.

ممکن است اطلاعات زیر مفید باشند.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x$$

وقت: ۴ ساعت
۸۹/۵/۲

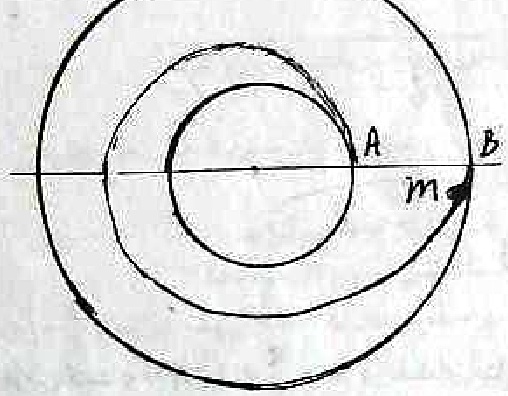
بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹)

۱- سیم نازکی مطابق شکل در نقطه A به دایره ای به شعاع r_1 و در نقطه B به دایره ای به شعاع r_2 متصل است و مسیری حلزونی می سازد که در آن r به صورت خطی به θ بستگی دارد.

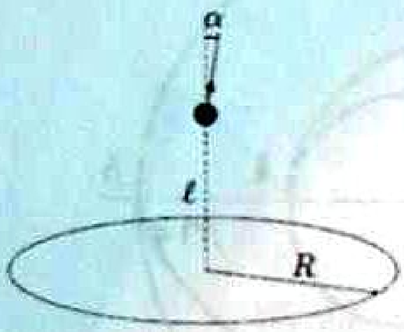
مهره کوچکی به جرم m می تواند بدون اصطکاک روی سیم حرکت کند. در لحظه $t = 0$ در حالی که مهره در نقطه B ساکن است دستگاه به طور ناگهانی با سرعت زاویه ای ثابت ω شروع به حرکت می کند.

رابطه ای بین r، $\dot{r}$، θ و $\dot{\theta}$ به دست آورید.



۲-

a) حلقه‌ای به شعاع R که بارِ الکتریکی‌ي Q روي آن یک‌نواخت توزیع شده را در نظر بگیرید. محورِ تقارنِ حلقه را محورِ z بگیرید. روي محورِ z و در فاصله‌ي ℓ از مرکزِ حلقه بارِ نقطه‌ای‌ي q قرار دارد. خطِ میدانی که از بارِ q خارج می‌شود و نسبت به محورِ z زاویه‌ي کوچکِ α می‌سازد را در نظر بگیرید. در فاصله‌هاي خیلی دور، $(r \gg \ell, R)$، زاویه‌ي بین این خطِ میدان با محورِ z، β چه می‌شود؟



b) حالا فرض کنید $Q = q$ و $\epsilon := \frac{R}{\ell} \ll 1$. در نقطه‌ای مثلِ z روي محورِ تقارنِ میدانِ الکتریکی صفر می‌شود. z را تا مرتبه‌ي دومِ اختلال به دست آورید.

پاسخ‌هاي خود را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

۳ـ مخروطی با زاویه‌ي نیم‌رأسِ α و شعاعِ قاعده‌ي R روي زمین خوابیده و مطابقِ شکل بدونِ لغزش می‌غلتد. رأسِ مخروط همواره در مبدأ است، و مرکزِ قاعده را نقطه‌ي A می‌نامیم. در مدت‌زمانِ T نقطه‌ي A یک دور حولِ محورِ z می‌چرخد. وقتی که خطِ تماسِ مخروط با زمین روي محورِ x است روي قاعده‌ي مخروط در نقطه‌ي تماس یعنی B علامت می‌گذاریم.

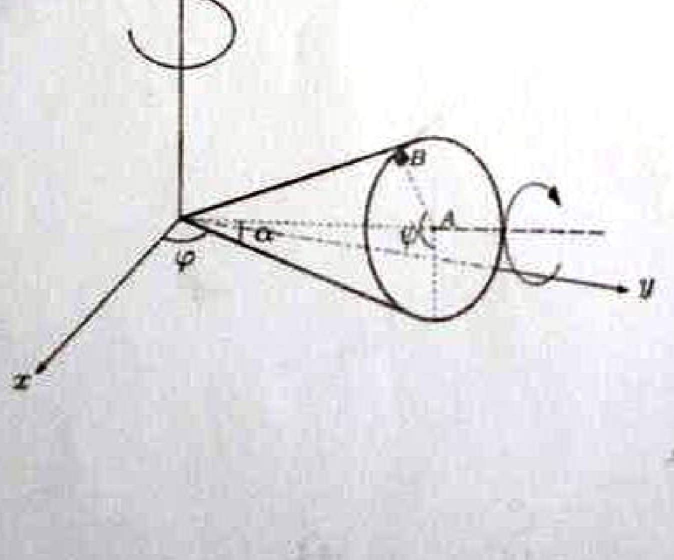
پاسخ‌هاي خود را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) با استفاده از شرطِ غلتش سرعتِ زاویه‌اي‌ي دورانِ مخروط حولِ محورِ تقارنش، $\dot{\psi}$، را به دست آورید.

b) بردارِ مکانِ نقطه‌ي A را بر حسبِ زمان به دست آورید.

c) چه شرطی روي α برقرار باشد تا مسیرِ نقطه‌ي B بسته باشد؟

d) بردارِ مکانِ نقطه‌ي B را بر حسبِ زمان به دست آورید. در زمانِ $t = \frac{T}{2}$ سرعتِ نقطه‌ي B چه‌قدر است؟



۴- یک خط بار دار با چگالی بار خطی یکنواخت λ_1 در نظر بگیرید که روی محور x قرار دارد.

الف) یک نوار بینهایت فرضی را در نظر بگیرید که این گونه بیان میشود:

$Y=h$ و $-L < z < L$ و $-\infty < x < \infty$

شار الکتریکی گذرنده از واحد طول این صفحه را حساب کنید (یعنی در راستای x طولش برابر واحد است)

ب) فرض کنید بار خطی بینهایت مثبت λ_1 روی محور x و بار خطی منفی با چگالی $-\lambda_2$ موازی آن در $y=D$ قرار دارند. خطوط میدان الکتریکی در صفحه ی YZ را در نظر بگیرید. معادله ی خطوط میدان الکتریکی را در نواحی بین این دو بار بیابید.

ج) یک خط میدان با زاویه ی α از خط بار اولی خارج می شود و با زاویه ی β وارد خط بار دومی می شود. β را بر حسب α حساب کنید.

د) فرض کنید N بار خطی بی نهایت موازی محور x داریم، که چگالی بار خطی k اُمی λ_k و در مکان X_k قرار دارد. معادله ی خطوط میدان را در صفحه ی YZ بیابید، با فرض این که فقط نواحی بین بار ها مورد نظر باشد.

۵ - جسمی با سرعت v_0 به طور عمودی از زمین به سمت بالا پرتاب می شود. نیروی مقاومت هوا را به صورت $f = -m\alpha v^5$ در نظر بگیرید، یعنی نیروی مقاوم، متناسب با توان پنجم سرعت و عکس جهت آن است. شتاب گرانش g است. فرض کنید α آن قدر کوچک است که از توان دوم و توانهای بالاتر آن می توان صرف نظر کرد.

الف) زمانی را که جسم به طور لحظه ای متوقف می شود بیابید.

ب) در لحظه ی قسمت الف، جسم در چه ارتفاعی است.

ج) مدت زمان بین لحظه ی بازگشت جسم به زمین و لحظه ی الف را حساب کنید.

د) سرعت جسم هنگام بازگشت به زمین را حساب کنید.

بسمه تعالی

امتحان سوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹)

وقت: ۴ ساعت ۸۹/۵/۱۴

۱) حلقه ای به شعاع a دارای چگالی بار λ است. محور Z روی محور حلقه است. مؤلفه های هر نقطه در مختصات استوانه ای به صورت (ρ,ϕ,Z) نشان داده می شود.

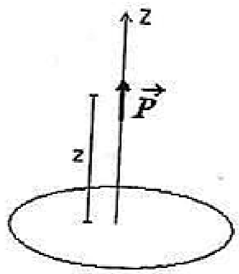
الف) پتانسیل الکتریکی این حلقه در نقطه ی $(\rho=\varepsilon, \phi=0, Z=z)$ را به صورت یک انتگرال بنویسید (حل انتگرال لازم نیست).

ب) فرض کنید $z \gg \varepsilon$ و $a \gg \varepsilon$ است. انتگرال قسمت الف را تا اولین مرتبه ی غیر صفر نسبت به ε حل کنید.

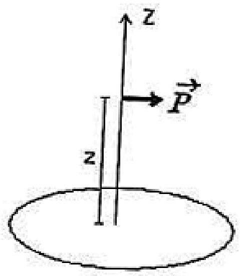
ج) مؤلفه های میدان الکتریکی را تا اولین مرتبه ی غیر صفر نسبت به ε به دست آورید.

د) نیروی وارد بر یک دو قطبی را در دو حالت زیر به دست آورید.

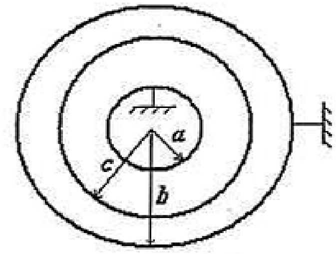
د-۱) گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ روی محورحلقه و به فاصله ی z از مرکز حلقه است.



د-۲) گشتاور دو قطبی $\vec{p}$ عمود بر محور حلقه و از صفحه ی حلقه به فاصله ی z است و جهت آن به سمت بیرون محور است.



۲) دو کره ی رسانای هم مرکز به شعاع های a و b ($a < b$) دارای پتانسیل صفر هستند.کره ای به شعاع c ($a < c < b$) هم مرکز با دو کره ی رسانا در نظر بگیرید. فرض کنید روی کره ی c ، تعداد n بار نقطه ای q در واحد سطح وجود دارد. n را به اندازه ی کافی بزرگ بگیرید.

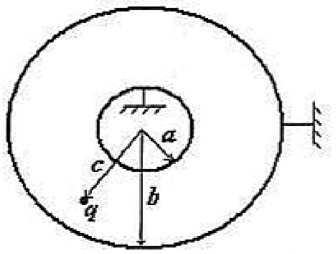


الف) میدان الکتریکی را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

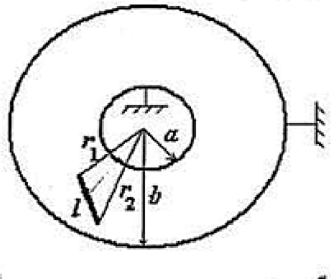
ب) پتانسیل الکتریکی را در تمام نقاط فضا به دست آورید.

ج) بار القایی روی هر یک از کره های رسانا چه قدر است؟

د) فرض کنید به جای کره ی به شعاع c تنها یک بار نقطه ای q در فاصله ی c از مرکز دو کره ی رسانا داشته باشیم. بار القایی روی هر یک از دو کره ی رسانا چه قدر است؟



ه) اگر میله ای به طول ℓ که دارای چگالی بار λ است بین دو کره ی رسانا قرار دهیم که فاصله ی دو انتهای میله از مرکز کره ها به ترتیب r_1 و r_2 ($a < r_1 < r_2 < b$) باشد، بار القایی روی هر یک از دو کره ی رسانا چه قدر است؟



توجه:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left\{2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + 2ax + b\right\}$$

$\int \frac{}{\sqrt{\ }}$

$a > 0$

۳) مطابقِ قانونِ جهانی‌ِ گرانشِ نیروی بینِ دو جرمِ m و M که در فاصله‌ی r قرار دارندعبارت است از

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

که G ثابتِ جهانی‌ِ گرانش است.

a) بُعدِ G چیست؟

b) فرض کنید که M ستاره‌ای بزرگ و ساکن است و m سیاره‌ای بسیار سبک‌تر ($M \gg m$) است که در مسیری بیضی‌شکل به دورِ ستاره می‌گردد. قطرهای بیضی را a و b بگیرید. با استفاده از تحلیلِ ابعادی رابطه‌ای برای T دوره‌ی حرکتِ سیاره بر حسبِ داده‌های مسئله به دست آورید. در حالتِ خاصی مسیرِ سیاره دایره‌ای است. با استفاده از این حالتِ خاص معادله‌ای که به دست آورده‌اید را ساده کنید.

c) بعضی از سیارات، مثلِ زمین مسیرشان تقریباً دایره و بعضی دیگر بیضی‌ِ کشیده است، اما مطابقِ قانونِ سومِ کپلر $\frac{T^2}{a^3}$ برای همه‌ی سیاره‌ها یکی است. با استفاده از قانونِ کپلر معادله‌ای که در بندِ قبل به دست آورده‌اید را ساده‌تر کنید.

پاسخ‌های خود را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

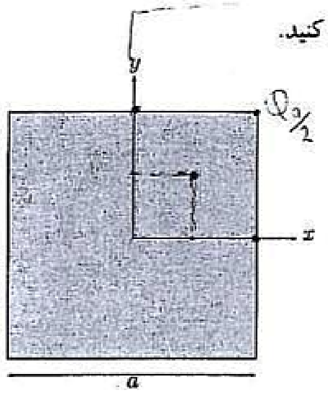
۴) مربعی به ضلعِ a با چگالی‌یِ بارِ الکتریکی‌یِ یک‌نواختِ σ باردار شده است. مرکزِ مربع مبدأِ مختصات است و پتانسیلِ الکتریکی در نقطه‌یِ x و y را با $\Phi(x,y)$ نمایش می‌دهیم. پتانسیلِ الکتریکی در مبدأ $\Phi(0,0) = \phi_0$ و پتانسیلِ الکتریکی‌ی $\Phi(\frac{a}{4},\frac{a}{4}) = \phi_1$ است. پتانسیلِ الکتریکی در نقاطِ زیر را بر حسبِ ϕ_0 و ϕ_1 به دست آورید

a) $x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2}$ $\quad \Phi_a$

b) $x = a, y = 0$

c) $x = 0, y = a$

برایِ این‌کار از تحلیلِ ابعادی استفاده کنید.



پاسخ‌هایِ خود را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

نیمه تئوری /
امتحان چهارم المپیاد بزرگ (تابستان ۸۹)

صبح ۸۹/۵/۱۶
وقت: ۳ ساعت

۱) توپی مطابقِ شکل بینِ دو دیوارِ موازی با جرمِ بسیار زیاد به صورتِ افقی حرکت می‌کند. دیوارِ سمتِ راست ثابت و دیوارِ سمتِ چپ دارای سرعتِ ثابت u به سمتِ راست است. مسئله یک بعدی است. همه‌ی برخورد های توپ و دیوار ها کاملاً کشسان است.

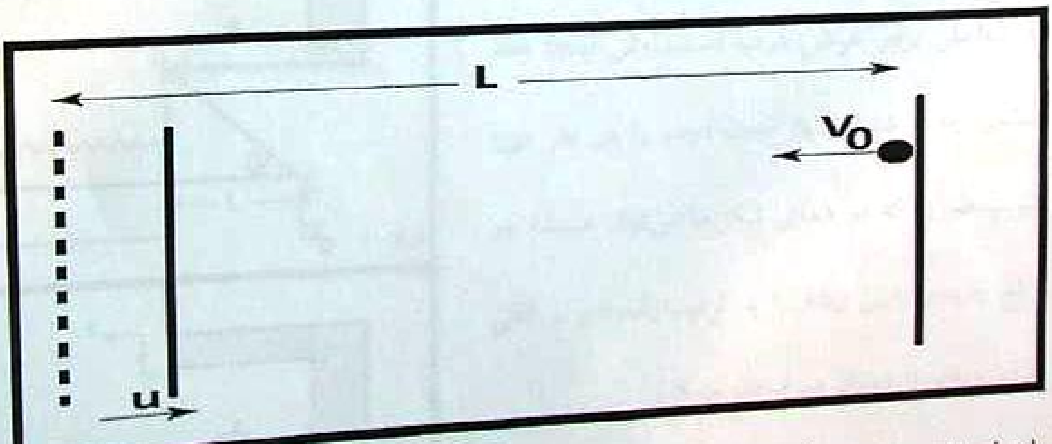
در لحظه‌ی $t=0$ توپ در کنارِ دیوارِ سمتِ راست است و با سرعتِ v_0 به سمتِ چپ پرتاب می‌شود. در این لحظه فاصله‌ی بینِ دو دیوار L است. لحظه‌ای که توپ برای اولین بار به دیوارِ سمتِ راست برخورد می‌کند را t_1 و سرعتش را در این لحظه v_1 می‌نامیم. به همین ترتیب، هنگامی که توپ برای بارِ n اُم به دیوارِ سمتِ راست برخورد می‌کند، زمان t_n و سرعت v_n است. یعنی تا t_n توپ n بار به دیوارِ سمتِ چپ برخورد کرده است.

الف) v_n را بر حسبِ n و پارامتر های مسئله بیابید.

ب) t_{n+1} را بر حسبِ t_n و n و پارامتر های مسئله بیابید.

پ) با فرضِ این که $\frac{u}{v}$ خیلی کوچک است طوری که می‌توان از توانِ دوم و بالاتر آن صرف‌نظر کرد، t_n را برای $n=0,1,2,3,4,5$ بیابید. سپس t_n را بر حسبِ n بیابید. (n های کوچک را در نظر بگیرید یعنی n هایی که برای آنها $n\frac{u}{v}$ همچنان خیلی کوچک است و از توانِ دوم به بالایش می‌توان صرف‌نظر کرد.) پاسخ را تا حدِ امکان ساده کنید.

ت) نیروی متوسطِ وارد بر دیواره را تعریف می‌کنیم: $F_n = m\,\frac{v_{n+1}-v_n}{t_{n+1}-t_n}$. با تقریب های مشابهِ قسمتِ قبل، F_n را بر حسبِ n حساب کنید.

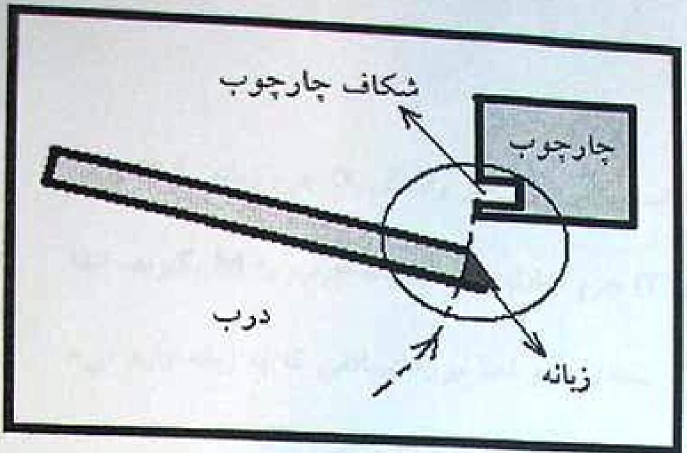


راهنمایی: این سری ها ممکن است به درد بخورند:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

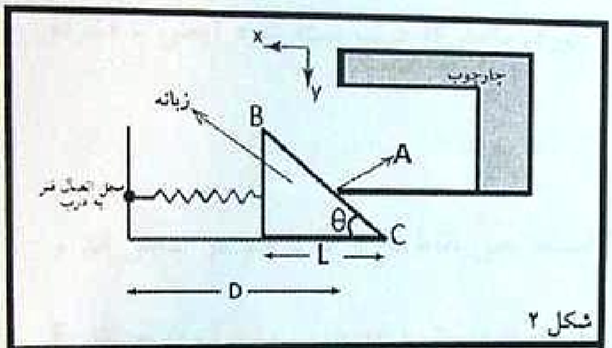
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۲) در این مسئله می‌خواهیم فرایند باز و بسته شدن درب ورودی ساختمان را مطابق شکل ۱ بررسی کنیم. زبانه‌ی درب را می‌توان یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی معلوم θ و طول L مطابق شکل ۲ در نظر گرفت. فنری به طول کشیده‌نشده‌ی D و ثابت K به آن متصل است. توجه کنید نمای شکل‌ها از بالاست.



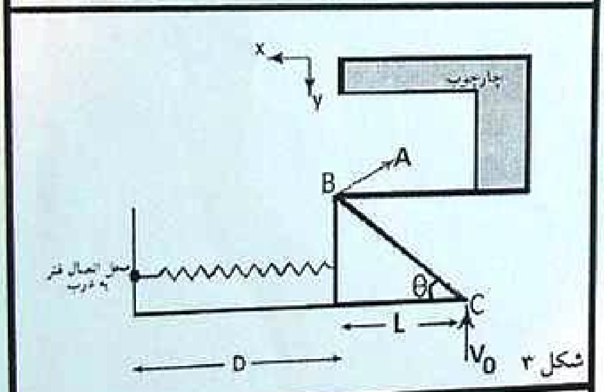
شکل ۱

شکل ۲ قسمتی از شکل ۱ را که با دایره مشخص شده است در مقیاس بزرگ‌تر نشان می‌دهد.

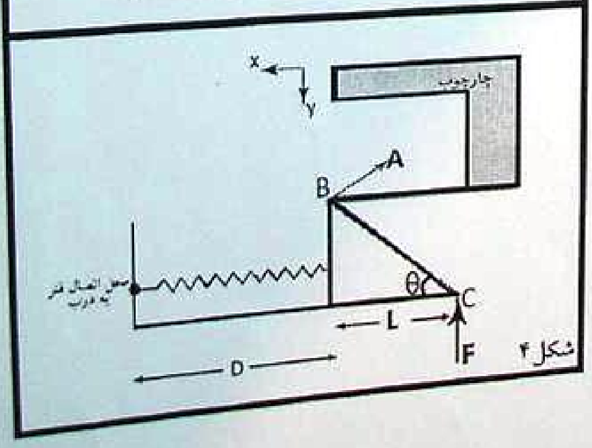


شکل ۲

در عمل چون زبانه به انتهای درب وصل است هنگام باز و بسته شدن روی مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند که شعاعش برابر عرضِ درب است، ولی اینجا فقط لحظه‌ی چفت شدن و باز شدن درب را در نظر می‌گیریم، طوری که در همه‌ی شکل‌ها می‌توان همیشه دو ضلع چپ و پایین زبانه را به ترتیب عمودی و افقی گرفت، یعنی از دوران صرف‌نظر می‌کنیم.



شکل ۳



شکل ۴

وقتی نقطه‌ی A با سطح زبانه تماس پیدا می‌کند ضریب اصطکاک جنبشی بین آنها را μ می‌گیریم. فاصله‌ی

افقی نقطه‌ی A از محل اتصال فنر D است.

چون زبانه به درب متصل است، در معادلات نیرو در راستای فنر (یعنی در راستای x) جرم زبانه را m و در معادلات نیرو در راستای عمود بر فنر (یعنی در راستای Y) جرم معادل سیستم زبانه-درب را M بگیرید. تنها نیروی عمودی که به سیستم زبانه-درب وارد می‌شود از نقطه‌ی A و تنها نیروهای افقی که به زبانه وارد می‌شود از طرف نقطه‌ی A و فنر است، و فنر فقط در راستای خودش می‌تواند نیرو وارد کند.

الف) درب مطابق شکل ۳ با سرعت V_0 رها می‌شود، V_0 را طوری بیابید که درب بسته شود (یعنی با فشرده شدن فنر نقطه‌ی C به نقطه‌ی A برسد).

ب) فرض کنید مطابق شکل ۴، درب اصطلاحاً "روی‌هم" است، یعنی نقاط A و B با هم در تماس اند و سیستم در حال سکون است. اگر نیروی ثابت F به صورت عمودی به سیستم زبانه-درب وارد شود، حداقل F را بیابید که بتواند درب را ببندد.

۲) آونگ ساده‌ای در نظر بگیرید که در لحظه‌ی $t=0$ تا زاویه‌ی کوچک θ_0 منحرف و سپس رها می‌شود. θ_0 کوچک است و از توانهای سوم و بالاتر آن صرف نظر می‌کنیم.

الف) کشش نخ را بر حسب θ و $\dot{\theta}$ بنویسید و آنرا تا مرتبه‌ی دوم بسط دهید.

ب) حرکت آونگ را نوسانی ساده در نظر بگیرید و کشش نخ را بر حسب زمان بنویسید.

پ) متوسط زمانی کشش نخ را در یک دوره‌ی تناوب حساب کنید.

ت) انرژی مکانیکی آونگ را بیابید. سطح انرژی پتانسیل صفر را محل اتصال در نظر بگیرید.

ث) حالا فرض کنید نخ را از محل اتصال خیلی آرام بالا می‌کشیم، طوری که طول آونگ به اندازه‌ی ΔL تغییر کند. با فرض این که این تغییر آن قدر کند باشد که بتوان در هر لحظه به جای کشش نخ میانگین زمانی آن را که در قسمت پ گفته شد قرار داد، کار انجام شده روی سیستم توسط نیروی خارجی که باعث تغییر طول آونگ شده است را بیابید.

ج) با استفاده از اصل بقای انرژی، تغییر دامنه‌ی حرکت (یعنی تغییر ایجاد شده در زاویه‌ی بیشینه‌ی آونگ) را بر حسب دامنه‌ی اولیه و پارامترهای مسئله بیابید.

۴) اگر روی قرصی رسانا به شعاع R و ضخامت ناچیز با بار کل Q ریخته شود، چگالی بار سطحی بر حسب فاصله از مرکز قرص به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{R^2-r^2}}$$

الف) α را بر حسب Q و R بیابید.

ب) پتانسیل نقطه‌ای به فاصله‌ی Z بالای مرکز قرص را بیابید.

پ) فرض کنید قرص رسانا به زمین متصل است و بار نقطه‌ای q در فاصله‌ی h بالای مرکز آن قرار داده شده است. کل بار القا شده روی قرص را بیابید.

راهنمایی:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} Cos^{-1}\left(\left|\frac{a}{x}\right|\right) + C$$

بسمه تعالی

امتحان پنجم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹)

بعدازظهر ۸۹/۵/۱۶

وقت: ۳ ساعت

۱) جسمی روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی θ می‌سازد قرار دارد. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح μ است. μ خیلی کوچک است و در این مسئله از توان دوم و بالاتر آن صرف‌نظر می‌کنیم.

مختصات x و y در صفحه‌ی سطح شیب‌دار را مطابق شکل در نظر بگیرید. کل مسئله در صفحه‌ی سطح شیب‌دار اتفاق می‌افتد و جسم هرگز از سطح جدا نمی‌شود. فرض کنید مطابق شکل جسم با سرعت v_0 و زاویه‌ی λ نسبت به محور y پرتاب شود. مطلوب است محاسبه‌ی:

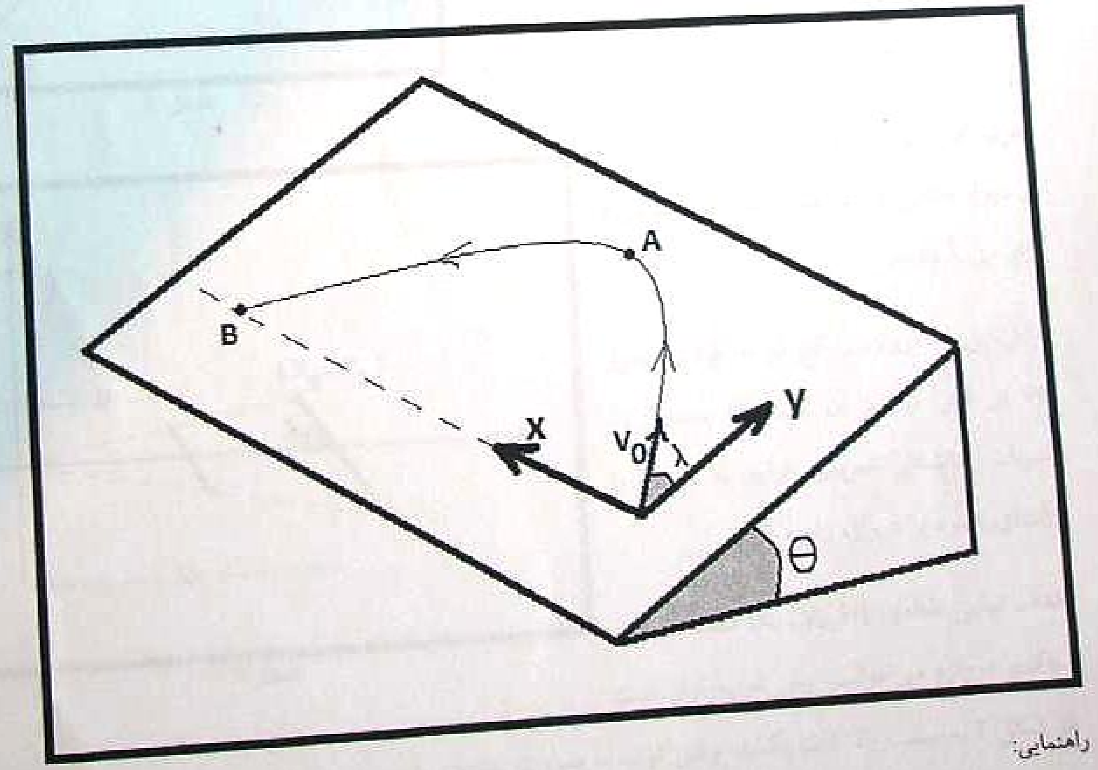
الف) بردار سرعت جسم بر حسب زمان

ب) زمانی که در آن مؤلفه‌ی عمودی سرعت یعنی v_y صفر می‌شود (t در نقطه‌ی A)

پ) مؤلفه‌ی عمودی مکان و مؤلفه‌ی افقی سرعت جسم در لحظه‌ی قسمت الف (یعنی y و V_x در A).

ت) زمانی که مسیر جسم دوباره محور x را قطع می‌کند(t در نقطه‌ی B).

ث) بردار سرعت جسم در لحظه‌ی قسمت ب.

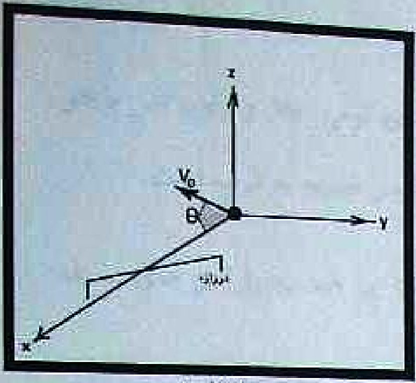


راهنمایی:

$$\int Sec(x)dx = Ln\left(|Sec(x) + Tan(x)|\right)$$

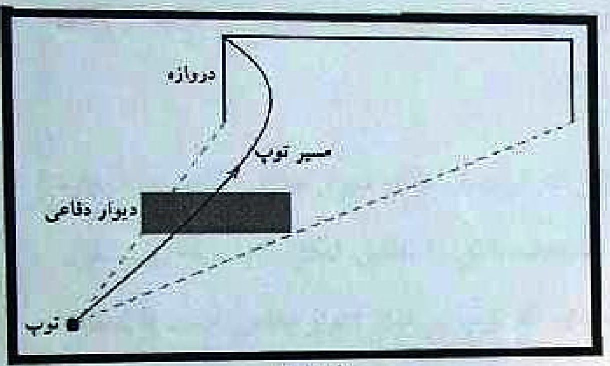
$$\int Sec^n(x)dx = \frac{Sec^{n-2}(x)Tan(x)}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int Sec^{n-2}(x)dx$$

۲) در این مسئله می‌خواهیم یک ضربه‌ی آزاد را در فوتبال بررسی کنیم. مختصات مطابق شکل ۱ است و توپ در مبدأ کاشته شده. بازیکن ضربه را در جهت خاصی شوت می‌کند و توپ پس از تغییر مسیر (کات کشیدن) مطابق شکل ۲، به دروازه می‌رسد. هدف مسئله بررسی این فرایند است. مختصات طوری تعریف شده است که سرعت اولیه‌ی توپ پس از شوت در



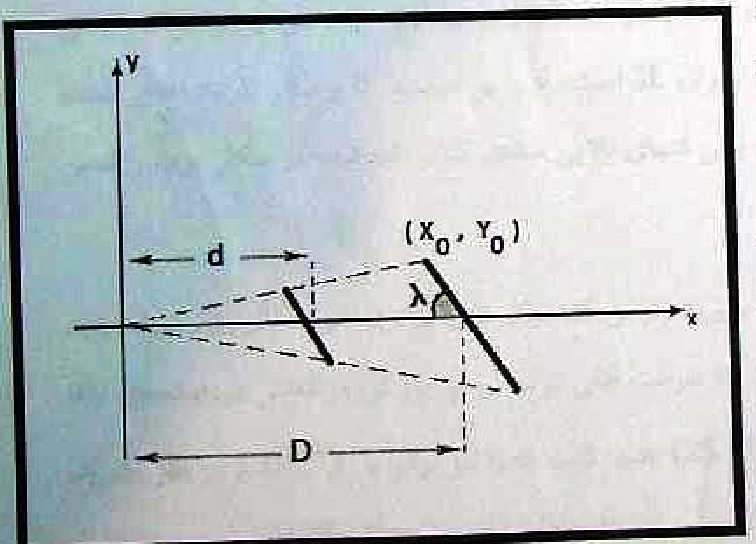
شکل ۱

صفحه‌ی XZ قرار دارد، با محور x زاویه‌ی θ می‌سازد و بزرگی‌اش V_0 است.



شکل ۲

شکل ۳ نمای شکل ۱ را از بالا نشان می‌دهد. دیوار دفاعی در فاصله‌ی d مطابق شکل قرار دارد و ارتفاع آن (قد بازیکنان همراه پرش) را h فرض می‌کنیم. دروازه نیز مطابق شکل در فاصله‌ی D است، ارتفاع آن H و مختصات یک طرف آن را (x_0 , y_0) در نظر می‌گیریم. دروازه و دیوار دفاعی موازی هم هستند و با محور x زاویه‌ی λ دارند.



شکل ۳

دلیل این که دروازه را کج (و نه موازی محور y) در نظر گرفتیم آن است که معمولاً در ضربات کات‌دار ضربه‌ی اولیه به توپ، با راستای عمود بر دروازه زاویه دارد.

هدف نهایی نقطه‌ی (x_0 , y_0 , H) است که آنرا سه‌کنج دروازه می‌خوانیم. پس توپ قرار است در شکل ۲ به سمت بالا کات بکشد. وقتی توپ به صورت کات‌دار شوت می‌شود(یعنی حول محوری گذرنده از مرکزش سریعاً دوران کند) نیروی وارد بر توپ از طرف هوا را به صورت $\vec{f} = m\,\alpha\,\hat{z} \times \vec{v}$ در نظر بگیرید. شتاب گرانش نیز g است. در کل مسئله از ابعاد توپ صرف نظر می‌کنیم و آنرا نقطه می‌گیریم.

الف) در این قسمت وجود دروازه و دیوار دفاعی را در نظر نگبرید. سرعت اولیه‌ی توپ v_0 و زاویه اش با افق θ است. بردار سرعت و مختصات توپ را بر حسب زمان بیابید. مبدأ زمان لحظه‌ی ضربه به توپ است.

ب) حال دروازه را بدون دیوار دفاعی در نظر بگیرید. رابطه ای بین v_0 و θ بر حسب پارامتر های مسئله بیابید که توپ به سه‌کنج برود.

پ) فرض کنید رابطه‌ی قسمت قبل برقرار است.رابطه‌ی دیگری بین پارامتر های مسئله بیابید که توپ از بالای دیوار دفاعی بگذرد.

ت) حالا دروازه‌بان را در نظر بگیرید. فرض کنید به محض این که توپ از بالای دیوار دفاعی گذشت، دروازه بان شروع به انجام واکنش می‌کند. دروازه‌بان به همراه دستان کشیده‌شده‌اش را مطابق شکل ۳ به میله‌ای به طول $2r$ و زاویه‌ی β با خط عمود مدل می‌کنیم. فرض کنید از لحظه‌ای که توپ بر فراز دیوار دفاعی است تا لحظه-ای که دروازه‌بان به این صورت درآید مقدار زمان Δ سپری شود. دروازه‌بان ابتدا در وسط دروازه است و به محض این که به فرم نشان داده شده در شکل در آمد، با سرعت u و زاویه‌ی β با خط عمود پرش می‌کند (یعنی سرعت اولیه‌اش در راستای بدنش است). طول دروازه $2L$ است. u را بر حسب θ و سایر پارامتر های مسئله طوری بیابید که دروازه‌بان بتواند توپ را بگیرد، یعنی انتهای بالایی میله‌ی نشان داده شده در شکل توپ را لمس کند.

ث) در این قسمت وجود دیوار دفاعی را نادیده بگیرید. فرض کنید یک ضربه‌آزادزن خوب (آلوارو رکوبا، دیوید بکهام، سینیشا میهایلوویچ،...) ضربه را طوری بزند که سرعت افقی توپ (یعنی بزرگی مؤلفه‌اش در صفحه‌ی xy) برابر $90\ \frac{km}{h}$ و مختصات (x_0 , y_0) نیز $(25 , 15)$ باشد. ثابت α را نیز برابر با $1\ (s^{-1})$ در نظر بگیرید. با فرض رفتن توپ به سه‌کنج، بزرگی سرعت اولیه‌ی توپ و زاویه‌اش با افق را حساب کنید.

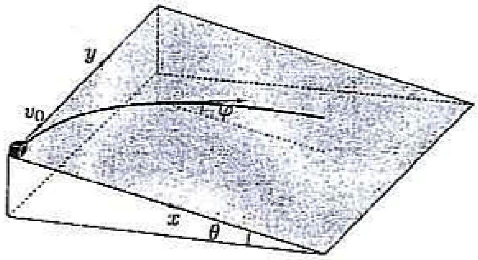
بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹)

مدت : ۲٫۵ ساعت

۸۹٫۵٫۲۳

۱- ذره‌ای را در زمانِ $t = 0$ رويِ سطحِ شیب‌داری با شیبِ θ با سرعتِ اولیه‌ي $v_0\mathbf{j}$ پرتاب می‌کنیم. محورِ x در راستايِ بیش‌ترین شیب و ضریبِ اصطکاکِ ذره با سطح μ است. پارامترِ α را با رابطه‌ي $\alpha =: \mu \cot\theta$ تعریف می کنیم. می‌خواهیم حرکتِ ذره رويِ سطحِ شیب‌دار را به ازايِ α هايِ مختلف بررسی کنیم.



a1) $\alpha = 1$ است. مختصه‌ي طولِ مسیر را s بنامید. قانونِ نیوتن را برايِ راستايِ محورِ x و راستايِ مماس بر مسیر بنویسید. با استفاده از این دو معادله رابطه‌ای بینِ $\ddot{x}$ و $\ddot{s}$ بیابید.

a2) $\dot{x}$ و $\dot{\varphi}$ را بر حسبِ φ، زاویه‌ي شیبِ مسیر که در شکل نشان داده شده، و پارامترهايِ مسئله به دست آورید.

a3) پس از گذشتِ مدتِ طولانی، $t \to \infty$، سرعتِ ذره و φ را به دست آورید.

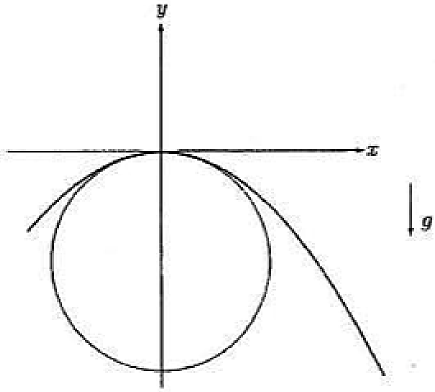
b) $\alpha < 1$ است. $\dot{x}$ و $\dot{\varphi}$ را بر حسبِ φ، و t زمانِ حرکت و پارامترهايِ مسئله به دست آورید. تابعیتِ $\dot{x}$ بر حسبِ t، و φ را پس از گذشتِ مدتِ طولانی به دست آورید.

c) $\alpha > 1$ است. ذره در زمانِ T ساکن می‌شود. T را به دست آورید.

پاسخ‌هايِ خود را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

۲-

a) سهمیِ $y = -ax^2$ را در نظر بگیرید. مطابقِ شکل دایره‌ای در مبدأ مماس بر این سهمی در نظر بگیرید به طوری که مشتقِ دومِ دایره و سهمی در مبدأ برابرند. در این صورت می‌گوییم انحنایِ دو منحنی یکی است. شعاعِ دایره R چه‌قدر است؟



ذره‌ای با سرعتِ اولیه‌ی $v_0\mathbf{i}$، $(v_0 > 0)$، مماس بر سهمی از مبدأ پرتاب می‌شود. v_0 چه‌قدر باشد تا ذره در همان ابتدا از سهمی جدا شود؟

b) حالا جسمی به شکلِ رویه‌ای با معادله‌ی $y = f(x)$ با شرطِ $f(0) = 0$ را در نظر بگیرید. ذره‌ای در مبدأ با سرعتِ اولیه‌ی v_0 مماس بر خمِ $y = f(x)$ پرتاب می‌شود. از اصطکاکِ بینِ ذره و جسم چشم‌پوشی کنید. اگر ذره بالاخره زمانی از سطح جدا شود در مکانِ جدا شدن $\dot{x}$، $\dot{y}$، $\ddot{x}$، $\ddot{y}$ بر حسبِ f و مشتقِ f در نقطه‌ی جداشدن و پارامترهایِ مسئله چیست؟

c) با استفاده از پایستگیِ انرژی معادله‌ای بینِ f، و مشتقاتِ f بیابید که با حلِ آن بتوان نقطه‌یِ جداشدنِ ذره از سطح (اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد) را به دست آورد.

d) حالا فرض کنید معادله‌ی رویه $y = f(x) = -\alpha x^k$, $(\alpha, k > 0)$ است. ذره‌ای در مبدأ با سرعتِ اولیه‌ی v_0 مماس بر خمِ $y = -\alpha x^k$ پرتاب می‌شود. به ازایِ مقادیرِ مختلفِ k بررسی کنید که آیا ذره از رویه جدا می‌شود یا نه؟ حالت‌هایِ $2 < k$، $k = 2$، $1 < k < 2$، $k = 1$، و $0 < k < 1$ را به تفکیک بررسی کنید.

پاسخ‌هایِ خود را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

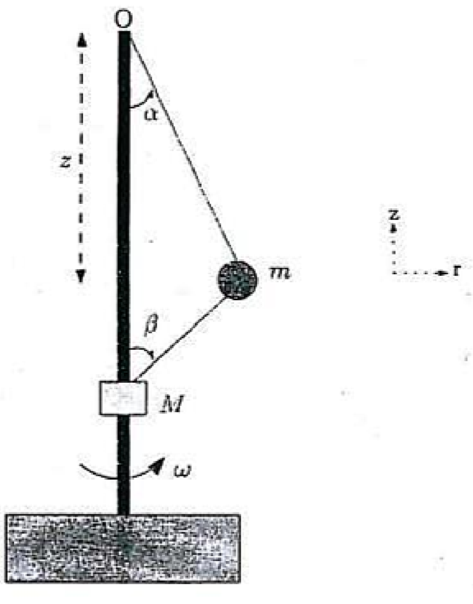
۳- یک سرِ نخِ سبکی به طول l که از داخل مهره‌ای به جرم m گذشته به نقطه‌ی O از میله‌ی قائمی بسته شده است. مهره‌ی m آزادانه می‌تواند در طول نخ حرکت کند. سرِ دیگر نخ به جرم M وصل است که می‌تواند بدون اصطکاک در طول میله بالا و پایین رود. میله بر روی موتوری نصب شده که قادر است میله را با سرعت زاویه‌ای ω بچرخاند. شتاب جاذبه گرانشی g است. در وضعیتی که جرم M در تعادل است (یعنی در امتداد میله حرکت قائم ندارد):

آ) معادلات حرکت دو جرم را در راستای z و r بنویسید. (می‌توانید از پارامترهای کمکی α، β و z نیز استفاده کنید. z فاصله‌ی صفحه‌ی دوران جرم m تا نقطه‌ی O است.)

ب) رابطه‌ای بین ω و $\cos\alpha$ (بر حسب m، M، l و g) بدست آورید. این رابطه را به شکل $\sum_{n=0} a_n \cos^n \alpha = 0$ بنویسید و ضرایب a_n را مشخص کنید.

پ) هنگامی که سه‌چهارم طول نخ بین نقطه‌ی O و مهره‌ی m واقع است زاویه‌های α و β ($\cos\alpha$ و $\cos\beta$) چقدر اند؟

ت) در شرایط قسمت پ)، ω و کشش در طول نخ را بدست آورید.



امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹) (زمان ۲/۵ ساعت)

مسئله‌ی 1) در نظریه کوانتومی، تابش الکترومغناطیسی به صورت گسیل فوتونهایی با انرژی $h\nu$ و تکانه $h\nu/c$ فرض می شود که h ثابت پلانک، c سرعت نور و ν بسامد تابش است. باریکه یکنواختی از فوتونها را در نظر بگیرید که مطابق شکل در جهت z بر آینه محدبی به شعاع R می تابند. این آینه یک عرقچین کروی به زاویه راس β_0 است که محور تقارن آن محور z است. شدت تابش، یعنی انرژی که در واحد زمان بر واحد سطح عمود بر امتداد تابش می تابد، I است. آینه بر روی پایه ای ثابت قرار گرفته و ساکن است.

جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد كنيد.

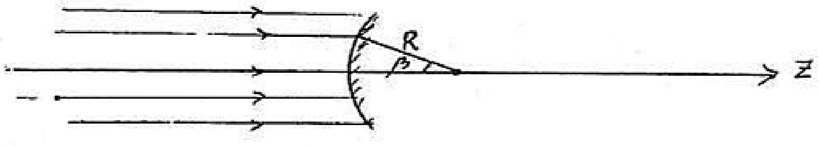
a) با فرض آن که بازتابش نور از قانون انعکاس پیروی می کند یعنی زاویه تابش با خط عمود با زاویه بازتابش برابر است، نیروی وارد بر آینه را حساب کنید و در پاسخنامه وارد کنید.

b) نیروی وارد بر کره ای ساکن به شعاع R و جرم بزرگ که سطح خارجی آن کاملا منعکس کننده است و در معرض تابش یکنواخت خورشید قرار دارد را به دست آورید و در پاسخنامه وارد کنید. کره در معرض هیچ نیروی دیگری نیست.

c) سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی فوتونها $d\sigma/d\theta$ رابر حسب پارامترهای داه شده به دست آورید که در آن θ زاویه انحراف فوتونها از امتداد اولیه تابش آنهاست. (یادآوری: $d\sigma$ سطح مقطع هدف برای فوتونهایی است که زاویه انحراف آنها بین θ و $\theta + d\theta$ است.)

d) سطح مقطع کل کره در برابر تابش الکترومغناطیسی رابا استفاده از نتیجه قسمت قبل مسئله حساب کنید. جواب را در پاسخنامه وارد کنید.

e) حال می خواهیم جرم کره رامتناهی بگیریم و اثر پس زدگی آن را به حساب آوریم. فرض کنید N فوتون بر کره مذکور می تابند. فوتونها به طور متقارن روی سطح جانبی استوانه ای با شعاع کوچکتر از R حرکت می کنند که محور تقارن آن محور z است. فرض کنید قبل از برخورد فوتونها کره با سرعت v در حال حرکت بوده است و پس از برخورد تکانه کوچک Δp و انرژی کوچک ΔE به آن منتقل می شود. تغییر انرژی کره فقط به صورت تغییر انرژی جنبشی آن است. به دلیل انرژی انتقال یافته به کره بسامد فوتونها تغییر می کند. با استفاده از ملاحظات فوق بسامد فوتونهایی که در زاویه θ منحرف می شوند $\nu'(\theta)$ را به دست آورید و در پاسخ‌نامه وارد کنید.



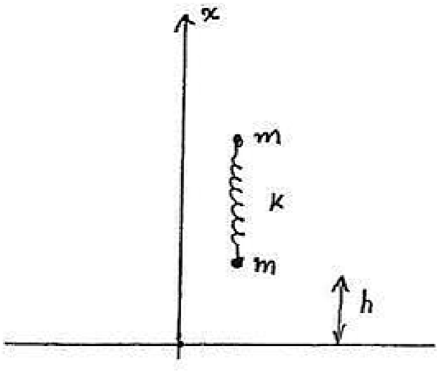
مسئله‌ي 2) دو جرم نقطه ای m با فنری به ضریب k و طول عادی l به یکدیگر وصل شده اند. فنر طوری ساخته شده که در حالت فشردگی نمی تواند طولی کمتر از l_0 داشته باشد. دستگاه را در حالی که امتداد فنر قائم است و طول عادی خود را دارد و جرم پایینی در ارتفاع h از سطح زمین است از حال سکون رها می کنیم. در لحظه‌ی $t = 0$ جرم پایینی با زمین برخورد کشسان می کند و به بالا بر می گردد. زمان برخورد بسیار کوتاه است. محور قائم را x، جهت مثبت آن را رو به بالا، مبدا را روی زمین، مختصه جرم پایینی را x_1، مختصه جرم بالایی را x_2 و شتاب ثقل را g بگیرید.

جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

a) شرطی راروی داده های مسئله به دست آورید که‌در صورت برقراری آن پس از اولین برخورد جرم پایینی با زمین، فنر به حالت کمترین فشردگی نرسد و آن را در پاسخنامه وارد کنید.

b) معادله ای را به دست آورید که از حل آن t_2 زمان دومین برخورد جرم پایینی با زمین به دست آید و آن را در پاسخنامه وارد کنید.

c) ارتفاع جرم بالایی را در لحظه t_2 به دست آورید و آن را در پاسخنامه وارد کنید.



مسئله‌ی 3) گلوله ای به جرم m با نخی به طول ثابت l به نقطه O بسته شده وآزادانه در فضا حرکت می کند. شتاب ثقل مطابق شکل در جهت (z+) است. در ابتدا در حالی که نخ در زاویه θ_0 نسبت به امتداد قائم قرار دارد جرم m رابا سرعت افقی v_0 عمود بر نخ به حرکت در می آوریم.

جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه در پاسخ‌نامه وارد کنید.

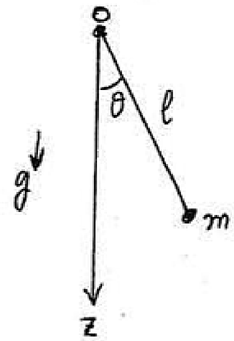
a) معادلات حرکت نیوتنی را در مختصات استوانه ای (ρ, ϕ, z) بنویسید و در پاسخ‌نامه وارد کنید. (یادآوری: ρ و ϕ مختصات قطبی در صفحه x-y هستند.)

b) با توجه به قید مسئله ρ و z را بر حسب θ بنویسید و نیروی کشش نخ را نیز از معادلات حذف کنید. به این ترتیب دو معادله برای θ و ϕ و مشتقات آنها به دست آورید و آنها را در پاسخنامه بنویسید.

c)معادله ای که شامل $\ddot{\phi}$ است به یک ثابت حرکت منجر می شود. با استفاده از این ثابت حرکت $\dot{\phi}$ را به صورت تابعی از θ به دست آورید و در معادله اول قرار دهید. به این ترتیب معادله ای برای θ به دست می آید که شامل $\ddot{\theta}$ نیز هست. این معادله را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

d) نشان دهید معادله اخیر دو حل خاص با θ ثابت دارد. شرایط اولیه و پارامترها چگونه باشند تا چنین حل هایی امکان پذیر باشند. خلاصه نتایج را در پاسخ‌نامه وارد کنید.

e) حال فرض کنید دستگاه نسبت به حلی که در آن گلوله روی یک دایره افقی حرکت می کند اندک انحرافی پیدا کند، به عبارت دیگر $\theta = \theta_0 + \theta_1$ که $\theta_0 >> \theta_1$. نشان دهید θ_1 حل نوسانی دارد. بسامد این حل نوسانی ω را پیدا کنید و در پاسخنامه وارد کنید.



بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۹)　　　وقت: ۲ ساعت

۱) دو استوانه ی رسانای طویل هم محورند. شعاع دو استوانه به ترتیب a و b ($a<b$) هستند. استوانه ی به شعاع a به پتانسیل $+V$ و استوانه ی به شعاع b به پتانسیل صفر متصل اند.

الف) میدان الکتریکی بین دو استوانه را برحسب کمیت های داده شده به دست آورید.

فرض کنید الکترونی با جرم m و بار e از استوانه ی به شعاع a با زاویه ی α نسبت به خط شعاع، با سرعت u در صفحه ی عمود بر محور استوانه ها از آن خارج شود. فرض کنید این الکترون اثری در میدان الکتریکی بین دو استوانه ندارد.

ب) با توجه به معادله های حرکت این الکترون، دو ثابت حرکت را به دست آورید.

ج) اگر این الکترون که با زاویه ی α نسبت به خط شعاع از استوانه ی به شعاع a خارج شده به استوانه ی به شعاع b برسد، تحت چه زاویه ای نسبت به خط شعاع به استوانه ی b می رسد؟ ($\beta=?$)

د) حداقل u چه قدر باشد تا این الکترون به استوانه ی b برسد؟

ه) فرض کنید n الکترون با سرعت یکسان u به طور یکنواخت در تمام جهت ها در صفحه ی عمود بر محور استوانه ها از استوانه ی a خارج شوند و همگی به استوانه ی b برسند. تعداد الکترون ها در زاویه ی بین β و $\beta+d\beta$ را برحسب β، و بقیه ی کمیت های داده شده پیدا کنید.

۲) دو محیط دی الکتریک ۱ و ۲ به ترتیب با گذردهی های ϵ_1 و ϵ_2 در نظر بگیرید. مرز بین این دو محیط صفحه ی yz است. محیط ۱ فضای $x<0$ و محیط ۲ فضای $x>0$ را بر کرده اند بار نقطه ای q_1 در نقطه ی $(-d, 0, 0)$ قرار دارد. میدان الکتریکی در محیط ۱ و ۲ در نزدیکی یک عنصر کوچک روی مرز مشترک دو محیط به ترتیب

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}'$$

$$\boxed{E_2 = \frac{\sigma_p}{2\epsilon_0}\hat{i} + \vec{E}'}$$

است که در آن σ_p چگالی بار قطبشی سطحی روی آن عنصر کوچک و $\vec{E}'$ مجموع میدان الکتریکی بار نقطه ای q_1 و بقیه ی بارهای قطبشی سطحی روی مرز مشترک دو محیط، در محل آن عنصر کوچک است.

الف) با توجه به بردارهای $\vec{E}_1$ و $\vec{E}_2$ که در بالا بیان شد، بردارهای قطبش $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ در نزدیکی عنصر کوچک را برحسب σ_p و $\vec{E}'$ و بقیه ی ثابت های داده شده پیدا کنید.

ب) با توجه به $\vec{P}_1$ و $\vec{P}_2$ ی به دست آمده، σ_p را برای هر نقطه روی صفحه ی yz $(0, y, z)$ برحسب بار q_1 و بقیه ی ثابت های مسئله به دست آورید.

ج) فرض کنید بار نقطه ای q_2 هم، در نقطه ی $(d, 0, 0)$ قرار دارد. با توجه به قسمت (ب) چگالی بار قطبشی سطحی σ'_p ناشی از بار q_2 را بنویسید.

د) چگالی بار قطبشی سطحی کل $(\sigma_t = \sigma_p + \sigma'_p)$ ناشی از هر دو بار q_1 و q_2 را بنویسید.

ه) نیرویی که به بار q_2 وارد می شود را به دست آورید. (F_{q_2})