باسمه تعالی

دفترچه‌ی سوالات آزمون آزمایشی مرحله‌ی اول

وبلاگ المپیاد کامپیوتر شاززز

پنج‌شنبه و جمعه - شانزدهم و هفدهم بهمن ۱۳۹۳

تعداد سوالات	مدت آزمون (دقیقه)
۳۰	۲۱۰

طراحی شده توسط:

علی بهجتی، پیمان جبارزاده، علی حقانی، امین بهجتی، محمدرضا ملکی و امیرکیوان محتشمی

با تشکر ویژه از:

رضا سلطانی، محمد روغنی و علی اسدی

توضیحات

استفاده از ماشین حساب ممنوع است

۱ـ لطفا تمام مشخصات خواسته شده در پاسخ‌برگ را وارد نمایید.

۲ـ دفترچه‌ی سوالات(به جز این صفحه) شامل نه صفحه است. بلافاصله پس از شروع آزمون، دفترچه‌ی خود را بررسی نمایید و در صورت وجود هرگونه نقص، مسئول جلسه را مطلع نمایید.

۳ـ پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.

۴ـ استفاده از هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت، هرگونه منابع الکترونیکی(مانند اینترنت و موبایل) و وسایلی از این قبیل ممنوع است.

تمامی حقوق این آزمون برای **وبلاگ شاززز** محفوظ است

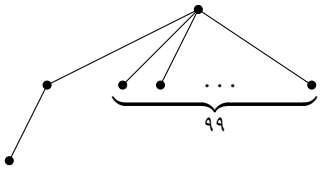
آدرس اینترنتی: http://shaazzz.blogfa.com

وزیر راه کشور شازکیه، می‌خواهد برای رفع مشکل ترافیکی بین شهرها، همه جاده‌ها را یک‌طرفه کند. او به هر جهت‌دهی جاده‌ها یک امتیاز نسبت می‌دهد به اینصورت که امتیاز یک جهت‌دهی برابر است با تعداد جفت شهرهای (u, v) که از u به v می‌توان رسید و $u \neq v$. توجه کنید که جفت (u, v) با جفت (v, u) فرق دارد.

در نقشه‌های رسم شده توسط وزیر، هر نقطه نشان‌دهنده‌ی یک شهر و هر خط بین دو نقطه نشان‌دهنده‌ی یک جاده بین دو شهر دو طرف آن است.

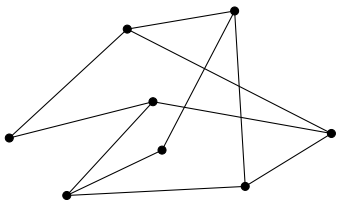
با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

۱) شکل زیر نقشه‌ی کشور شازکیه است. وزیر می‌خواهد بداند مجموع امتیازهای همه‌ی جهت‌دهی‌های ممکن چقدر است؟



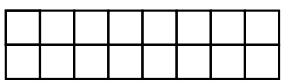
الف) ۱۰۴۰۵×۲^{۹۹} ب) ۱۰۴۰۵×۲^{۹۸} ج) ۱۰۴۰۳×۲^{۹۹} د) ۱۰۸۰۹×۲^{۹۸} ه) ۱۰۴۰۶×۲^{۹۹}

۲) وزیر راه به تازگی وزیر راه کشور دارشوزه هم شده است و می‌خواهد طرح فوق‌العاده خود را در آن‌جا نیز اجرا کند، اما به علت کمبود وقت نمی‌تواند وقتی به پیدا کردن جهت‌دهی مناسب برای جاده‌های این کشور اختصاص دهد. درنتیجه تصمیم گرفته است که به جای این‌کار یک جهت‌دهی را به صورت تصادفی انتخاب کند. البته او نگران است که در این صورت امتیاز جهت‌دهی انتخاب شده بسیار کم باشد. شکل زیر نقشه‌ی کشور دارشوزه است. بین تمام جهت‌دهی‌های ممکن امتیاز جهت‌دهی با امتیاز کمینه چقدر است؟



الف) ۱۴ ب) ۱۰ ج) ۱۳ د) ۱۱ ه) ۱۲

۳) زاشک، به تازگی یاد گرفته است روی جدول راه برود. البته او فقط می‌تواند از یک خانه به خانه‌ی راست یا پایین آن خانه(در صورت وجود) برود. زاشک می‌خواهد روی جدول زیر راه برود ولی برای تمرین بیشتر می‌خواهد موانعی نیز درون جدول قرار دهد. مشخص است که زاشک نمی‌تواند وارد خانه‌هایی که در آن‌ها مانع قرار دارد بشود. محاسبه کنید او به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌ای(شامل زیرمجموعه‌ی تهی) از خانه‌ها را انتخاب کند و در آن‌ها مانع قرار دهد طوری که با وجود این موانع او همچنان بتواند از گوشه‌ی بالا چپ جدول به گوشه‌ی پایین راست آن برسد؟



الف) ۲۵۵ ب) ۵۷۶ ج) ۳۸۲ د) ۱۰۲۴ ه) ۲۵۶

۴) به دنباله‌ی $a_۱, a_۲, \cdots, a_{۱۱}$ از اعداد نامنفی زیبا می‌گوییم اگر دارای خاصیت های زیر باشد:

۱. $a_۶ = ۶$

۲. $a_i \leq a_{i+۱} (۱ \leq i \leq ۵)$

۳. $a_i \leq a_{i-۱} (۷ \leq i \leq ۱۱)$

چند دنباله‌ی زیبا داریم؟

الف) ۶۳۵۰۴ ب) ۱ ج) ۸۵۳۷۷۶ د) ۲۰۴۳۰۴ ه) ۲۱۳۴۴۴

۵) «تاثیرگذاری» یک دنباله از اعداد مانند $x_۱, x_۲, ..., x_k$ برابر است با $\sum_{i=۱}^{k} (-۱)^{(i-۱)} \times x_i$. دنباله‌ی A «زیردنباله‌ی متوالی» دنباله‌ی B است اگر بتوان با حذف تعدادی(یا هیچی) از عناصر اول و یا آخر B، A را به دست آورد. چند دنباله‌ی متمایز وجود دارد که زیررشته‌ی دنباله‌ی زیر باشند و تاثیرگذاری آن صفر است؟(دو دنباله متمایزند اگر یا طولشان متفاوت باشد یا عددی مانند i وجود داشته باشد که عضو iام دو دنباله با هم یکسان نباشد)

$۱, -۱, -۵, -۴, ۷, ۶, -۱, ۰, ۹, -۷, -۶, ۱, ۰$

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۹ د) ۱۰ ه) ۶

۶) یک جدول ۶×۶ داریم و می‌خواهیم از خانه‌ی پایین‌ـچپ جدول به خانه‌ی بالاـراست آن برویم. در هر حرکت می‌توانیم یا یک خانه به راست برویم یا یک خانه به بالا و یا اگر حرکت قبل بالاـراست نرفته بودیم در این حرکت به خانه‌ی بالاـراست برویم. به چندطریق می‌توانیم از خانه‌ی پایین‌ـچپ به خانه‌ی بالاـراست برویم؟ (توجه کنید که ما روی خانه‌های جدول حرکت می‌کنیم، نه روی نقطه‌های تقاطع خطوط جدول)

الف) ۶۹۴۶ ب) ۱۲۷۲ ج) ۱۳۶۲ د) ۱۱۳۶ ه) ۱۴۵۲

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۱. یک رشته T به عنوان ورودی بگیر. طول رشته با $|T|$ و حرف iم رشته با t_i نشان داده می‌شود $(۱ \leq i \leq |T|)$

۲. رشته‌ی P را برابر رشته‌ی تهی قرار بده

۳. به ترتیب به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, |T|$:

- اگر رشته‌ی P تهی بود و یا t_i با حرف آخر رشته‌ی P یکسان نبود، t_i را در انتهای P بنویس وگرنه حرف آخر رشته‌ی P را پاک کن.

۴. P را خروجی بده

با توجه به الگوریتم بالا به سه سوال زیر پاسخ دهید

۷) یک رشته‌ی ۴ حرفی از حروف $\{a, b, c, d\}$ مانند S را معتبر می‌گوییم اگر خروجی این الگوریتم با ورودی S تهی باشد. چند رشته‌ی متمایز معتبر وجود دارد؟

الف) ۲۸ ب) ۳۲ ج) ۱۶ د) ۱۴ ه) ۴

۸) الگوریتم سوال قبل را در نظر بگیرید. چند رشته‌ی به طول حداکثر ۶ از حروف $\{s, h, a, z\}$ مانند S وجود دارند که اگر S را به این الگوریتم ورودی دهیم رشته‌ی خروجی آن برابر shaz باشد؟

الف) ۲۱ ب) ۱۶ ج) ۱۷ د) ۲۰ ه) ۱۹

۹) فرض کنید x تعداد رشته‌های دودویی(رشته‌های متشکل از حروف صفر و یک) به‌طول ۲۰ مانند S باشد که اگر S را به این الگوریتم ورودی دهیم رشته‌ی خروجی آن برابر ۱۰۱۰۱۰۱۰ باشد.باقیمانده‌ی مجموع ارقام x در تقسیم بر ۵ چند است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۰) یک روبات در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ صفحه‌ی مختصات ایستاده است و می‌خواهد به نقطه‌ی $(۲۰۱۵, -۱۳۹۳)$ برود. روبات در مرحله $i (i \geq ۰)$ام از حرکتش حرکات زیر را انجام می‌دهد و هرگاه به نقطه‌ی مقصد برسد متوقف می‌شود.

۱. i بار به نقطه‌ی پایین ـ چپ می‌رود.

۲. i بار به نقطه‌ی پایین ـ راست می‌رود.

۳. i بار به نقطه‌ی بالا ـ راست می‌رود.

۴. i بار به نقطه‌ی بالا ـ چپ می‌رود.

۵. به نقطه‌ی بالا می‌رود.

درنتیجه روبات در مرحله‌ی صفرم از حرکت خود به نقطه‌ی $(۰, ۱)$ می‌رود. سپس در مرحله‌ی یکم به ترتیب به خانه‌های $(-۱, ۰)$، $(۰, -۱)$، $(۰, ۰)$، $(۱, ۰)$، $(۰, ۱)$ رفته و در انتها به خانه‌ی $(۱, ۱)$ می‌رود. جا به جا شدن روبات از یک نقطه به یک نقطه‌ی دیگر یک ثانیه زمان می‌برد درنتیجه انجام مرحله‌ی iم برای روبات $۱ + i \times ۴$ ثانیه طول می‌کشد. برای مثال روبات پس از ثانیه‌ی سوم در نقطه‌ی $(-۱, ۰)$ قرار دارد. اگر روبات پس از s ثانیه به نقطه‌ی $(۲۰۱۵, -۱۳۹۳)$ می‌رسد، باقیمانده‌ی $s^۲$ بر یازده را به دست آورید.

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۹

۱۱) رشته‌ی زیر را در نظر بگیرید. به یک رشته آینه‌ای می‌گوییم اگر از هر دو طرف به یک شکل خوانده شود. مثلا رشته‌ی abcba یک رشته‌ی آینه‌ای است اما رشته‌ی adcba آینه‌ای نیست. به چند طریق می‌توان یک رشته به طول حداکثر ده به انتهای رشته‌ی shaazoozaa اضافه کرد که رشته‌ی حاصل آینه‌ای باشد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۲ د) ۱ ه) ۷

۱۲) امین هر یک از اعداد ۱ تا ۶۳ با فاصله را روی تخته نوشته است و می‌خواهد این دنباله را به دوستش هدیه دهد. علی برای اذیت کردن امین، ابتدا نمایش مبنای دوی هر عدد را زیر آن می‌نویسد و سپس دنباله‌ی اولیه را پاک می‌کند. وقتی دوست امین دنباله‌ای که علی نوشته است را می‌بیند فکر می‌کند اعداد در مبنای سه نوشته شده‌اند و درنتیجه با این فرض اعداد را به مبنای ده بازمی‌گرداند و روی تخته می‌نویسد. مجموع اعدادی که دوست امین روی تخته می‌نویسد چقدر است؟

الف) ۱۱۶۶۴ ب) ۲۳۲۹۶ ج) ۱۱۶۴۸ د) ۲۳۳۲۸ ه) ۶۹۸۸۸

۱۳) در سوال بالا، اگر امین اعداد ۱ تا ۸۱ را روی تخته بنویسد، مجموع اعدادی که دوست امین می‌نویسد چقدر خواهد بود؟

الف) ۲۵۲۵۳ ب) ۱۱۹۶۹ ج) ۲۳۶۳۳ د) ۲۴۴۴۲ ه) ۳۶۹۳۳

۱۴) علی و امین مشغول بازی روی یک جدول ۳ × ۳ هستند. آن‌ها به نوبت حرکت می‌کنند و حرکت اول را امین انجام می‌دهد. هر فرد در نوبت خودش یک خانه‌ی خالی از جدول را انتخاب کرده و حرف اول اسم خود را درون آن می‌نویسد. علاوه بر این هر فرد یک بار در طول بازی حق دارد در یکی از نوبت‌های خود علاوه بر حرکتش یکی از خانه‌های جدول را انتخاب کند و آن را پاک کند. توجه کنید که در این حرکت باز هم یکی از خانه‌های جدول را انتخاب می‌کند و حرف اول اسم خود را درون آن می‌نویسد. اگر حرف اول اسم یک نفر در هر سه خانه‌ی یک سطر یا یک ستون یا یکی از قطرهای اصلی یا فرعی مربع قرار بگیرد او برنده‌ی بازی است و بازی متوقف می‌شود. در صورتی که جدول پر شود اما این اتفاق نیفتد بازی مساوی می‌شود. صحیح ترین گزینه را انتخاب کنید.

الف) نفر اول استراتژی برد دارد ب) نفر دوم استراتژی برد دارد

ج) نفر اول استراتژی نباختن دارد د) نفر دوم استراتژی نباختن دارد ه) گزینه ج و د

۱۵) جدول زیر را در نظر بگیرید. هر مرحله یک خانه را انتخاب کنیم و عدد آن خانه و همسایه‌های مجاور ضلعی آن را عوض می‌کنیم(عدد یک را به صفر و عدد صفر را به یک تبدیل می‌کنیم). هر خانه را می‌توانیم حداکثر یک بار انتخاب کنیم. به چند حالت می‌توانیم با استفاده از این عملیات تمام خانه‌های جدول را صفر کنیم؟ (هر حالت یعنی مجموعه‌ای از خانه‌ها که انتخاب می‌کنیم)

۰	۱	۱
۱	۱	۱
۰	۱	۰

الف) ۲ ب) ۱ ج) ۴ د) ۸ ه) ۰

۱۶) به چند طریق می‌توانیم یک جدول ۱۰ × ۲ را با سه رنگ، رنگ کنیم طوری که در هر زیرمربع ۲ × ۲ یک رنگ حداقل سه‌بار آمده باشد.

الف) ۳۴۶۲۶۹ ب) ۴۷۳۳۵۵ ج) ۱۹۹۶۹۴۷ د) ۲۱۹۱۸۳ ه) ۴۹۰۰۰۸

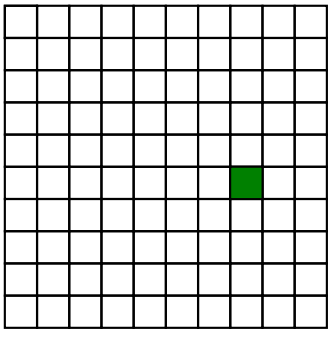
۱۷) کیوان به تازگی رسم نقشه‌های کشورهایی را که تمام جاده‌های بین شهری آن یک‌طرفه است، یاد گرفته است. در رسم چنین نقشه‌هایی، کیوان به ازای هر شهر یک نقطه روی کاغذ می‌گذارد و اگر جاده‌ای از شهر «الف» به شهر «ب» وجود داشته باشد یک فلش از نقطه‌ی متناظر شهر «الف» به نقطه‌ی متناظر شهر «ب» رسم می‌کند. در این‌صورت شهر «الف» نقطه‌ی شروع جاده و شهر «ب» نقطه‌ی پایان جاده نامیده می‌شود. توجه کنید که نقطه‌ی شروع و پایان یک جاده با هم متفاوت است.

او به نقشه‌ی کشورهایی که در آن هر شهر نقطه‌ی شروع دقیقا یک جاده و نقطه‌ی پایان دقیقا یک جاده است، زیبا می‌گوید از آن‌جا که او خیلی به نقشه‌های زیبا علاقه دارد برای همین می خواهد از امروز، هرروز یک نقشه‌ی زیبا از کشوری با ۸ شهر که قبلا رسم نکرده را رسم کند. پیمان که خیلی از کیوان متنفر است می خواهد ببیند حداکثر تا چند روز دیگر باید شادی او را تحمل کند. برای او مشخص کنید کیوان تا چند روز می‌تواند چنین نقشه‌ای رسم کند؟

الف) ۵۰۴۰ ب) ۶۲۰۲ ج) ۱۴۸۳۳ د) ۱۸۱۵۵ ه) ۴۰۳۲۰

۱۸) به تازگی در شهر شاززززآباد پارکی زیبا به‌شکل یک جدول ۱۰ × ۱۰ احداث شده است که سطرهای این جدول از بالا تا پایین و ستون‌های آن از چپ به راست با شماره های ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده است و خانه‌ی (i, j) آن به معنای خانه‌ی واقع در سطر iام و ستون j ام است.

در خانه‌ی $(۶, ۸)$ این جدول یک درخت با قدمت ۲۰۴۸ ساله قرار دارد. مسئولان شهرداری شاززززآباد می‌خواهند در این پارک یک مکان به شکل مربع برای تفریح کودکان بسازند که هر خانه از پارک یا کامل درون این مکان تفریحی بیفتد و یا کامل خارج آن بیفتد. همچنین درخت کهنسال نباید درون این زمین مربعی باشد. برای مثال آن‌ها می‌توانند مربعی که گوشه‌ی بالا ـ چپ آن خانه‌ی $(۲, ۲)$ و گوشه‌ی پایین ـ راست آن خانه‌ی $(۵, ۵)$ (یک مربع به ضلع سه) را انتخاب کنند اما نمی‌توانند مربعی که گوشه‌ی بالا ـ چپ آن خانه‌ی $(۳, ۲)$ و گوشه‌ی پایین ـ راست آن خانه‌ی $(۸, ۸)$ است را انتخاب کنند چرا که این زمین مربعی شکل نیست و علاوه بر آن درخت کهنسال درون آن قرار دارد. شکل زیر این پارک را نشان می‌دهد و خانه‌ی سبز رنگ محل درخت کهنسال است. محاسبه کنید به چند حالت می‌شود چنین زمینی به عنوان مکان تفریحی انتخاب کرد؟



الف) ۴۱ ب) ۸۲ ج) ۲۶۹ د) ۳۰۳ ه) ۳۴۴

۱۹) به یک دنباله به طول ده از اعداد یک تا ده مانند $a_۱, a_۲, \ldots, a_{۱۰}$ زیبا می‌گوییم اگر به ازای هر i $(۱ \le i \le ۱۰)$ ، a_i مقسوم‌علیه i باشد. چند دنباله‌ی زیبا داریم که در آن دقیقا یک بار عدد دو و دقیقا یک بار عدد سه آمده است؟

الف) ۱۴۶۴ ب) ۲۲۸۰ ج) ۱۰۱۶ د) ۴۲۴ ه) ۱۴۴۰

۲۰) دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$\{۱, ۷, ۳, ۲, ۱۲, ۸, ۴\}$

در هر مرحله می‌توانیم دو عضو مجاور از این دنباله مانند a و b را انتخاب کنیم و با پرداخت $|a-b|$ سکه، این دو عضو را جابه‌جا کنیم. کمترین تعداد سکه‌ای که برای مرتب کردن صعودی دنباله نیاز داریم چقدر است؟ ($|x|$ یعنی قدرمطلق عدد x)

الف) ۳۰ ب) ۳۱ ج) ۲۹ د) ۳۲ ه) ۲۸

۲۱) حامد به تازگی به نقاشی علاقه‌مند شده است. او می‌خواهد یک دیوار به طول ۱ و ارتفاع ۲۰ را رنگ کند. او می‌تواند در هر دقیقه کار یک متر مربع از دیوار را رنگ کند، اما نمی‌تواند بیشتر از ۳ دقیقه به طور متوالی کار کند. در هر دقیقه یا او تمام آن دقیقه مشغول رنگ دیوار است و یا در تمام آن دقیقه استراحت می‌کند.
فرض کنید کمترین زمانی که حامد می‌تواند در آن کار را تمام کند m دقیقه باشد. اگر تعداد روش‌هایی که حامد می‌تواند در m دقیقه تمام دیوار را رنگ کند را با s نشان دهیم، s را به دست بیاورید. دو روش رنگ آمیزی در m دقیقه متفاوتند اگر حامد در دقیقه‌ای مانند $x(۱ \le x \le q)$ در یکی از این روش‌ها مشغول رنگ زدن و در دیگری مشغول استراحت باشد.

الف) ۶ ب) ۲۸ ج) ۱۲ د) ۷ ه) ۱۴

۲۲) امین برای اذیت کردن علی عینک او را در یکی از خانه‌های جدولی ۹۳×۱۳ پنهان کرده است. امین به علی اجازه می‌دهد که در هر مرحله یک خانه مانند (x, y) انتخاب کند. سپس امین به او می‌گوید که آیا عینک او درون مستطیلی که گوشه‌ی بالا ـ چپ آن خانه‌ی $(۱, ۱)$ و گوشه‌ی پایین ـ راست آن خانه‌ی (x, y) است، قرار دارد؟
علی باید سریع‌تر به کلاس برسد برای همین می‌خواهد بداند در بدترین حالت چند مرحله لازم است تا عینکش را پیدا کند؟

الف) ۷ ب) ۱۱ ج) ۹ د) ۶ ه) ۱۰

۲۳) فاصله‌ی دو نقطه‌ی $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ برابر با $|x_۱-x_۲|+|y_۱-y_۲|$ است. فرض کنید $p_۱ = (۲, ۲)$ و $p_۲ = (۴, ۱)$.
به یک جفت مرتب از نقاط مانند $(q_۱, q_۲)$، معتبر می‌گوییم اگر فاصله‌ی q_i و p_j به ازای هر $(۱ \le i, j \le ۲)$ برابر با $d_{i,j}$ باشد. با توجه به مقادیر $d_{i,j}$ تعداد جفت‌های معتبر را به دست آورید.

$$\begin{cases} d_{۱,۱} = ۲ \\ d_{۱,۲} = ۱ \\ d_{۲,۱} = ۳ \\ d_{۲,۲} = ۲ \end{cases}$$

توجه کنید که جفت‌ها مرتب هستند یعنی جفت (a, b) با جفت (b, a) فقط اگر b با a برابر باشد، یکسان به حساب می‌آید.

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۲۴) روی یک میز دایره‌ای شکل که چهارده صندلی دور آن قرار دارد، یک آب‌نبات قرار دارد. صندلی‌ها با شماره‌های یک تا چهارده شماره‌گذاری شده‌اند. پیمان روی صندلی شماره‌ی یازده نشسته است و آب‌نبات روبه‌روی صندلی شماره‌ی یک قرار دارد. دکمه‌ای روی دیوار قرار دارد که با زدن آن، میز به مدت ۱۵۱ ثانیه در جهت ساعت‌گرد می‌چرخد. سرعت میز به‌گونه‌ای است که آب نبات در هر ثانیه از روبه‌روی یک صندلی به روبه‌روی صندلی بعدی در جهت ساعت‌گرد منتقل می‌شود. به علت برخی از مسائل فنی وقتی آب‌نبات روبه‌روی صندلی شماره‌ی یک قرار می‌گیرد، به احتمال $\frac{1}{2}$، میز به مدت یک ثانیه حرکت نمی‌کند. البته اگر میز به مدت یک ثانیه حرکت نکند در ثانیه‌ی بعدی حتما حرکت خواهد کرد. درنتیجه میز هیچ‌گاه به مدت دو ثانیه‌ی متوالی متوقف نمی‌شود یعنی میز در ثانیه‌ی اول حرکت متوقف نشده و حتما حرکت می‌کند(چرا که در ثانیه‌ی قبلی ساکن بوده است). اگر در انتها آب‌نبات روبه‌روی صندلی پیمان باشد، پیمان آب‌نبات را می‌خورد وگرنه باید آن را به کیوان بدهد. احتمال آنکه پیمان آب‌نبات را بخورد محاسبه کنید.

الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{11}{212}$ ج) $\frac{5}{210}$ د) $\frac{1}{212}$ ه) $\frac{5}{29}$

هرگاه چندین مورچه دور هم جمع شوند، به بازی «مورچه چرخ» می‌پردازند. در ابتدای این بازی مورچه‌ها پشت سر هم در یک صف می‌ایستند و هر یک از آن‌ها یکی از جهت‌های چپ یا راست را انتخاب کرده و به آن سمت نگاه می‌کند.

هر مورچه اگر به سمت راست ایستاده باشد فقط می‌تواند اولین مورچه‌ای که در سمت راست او قرار دارد را ببیند. به همین ترتیب اگر به سمت چپ استاده باشد فقط می‌تواند اولین مورچه‌ای که در سمت چپ او قرار دارد را ببیند. اگر چنین مورچه‌ای وجود نداشته باشد، این مورچه نمی‌تواند مورچه‌ای را ببیند.

در هر مرحله از بازی، هر مورچه، اگر مورچه‌ای را ببیند که آن مورچه نیز او را ببیند، دستش را بالا می‌آورد. سپس همه‌ی مورچه‌هایی که دستشان بالا است می‌چرخند(اگر به چپ نگاه می‌کردند به راست نگاه می‌کنند و بالعکس) و سپس دست خود را می‌اندازند. اگر در یک مرحله هیچ مورچه‌ای دستش را بالا نیاورد، بازی تمام می‌شود.

حالت ایستادن مورچه‌ها را با یک رشته نشان می‌دهیم که جهت ایستادن مورچه‌ها را از چپ به راست در آن می‌نویسیم(چپ‌ترین حرف نشان‌دهنده‌ی جهت چپ‌ترین مورچه است). حرف L نشان‌دهنده‌ی مورچه‌ی ایستاده به سمت چپ و حرف R نشان‌دهنده‌ی مورچه‌ی ایستاده به سمت راست است.

با توجه به توضیحات بالا به دو سوال زیر پاسخ دهید

۲۵) اگر رشته‌ی زیر، نشان‌دهنده‌ی حالت اولیه‌ی مورچه‌ها باشد، بازی چند مرحله طول می‌کشد؟

$LRLLRRLLLRLRLL$

الف) ۵ ب) ۷ ج) ۹ د) ۸ ه) ۶

۲۶) اگر در ابتدای بازی سی مورچه در سمت راست به طرف چپ بایستند و سی مورچه در سمت چپ به طرف راست بایستند(رشته‌ی زیر نشان‌دهنده‌ی حالت اولیه‌ی ایستادن آن‌ها باشد)، بازی چند مرحله طول می‌کشد؟

$$\underbrace{RR\dots R}_{۳۰}\underbrace{LL\dots L}_{۳۰}$$

الف) ۸۹۹ ب) ۶۰ ج) ۹۰۰ د) ۵۹ ه) ۴۶۵

۲۷) پیمان، مسئول کافه شاززز، برای هر مشتری زمان ورود و خروجش را ثبت می‌کند. او برای این‌کار دو برگه، یکی برای زمان‌های ورود و دیگری برای زمان‌های خروج نگه می‌دارد. متاسفانه او برگه‌ی زمان‌های ورود امروز را گم کرده است و درنتیجه فقط می‌داند که پنج نفر در ساعت‌های ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵ و ۱۷ از کافه خارج شده‌اند. افراد را به ترتیب زمان خارج شدنشان از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. پیمان از آن‌جا که حافظه‌ی خوبی دارد موارد زیر را نیز به یاد دارد:

- هر یک از چهار نفر، زمانی را درون کافه با نفر دوم سپری کرده‌اند(لزوما این بازه‌ی زمانی برای هر چهار نفر یکسان نیست).
- نفر شماره‌ی سه بعد از خروج نفر شماره‌ی اول وارد کافه شده است.
- کافه ساعت ۹ آغاز به کار می‌کند.
- کافه ساعت ۱۹ تعطیل می‌شود.
- در زمان ورود همه‌ی افراد، عقربه‌ی دقیقه‌شمار ساعت کافه، روی شش بوده است.
- در کافه به شدت بزرگ است و چند نفر می‌توانند همزمان وارد کافه شوند.

محاسبه کنید چند حالت برای زمان‌های ورود این پنج نفر وجود دارد که در شرایط بالا صدق می‌کنند؟ دو حالت متفاوت است اگر زمان ورود حداقل یکی از افراد، در این دو حالت با هم یکسان نباشد.

الف) ۹ ب) ۴۸ ج) ۲۷ د) ۴ ه) ۱۸

۲۸) چند زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی زیر وجود دارد که مجموع اعضای آن بر سه بخش پذیر است؟

$$\{۱, ۶, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۲۵, ۳۹, ۴۴, ۵۶, ۶۸, ۷۶, ۸۵, ۹۴, ۱۲۴\}$$

الف) ۵۴۵۹ ب) ۵۴۵۶ ج) ۴۰۹۶ د) ۴۰۹۵ ه) ۵۴۳۵

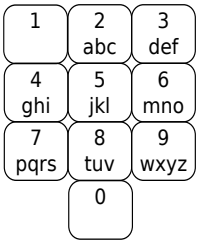
۲۹) حامد، اعداد ۱ تا ۱۳۹۳ روی تخته نوشته است. او در هر مرحله دو عدد a و b را انتخاب می‌کند. اگر مجموع ارقام b در مبنای پانزده برابر c باشد، او دو عدد a و b را پاک کرده و عدد $a+c$ را روی تخته می‌نویسد. توجه کنید که ترتیب انتخاب دو عدد مهم است. همچنین توجه کنید که اگر یک عدد را در مبنای پانزده بنویسیم هر رقم آن عددی بین صفر تا چهارده است. حامد این‌کار را تا جایی ادامه می‌دهد که تنها یک عدد باقی بماند. باقی‌مانده این عدد بر ۷ چند است؟

الف) ۰ ب) ۶

ج) ۱ د) ۴ ه) بستگی به انتخاب‌های حامد دارد

۳۰) صفحه کلید زیر را در نظر بگیرید. تعداد حروف زیر عدد i را با a_i نشان می‌دهیم. مثلا $a_۱ = ۰$ و $a_۵ = ۳$. این صفحه کلید به این شکل کار می‌کند که اگر x بار دکمه‌ی شماره‌ی y بدون مکث فشرده شود، حرف xم زیر شماره‌ی y در صفحه چاپ می‌شود. اگر $x > a_y$ صفحه کلید می‌سوزد. برای مثال برای تایپ حرف g باید یک‌بار دکمه‌ی شماره‌ی چهار فشرده شود و برای تایپ حرف u باید دوبار دکمه‌ی شماره‌ی هشت بی‌مکث فشرده شود و اگر پنج بار دکمه‌ی شماره‌ی نه بی‌مکث فشرده شود، صفحه کلید می‌سوزد.

سختی یک کلمه برابر بیشترین باری است که یکی از دکمه‌ها برای تایپ یکی از حروف آن کلمه باید بدون مکث فشرده شود. برای مثال چون برای تایپ حرف y از کلمه‌ی $adpy$ باید سه‌بار دکمه‌ی شماره‌ی نه بدون مکث فشرده شود، و باقی حروف با یک بار فشردن یکی از دکمه‌ها تایپ می‌شوند، سختی این کلمه سه است. حامد می‌خواهد کلمه‌ی $shaazzzisthegreatestwebsite$ را با این صفحه کلید تایپ کند. او تصمیم گرفته است که پیش از شروع تایپ، ترتیب حروف زیر هر شماره را طوری تغییر دهد(البته می‌تواند تغییری نیز ندهد) که سختی این کلمه کمینه شود(توجه کنید که حامد فقط می‌تواند ترتیب حروف زیر هر عدد را جابه‌جا کند. یعنی مجموعه‌ی حروف زیر هر عدد ثابت است و تغییر نمی‌کند). اگر a این مقدار کمینه و b تعداد روش‌هایی باشد که حامد می‌تواند این‌کار را بکند، (a,b) کدام است؟(توجه کنید که مقدار کمینه عنصر سمت چپ است)



الف) $(۳, ۲^۷ \times ۳^۳)$ ب) $(۲, ۲^۶ \times ۳^۲)$ ج) $(۳, ۲^۸ \times ۳^۸)$ د) $(۳, ۲^{۱۰} \times ۳^۸)$ ه) $(۲, ۲^{۱۳} \times ۳^۳)$