مشتق تابع معکوس :

فرض کنید f در همسایگی نقطه x پیوسته و یک به یک بوده و f در x مشتق ناصفر متناهی داشته باشد
در این صورت f^{-1} در نقطه $y=f(x)$ مشتقی برابر

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

دارد.

* توجه : در عبارت بالا $x=f^{-1}(y)$

* رابطه بالا به صورت های زیر نیز نوشته می شود :

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

این روش بخصوص زمانی مناسب است که محاسبه معکوس و بعد از آن محاسبه مشتق تابع مشکل یا شبیه دیگر، هنگامی که این مشتق تابع معکوس را در یک نقطه بخواهیم.

مثال: در مثال‌های قبل برای تابع $y=f(x)=3x+2$ تابع معکوس $f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}$ را بدست آوردیم؛ لذا:

$$f'(x)=3$$

$$\& \quad (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{3} \longrightarrow$$ که با مشتق‌گیری مستقیم نیز حاصل می‌گردد

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{3}. \quad \square$$

مثال: در مثال‌های قبل برای تابع $y=x^2$ بر بازه $x\in[0,\infty)$ معکوس $y^{-1}=\sqrt{x}$ را بدست آوردیم؛ لذا:

$$y'=f'(x)=2x$$

$$(f^{-1})'(y=x^2)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2x}$$

در مثال قبل نیاز به جایگزینی دیده نشد اما در اینجا باید $(f^{-1})'(y)$ را برحسب y بنویسیم و نه برحسب x پس از رابطه $y=x^2$ بدست می‌آوریم $x=\sqrt{y}$ (روی بازه فوق) و لذا:

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}} \xrightarrow[\text{تغییر } x \text{ را برای}]{\text{حال می‌توان}} \boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

توابع جدید یعنی معکوس جایگزین کرد (به واسطه عادت کار با x)

که با مشتق‌گیری مستقیم از تابع معکوس یعنی $y^{-1}=f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ نیز این موضوع تائید می‌شود:

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}. \quad \square$$

مثال: برای تابع $f(x)=x^8+3x^4+2x^2+1$ ، $0\le x<\infty$ ، مقدار $(f^{-1})'(7)$ را بیابید.

توضیح: توجه کنید که تابع فوق معکوس‌پذیر است (اثبات بر عهده شما) ولی محاسبه معکوس آن دشوار یا نشدنی است و لذا نمی‌توان معکوس را حساب و سپس مشتق گرفت و نهایتاً مقدار ۷ را جایگزین نمود.

حل:

$$(f^{-1})'(y=7)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{8x^7+12x^3+4x}\Bigg|_{x=1}=\frac{1}{8+12+4}=\boxed{\frac{1}{24}}$$

$$7=y=f(x)\overset{\text{حدس}}{\Longrightarrow} x=1$$

$\square$

نکته تکمیلی: اگر x در دسترس ناموجود باشد چه کنیم؟ آیا چنین x ی موجود است؟

خیر چون تابع یک به یک است و هر x فقط با یک y در ارتباط است و برعکس.

مثال: نشان دهید $f(x)=\frac{4x^3}{x^2+1}$ دارای معکوس است؟ $(f^{-1})'(2)$ را بیابید.

حل: قسمت اول:

$$f'(x) \overset{\text{برعهده دانشجو}}{=} \frac{4x^4+12x^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \Rightarrow \text{یکنوا صعودی} \Rightarrow 1-1 \Rightarrow \text{معکوس پذیر}$$

قسمت دوم:

$$(f^{-1})'(y=2)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{(x^2+1)^2}{4x^4+12x^2}\Bigg|_{x=1}=\frac{4}{4+12}=\frac{4}{16}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

$$2=y=\frac{4x^3}{x^2+1}\xrightarrow{\text{حدس}} x=1$$

□

مثال:

مماس بر منحنی $y=f^{-1}(x)$ را در نقطه $P=(\frac{\pi}{2}+1, \frac{\pi}{2})$ برای $f(x)=x+\sin x$ بیابید.

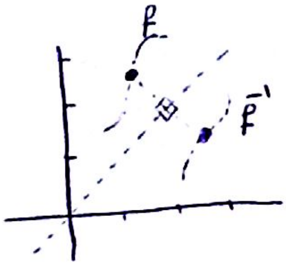
* یک سؤال قبل از حل: P روی نمودار f قرار دارد یا روی نمودار f^{-1} ؟ چرا؟

پاسخ این سؤال:

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+\sin(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+1$$

$$\Rightarrow (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1)\in f \quad \& \quad (\frac{\pi}{2}+1, \frac{\pi}{2})\in f^{-1}$$

$\frac{\pi}{2}\simeq ۱٫۵۷$



* یادآوری: معادله خط مماس بر تابع $y=g(x)$:

$$\begin{cases} y'=g'(x) \Rightarrow m=g'(x_0) & \text{شیب} \\ y-y_0=m(x-x_0) & \text{معادله خط} \quad \& (x_0,y_0)\in g \end{cases}$$

حل مثال ۸: مماس بر f^{-1} در نقطه $(\frac{\pi}{2}+1, \frac{\pi}{2})\in f^{-1}$:

$$(f^{-1})'(\frac{\pi}{2}+1)=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{1+\cos x}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{\text{صفر}}}=1 \quad \text{شیب}$$

$$y-\frac{\pi}{2}=1\left(x-(\frac{\pi}{2}+1)\right) \quad \text{خط مماس}$$

$$\Rightarrow y-\cancel{\frac{\pi}{2}}=x-\cancel{\frac{\pi}{2}}-1 \Rightarrow y=x-1$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{2+\sin^{11} t}\,dt$. الف- نشان دهید f بر $(-\infty,\infty)$ یک به یک است. ب- قرار دهید $b=f(\frac{3\pi}{2})$. مقادیر $(f^{-1})'(b)$ و $(f^{-1})'(0)$ را بیابید.

حل: (الف)

$$f'=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}\sqrt{2+\sin^{11} t}\,dt=(1)\sqrt{2+\sin^{11} x}-(0)=\underbrace{\sqrt{2+\sin^{11} x}}$$

$-1\leq \sin x\leq 1$ ولذا $2-1\leq 2+\sin^{11} x\leq 2+1$ پس $0<\cancel{2-1}\leq$

$$\boxed{f'\gneq 0 \Rightarrow \text{یکنوا} \Rightarrow 1\text{-}1 \quad \text{و معکوس پذیر}}$$

(ب)

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}\Rightarrow (f^{-1})'\left(f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sin^{11}\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{(-1)^{11}}}}$$

مشتق از الف

$$\Rightarrow (f^{-1})'\left(f\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt{2-1}}=1$$

$$(f^{-1})'(0=f(1))=\frac{1}{f'(x=1)}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2+\sin^{11} 1}}}.$$

$$f(x)=0\Rightarrow \int_{1}^{x}\underbrace{\sqrt{2+\sin^{11} t}}_{>0}\,dt=0\Rightarrow x=1$$

$\square$