

Brouwer and Absolutely Unprovable Propositions

Abstract

In this article, we discuss absolutely unprovable propositions from the point of view of Brouwerian intuitionism. According to Brouwer's definition, a proposition is absolutely unprovable if the creative mind as an ideal mathematician has a proof that both the proposition itself and its negation are unprovable from a constructive point of view. Brouwer has shown that the existence of such propositions is impossible. In his book on Brouwer and Intuitionism, Mark van Atten has described and elaborated Brouwer's short proof on this matter. The Persian translator of this book has reconstructed and explained this proof in two different ways. In this paper, we present a more appropriate reconstruction of Brouwer's proof. In the meantime, we will deal with Gödel's work in generalizing Brouwer's result from propositional logic to first-order predicate logic. In addition, we will point out that such formalizations of intuitionistic ideas in the formal language of logic cannot do justice to Brouwer's ideas.

Keywords: Intuitionism, Brouwer, Logic, Absolutely unprovable propositions

براوئر و گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر

چکیده

در این مقاله به گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر از دیدگاه شهودگرایی براوئری می‌پردازیم. بنا به تعریف براوئر، یک گزاره مطلقاً اثبات‌ناپذیر است هرگاه ذهن آفریننده به‌عنوان ریاضیدانی ایده‌آل اثباتی داشته باشد مبنی بر اینکه هم خود آن گزاره و هم نقیض آن از منظر ساختی اثبات‌ناپذیر است. براوئر نشان داده است که وجود چنین گزاره‌هایی ممکن نیست. مارک فان آتن در کتاب خود در مورد براوئر و شهودگرایی، اثبات کوتاه براوئر در این مورد را بیان کرده و شرح و تفصیل داده است. مترجم فارسی این کتاب نیز به دو شکل مختلف این اثبات را بازسازی کرده و توضیح داده است. در این مقاله بازسازی مناسب‌تری از اثبات براوئر ارائه می‌دهیم. در ادامه، به کار گودل در زمینه گسترش حکم براوئر از منطق گزاره‌ها به منطق محمولات مرتبه اول خواهیم پرداخت. به‌علاوه اشاره خواهیم کرد که این‌گونه صوری‌سازی‌های ایده‌های شهودگرایانه در زبان منطق، نمی‌توانند حق مطلب را در مورد ایده‌های براوئر ادا کنند.

کلمات کلیدی: شهودگرایی، براوئر، منطق، گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر

فصل ۱: مقدمه

شهودگرایی براوئری یکی از مشهورترین مکتب‌های فلسفی در مورد ریاضیات است. براوئر دشوارنویس است، به همین دلیل، در مورد تفسیر عقاید او بین محققان و حتی طرفدارانش اختلاف وجود دارد. فان آتن (van Atten) فیلسوفی است که در مکتب شهودگرایی هلندی پرورش یافته و امروزه یکی از شارحان براوئر محسوب می‌شود. کتاب او با عنوان *On Brouwer* یکی از آثار مشهور او در مورد فلسفه شهودگرایی است (van Atten, 2004). این کتاب تحت عنوان فلسفه براوئر توسط آقای دکتر محمد اردشیر ترجمه شده و به چاپ رسیده است (فان آتن، ۱۳۸۷). تا آنجا که مؤلف می‌داند، اردشیر اصلی‌ترین مرجع آشنایی با شهودگرایی در ایران هستند (البته اردشیر جزء منتقدین برخی اصول منطق شهودگرایی هستند و آنها را بازتاب افکار فلسفی براوئر نمی‌دانند. ظاهراً خود براوئر هم توافق صددرصدی با همه اصول این منطق که توسط شاگردش هیتینگ (Heyting) تدوین شده‌اند، نداشته است).

از دید فان آتن، در ریاضیات شهودگرایانه براوئری تنها زمانی می‌توانیم از یک شیء ریاضی صحبت کنیم که ساختمانی ذهنی برای آن به صورت بالفعل داشته باشیم. یک اثبات برای یک قضیه ریاضی نیز خود یک چنین شیئی

است. البته این شیء-اثبات می تواند نامتناهی باشد. برای مثال، اثبات یک حکم عمومی در نظریه اعداد متشکل از روشی ساختی است که به ازای هر عدد طبیعی، اثباتی ساختی برای آن حکم به ازای آن عدد فراهم می کند. این اثباتی اساساً نامتناهی است. بنابراین، شهودگرایی شکلی از متناهی گرایی نیست. در هر حال، یک گزاره تنها زمانی درست تلقی می شود که اثباتی ساختی برای آن داشته باشیم.

یک پرسش مهم که در این زمینه مطرح می شود آن است که آیا این اثبات باید به صورت بالفعل موجود باشد یا اگر به نحوی بدانیم که وجود دارد نیز برای درست دانستن آن گزاره کافی است؟ مرجع داشتن یا نداشتن اثبات، چیزی به نام ذهن آفریننده است که مظهر ریاضیدان ایده آل است. ریاضیدان ایده آل ریاضیدانی است که محدودیت های معمول یک انسان را ندارد. برای مثال، ریاضیدان ایده آل خستگی ناپذیر است و برای ادامه کار خود به قهوه نیاز ندارد! ممکن است این پرسش مطرح شود که آیا این اعتقاد موجب نزدیک شدن شهودگرایی به افلاطون گرایی نمی شود؟ منظور از افلاطون گرایی، پذیرش وجود اشیا ریاضی به صورت مستقل از انسان است. آیا دانش ریاضیدان ایده آل، همان مجموعه حقایق افلاطونی نیست؟ پاسخ منفی است. یک راه فهم این تفاوت توجه به مثال ماشین تورینگ است. ماشین تورینگ هم از دید تورینگ بر اساس توانایی ها و رفتارهای محاسباتی انسان طراحی شده است، ولی محدودیتی از نظر فیزیکی ندارد. مثلاً محاسبه یک ماشین تورینگ می تواند هر بازه زمانی را شامل شود. در عین حال، چنین نیست که ماشین تورینگ بتواند هر مسئله محاسباتی و الگوریتمی را حل کند. مطالعه مسائلی الگوریتمی که هیچ ماشین تورینگ قادر به حل آنها نیست، از موضوع های اصلی مورد مطالعه در نظریه محاسبه پذیری به عنوان بخشی از منطق ریاضی، است.

ماشین تورینگ را می توان یک انسان محاسبه گر ایده آل دانست. همانطور که بررسی قدرت محاسباتی ماشین تورینگ یک پرسش معنادار است، پرسش از توانایی های ریاضیاتی ذهن آفریننده و ایده آل نیز پرسشی معنادار است که بر اوثر به آن پرداخته است. در واقع، وظیفه اصلی شهودگرایی به عنوان یک مکتب فلسفی درباره ریاضیات، پاسخ به این پرسش است.

فرض کنید که p گزاره ای ریاضی ای باشد. از نظر بر اوثر چه حالت هایی در مورد ذهن آفریننده و p ممکن است؟ فان آتن به این موضوع پرداخته است. ϵ حالت در مورد ذهن آفریننده در لحظه کنونی t در رابطه با p ممکن است:

- ذهن آفریننده اثبات بالفعلی برای p دارد
- ذهن آفریننده اثبات بالفعلی برای $\neg p$ دارد
- ذهن آفریننده اثبات بالفعلی برای $p \vee \neg p$ ندارد اما می داند که روشی وجود دارد که بر اساس آن می تواند در مورد یکی از دو حالت تصمیم بگیرد.
- ذهن آفریننده هیچ روشی برای تصمیم گیری در مورد $p \vee \neg p$ نمی شناسد.

فان آتن حالت ۳ را اساسی نمی‌داند، چون در نهایت به یکی از دو حالت قبل منجر می‌شود (فان آتن، ۱۳۸۷: ۷۱-۷۲). اما یک حالت دیگر که به ذهن می‌رسد آن است که، ذهن آفریننده می‌داند (یعنی اثباتی ساختی دارد) که نه p و نه $\neg p$ اثبات ندارد. در این حالت گزاره p مطلقاً اثبات‌ناپذیر نامیده می‌شود. از دیدگاه براوئر هیچ گزاره مطلقاً اثبات‌ناپذیری وجود ندارد (فان آتن، ۱۳۸۷: ۷۲). یعنی، این حالت ممکن نیست و نمی‌تواند رخ دهد. در فصل بعد این موضوع را بررسی می‌کنیم. اما قبل از آن چند کلمه در مورد نقش زمان در ریاضیات می‌آوریم.

بر اساس تفسیر شهودگرایی از حقایق ریاضی می‌دانیم که آنها زمانمند هستند. فان آتن اشاره می‌کند که برخی مانند مارتین-لوف (Martin-Löf) خواسته‌اند که این جنبه را حذف کنند، اما براوئر بر آن تاکید داشته است (فان آتن، ۱۳۸۷: ۶۰). زمانمند بودن حقایق ریاضی چیزی است که چندان مطبوع نیست و ممکن است با تصور اولیه ما از ریاضیات به عنوان مخزنی از حقایق ازلی متناقض باشد. اما باید توجه کنیم که حتی اصول ریاضیات پیشرفته کنونی نیز قطعی و ازلی نیستند، برای مثال در مورد برخی اصول کاردینال‌های بزرگ توافق وجود ندارد. از طرفی، حتی برخی از احکام بسیار پایه‌ای ریاضیات چون اصل پنجم اقلیدس نیز هنوز محل بحث هستند. حتی اگر افلاطون‌گرایانه معتقد باشیم که هر حکم ریاضی ارزش منطقی ثابتی دارد، نظر ریاضیدانان در مورد پذیرش یک اصل ریاضی در گذر زمان و بر اساس پیامدهای آن ممکن است تغییر کند. این موارد شاید کمی از تعجب ریاضیدان کلاسیک در مورد تصور براوئری از نقش زمان در ریاضیات بکاهد.

فصل ۲: اثبات براوئر

براوئر در رساله دکتری خود در سال ۱۹۰۷ برای اثبات عدم وجود گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر به زبان هلندی نوشته است:

Zal men nu ooit van een vraag kunnen bewijzen, dat ze nooit uitgemaakt kan worden? Neen, want dat zou moeten uit het ongerijmde. Men zou dus moeten zeggen: Gesteld dat het was uitgemaakt in zin a en daaruit afleiden, tot een contradictie kwam. Dan zou echter bewezen zijn, dat niet a waar was, en de vraag bleef uitgemaakt (van Dalen, 2001: 17).

ترجمه انگلیسی فان آتن از اثبات براوئر برای عدم وجود گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر در زیر آمده است:

Can one ever prove of a proposition, that it can never be decided? No, because one would have to so by reductio ad absurdum. So one would have to say: assume that the proposition has been decided in sense X , and from

that deduce a contradiction. But then it would have been proved that not X is true, and the proposition is decided after all (van Atten, 2004: 26).

پاراگراف فوق را اردشیر این گونه ترجمه کرده است:

آیا می توان گزاره ای را ثابت کرد که هرگز نمی تواند تصمیم گرفته شود؟ نه، بنابر برهان خلف. پس می توان گفت: فرض کنید که گزاره X تصمیم گرفته شده است، و از آن تناقض استنتاج نشده. اما آن گاه ثابت می شود که نه- X راست است، و در نهایت گزاره تصمیم گرفته می شود (فان آتن، ۱۳۸۷: ۷۲).

توجه کنید که تصمیم گرفتن در مورد یک جمله به معنای اثبات آن جمله یا اثبات نقیض آن جمله است. ظاهراً در ترجمه فارسی، عبارت «و از آن تناقض استنتاج نشده» اشتباه سهوی است و باید «و تناقضی از آن استنتاج شده» باشد. از طرف دیگر، در پانوش شماره ۷، صفحه ۸۱، مترجم متذکر می شود که برهان خلف در منطق شهودگرایی قابل قبول نیست، اما در برهان فوق استفاده از آن ممکن بوده است، زیرا براوتر حکمی از نوع منفی بیان و اثبات کرده است. این نکته ای درست در مورد برهان خلف است، زیرا در منطق شهودگراییانه از $p \rightarrow \neg p$ می توان $\neg p$ را نتیجه گرفت. اما به نظر می رسد که اثبات موردنظر با استفاده از برهان خلف نیست. قبل از توضیح این مطلب، همان پاراگراف فوق از براوتر را با تفاوت اندک در مرجع (van Atten, 2017) که توسط فان آتن این گونه به انگلیسی ترجمه شده است را ببینید:

Can one ever demonstrate of a question, that it can never be decided?
No, because one would have to do so by reductio ad absurdum. So one would have to say: assume that the question has been decided in sense a , and from that deduce a contradiction. But then it would have been demonstrated that not- a is true, and the question remains decided.

در اینجا «گزاره» به «پرسش» تغییر یافته است. ظاهراً این ابهامی است که در متن اصلی براوتر وجود دارد (Ruitenber, 2024). برداشت اینجانب از متن فوق از براوتر چنین است:

یک گزاره p (یا یک مسئله ریاضی) مطلقاً اثبات ناپذیر (یا مطلقاً حل ناپذیر) است، هرگاه ذهن آفریننده بداند که نه اثباتی (راه حلی) برای p وجود دارد و نه اثباتی برای $\neg p$. اما این ناممکن است و دلیل آن با برهان مستقیم (و نه خلف) چنین است. اگر ذهن آفریننده اثباتی داشته باشد مبنی بر این که اثباتی برای p وجود ندارد، خود آن اثبات را می توان به اثباتی برای $\neg p$ تبدیل کرد. توجه کنید که $\neg p$ هم ارز است با $p \rightarrow \perp$ و بنابر تعبیر براوتر-هیتینگ-کولموگروف، یک اثبات $p \rightarrow \perp$ تابعی است که هر اثبات p را به اثباتی برای \perp تبدیل می کند (Troelstra & van Dalen, 1988: 9). با توجه به اینکه ذهن آفریننده می داند اثباتی برای p وجود ندارد، تابع تهی در مورد فوق کار خواهد کرد.

ممکن است به نظر برسد که استدلال فوق، $p \vee \neg p$ را به ازای هر p اثبات می‌کند، ولی چنین نیست. نکته آن است که بنا به فرض، ذهن آفریننده می‌داند (یعنی اثباتی دارد) که p اثبات‌ناپذیر است. این قوی‌تر از آن است که ذهن آفریننده فقط اثباتی به صورت بالفعل برای p ندارد. از اینکه فقط بدانیم که p اثبات بالفعلی ندارد، ولی در گذر زمان ممکن است بدست آورد، نتیجه نمی‌شود که $\neg p$. اثبات $\neg p$ یعنی روشی ساختی برای تبدیل هر اثبات "فرضی" p به اثباتی برای تناقض. در این مورد، نیازی نیست که ریاضی‌دان ایده‌آل در ابتدا بداند p اثباتی ندارد، ولی در عوض باید روشی از نوع مورد اشاره را بشناسد. در هر حال، اثبات نقیض یک گزاره به روش اثبات مستقیم است.

فان آتن توضیحی برای اثبات حکم مورد نظر توسط براوئر آورده است. مترجم نیز اثباتی برای آن ذکر کرده است که تا حدود زیادی مانند توضیح فان آتن است (فان آتن، ۱۳۸۷: ۸۱). این اثبات، به خلاف ظاهر اثبات فان آتن، به طور صریح متکی به برهان خلف است: فرض کنید ذهن آفریننده اثباتی داشته باشد مبنی بر اینکه نه اثباتی برای p و نه اثباتی برای $\neg p$ وجود ندارد. از عدم وجود اثبات p ، $\neg p$ نتیجه می‌شود. به همین ترتیب، از اینکه اثباتی برای $\neg p$ نداریم، $\neg \neg p$ نتیجه می‌شود. از این دو به تناقض می‌رسیم. پس بنابر برهان خلف امکان ندارد که p مطلقاً اثبات‌ناپذیر باشد.

در مکاتبه شخصی‌ای که نویسنده این مقاله با ویم روتنبرگ (Wim Ruitenberg)، منطق‌دان هلندی ساکن آمریکا، داشت، ایشان ترجمه انگلیسی زیر را برای متن مورد اشاره از براوئر پیشنهاد کردند (با تأکید بر اینکه متن هلندی کمی مبهم است):

Can one ever prove of a question that it cannot be decided? No, because if it were, it must be by contradiction. One should thus have to say: Suppose that it was decided in (sense / sentence) a and derive from there come to a contradiction. However, then would have been proven that not- a was true, and the question remained decided (Ruitenberg, 2024).

ترجمه متن فوق با کمی اغماض به شکل زیر است:

آیا می‌توان در مورد پرسشی ثابت کرد که نمی‌توان درباره آن تصمیم گرفت؟ نه، زیرا اگر چنین بود، باید به وسیله تناقض باشد. بنابراین باید گفت: فرض کنید در مورد پذیرش گزاره یا جمله a تصمیم گرفته شده باشد و از آن به تناقض برسید. با این حال، پس از آن ثابت می‌شد که نه- a درست است، و این پرسش تصمیم‌گرفته‌شده باقی می‌ماند.

رویتنبرگ به ابهام مستتر در مورد ماهیت a صراحتاً اشاره می‌کند (Ruitenberg, 2024). در این متن نیز اشاره مستقیمی به برهان خلف وجود ندارد. باز هم تأکید می‌کنیم که $\neg p$ ، بنابر تعریف، همان $p \rightarrow \perp$ است (Troelstra & van Dalen, 1988: 42).

فصل ۳: در مورد صوری سازی

در بالا دیدیم که اثبات براوئر در مورد عدم وجود احکام مطلقاً اثبات ناپذیر را می توان اثباتی مستقیم تعبیر کرد. اما خود حکم او را چگونه می توان تحلیل کرد؟ خود حکم چنین است: هیچ گزاره مطلقاً تصمیم ناپذیری وجود ندارد. در مرجع (van Atten, 2017)، اشاره شده که هیتینگ این حکم را به این شکل صوری کرده است: $\neg(p \vee \neg p)$. اثبات این حکم در دستگاه استنتاج طبیعی به این شکل است که ابتدا، $\neg(p \vee \neg p)$ را فرض می کنیم و سپس به تناقض می رسیم (Troelstra & van Dalen, 1988: 42). این اثباتی مستقیم و نه با استفاده از برهان خلف است. مترجم در پانوش ۷ صفحه ۸۱ این کار را انجام داده است.

از طرف دیگر، گودل، با پیگیری این موضوع، به شکل معمولی حکم براوئر هم پرداخته و ثابت کرده که در این حالت، وجود جملات مطلقاً اثبات ناپذیر ممکن است:

To be more exact, you can construct a certain number-theoretic propositional function $\varphi(x)$ for which it is free from contradiction to assume in intuitionistic mathematics that $\neg(x)[\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)]$ (Gödel, 1986: 199).

می توان محمول نظریه اعدادی $\varphi(x)$ را ساخت که در مورد آن بدون افتادن در تناقض می توان ثابت کرد که $\neg(x)[\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)]$.

مرجع (Troelstra & van Dalen, 1988: 82) اثباتی برای سازگاری یک چنین حکمی با استفاده از مدل های کریپکی (Kripke) دارد. در مورد نظریات گودل در مورد شهودگرایی، مرجع (Hämeen-Anttila, 2020) هم خواندنی است.

کدام یک از این دو صوری سازی، گزاره ای یا مرتبه اول، صوری سازی دقیق تری از ادعای اصلی براوئر است؟ در مورد تفاوت این دو صوری سازی می توان گفت که یک گزاره p حکمی کامل است، اما در شکل مرتبه اول مطرح شده توسط گودل با بی نهایت حکم مواجهیم، به ازای هر x یک حکم $\varphi(x)$. اینکه حکمی کامل چون p موجود باشد به طوری که $\neg(p \vee \neg p)$ ، ممکن نیست. اما در مورد یک مجموعه نامتناهی از احکام، به ازای هر x یک حکم $A(x)$ ، ممکن است. نکته آن است که اشیائی که به جای x می نشینند، می توانند مجموعه ای نامتناهی را تشکیل دهند و بنابراین ذهن آفریننده برای بررسی تک تک آنها به زمانی نامتناهی نیاز داشته باشد. در این وضعیت، ممکن است حکم عمومی در هیچ لحظه ای از زمان تصمیم گرفته نشود.

البته این نحو صوری‌سازی‌ها، بیشتر یک تفسیر از ادعای براوئر است تا خود ادعای او. همانطور که گفتیم، از نظر براوئر در اینجا بحث در مورد احکام یا حتی مسائل و پرسشهای مطلقاً اثبات‌ناپذیر است. ادعای براوئر را شاید بتوان این‌گونه تعبیر کرد: به ازای هر گزاره ریاضی p ، یا p اثباتی بالقوه دارد یا $\neg p$ اثباتی بالقوه دارد. این حکمی فرازبانی در مورد توانایی‌های ذهن آفریننده است و شاید نتوان آن را کاملاً صوری کرد. البته اصول ذهن آفریننده کرایزل (Kreisel)، تلاشی در این زمینه بوده است (اردشیر، ۱۳۸۴؛ فان آتن، ۱۳۸۷: ۱۵۰-۱۵۱). در این صوری‌سازی از یک عملگر وجهی با یک اندیس زمانی استفاده می‌شود که معنای آن وجود اثباتی در زمان داده شده برای گزاره مورد بحث است. اما برای بیان وجود یک اثبات بالقوه نیاز به سورها هم هست.

آیا استفاده از منطق کلاسیک در مورد احکام فرازبانی از نوع فوق، از دید براوئر مجاز است؟ توجه کنید که منطق شهودی، منطق ساختارهای نامتناهی است، برای یک مجموعه نامتناهی نمی‌توان بدون اثبات پذیرفت که شامل عنصر خاصی هست یا نه. آیا احکام فرازبانی نیز چنین محدودیتی دارند؟ فان آتن اشاره می‌کند که براوئر از تمایزی که بعداً به زبان-فرازبان نامیده شد آگاه بوده و در ملاقاتی آن را با هیلبرت در میان گذاشته است (فان آتن، ۱۳۸۷: ۴۷). ایده این تمایز بعدها توسط هیلبرت و گودل و پیروان آنها بسیار مورد توجه قرار گرفت. البته در نظریه ذهن آفریننده کرایزل، هر چند عملگر وجهی ارائه شده به معنایی کلاسیک است، زیرا یا اثباتی در زمان مشخص شده وجود دارد یا ندارد، اما باقی رابطه‌های گزاره‌ای باید به صورت شهودی تعبیر شوند. بنابراین، به نظر می‌آید که از دید کرایزل، استفاده از برهان خلف در استدلال در مورد ذهن آفریننده مجاز نباشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به عدم وجود گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر در شهودگرایی پرداختیم. دیدیم که اثبات براوئر در این مورد را می‌توان اثباتی مستقیم تلقی کرد. در ادامه به تعمیم گودل از این موضوع به منطق سورها پرداختیم. در نهایت اشاره کردیم که صوری‌سازی‌های معمول ایده گزاره‌های مطلقاً اثبات‌ناپذیر نمی‌توانند حق مطلب را در مورد این ایده ادا کنند.

مراجع

- (۱) اردشیر، محمد (۱۳۸۴). *نظریه ذهن آفریننده براوئر*، ۲۴ (۲)، صص. ۳-۱۳.
- (۲) فان آتن، مارک (۱۳۸۷). *فلسفه براوئر*، ترجمه محمد اردشیر، تهران: هرمس.
- (3) Gödel, Kurt (1986). *Collected Works: Vol. 3: Unpublished Essays and Lectures*, Edited by Solomon Feferman, Oxford, England and New York, NY, USA: Oxford University Press.

- (4) Hämeen-Anttila, Maria (2020). *Gödel on intuitionism and constructive foundations of mathematics*, University of Helsinki.
- (5) Ruitenburg, Wim (2024). Personal communication.
- (6) van Atten, Mark & Sundholm, Göran (2017). “L.E.J. Brouwer’s ‘Unreliability of the Logical Principles’: A New Translation, with an Introduction”, *History and Philosophy of Logic*, 38 (1), pp. 24-47.
- (7) van Atten, Mark (2004). *On Brouwer*, Belmont, CA: Wadsworth/Thomson Learning.
- (8) van Dalen, Dirk (2001). *Brouwer en de grondslagen van de wiskunde*. Utrecht: Epsilon.
- (9) Troelstra, Anne S. & van Dalen, Dirk (1988). *Constructivism in Mathematics, Vol 1*, Amsterdam: North-Holland Press.