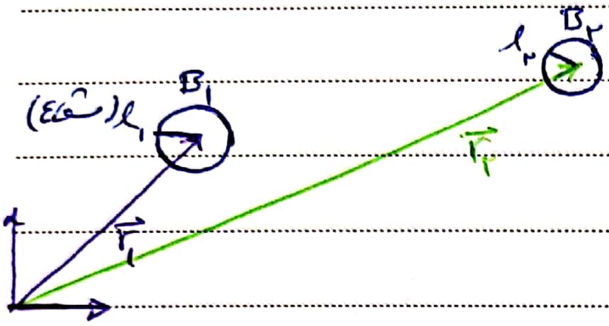
بررسی نیروی الکتریکی

مواد ← A ← A،A نیرو وارد می‌کنند ← A بی‌بار است.

B ← A،B و B،B نیرو وارد می‌کنند ← B باردار است.

نیروی بین دو جسم باردار B_1 و B_2



$$\vec F_{1\to2} = F(t, \vec r_2, \vec v_2, \text{مشخصات جسم ۱})$$

$$\vec F_{2\to1} = F(t, \vec r_1, \vec v_1, \text{مشخصات جسم ۲}) = -\vec F_{1\to2}$$

$$\to F(t, \vec r_2, \vec v_2, \text{مشخصات جسم ۱}) = -F(t, \vec r_1, \vec v_1, \text{مشخصات جسم ۲})$$

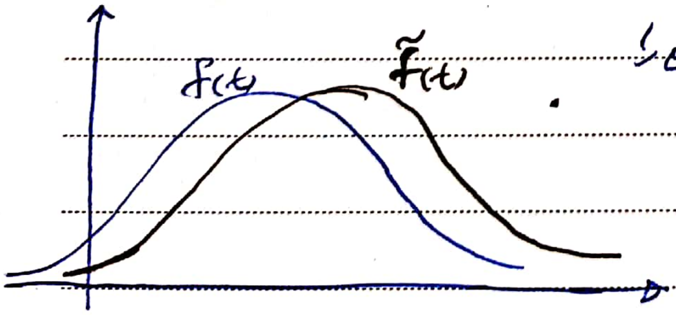
$$\to \vec F_{1\to2} = F(t, \vec r_2 - \vec r_1, \vec v_2 - \vec v_1)$$

$\vec v_1$ سرعت جسم B_1 و $\vec v_2$ سرعت جسم B_2 است. می‌خواهیم نیروی بین دو بار را برای بارهای ساکن یا دارای سرعت‌های کم (در مقایسه با سرعت نور) بررسی کنیم: $\vec v_2 - \vec v_1 = 0$

$\vec F_{1\to2} = F(t, \vec r_2 - \vec r_1)$ $\quad F(t, \vec r_2 - \vec r_1, \text{یکسان})$ کدام؟

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2}(\vec r_1(t)) = \vec F_{2\to1} = F\left(t, \vec r_1(t), \frac{d\vec r_1(t)}{dt}, \vec r_2(t), \frac{d\vec r_2(t)}{dt}\right)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2}(\vec r_2(t)) = \vec F_{1\to2} = F\left(t, \vec r_2(t), \frac{d\vec r_2(t)}{dt}, \vec r_1(t), \frac{d\vec r_1(t)}{dt}\right)$$



می‌خواهیم تابع $f(t)$ را به اندازه Δ جلوتر ببریم و تابع جدید را $\tilde f(t)$ می‌نامیم

$$(t, f(t)) = (t+\Delta, \tilde f(t+\Delta))$$

$$\to f(t) = \tilde f(t+\Delta)$$

$$\tilde f(t) = f(t-\Delta)$$

حال $\vec r_1$ و $\vec r_2$ را تعریف می‌کنیم که: $\tilde{\vec r}_1(t+\Delta) = \vec r_1(t)$ $\quad \tilde{\vec r}_1(t) = \vec r_1(t-\Delta)$

$\tilde{\vec r}_2(t+\Delta) = \vec r_2(t)$ $\quad \tilde{\vec r}_2(t) = \vec r_2(t-\Delta)$

$$\vec F_{1\to2} = (\vec r_2 - \vec r_1) A(|\vec r_2 - \vec r_1|) = \vec r A|\vec r|$$

$$\vec r_2 - \vec r_1 := \vec r$$

$A(r) \propto r^{-3}$

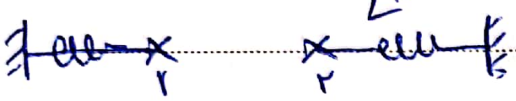
حال سوال این هست که A چیه؟ از جمله با آزمایش می‌توان تعیین کرد:

در نتیجه با جاگذاری A می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \vec F_{1\to2} = B\frac{\vec r}{r^3}$$

که B یک عدد است. تابع t، $\vec r_1$، $\vec r_2$، $\vec v_1$، $\vec v_2$ نیست.

در هر فاصله متفاوت نیروی لازم برای ثابت نگه داشتن دو بار که به هم نیرو وارد می‌کنند را اندازه می‌گیریم.



به این ترتیب A به دست می‌آید.

B در $\vec F = B\frac{\vec r}{r^3}$ تابع مشخصات دو جسم است.

$$\vec F_{1\to2} = B_{12}\frac{\vec r_2 - \vec r_1}{|\vec r_2 - \vec r_1|^3}$$

$$\vec F_{2\to1} = B_{21}\frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}$$

$\vec F_{1\to2} = -\vec F_{2\to1}$ (قانون سوم)

$\vec r_2 - \vec r_1 = -(\vec r_1 - \vec r_2)$

$|\vec r_2 - \vec r_1| = |\vec r_1 - \vec r_2|$

$\Rightarrow B_{12} = B_{21}$

تمام این صحبت‌ها برای دو جسم بود. حالا با سه جسم بررسی می‌کنیم

B_{12}، B_{23}، B_{31} چه ربطی به هم دارند؟ مستقل از هم‌اند؟

x_1	x_2	B_{12}	$x_{1'}$	x_2	$B_{1'2}$
x_1	x_3	B_{13}	$x_{1'}$	x_3	$B_{1'3}$

نتیجه آزمایش: $\frac{B_{1'3}}{B_{1'2}} = \frac{B_{13}}{B_{12}}$

$$\frac{B_{ik}}{B_{ij}} = \frac{B_{i'k}}{B_{i'j}}$$

جسم ۱ و ۲ را کنار هم می‌گذاریم و جای ۲ را با ۳ عوض می‌کنیم ولی در هر دو حالت فاصله یکی. در این دو حالت B_{12} و B_{13} را اندازه می‌گیریم

جسم ۱' و ۲ را کنار هم می‌گذاریم. دوباره جای ۲ را با ۳ عوض می‌کنیم. در هر دو حالت فاصله‌ها یکی. $B_{1'2}$ و $B_{1'3}$ را اندازه می‌گیریم.

آزمایش‌های متفاوتی که هم‌چنین برای به دست آوردن قانون کولن می‌کنند که یکی از آنها این است.

$$\frac{B_{0k}}{B_{0j}} = \frac{B_{ik}}{B_{ij}} \quad \forall i,j,k \qquad B_{ij} = B_{ji}$$

ثابت

$$\frac{B_{0k}}{B_{00}} = \frac{B_{ik}}{B_{i0}} \rightarrow B_{ik} = \frac{B_{i0}\, B_{k0}}{B_{00}} \qquad B_{ij} = \frac{B_{i0}\, B_{j0}}{B_{00}}$$

B_{00} مربوط به نیرویی هست که دو جسم مشابه هم وارد می‌کنند. (نه یک جسم به خودش)

$\Leftarrow$ B_{ij} که تابع i و j است حاصل‌ضرب دو تابع است که هر کدام تابع فقط یک متغیرند (i یا j)

$$B_{ij} = B_{00}\left(\frac{B_{i0}}{B_{00}}\right)\left(\frac{B_{j0}}{B_{00}}\right)$$

$$B_{00} = K' \qquad \frac{B_{i0}}{B_{00}} := \tilde{Q}_i \qquad \frac{B_{j0}}{B_{00}} := \tilde{Q}_j$$

یعنی $\tilde{Q}$ هر جسم با یک واحد تعریف شده

Q هر جسم با یک واحد تعریف نشده

$$\tilde{Q}_i = \frac{Q_i}{\text{واحد بار}}$$

اسم B_{00} رو K' ضریب (ثابت) نیروی الکتریکی گذاشته‌ایم

اسم Q رو گذاشتیم بار الکتریکی

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{\text{بار واحد}}$$

$\tilde{Q}$: بار بی‌بعد

$$B_{ij} = K'\tilde{Q}_i\tilde{Q}_j = K'\frac{\tilde{Q}_i\,\tilde{Q}_j}{\tilde{Q}_0\,\tilde{Q}_0} = K'\frac{Q_i\,Q_j}{Q_0\,Q_0} = \frac{K'}{Q_0^2}Q_iQ_j$$

$$\frac{K'}{Q_0^2} = K = \frac{B_{00}}{Q_0^2} \longrightarrow \text{لزومی ندارد ثابت باشه}$$

Q_0 واحد بار است.

$$B_{ij} = kQ_iQ_j$$

K که هم ثابت است در دستگاه دیگه این نیز ثابت است

در SI: $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ، ϵ_0: ثابت گذردهی الکتریکی خلأ

در cgs: $k = 1$

در cgs واحد بار مستقل از طول، جرم، زمان نیست.

در SI واحد بار مستقل از طول، جرم، زمان هست.

تذکر: cgs $\rightarrow$ cm ، گرم gr

$$MLT^{-2} = L^{-2}Q \rightarrow Q = ML^{3}T^{-2}$$

ako Note Book

قدیما: $\vec F = \gamma m \vec a$ واحد نیرو مستقل از واحدهای جرم و زمان است. γ یک ضریب ثابت به عنوان اضافی و یک بعد اضافی (نیرو)

جاهایی بعد زمان و مسافت را یکسان می‌گیرند، سرعت را بی‌بعد می‌گیرند

فاصله‌ی خورشید تا زمین ۵۰۰ ثانیه نوری است یعنی ۵۰۰ s طول می‌کشد تا نور از خورشید به زمین برسد

فاصله‌ی مدرسه تا خونه چقدره؟ یک ساعت (یعنی با سرعت پیش‌فرض یک ساعت طول می‌کشه برسیم)

در رابطه‌ی $\vec F = \gamma m \vec a$، F را با نیروسنج و m و a را با روش‌های مستقل می‌سنجیم و نسبت اینها γ است.

می‌توانیم سرعت و زمان را تعریف کنیم و طول را بر حسب اینها تعریف کنیم.

سرعت که مستقل از طول و زمان تعریف می‌شه و اندازه می‌گیرند یکم تعریف می‌کنند سرعت نور را

در SI بار کمیت اصلی نیست بلکه جریان کمیت اصلی هست.

در SI نیروی بر طول بین دو سیم به فاصله 1m از هم هر کدام حامل جریان 1A برابر با $10^{-7}\frac{N}{m}$ می‌شود. به اینگونه تعریف می‌شود.

[illegible]

$$\mu_0 := \underbrace{4\pi}_{\text{قرارداد هست.}}\times10^{-7}\ \frac{H}{m}$$

$$\mu_0\epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \qquad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi}$$

c: سرعت نور

ϵ_0 از این رابطه تعریف میشه

$$k = \left(10^{-7}\frac{H}{m}\right)c^2$$

$$c \simeq 3\times10^8\ \frac{m}{s} \qquad k \approx 9\times10^9\ \frac{Nm^2}{C^2}$$

فرض کنیم به جای اینکه بعد جرم را تعریف کنیم، نسبت جرم همه اجسام را نسبت به جرم یک جسم دیگه بسنجیم و عملاً همه جرم‌ها بی‌بعد باشه

تمرین: نیرو بر مساحت بین دو صفحه با چگالی بار یکنواخت و یکسان σ مستقل از فاصله‌ی بین دو صفحه است.

در SI: k (ثابت نیرو) و l (فاصله) و بار بر مساحت $\sigma = \frac{Q}{S}$ و نیرو بر مساحت $\frac{F}{S}$

می‌خواهیم رابطه بین $\frac{F}{S}$، σ، k، l را بیابیم. این رابطه را می‌شه بر حسب کمیت‌های بی‌بعد نوشت

$$\left[\left(\frac{F}{S}\right)^{\alpha} \sigma^{\beta}\, l^{\gamma}\, k^{\delta}\right] = 1$$

$$\left[\frac{F}{S}\right] = ML^{-1}T^{-2} \qquad [\sigma] = CL^{-2} \qquad [l] = L \qquad [k] = ML^{3}T^{-2}C^{-2}$$

در اصل کمیت اصلی جریان باید باشه ولی به راحتی C را می‌گیریم.

$(ML^{-1}T^{-2})^{\alpha}(CL^{-2})^{\beta}L^{\gamma}(MLT^{-2}C^{-2})^{\delta}=1$

$M: \alpha+\delta=0 \rightarrow \alpha=-\delta$

$L: -\alpha-2\beta+\gamma+3\delta=0 \rightarrow \gamma=-\delta+4\delta-3\delta=0$

$-T: -2\alpha-2\delta=0$

$C: \beta-2\delta=0 \rightarrow \beta=2\delta$

$\left(\left(\frac{F}{S}\right)^{-1}\sigma^{2}k\right)^{\delta}=$ ثابت

$\frac{F}{S}=ak\sigma^{2}$ $\qquad$ $\frac{F/S}{\sigma^{2}k}=a=$ ثابت : نتیجه میگیریم

در cgs :

k هم کار نیست. c مستقل از L و M و T نیست.

$\left[\left(\frac{F}{S}\right)^{\alpha}\sigma^{\beta}l^{\gamma}\right]=1$ $\qquad$ $[\sigma]=CL^{-2}=(ML^{3}T^{-2})^{\frac{1}{2}}L^{-2}$

$(ML^{-1}T^{-2})^{\alpha}\left[(ML^{3}T^{-2})^{\frac{1}{2}}L^{-2}\right]^{\beta}L^{\gamma}$

$M: \alpha+\frac{\beta}{2}=0$

$L: -\alpha-\frac{1}{2}\beta+\gamma=0$ $\Big\} \rightarrow \gamma=0$

$T: -2\alpha-\beta=0 \rightarrow \beta=-2\alpha$

$\left(\left(\frac{F}{S}\right)\sigma^{-2}\right)^{\alpha}=$ ثابت $\qquad$ $\frac{F/S}{\sigma^{2}}=$ ثابت

$cgs: \; C^{2}=L^{2}MLT^{-2}=ML^{3}T^{-2}$

$A^{2}=ML^{3}T^{-4}$ $\qquad$ $A=M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-2}$

دستگاه MKS قدیم : در این دستگاه واحد نیرو : kgf است.

متر، کیلوگرم، ثانیه

یک کیلوگرم نیرو kgf : وزن یک جسم به جرم 1kg است. با g مشخص

$(g=9.8\ \frac{m}{s^{2}})$ $\qquad$ $1\,kgf = 9.8\,N$

در حقیقت در cgs ما آمدیم k را از دست می‌دهیم

eV الکترون ولت واحد انرژی است. $eV =$ بار الکترون $\times\ 1V$ پتانسیل $= 1.6\times10^{-19}C \times 1V$
$= 1.6\times10^{-19}J$

کیلوگرم نیرو

مکانیک مهندسی در MKS $\quad F = \dfrac{1}{9.8}\ \dfrac{kgf}{kg\,m\,s^{-2}}\ \underset{\text{جرم}}{m}\,a \rightarrow$ شتاب

نیوتن

γ

$$\vec F_{1\to2} = k\frac{q_1 q_2 (\vec r_2-\vec r_1)}{|\vec r_2-\vec r_1|^3}$$

$$\vec F_n = \sum_{j\neq n} \vec F_{j\to n} = \sum_{j\neq n}\frac{k q_n q_j (\vec r_n-\vec r_j)}{|\vec r_n-\vec r_j|^3} = q_n\sum_{j\neq n}\frac{k q_j (\vec r_n-\vec r_j)}{|\vec r_n-\vec r_j|^3}$$

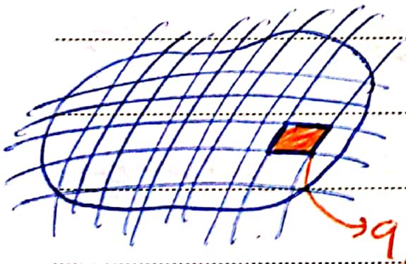
$$\vec E(\vec r) = \sum_j \frac{k q_j (\vec r-\vec r_j)}{|\vec r-\vec r_j|^3}$$ میدان الکتریکی در نقطه $\vec r$

میدان الکتریکی در جاهایی $\vec r \neq \vec r_j$
تعریف شده یعنی ذره روی خودش نیرو وارد نمی‌کند

$$\vec F_n = q_n \sum_{j\neq n}\frac{k q_j (\vec r_n-\vec r_j)}{|\vec r_n-\vec r_j|^3} = q_n \vec E'(\vec r_n)$$

$\vec E'$ = میدان همه بارها جز بار n ام

در تعداد زیادی از مسائل بارها نقطه‌ای نیستند و توزیع پیوسته دارند. (بار حجمی یا سطحی یا خطی) ۱، ۲، ۳ بعدی

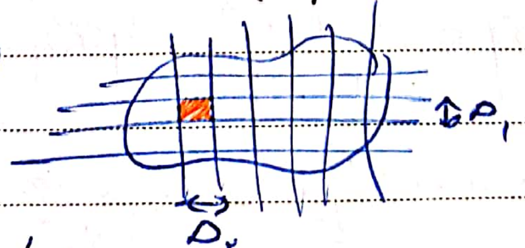


$$\vec E(\vec r) \approx \sum_j \frac{k q_j (\vec r-\vec r_j)}{|\vec r-\vec r_j|^3}$$

علامت تقریب به این علت است که این تقسیم بندی یکتا نیست

تقریب دقیق‌تر می‌شود اگر اندازه‌ها همه به سمت صفر (در همه جهت‌ها) میل کنند

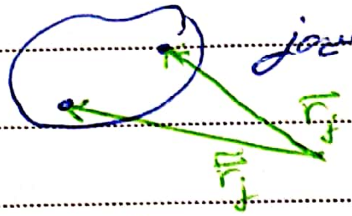
باید تقسیم بر حجم کوچک‌تر شود که



$\Delta_1 \to 0$ ← اینطور نیست

$\Delta_1, \Delta_2 \to 0$ اینطور درست است.

$$\vec E(\vec r) \simeq \sum_j \frac{kq_j(\vec r-\vec r_j)}{|\vec r-\vec r_j|^3} \qquad \tilde{\vec E}(\vec r) = \sum_j \frac{kq_j(\vec r-\tilde{\vec r}_j)}{|\vec r-\tilde{\vec r}_j|^3}$$



برای محاسبه‌ی میدان در $\vec r$ باید از هر ناحیه یک نقطه بگیریم و برای هر ناحیه صورت تقریبی، تقریب بیشتر و هر نقطه‌ای است هر انتخاب بکنیم.

$$\frac{(\vec r-\tilde{\vec r}_j)}{|\vec r-\tilde{\vec r}_j|^3} = \frac{\vec r-\vec r_j}{|\vec r-\vec r_j|^3} + \vec\delta_j \qquad \tilde{\vec E} = \vec E + \sum_j kq_j\delta_j$$

وقتی اندازه‌ی نواحی (در صورت حجم‌ها) به صفر میل کند (کوچک شود)، δ_j ها به صفر می‌روند، ولی تعداد جملات جمع زیاد می‌شود ولی $\sum_j q_j$ محدود می‌ماند.

$$I = \sum_j f(x_j)\,\Delta q_j$$

وقتی اندازه‌ی همه‌ی نواحی به همه جزئی‌ها به صفر میل کند $\tilde I$ چه می‌شود؟

$$\tilde I = \sum_j f(\tilde x_j)\,\Delta q_j \qquad f(\tilde x_j) = f(x_j) + \delta_j$$

$$\Delta q_j \sim \frac{1}{N}$$

کل ناحیه به N بخش تقسیم شده

تعداد جملات جمع به بی‌نهایت میل می‌کند و Δq_j به صفر میل می‌کند.

$$\sum_j f(x_j)\,\Delta q_j \sim N \cdot \alpha \frac{1}{N}$$ (محدود می‌ماند، نه صفر می‌شود، نه بی‌نهایت)

تعداد جملات جمع

$$\tilde I - I = \sum_j \left[f(\tilde x_j) - f(x_j)\right]\Delta q_j = \sum_j (\delta_j)\,\Delta q_j \sim N(\delta)\underbrace{\frac{1}{N}}_{\Delta q_j} \longrightarrow 0$$

وقتی که اندازه‌ی همه نواحی به صفر می‌رود، δ ها به صفر می‌روند؛ وقتی اندازه‌ی ناحیه‌ها به صفر میل کند I و $\tilde I$ محدود می‌ماند اما اختلافشان به صفر میل می‌کند.

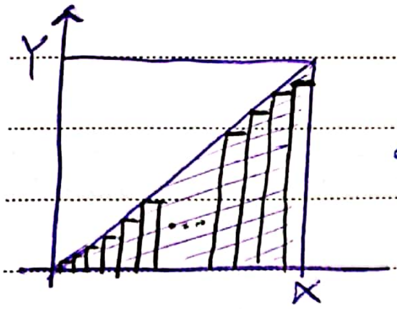
$$\sum_j f(x_j)\,\Delta q_j \xrightarrow[\text{اندازه‌ی همه نواحی و همه حجم‌ها به صفر}]{} \int f(x)\,(dq)$$

این‌ها همان انتگرال‌گیری است

$\vec r'$، $\vec s$ همان $\vec r_j$ است.

$$\vec E(\vec r) = \int \frac{k(\vec r-\vec s)}{|\vec r-\vec s|^3}\left[dq(\vec s)\right] = \int \frac{k(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}\left[dq(\vec r')\right]$$

دقت شود که هم $\vec r'$ و $\vec s$ متغیر حاصل ندارد. برای ما مشخص نیست که کجاست ولی محدوده‌ی انتگرال‌گیری و گرادیان معلوم است.



مثال ۲. می‌خواهیم برای حالت ساده مساحت مثلث را با استفاده از مستطیل‌ها تقسیم کنیم

مثلاً به سه قسمت:

مساحت $A = \Delta x (y_1 + y_2 + y_3)$

$\Delta x = \frac{x}{3}$

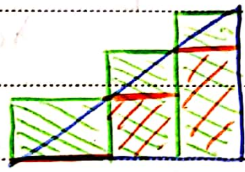
$3 \to N$ تعمیم

$A = \Delta x (y_1 + \dots + y_n) \qquad (i-1)\Delta x < x_i < i\Delta x$

$y_i = \frac{Y}{X} x_i$

$(i-1)\frac{Y}{X}\Delta x < y_i < i\frac{Y}{X}\Delta x$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(i-1)Y}{X}\Delta x^2 < S < \sum_{i=1}^{N} \frac{iY}{X}\Delta x^2$$



وقتی تعداد جمع‌ها به بی‌نهایت برود، مقدار جمع در محدود می‌ماند و اختلاف‌شان به صفر میل می‌کند.

$$\sum_i \frac{iY}{X}(\Delta x)^2 - \sum_i \frac{(i-1)Y}{X}(\Delta x)^2 = \sum_i \underbrace{\frac{Y}{X}(\Delta x)}_{\delta}\underbrace{(\Delta x)}_{\frac{X}{N} \propto \frac{1}{N}} \longrightarrow 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Y}{X}(\Delta x)^2 = N\frac{Y}{X}(\Delta x)^2 = N\frac{Y}{X}\left(\frac{X}{N}\right)^2 = \frac{YX}{N} \longrightarrow 0$$

$$\sum_i \frac{iY}{X}(\Delta x)^2 = \frac{Y}{X}(\Delta x)^2 \sum_{i=1}^{N} i = \frac{Y}{X}(\Delta x)^2 \frac{N(N+1)}{2} = \frac{Y}{X}\frac{X^2}{N^2}\frac{N(N+1)}{2}$$

$$= \frac{YX}{2}\frac{N(N+1)}{N^2} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{YX}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{(i-1)Y}{X}(\Delta x)^2 = \frac{Y}{X}\left(\frac{X}{N}\right)^2 \sum_{i=1}^{N}(i-1) = \frac{YX}{N^2}\frac{N(N-1)}{2} = \frac{YX}{2}\frac{N-1}{N}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{YX}{2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{k(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, dq(\vec{r}')$$ توزیع بار پیوسته

چگالی میانگین q در ناحیه j ام $= \dfrac{q_j}{\text{اندازه ناحیه } j}$

چگالی میانگین وقتی اندازه ناحیه به سمت صفر میل کند به مقداری میل می‌کند که آن را **چگالی نقطه‌ای** می‌نامیم.

به کوچک میل

$$q_j = \underbrace{\frac{q_j}{V_j}}_{\rho,\ \sigma,\ \lambda} V_j \qquad \Delta q = \rho\,\Delta V \quad \text{یا} \quad \sigma\,\Delta S \quad \text{یا} \quad \lambda\,\Delta l$$

چگالی حجمی — حجم — سطح — چگالی طولی — طول

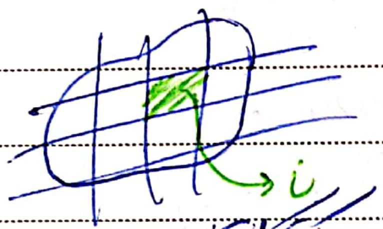
$$\vec{E}(\vec r) = \int_{\text{کل حجم جسم}} \frac{k(\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3} \begin{matrix} \rho(\vec r\,')\,dV' \\ \sigma(\vec r\,')\,dS' \\ \lambda(\vec r\,')\,dl' \end{matrix}$$

جواب تابع V' و S' و l' و $\vec r\,'$ نیست.

☆ انتگرال نامعین $\int f(a)\,da$ یک تابع a هست و $\int_a^b f(x)\,dx$ انتگرال معین تابع x نیست.

نیروی وارد بر یک نقطه خاص در فضا صفر هست.

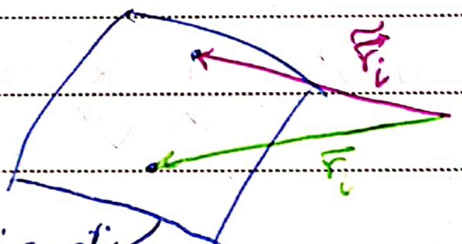
می‌خواهیم نیروی وارد بر یک تکه از توزیع بار را بیابیم:



یک تکه از توزیع

$$\vec F_i = \sum_{j \neq i} \frac{k q_i q_j (\vec r_i - \vec r_j)}{|\vec r_i - \vec r_j|^3}$$

سهم تکه j=i چیست؟ آیا محاسبه‌اش از جمع حذف شده؟



ناحیه i ام

$\vec r_i$ و $\vec r_i$: دو نقطه متفاوت در ناحیه i ام

در ناحیه i ام انتگرال گرفته می‌شود

سهم تکه j=i

$$\frac{k q_i q_i (\vec r_i - \vec r_i)}{|\vec r_i - \vec r_i|^3} \sim \frac{k(\Delta q)^2}{l^2} \quad (\text{صرف‌نظر از جهت})$$

$$= \frac{kQ^2}{N^2 l^2}$$

l: اندازه مشخصه ناحیه (نگهش می‌داریم)

N: تعداد تقسیم‌ها

ako

Subject: .... Year ...... Month ...... Date ......

چگالی شار الی همون چگالی‌ها هست که با مشتق تعریف می‌شه؟

تقسیم بندی لبه‌ها (چگالی نیرو): نیرو تقسیم بر اندازه‌ی ناحیه

$$\frac{kq_i^2(\vec r_i-\vec r_i)}{|\vec r_i-\vec r_i|^3}\times\frac{1}{\text{اندازه ناحیه}} \qquad \text{اندازه ناحیه} \propto \frac{1}{N}$$

$$\propto N\frac{kq_i^2(\vec r_i-\vec r_i)}{|\vec r_i-\vec r_i|^3}=N\frac{kQ^2}{N^2l^2}=\frac{kQ^2}{Nl^2}\propto\frac{1}{Nl^2}$$

بعد ناحیه: ۳ اندازه ناحیه: l^3

$$l^3\propto\frac{1}{N}\rightarrow N\propto\frac{1}{l^3}\rightarrow Nl^2\propto\frac{1}{l}$$

تک تک سهم $\propto l \xrightarrow{l\to 0} 0$

بعضی شکل‌ها دیگر هستند که چگالی بار حجمی در یک نقطه (یک انتگرال لذا) انتگرال‌ناپذیر ... ناچیزی ایجاد می‌کنند.

بعد D بعدی: اندازه ناحیه $=l^D$ $\qquad l^D\propto\frac{1}{N}$

$$\frac{1}{Nl^2}\propto l^{D-2}$$

$D=3,\ l^{D-2}\to 0$ (کار انتگرال لازم نیست) برای بار حجمی خود نیرو، خود به خود حذف می‌شود

$D=2,\ l^{D-2}$ (مبهم، معلوم نیست) $,\ D=1,\ l^{D-2}\to\infty$ برای بار خطی باید خود نیرو حذف شود (مسئله سخت)

برای بار حجمی:

$$\vec E(\vec r)=\int dV'\frac{\rho(\vec r')(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

$$\vec f(\vec r)=\rho(\vec r)\vec E(\vec r)$$

چگالی نیروی حجمی

نیروی وارد بر یک تکه کامل از توزیع پیوسته، اگر ρ ... و ... تکه بار نقطه‌ای باشد نیرو صفر می‌شود. توزیع پیوسته از تعداد محدودی تکه بار که اندازه‌شان به صفر میل می‌کند تشکیل شده.

$$\vec F(V)=\int_V \vec f(\vec r)\,dV$$

نیروی وارد بر ناحیه V

میدان در محل بار که باید کنار گذاشته شود $\propto\frac{\Delta Q}{l^2}\propto\frac{l^D}{l^2}=l^{D-2}$

$D>2\rightarrow 0$

$D<2\rightarrow\infty$

$D=2\rightarrow$ محدود

اگه نیرو رو بررسی کنیم این مهمه

ako Note Book

برای باری که به طور موثر خطی است a مهم است.

به طور موثر خطی یعنی حقیقتاً مهم است ولی a خیلی کم است.

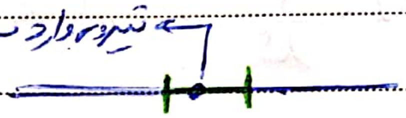
برای بارهایی که به طور موثر سطحی است معلوم می‌شود حد a ... a وجود دارد.

به طور موثر سطحی یعنی واقعاً مهم است ولی اگر a کوچک باشد به سطح شبیه می‌شود.

نزدیک سیم تغییرات ... a ، ... E پیدا می‌کند

بار سطحی

نیروی وارد بر این تکه از سطح



$$f_s(\vec r) = \sigma(\vec r)\, \vec E'(\vec r)$$

چگالی سطحی بار — میدان حاصل از بقیه بارها

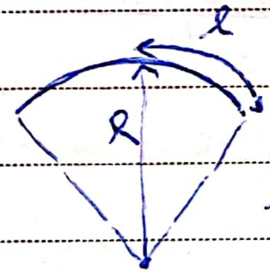
میدان حاصل دیگر بارها

جز بخش بسیار کوچک را باید برای محاسبه‌ی نیرو حساب کنیم

دقت: اندازه‌ی تکه چقدر کوچک باشد. — ممکن است سطح خمیده باشد

ناحیه‌ی کنار گذاشته شده کوچک: اندازه‌ی ناحیه را خیلی کوچک می‌گیریم که اثر خمیدگی سطح مهم نباشد

به هر سطح در هر نقطه دو شعاع انحنا نسبت داده می‌شود.



اگر طول از این شعاع‌های انحنا بسیار کوچکتر باشد $l \ll R$ اثر خمیدگی مشاهده نمی‌شود.

اگر سطح تخت باشد شعاع‌های انحنا بی‌نهایت می‌شوند (صفحه)

$l \ll R_{min}$

در حالت کلی به هر نقطه دو شعاع انحنا نسبت می‌دهند. شعاع انحنای کمینه و بیشینه را شعاع‌های انحنای اصلی می‌نامند.

σ لزوماً روی سطح ثابت نیست.

L: طول مشخصه‌ی تغییر سطحی — اگر جابجایی از مرتبه‌ی L یا بزرگتر باشد σ تغییر چشمگیر دارد.

پس اگر $l \ll L$، σ عملاً ثابت است.

$$\Delta\sigma \ll \frac{d\sigma}{dl}\,\Delta l \qquad |\Delta\sigma| \ll |\sigma| \qquad \frac{|\sigma'\Delta l|}{|\sigma|} \ll 1$$

شرط ۱

$$\Delta l \ll \frac{|\sigma|}{|\sigma'|} = L$$

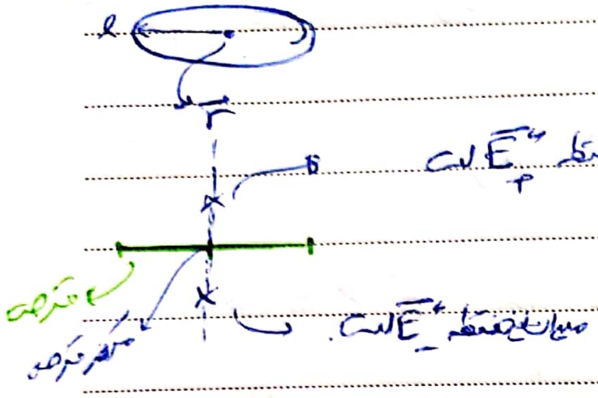
شرط ۲

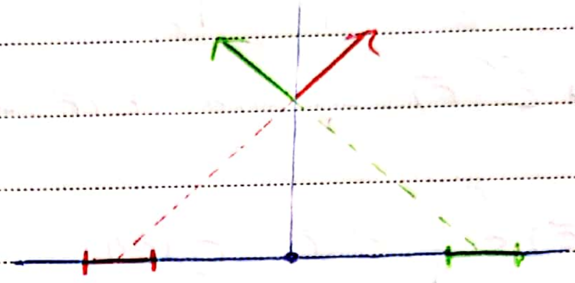
شعاع انحنا

$$l \ll L,\ R$$

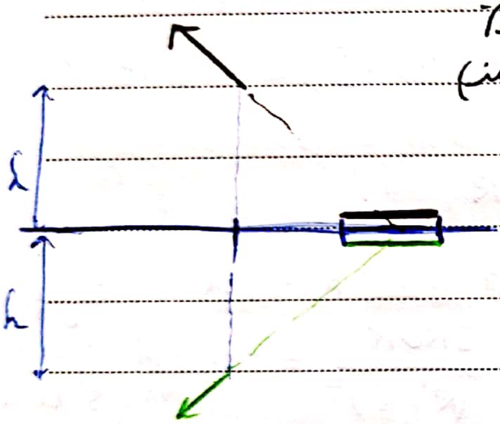
طول مشخصه تغییرات چگالی سطحی بار

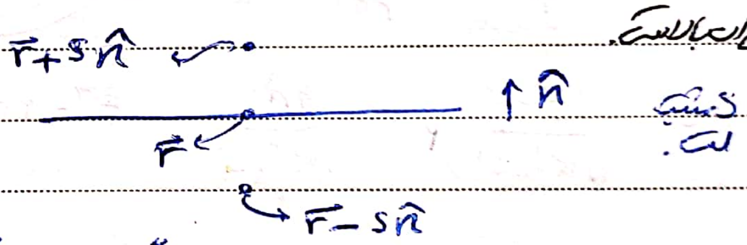
یک قرصه بر سطح به مرکز $\vec{r}$ و شعاع l در نظر بگیریم. با این فرض ما یک توصیف با چگالی ثابت به فرض کنیم.
قرار است میدان حاصل از این قرصه $(\vec{E}^{4})$ را نگاه کنیم.





مولفه های موازی با سطح بخش سطح و نسبت میدان یکدیگر را خنثی می کنند. میدان فقط مولفه عمود بر سطح دارد.
از شکل سمت راست قرصه و ... بسیار کوچک سطح می خواهیم استفاده کنیم.
از شکل معلوم می شود بخش موازی با سطح ... برابرند. (میدان حاصله است)
( ) بخش عمود بر سطح ... قرینه هم اند.
میدان در بالا و پایین سطح عمود بر سطح است و میدان پایین قرینه میدان بالا است.





خود میدان
$$\vec{E}^{4}(\vec{r}+s\hat{n}) = E^{4}_{+}\hat{n} \qquad E^{4}_{-} = -E^{4}_{+}$$
$$\vec{E}^{4}(\vec{r}-s\hat{n}) = E^{4}_{-}\hat{n}$$

میدان بقیه
$$\vec{E}' = \underbrace{\vec{E}}_{\text{کل میدان}} - \vec{E}^{4}$$

$$\vec{E}'(\vec{r}+s\hat{n}) = \vec{E}(\vec{r}+s\hat{n}) - \vec{E}^{4}(\vec{r}+s\hat{n}) \rightarrow \vec{E}'(\vec{r}+s\hat{n}) = \vec{E}(\vec{r}+s\hat{n}) - E^{4}(s)\hat{n}$$
$$\vec{E}'(\vec{r}-s\hat{n}) = \vec{E}(\vec{r}-s\hat{n}) - \vec{E}^{4}(\vec{r}-s\hat{n}) \rightarrow \vec{E}'(\vec{r}-s\hat{n}) = \vec{E}(\vec{r}-s\hat{n}) + E^{4}(s)\hat{n}$$

در ضابطه $\vec{r}$ را ثابت گرفته و در ادامه صریح بیان می دهیم

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{r}+s\hat{n}) &= \vec{E}(\vec{r}+s\hat{n}) - \hat{n}E^{4}(\vec{r},s)\\ \vec{E}'(\vec{r}-s\hat{n}) &= \vec{E}(\vec{r}-s\hat{n}) + \hat{n}E^{4}(\vec{r},s)\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow \vec{E}'(\vec{r}+s\hat{n}) + \vec{E}'(\vec{r}-s\hat{n}) = \vec{E}(\vec{r}+s\hat{n}) + \vec{E}(\vec{r}-s\hat{n})$$

$$2\vec{E}'(\vec{r}) = \lim_{s\to 0^+}\left(\vec{E}(\vec{r}+s\hat{n}) + \vec{E}(\vec{r}-s\hat{n})\right)$$ $\vec{E}'$ در $\vec{r}$ پیوسته است.

$\vec{E}'$

$$\vec f(\vec r)=\sigma(\vec r)\,\frac{1}{2}\lim_{\underset{\text{میدان کل}}{s\to 0^+}}\left(\vec E(\vec r+s\hat n)+\vec E(\vec r-s\hat n)\right)$$: نیروی وارد بر سایر بارها به بار سطحی $\sigma(\vec r)$

Subject: ....

Year ...... Month ...... Date ......

اثبات پیوسته بودن $\vec E'$:

$\vec E'$ میدان در نقطه $\vec r$ که بیرون توزیع بار است:
$\vec r$ بیرون ناحیه انتگرال‌گیری است

$$\vec E'(\vec r)=k\int\frac{dq(\vec r')\,(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

$$\vec E'(\vec r)=\frac{1}{2}\lim_{s\to 0}\left(\vec E(\vec r+s\hat n)+\vec E(\vec r-s\hat n)\right)$$

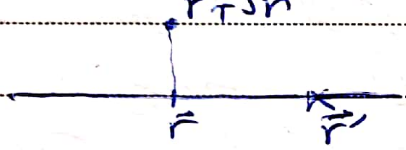
$$\vec E'(\vec r)=\frac{1}{2}\left(\vec E_+(\vec r)+\vec E_-(\vec r)\right)\qquad \vec E_{\pm}(\vec r)=\lim_{\underset{\text{چپ و راست}}{s\to 0^{\pm}}}\vec E(\vec r\pm s\hat n)$$

$$\vec f_s(\vec r)=\sigma(\vec r)\langle\vec E(\vec r)\rangle$$

$\langle \vec E(\vec r)\rangle$: میدان میانگین

$$\langle\vec E\rangle_{(\vec r)}=\frac{1}{2}\left(\vec E_+(\vec r)+\vec E_-(\vec r)\right)$$

اگر $\vec E''$ صفر نشان بدهیم و $\vec E'$ پیوسته باشد، $\vec E$ پیوسته خواهد بود.



به s بستگی ندارد!

بی‌نهایت کم

$R:=su$

$$d\vec E''=k\sigma\,\frac{2\pi R\,dR}{\left(\sqrt{R^2+s^2}\right)^2}\times\frac{s\hat n}{\sqrt{R^2+s^2}}\qquad \vec E''=2\pi k\sigma\hat n\int\frac{sR\,dR}{(R^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi k\sigma\hat n\int\frac{s^2u\,du}{s^3(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

چرا با صفر شدن این صفر شد؟

نیرو بر واحد بار سطحی:

$$\vec f_s(\vec r)=\sigma(\vec r)\langle\vec E(\vec r)\rangle$$

$\langle \vec E(\vec r)\rangle$: میانگین میدان دو طرف

* برای بار سطحی باید فرض معتبر رو در نظر بگیریم، نمی‌توان r را صفر قرار داد.

$$\vec E(\vec r)=\int\frac{dq(\vec r')\,(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

راه‌حل دیگر: کار با میدان الکتریکی:

$$\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|^3}=\hat x\,\frac{x-x'}{R^3}+\hat y\,\frac{y-y'}{R^3}+\hat z\,\frac{z-z'}{R^3}\qquad |\vec r-\vec r'|:=R$$

$$R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

مشتق

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=(D_1f)(x,y)$$

نسبت به متغیر اول

ako
Note Book

Subject: $\vec{E}(\vec{r}) = k\int -\nabla\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) dq(\vec{r}')$

Year ...... Month ...... Date ......

$$(D_2 f)(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial x} = \frac{-(x-x')}{R^3} \qquad \frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial y} = \frac{-(y-y')}{R^3}$$

$$\boxed{\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = -\hat{x}\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial z} = -\nabla\frac{1}{R} \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}}$$

گرادیان $\frac{1}{R}$

برای تابع یک متغیره

$$f(x+\Delta x) = f(x) + [f'(x)]\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon = 0 \qquad \varepsilon = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$$

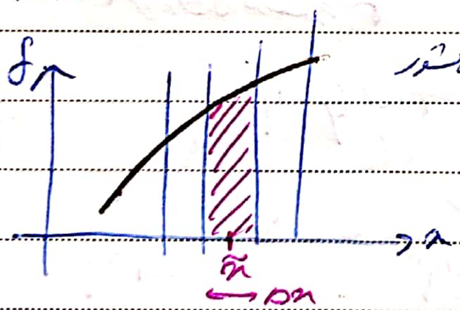
$$f(x+\Delta x) = f(x) + [f'(x)]\Delta x + o(\Delta x)$$

اوکوچک

$o(\Delta x)$ سریع‌تر از Δx به صفر میل می‌کند

یعنی o کوچک‌تر از مرتبه Δx است

$$\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$$



مساحت مستطیل زیر

$$\Delta S = [f(\tilde{x})]\Delta x + \varepsilon \Delta x \qquad \lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon = 0$$

برای تابع بیش از یک متغیره

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x+\Delta x, y) + [(D_2 f)(x+\Delta x, y)](\Delta y) + o(\Delta y)$$

$$f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + [(D_1 f)(x,y)]\Delta x + o(\Delta x)$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + [(D_1 f)(x,y)](\Delta x) + [(D_2 f)(x+\Delta x, y)]\Delta y + o(\Delta x) + o(\Delta y)$$

$$o(\Delta x) = \varepsilon \Delta x \quad (\varepsilon \to 0) \qquad \Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}$$

$$= \varepsilon \frac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|}|\Delta\vec{r}| \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \frac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{o(\Delta x)+o(\Delta y)}{o(\Delta\vec{r})}$$

قدر مطلقش نا بزرگتر از یک است

$$o(\Delta x) = o(|\Delta\vec{r}|)$$

به همین صورت $o(\Delta y)/|\Delta\vec{r}|$

IranPhO.ir

$o(\Delta x) + o(\Delta y) = o(|\Delta \vec r|)$

$o(\Delta x) + o(\Delta y) = o(|\Delta \vec r|)$

$(D_1 f)(x+\Delta x, y) = (D_1 f)(x,y) + \eta \qquad (\eta \to 0)$

$[(D_1 f)(x+\Delta x, y)]\Delta x = [(D_1 f)(x,y)]\Delta x + \eta(\Delta x) \qquad o(\Delta x) = o(|\Delta \vec r|)$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + [(D_1 f)(x,y)](\Delta x) + [(D_2 f)(x,y)](\Delta y) + o(|\Delta \vec r|)$

$f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \left[\sum_{i=1}^{n} (D_i f)(x_1, \dots, x_n)\right]\Delta x_i + o(|\Delta \vec r|)$ بسط تیلور تابع f حول $\vec r$ است

$[(D_1 f)(\underbrace{x,y,z}_{(\vec r)})]\Delta x + [(D_2 f)(\vec r)]\Delta y + [(D_3 f)(\vec r)]\Delta z = [(\nabla f)(\vec r)] \cdot (\Delta \vec r)$

گرادیان f در نقطه $\vec r$

$\Delta \vec r = \hat x \Delta x + \hat y \Delta y + \hat z \Delta z$

$f(\vec r + \Delta \vec r) = f(\vec r) + [(\nabla f)(\vec r)] \cdot (\Delta \vec r) + o(|\Delta \vec r|)$

$\vec E(\vec r) = k \int \frac{[dq(\vec r')](\vec r - \vec r')}{|\vec r - \vec r'|^3} \qquad \frac{\vec r - \vec r'}{|\vec r - \vec r'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$

$E(\vec r) = -k \int [dq(\vec r)] \nabla \frac{1}{|\vec r - \vec r'|}$ گرادیان نسبت به $\vec r$ است

$f(x) = \int_a^b g(x,y)\,dy \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0} \int_a^b dy \, \frac{g(x+h, y) - g(x,y)}{h}$

$= \int_a^b dy \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h,y) - g(x,y)}{h}$ بطور

$\frac{\partial f}{\partial x} = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x}\,dy$

$= \int_a^b dy\, (D_1 g)(x,y)$

$$f(x) = \int_a^b dy\, g(x,y) \qquad (Df)(x) = \int_c^b dy\, (D_1 g)(x,y)$$

مشتق نسبت به $\vec{r}$، جزء

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int [dq(\vec{r}\,')] \left(-\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) = -\nabla \left[k \int \frac{dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -(\nabla\phi)(\vec{r})$$

ϕ اسکالر است.

ϕ را پتانسیل الکتریکی می‌نامند.

$$\phi(\vec{r}) = k \int_{\text{روی کل فضا}} \frac{dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

محاسبه این انتگرال‌ها برای ϕ آسان‌تر (بیشتر از میدان) است.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -k \int [dq(\vec{r}\,')] \left(\frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial(\frac{1}{R})}{\partial z}\hat{z}\right)$$

$$= -k \left[\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{dq(\vec{r}\,')}{R}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{dq(\vec{r}\,')}{R}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{dq(\vec{r}\,')}{R}\hat{z}\right]$$

$$= -k\nabla\left(\int \frac{dq(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi \qquad \underbrace{E(x)}_{\text{اسکالر}} = -\frac{d\phi}{dx} \qquad \phi(x) = -\int_{x_0}^{x} E(\tilde{x})\, d\tilde{x}$$

علامت منفی

اگر $E(x)$ یک اسکالر بود توضیح اینکه فقط ϕ وجود دارد ساده بود.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + [(D_1 f)(x,y)]\Delta x + [(D_2 f)(x,y)]\Delta y + o(|\Delta\vec{r}|)$$

$$f(x+h) = f(x) + [f'(x)]h + \varepsilon h$$

این را برای مشتق هم نیز نوشت

$$f'(x+h) = f'(x) + [f''(x)]h + \eta h$$

انتگرال نسبت به h

$$f(x+h) - C = [f'(x)]h + [f''(x)]\frac{h^2}{2} + \tilde{\eta} h^2$$

برای به دست آوردن C، $h = 0$ قرار می‌دهیم:

$$f(x) - C = 0 \rightarrow f(x) = C$$

IranPhO.ir

$f(x+h) = f(x) + [f'(x)]h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \eta h^2$ $\qquad \lim_{h\to 0}\eta = 0$

مرتبه دو $f(x)$

بسط تیلور با سه بار مشتق‌پذیری لازم اگر همین کار را ادامه دهیم

$f(x+h) = f(x) + [f'(x)]h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + o(h^n)$

$\frac{d^n(h^n)}{dh^n} = n!$

بسط تیلور f حول x تا مرتبه n (تابع یک متغیره)

(*) $f(x+h, y+k) = A_0 + B_1 h + B_2 k + C_{11}h^2 + C_{12}hk + C_{22}k^2 + o(h^2+k^2)$

بسط تا درجه ۲:

h متغیر اول و k را متغیر دوم گرفتیم

جملاتی با توان‌های بیشتر از ۲ h, k

بسط تیلور تابع دو متغیره

$h=k=0 \longrightarrow f(x,y) = A_0$

$(D_1 f)(x+h, y+k) = B_1 + 2C_{11}h + C_{12}k + \dots$ ؛ مشتق نسبت به h

$h=k=0 \longrightarrow (D_1 f)(x,y) = B_1$

سر همه جملات از درجه یک صفر می‌شود.

از * مشتق نسبت به k می‌گیریم سپس $h=k=0$ آنگاه $B_2 = (D_2 f)(x,y)$

از * دو بار نسبت به h مشتق می‌گیریم.

$(D_1 D_1 f)(x+h, y+k) = 2C_{11} + \dots$

$h=k=0 \longrightarrow (D_1 D_1 f)(x,y) = 2C_{11}$

$C_{11} = \frac{1}{2}(D_1 D_1 f)(x,y) = \frac{1}{2}(D_1^2 f)(x,y)$

از * دو بار نسبت به k مشتق گرفته سپس $h=k=0$ قرار می‌دهیم

$C_{22} = \frac{1}{2}(D_2^2 f)(x,y)$

$f(x+h, y+k) = \text{درجه صفر} + \text{درجه یک} + ()h^2 + ()k^2 + C_{12}hk + \dots$

نسبت به h مشتق

$D_1 f(x+h, y+k) = 0 + \text{درجه صفر} + 2()h + C_{12}k + \dots$

سر همه جملات از درجه یک صفر می‌شوند

$(D_2 D_1 f)(x+h, y+k) = C_{12} + \dots$

سر همه جملات از درجه صفر صفر می‌شوند

$C_{12} = (D_2 D_1 f)(x,y)$

اول نسبت به k سپس نسبت به h مشتق می‌گیریم

$hk \xrightarrow{\text{نسبت به } k} h \xrightarrow{\text{نسبت به } h} 1$

$hk \xrightarrow{\text{نسبت به } h} k \xrightarrow{\text{نسبت به } k} 1$

$C_{12} = (D_1 D_2 f)(x,y)$

Subject: ....
Year ...... Month ...... Date ......

$$f(x)=\sum \frac{D^n f(a)}{n!}(x-a)^n+\sum h_n(a)(x-a)^n$$

اگر تابع f در یک همسایگی پیوسته باشد:

$$\Rightarrow D_1D_2f=D_2D_1f \qquad f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=D_1 f \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=D_2 f$$

برای اثبات این فرض می‌کنیم تابع مشتق دوم دارد و به اندازه کافی خوش‌رفتار است.
که می‌توان با شرط‌های کمتری هم به این نتیجه رسید

$$\boxed{D_iD_jf=D_jD_if \qquad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots)}$$

$$\vec{E}=-\nabla\phi \rightarrow E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}=-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}\\ \qquad \parallel \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial E_y}{\partial x}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

عملگر دل یا نابلا (∇):

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

کرل $\vec{A}$:

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\times\left(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(A_y\hat{y})=\hat{y}\frac{\partial}{\partial x}(A_y)$$

$\hat{x}$ ، $\hat{y}$ ، $\hat{z}$ بردار یکه ثابت اند.

$$\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$\nabla\phi$: گرادیان ϕ $\qquad$ $\nabla\times\vec{A}$: کرل $\vec{A}$

$$\nabla\times\vec{E}=\underbrace{\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)}_{0}\hat{x}+\underbrace{(\;)}_{0}\hat{y}+\underbrace{(\;)}_{0}\hat{z}=0$$

ako
Note Book

IranPhO.ir

$$\nabla\times\vec{E}=0 \equiv \vec{E}=-\nabla\phi$$

در مکانیک:

نیروهایی هستند که شرط کافی شکل (۲) الف و $\nabla\times\vec{F}=0$ یا $\vec{F}=-\nabla U$ این نیروها را پایستار می‌نامند

(تابع زمان نیستند) مشتق‌پذیرند

if $\vec{E}=-\nabla\phi \Rightarrow \nabla\times\vec{E}=0$ سوال: آیا عکس مطلب هم برقرار است؟

جواب:

$$\vec{F}=F_1(x,y)\hat{x}+F_2(x,y)\hat{y} \qquad D_1F_2=D_2F_1 \xrightarrow{?} \exists S, \quad F_1=D_1S, \quad F_2=D_2S$$

$(D_1S)(x,y)=F_1(x,y) \quad (D_2S)(x,y)=F_2(x,y)$ بدست آوردن S که دو معادلهٔ ضمنی معادل است:

$$\int_{x_0}^{x}(D_1S)(u,y)\,du=\int_{x_0}^{x}F_1(u,y)\,du \qquad \frac{\partial S}{\partial x}=F_1 \quad \frac{\partial S}{\partial y}=F_2$$

$$S(x,y)-S(x_0,y)=\int_{x_0}^{x}du\,F_1(u,y) \qquad \int_{x_0,y}^{x,y}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y dx$$

$$S(x,y)=S(x_0,y)+\int_{x_0}^{x}du\,F_1(u,y) \quad (1)$$

اگر F ها انالیتیک باشند خوب، مشتق را بیار داخل

$$(D_2S)(x,y)=(D_2S)(x_0,y)+\int_{x_0}^{x}du\,(D_2F_1)(u,y)$$

$$f'(x)=g \Longleftrightarrow f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x}g(u)\,du$$

$$(D_2S)(x_0,y)=(D_2S)(x,y)-\int_{x_0}^{x}\underbrace{(D_2F_1)}_{=D_1F_2}(u,y)\,du=(D_2S)(x,y)-\int_{x_0}^{x}(D_1F_2)(u,y)\,du$$

$$=(D_2S)(x,y)-\Big[F_2(x,y)-F_2(x_0,y)\Big]=F_2(x_0,y)$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y} (D_2 S)(x_0, v)\, dv = \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, y)\, dv \qquad \int_{x_0}^{x} (D_1 S)(x', y)\, dx' = \int_{x_0}^{x} F_1(x', y)\, dx'$$

$$S(x, y) - S(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} F_1(x', y)\, dx'$$

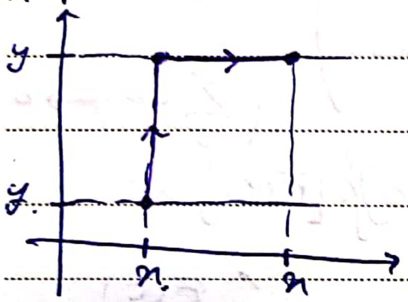
وسط بحث

$$D_2 S(x_0, y) = F_2(x, y) - \int_{x_0}^{x} du\, (D_2 F_1)(u, y)$$

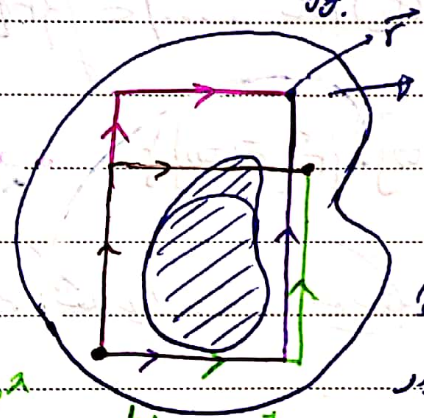
طرف چپ تابع x نیست پس طرف راست هم باید مستقل از x باشد

یعنی مشتق طرف ~~راست~~ راست نسبت به x باید صفر باشد

$$\cancel{(D_2 S)}\quad S(x_0, y) = S(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, v)\, dv \quad (3)$$



(۱) و (۲):
$$S(x, y) = S(x_0, y_0) + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, v)\, dv + \int_{x_0}^{x} F_1(u, y)\, du$$



$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

مسیر سبز و مشکی: لوپ عمومی هم تعریف

مسیر صورتی و مشکی: لوپ تعریف هم بوده

هر لوپ به عضو نقاط مسیر صورتی و برای بعضی نقاط

مسیر سبز جواب می‌دهد و برای بعضی نقاط هر دو

جواب می‌دهد. که خیلی مسئله که برای

$$S(x, y) = S(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} F_1(u, y_0)\, du + \int_{y_0}^{y} \vec{F}_2(x, v)\, dv$$

این دو مسیر یکسان باشد

برای $\vec{r}$ ممکن است S و S یکسان نباشد.

چون دو دسته مسیر داریم (و بیشتر) باید اثبات کرد که S ها به ازای این مسیرها یکسان است وگرنه یافته‌ها کامل نیست.

$$\nabla S = \vec{F} \Longrightarrow \nabla \times F$$

$\Longleftarrow$ با استفاده از شیب می‌دهد (شرط)

$$(\nabla S) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[S(\vec{r})\right] \longleftarrow \Delta S = (\nabla S) \cdot \Delta\vec{r} + \dots$$

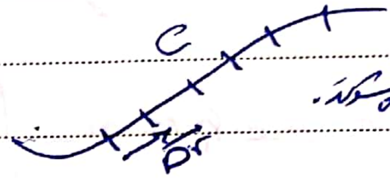
بسط تیلر

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{d\left[S(\vec{r}(t))\right]}{dt}\, dt = S\left[\vec{r}(t_f)\right] - S\left[\vec{r}(t_i)\right]$$

Subject: .... Year ...... Month ...... Date ......

$$\int_C \left[(\nabla S)(\vec r)\right]\cdot d\vec r = S(\vec r_f) - S(\vec r_i)$$

$\vec r_i$ و $\vec r_f$ ابتدا و انتهای C باشند.



نقاط منحنی را با $\vec r(t)$ نشان داده می‌شوند.

$$\int_C \left[\vec F(\vec r)\right]\cdot(d\vec r) \approx \sum_i \left[\vec F(\vec r_i)\right]\cdot \Delta\vec r_i$$

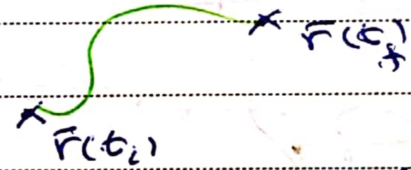
$$= \lim_{|\Delta \vec r|\to 0} \sum_i \left[\vec F(\vec r_i)\right]\cdot(\Delta \vec r_i) \qquad \Delta\vec r_i = \dot{\vec r}(t_i)\,\Delta t_i + O(\Delta t_i)$$

$$\sum_i \left[\vec F(\vec r_i)\right]\cdot(\Delta\vec r_i) = \sum_i \left(\left\{\vec F(\vec r(t_i))\right\}\cdot \dot{\vec r}(t_i)\,\Delta t_i + \dots\right) \qquad \left(\sum_i \dots\right)\to 0$$

$$\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_i \left(\left\{\vec F(\vec r(t_i))\right\}\cdot \dot{\vec r}(t_i)\,\Delta t_i + \dots\right) = \int \left\{\vec F[\vec r(t)]\right\}\cdot\left[\dot{\vec r}(t)\right] dt$$

$$\int_C (d\vec r)\cdot\left[\vec F(\vec r)\right] = \int_{t_i}^{t_f} dt\, \left[\dot{\vec r}(t)\right]\cdot\left\{\vec F\left[\vec r(t)\right]\right\}$$

C ← مسیر



نتیجه: حاصل این انتگرال به مسیر بستگی دارد و به شکل پارامتریزه کردن مسیر بستگی ندارد.

اگر $\vec F(\vec r) = (\nabla S)(\vec r)$ آنگاه

$$\int \left[(\nabla S)(\vec r)\right]\cdot d\vec r = S(\vec r_f) - S(\vec r_i)$$

فقط به سر و ته مسیر بستگی دارد.

* اگر $\vec F = \nabla S$ آنگاه $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ به فقط سر و ته مسیر C بستگی دارد.

برعکس، اگر $\int_C \vec F\cdot d\vec r$ فقط به سر و ته C باشد آنگاه یک S هست که $\vec F = \nabla S$

$$S = \underbrace{A}_{\text{ثابت}} + \int_{\vec r_0}^{\vec r} (d\vec s)\cdot\left[\vec F(s)\right]$$

انتگرال روی یک مسیر C که سر و ته آن $\vec r_0$ و $\vec r$ هستند و مهم نیست C چه باشد.

$$S(\vec r + \Delta\vec r) = A + \int_{\vec r_0}^{\vec r+\Delta\vec r} (d\vec s)\cdot\left[\vec F(\vec s)\right] = A + \int_{\vec r_0}^{\vec r} (d\vec s)\cdot\left[\vec F(\vec s)\right] + \int_{\vec r}^{\vec r+\Delta\vec r} (d\vec s)\cdot\left[\vec F(\vec s)\right]$$

ساده - همبند چیه؟

Subject: ....

Year ..... Month ..... Date .....

$$S(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = S(\vec{r}) + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} d\vec{S}\cdot[\vec{F}(S)] = S(\vec{r}) + [\vec{F}(\vec{r})]\cdot(\Delta\vec{r}) + O(|\Delta\vec{r}|)$$

کاملاً s مثل ... s کوچک

کوچکتر است $|\Delta\vec{r}|$ به صفر میل می‌کند.

این یعنی $\nabla S = \vec{F}$

$\vec{F} = \nabla S$

هم‌ارز است با

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ تابع فقط مسیر است C است

هم‌ارز است با

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$

با هر مسیر بسته

$\Longrightarrow \nabla\times\vec{F} = 0$

$\Longleftarrow$ با ملاحظاتی

اگر ناحیه ساده همبند باشد کلیه عبارت‌ها هم‌ارز هستند.

روابط مربوط به $\vec{E}$:

$\vec{E} = -\nabla\phi$ یا $\nabla\times\vec{E} = 0 \Longleftrightarrow \int_C \vec{E}\cdot d\vec{r}$ تابع فقط مسیر C است $\Longleftrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$

اگر $\vec{E} = -\nabla\phi_1$ و $\vec{E} = -\nabla\phi_2$ $\Rightarrow \phi_2 - \phi_1 =$ ثابت

ثابت جمع یعنی (ثابتی نسبت به مکان) که می‌توان با چیزی جمع کرد.

اگر $\vec{E} = -\nabla\phi$ و C ثابت باشد $\vec{E} = -\nabla(\phi + C)$ پتانسیل الکتریکی تا یک ثابت جمع یکتا است

پتانسیل الکتریکی مشاهده‌پذیر نیست اما اختلاف پتانسیل الکتریکی مشاهده‌پذیر است: شبیه به یکتا نبودن

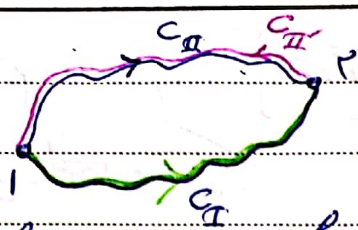
$$\nabla\times\vec{F} = 0 \xRightarrow{(\text{با شرط})} \vec{F} = -\nabla S$$ (اگر ناحیه‌ای که $\nabla\times\vec{F} = 0$ ساده همبند باشد)

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = (\nabla S)\cdot(d\vec{r})$$

چرا انتگرال مسیر بسته صفر است هم‌ارز است با اینکه انتگرال به مسیر بستگی ندارد؟

Subject: .... Year ...... Month ...... Date ......

نتیجه: انتگرال به مسیر بستگی ندارد   حکم: انتگرال در دو مسیر بسته صفر است.



$$\int_{C_I} \vec F(\vec r)\cdot(d\vec r) - \int_{C_{II}} \vec F(\vec r)\cdot(d\vec r)$$

$$= \int_{C_I} \vec F(\vec r)\cdot(d\vec r) + \int_{C_{II'}} \vec F(\vec r)\cdot(d\vec r) = \oint \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = 0$$

قضیه یا فرمول استوکس:

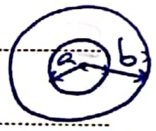
$$\int_S (\nabla\times\vec F)\cdot d\vec s = \oint_{\partial S} \vec F\cdot d\vec r$$

∂S منظور مرز S است. S ناحیه انتگرال گیری است.

باید $\nabla\times\vec F$ در ناحیه S تعریف شده باشد. یعنی $\vec F$ باید پیوسته و مشتق پذیر باشد.

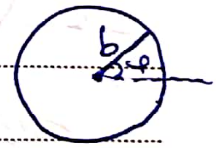
مثال: یک تابع دو ضابطه ای که

$$\vec F = \begin{cases} x^2+y^2>a^2 & \dfrac{-y\hat x + x\hat y}{x^2+y^2} & \nabla\times\vec F = 0 \\ x^2+y^2<a^2 & \dfrac{-y\hat x + x\hat y}{a^2} & \nabla\times\vec F \neq 0 \end{cases}$$



اگر ناحیه S اینگونه تعریف شود: $S: x^2+y^2<b^2 \quad b>a$

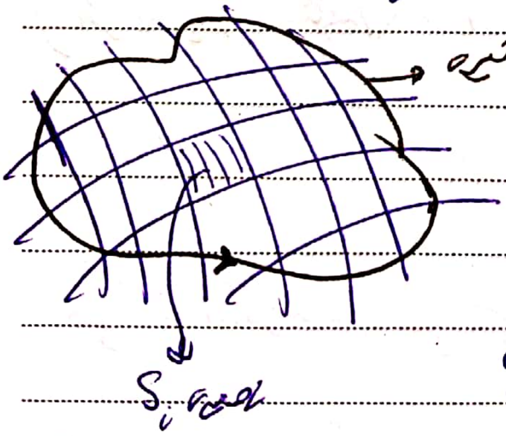
$\partial S: x^2+y^2=b^2 \qquad \nabla\times\vec F\big|_{\text{روی مرز } S} = 0 \qquad \oint_{\partial S} \vec F\cdot d\vec r \neq 0$



$$\vec r = b\cos(\varphi)\hat x + b\sin(\varphi)\hat y = x\hat x + y\hat y$$

$$d\vec r = -b\sin(\varphi)d\varphi\,\hat x + b\cos(\varphi)d\varphi\,\hat y = (-y\hat x + x\hat y)d\varphi$$

$$\vec F\cdot d\vec r = d\varphi \qquad \oint \vec F\cdot d\vec r = 2\pi$$



اثبات قضیه استوکس:

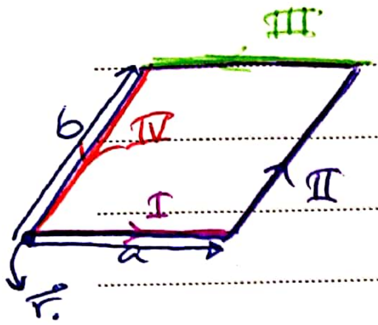
ناحیه انتگرال گیری را تکه تکه می‌کنیم

$$\int_S (\nabla\times\vec F)\cdot d\vec s = \sum_i \int_{S_i} (\nabla\times\vec F)\cdot d\vec s$$

$$= \sum_i (\nabla\times\vec F)_i\cdot \vec S_i + \dots$$

در صورتی که نواحی به سمت صفر میل کنند، صفر می‌شود.

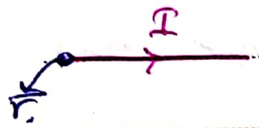
ako Note Book



ز: حال یک سطح متوازی الاضلاع در نظر می‌گیریم $\vec a$ و $\vec b$ برداری‌اند.

$$\vec S_i = \vec a \times \vec b$$

$$\oint_{\partial S_i} \vec F\cdot d\vec r = \int_{I} \vec F\cdot d\vec r + \int_{II} \vec F\cdot d\vec r + \int_{III} \vec F\cdot d\vec r + \int_{IV} \vec F\cdot d\vec r$$



$$\vec r = \vec r_0 + t\vec a \qquad 0 < t < 1 \qquad d\vec r = \vec a\, dt$$

$$\int_I \vec F\cdot d\vec r = \int_0^1 dt\ \vec a\cdot \vec F(\vec r_0 + t\vec a)$$

$$\int_{III} \vec F(\vec r)\cdot d\vec r = -\int_0^1 dt\ \vec a\cdot \vec F(\vec r_0 + \vec b + t\vec a) \qquad \int_{II} \vec F\cdot d\vec r = \int_0^1 \vec a\cdot \vec F(\vec r_0 + \vec a + \vec b t)\, dt$$

$$\int_{I+III} d\vec r\cdot \vec F(\vec r) = \int_0^1 dt\ \vec a\cdot\left[\vec F(\vec r_0 + t\vec a) - \vec F(\vec r_0 + \vec b + t\vec a)\right]$$

$$\int_{II+IV} d\vec r\cdot \vec F(\vec r) = \int_0^1 dt\ \vec b\cdot\left[\vec F(\vec r_0 + \vec a + t\vec b) - \vec F(\vec r_0 + t\vec b)\right]$$

تک‌تک را با تقریب موضعی حساب کنیم

$$\vec F(\vec r_0 + \vec a + t\vec b) - \vec F(\vec r_0 + t\vec b) = \vec F(\vec r + \vec a) - \vec F(\vec r)$$

☆ $\vec r = \vec r_0 + t\vec b$

F مشتق

$$F_i(\vec r + \vec a) - F_i(\vec r) = (\vec a\cdot\nabla F_i)(\vec r) + o(\vec a) \qquad \frac{\partial F}{\partial}$$

F را مؤلفه‌ای

$$\vec F = \sum_i \hat e_i F_i$$

$$\vec F(\vec r + \vec a) - \vec F(\vec r) = \sum_i \hat e_i\, (\vec a\cdot\nabla F_i)(\vec r) + o(\vec a)$$

$$= \left[(\vec a\cdot\nabla)\vec F\right](\vec r) + o(\vec a) = (\vec a\cdot\nabla\vec F)(\vec r) + o(\vec a)$$

$$\vec{a}\cdot\nabla = a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\int_{II+IV}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\ \vec{b}\cdot\left\{\underbrace{\left[(\vec{a}\cdot\nabla)(\vec{F})\right](\vec{r}_0+t\vec{b})}_{\text{در نقطه}} + o(\vec{a})\right\}$$

وقتی جمله‌ی نوعی را حساب بکنیم تنها کافیه جملاتی که از مرتبه‌ی a هستند را حساب کنیم بقیه‌ها سهمی کمتر از a خواهند داشت

$$f(\vec{r}_0+t\vec{b}) = f(\vec{r}_0) + \underbrace{o(1)}_{\text{از مرتبه‌ی } a}$$

$$\int_{II+IV}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_0^1 dt\left\{\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{F}\right](\vec{r}_0) + \underbrace{\dots}_{\text{سهم کمتر از } a \text{ صرف‌نظر شده}}\right\}$$

$$\oint_{S_i} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_0^1 dt\left\{\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{F}\right] - \vec{a}\cdot\left[(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{F}\right]\right\}(\vec{r}_0) + \dots$$

$$= \left\{\vec{b}\cdot\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{F}\right] - \vec{a}\cdot\left[(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{F}\right]\right\}(\vec{r}_0) + \dots$$

$$= (\vec{a}\cdot\nabla)(\vec{b}\cdot\vec{F}) - (\vec{b}\cdot\nabla)(\vec{a}\cdot\vec{F}) + \dots$$

$\int_0^1 f(t)\,dt = I(f,0,1) \rightarrow$ یک عملگر که صرفاً نشان‌دهنده‌ی حاصل انتگرال تابع t نیست.

$(\vec{a}\cdot\nabla)(\vec{b}\cdot\vec{F}) - (\vec{b}\cdot\nabla)(\vec{a}\cdot\vec{F}) = ?$ با ∇ شبیه یک بردار معمولی برخورد کنیم

اتحاد cross ۴:

$$(\vec{a}\cdot\vec{A})(\vec{b}\cdot\vec{B}) - (\vec{b}\cdot\vec{A})(\vec{a}\cdot\vec{B}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \left[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{A}\right]\cdot\vec{B}$$

$$= \left[(\vec{a}\cdot\vec{A})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{A})\vec{a}\right]\cdot\vec{B} = (\vec{a}\cdot\vec{A})(\vec{b}\cdot\vec{B}) - (\vec{b}\cdot\vec{A})(\vec{a}\cdot\vec{B})$$

$$(\vec{a}\cdot\nabla)(\vec{b}\cdot\vec{F}) - (\vec{b}\cdot\nabla)(\vec{a}\cdot\vec{F}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\nabla\times\vec{F})$$

$$\oint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{S}_i\cdot(\nabla\times\vec{F})(\vec{r}_i) + o(S_i)$$

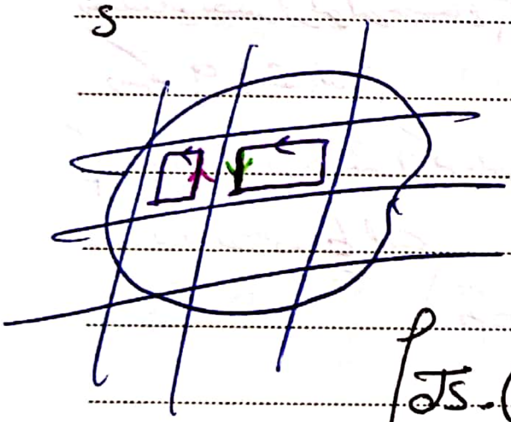
یک نقطه در S_i

سریع‌تر از S صفر میرود

$$\sum_i \oint_{S_i} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \sum_i \vec{S}_i\cdot(\nabla\times\vec{F})(\vec{r}_i) + \dots$$

حالا بیاین این مساحت‌ها رو [illegible] کنیم

$$\int_S (d\vec{S})\cdot(\nabla\times\vec{F}) = \sum_i \oint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} d\vec{r}\cdot\vec{F}$$



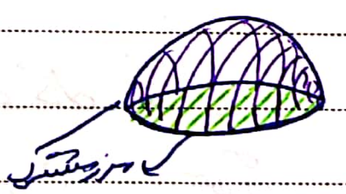
انتگرال در بخش‌های مشترک حذف می‌شود. فقط انتگرال بر بخش‌های مرزی باقی می‌ماند که جمع آنها انتگرال بر مرز S است.

$$\int_S d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}) = \oint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \blacksquare$$

اثبات شد.

اگر مرز دو سطح برابر باشد $\partial S_1 = \partial S_2$:

$$\int_{S_1} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F}) = \int_{S_2} d\vec{S}\cdot(\nabla\times\vec{F})$$



$$\sum_i f_i S_i + \underbrace{\sum_i}_{N} g_i \underbrace{S_i}_{\frac{1}{N}} \varepsilon_i \longrightarrow \sim N\frac{1}{N}\varepsilon \quad (\text{کوچک می‌مانند})$$

Year ...... Month ...... Date ......

بررسی میدان الکتریکی: $\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_S \underbrace{(\nabla\times\vec{E})}_{0}\cdot d\vec{S} = 0$

اثبات قانون گاوس

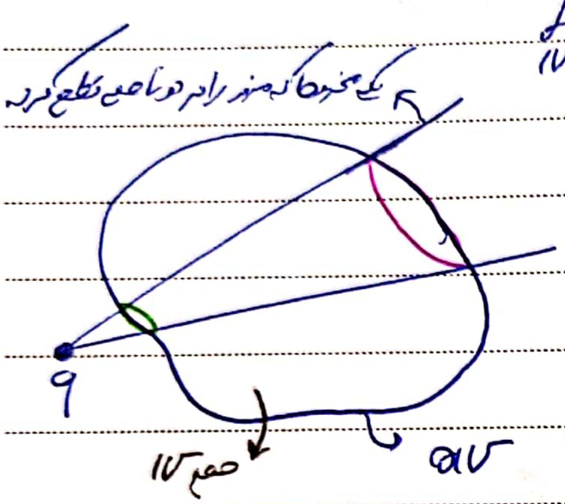
یک دسته دیگر از معادلات می‌شناسیم: $\oint_V$ ○ می‌باشد

V: یک حجم یا ناحیه بسته

∂V: یک ناحیه در برگیرنده سطح

میدان یک بار نقطه‌ای:

$\hat{n}$: بردار یکه عمود بر سطح به سمت بیرون است.

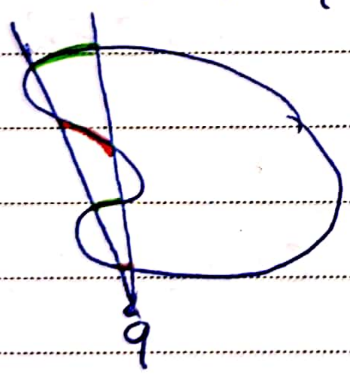


خطوط طوری انتخاب شده که ناحیه ۱ و ۲ کوچک باشند. (کوچک باشند)

$\vec{E}_1\cdot\vec{S}_1 = \vec{E}_1(\hat{r}_1\cdot\hat{n}_1)S_1 \qquad (\hat{r}_1\cdot\hat{n}_1)S_1 = S_1'$ ← مساحت یک بخش از کره به شعاع r_1 به مرکز q (مثبت است)

$\vec{E}_2\cdot\vec{S}_2 = E_2S_2(\hat{r}_2\cdot\hat{n}_2) = -E_2S_2'$ — S_2': مساحت یک بخش از کره به شعاع r_2 به مرکز q که درون مخروط است

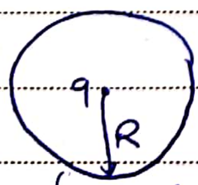
$$\vec{E}_1\cdot\vec{S}_1+\vec{E}_2\cdot\vec{S}_2 = E_1S_1'-E_2S_2' = kq\left(\frac{S_1'}{r_1^2}-\frac{S_2'}{r_2^2}\right)=0$$



S_1' و S_2' متشابه هستند

اگر q بیرون V باشد: $\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$

اگر q درون V باشد: $\oint_{\partial V}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$



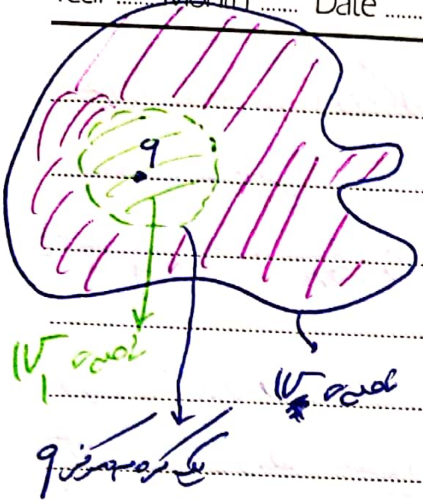
$E\cdot\sum\Delta S = \frac{kq}{R^2}\, r\cdot(\Delta S)\, r = \times$

کره به شعاع R در مرکز q

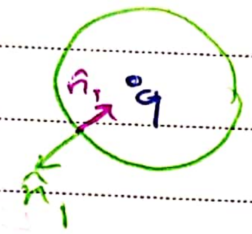
ako

Year ...... Month ...... Date ......

اثبات: حول q دایره به شکل مقابل:



$$V_1 \cup V_2 = V$$



$$\hat{n}_2 = -\hat{n}_1$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{\partial V_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{\partial V_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} \quad \times$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & \text{بار درون } V \text{ باشد} \\ 0 & \text{بار بیرون } V \text{ باشد} \end{cases}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_i{}' \oint_{\partial V} \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i{}' \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

$\sum_i'$: فقط برای بارهایی که $\vec{r}_i \in V$ باشد

$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q(V)}{\varepsilon_0}$$

$q(V)$: کل بار درون V

در توزیع پیوسته (حجمی):

$$q(V) = \int_V dV\, \rho(\vec{r})$$

ρ: چگالی حجمی بار

$$\int_{\partial V} d\vec{S}\cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q(V)}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V dV\, \rho(\vec{r})$$

شکل انتگرالی قانون گاوس

و اکنون گاوس [illegible] $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ است

ako Note Book

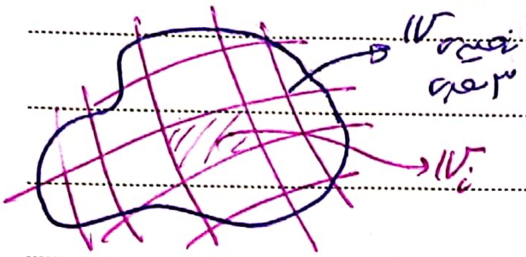
شکل دیفرانسیلی قضیه گاوس

در مورد روابط تیلوری:

$$f(\vec{r}+\vec{a})-f(\vec{r})=(\vec{a}\cdot\nabla f)(\vec{r})+o(\vec{a})$$

$$\vec{F}(\vec{r}+\vec{a})-\vec{F}(\vec{r})=\left[(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{F}\right](\vec{r})+o(\vec{a})$$

$$\vec{a}\cdot\nabla=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

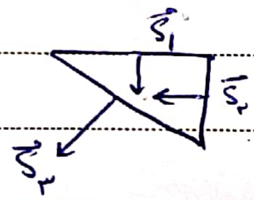


مرز حجم V را ∂V می‌نامیم.

حجم V را به حجم‌های کوچکی را مکعب مستطیل در نظر می‌گیریم.

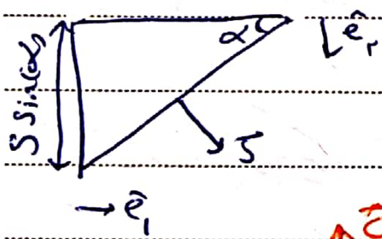
$$\oint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}\overset{?}{=}\sum_i\oint_{\partial V_i}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

تنها حجم‌هایی که حجم شبیه مکعب مستطیل نیست،

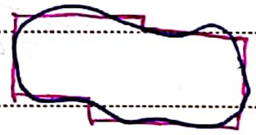


$$\vec{S}_1+\vec{S}_2-\vec{S}_3=0$$

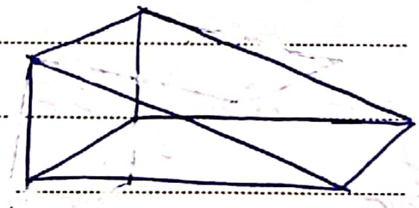
$$\int_{S_3}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\int_{S_2}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\int_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}+\dots$$

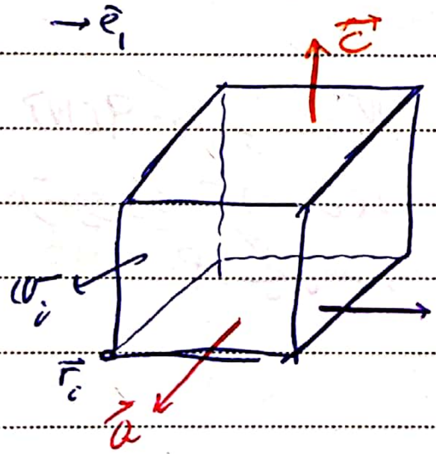


$$\vec{S}=S\hat{e}_2\cos(\alpha)+S\hat{e}_1\sin(\alpha)$$



هر حجمی را با حجم‌هایی که منظم می‌شوند با مکعب تقریب زد.

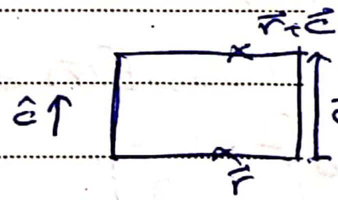




مکعب مستطیل است ←

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \qquad \text{متعامد}$$

$$\int_{\partial V_i}\vec{F}\cdot d\vec{S}=\text{مجموع شار از وجه‌ها}$$



$$\text{مجموع شار از دو وجه موازی}=\int_{\text{وجه بالایی}}(\hat{c}\,dS)\cdot\vec{F}+\int_{\text{وجه پایینی}}(-\hat{c}\,dS)\cdot\vec{F}$$

$$=\int_{\text{وجه پایینی}}dS\left[\hat{c}\cdot\vec{F}(\vec{r}+\vec{c})-\hat{c}\cdot\vec{F}(\vec{r})\right]$$

$$=\int_{\text{وجه پایینی}}dS\left\{\left[(\vec{c}\cdot\nabla)(\hat{c}\cdot\vec{F})\right](\vec{r})+o(\vec{c})\right\}$$

Subject: .... Year ...... Month ...... Date ......

یک جمله مرتبه بالاتر

$$= abc\left[(\hat{c}\cdot\nabla)(\hat{c}\cdot\vec{F})\right](\vec{r}_i)+o(abc)$$

چرا $\vec F$ ها ابر یک شکل هستند؟

سوالی شد که چرا همین ترتیب می‌نویسیم؟

$$\oint_{\partial V_i}\vec F\cdot d\vec s=(abc)\left[(\hat a\cdot\nabla)(\hat a\cdot\vec F)+(\hat b\cdot\nabla)(\hat b\cdot\vec F)+(\hat c\cdot\nabla)(\hat c\cdot\vec F)\right]+o(abc)$$

$\hat c, \hat b, \hat a$ یکه و متعامدند ، $\vec A, \vec B$ دو بردار دلخواه

$$(\hat a\cdot\vec A)(\hat a\cdot\vec B)+(\hat b\cdot\vec A)(\hat b\cdot\vec B)+(\hat c\cdot\vec A)(\hat c\cdot\vec B)=\vec A\cdot\vec B$$

چرا ∇ و F عوض شدند؟

$$\oint_{\partial V_i}\vec F\cdot d\vec s=abc\,(\nabla\cdot\vec F)+o(abc)$$

$$\sum_i\oint_{\partial V_i}\vec F\cdot d\vec s=\sum_i\left[V_i(\nabla\cdot\vec F)(\vec r_i)+o(V_i)\right]=\int_V dV(\nabla\cdot\vec F)$$

در حدی که همه ابعاد حجم V_i ها صفر شوند

دیورژانس

$$\oint_{\partial V}\vec F\cdot d\vec s=\sum_i\oint_{\partial V_i}\vec F\cdot d\vec s=\int_V(\nabla\cdot\vec F)\,dV \qquad \oint_{\partial V}\vec F\cdot d\vec s=\int_V(\nabla\cdot\vec F)\,dV$$

$$\oint_{\partial V}\vec E\cdot d\vec s=\int_V(\nabla\cdot\vec E)\,dV=\int_V\frac{\rho}{\varepsilon_0}\,dV\rightarrow\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

قانون گاوس

قانون گاوس؟

$$\oint_{\partial V}\vec E\cdot d\vec s=\frac{q(V)}{\varepsilon_0}$$ شکل انتگرالی

$$\nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ شکل دیفرانسیلی

شرط

برای میدان های مستقل از زمان درست هستند؛

$$\oint\vec E\cdot d\vec r=0 \qquad \vec E=-\nabla\phi \qquad \nabla\times\vec E=0$$

$$\int_1^2\vec E\cdot d\vec r=\phi(\vec r_1)-\phi(\vec r_2)$$

$\int\vec E\cdot d\vec r$ یعنی شرط مسیر بسته صفر است.

$$\oint_{\partial V}\vec E\cdot d\vec s=\frac{q(V)}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

برای میدان های وابسته به زمان هم درست هستند؛

اثبات نکردیم فقط گفتیم

ako Note Book

اثر بعضی از تبدیل‌ها بر توزیع بار (بر میدان الکتریکی):

انتقال:

q_1 در نقطهٔ $\vec r_1$ $\xrightarrow[\text{انتقال به اندازه } \vec a]{}$ q_1 در نقطهٔ $\vec r_1+\vec a$

حالا می‌خواهیم بفهمیم چه تغییری در میدان داریم؟

$$q_1, \vec r_1: \vec E(\vec r) = \frac{kq_1(\vec r-\vec r_1)}{|\vec r-\vec r_1|^3} \qquad q_1, \vec r_1+\vec a: \vec E'(\vec r) = \frac{kq_1(\vec r-\vec r_1-\vec a)}{|\vec r-\vec r_1-\vec a|^3}$$

$$\vec E'(\vec r) = \vec E(\vec r-\vec a)$$

$\vec E'$ همان $\vec E$ است اگر به جای $\vec r$، $\vec r-\vec a$ قرار دهیم.

عمل انتقال با بردار $\vec a$: $T_{\vec a}$

$$\vec E'(\vec r) = (T_{\vec a}\vec E)(\vec r) \qquad \vec E' = T_{\vec a}\vec E$$

$$\rho(\vec r) \to \rho'(\vec r) = (T_{\vec a}\rho)(\vec r) = \rho(\vec r-\vec a) \Rightarrow \vec E \to \vec E' = T_{\vec a}\vec E$$

اگر بار با $\vec a$ منتقل شود، میدان هم با $\vec a$ منتقل می‌شود.

$$\phi(\vec r) = k\int \frac{dV'\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$\rho \to \tilde\rho = T_{\vec a}\rho \qquad \tilde\rho(\vec r) = \rho(\vec r-\vec a)$$

$$\tilde\phi(\vec r) = k\int\frac{dV'\tilde\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} = k\int\frac{dV'\rho(\vec r'-\vec a)}{|\vec r-\vec r'|} = k\int\frac{\rho(\vec r'-\vec a)\,dV'}{|(\vec r-\vec a)-(\vec r'-\vec a)|}$$

$dV' = dV''$: در اثر انتقال حجم عوض نمی‌شود.

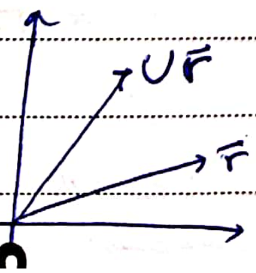
$$\tilde\phi(\vec r) = k\int\frac{dV''\rho(\vec r'')}{|\vec r-\vec a-\vec r''|} = \phi(\vec r-\vec a)$$

$$\tilde\phi = T_{\vec a}\phi$$

اگر بار با $\vec a$ منتقل شود، ~~میدان~~ پتانسیل هم با $\vec a$ منتقل می‌شود.

تبدیل دوران:

توزیع بار را نسبت به یک مرکز دوران می‌چرخانیم

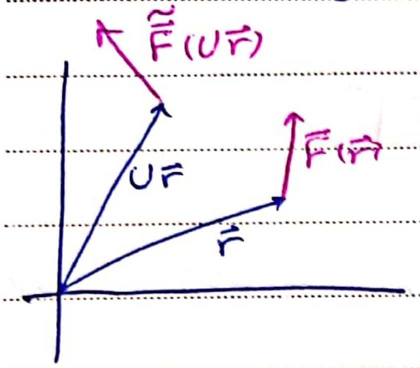


اثر دوران U بر تابع اسکالر f:

$f \xrightarrow{U} \tilde{f}$ $\quad \tilde{f}(U\vec{r}) = f(\vec{r})$

$\tilde{f}(\vec{r}) = f(U^{-1}\vec{r})$

اثر دوران بر تابع برداری:



$$\tilde{\vec{F}}(U\vec{r}) = U\left[\vec{F}(\vec{r})\right]$$

$$\tilde{\vec{F}}(\vec{r}) = U\left[\vec{F}(U^{-1}\vec{r})\right]$$

دوران طول‌ها و حجم را عوض نمی‌کند.

تبدیل انعکاسی هم طول‌ها و حجم را عوض نمی‌کند.

$U(t)$: U یک خانواده تبدیل که طول‌ها و حجم‌ها را به ازای هر t حفظ می‌کند و $U(0)$ همانی است و $U(1)$ انعکاسی است. U نسبت به t نمی‌تواند پیوسته باشد.

$\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار که بر یک صفحه نیستند:

$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) =$ حجم جبری متوازی‌السطوحی که یال‌هایش $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ می‌باشند.

$\vec{a}(t) = U(t)\vec{a} \qquad \vec{b}(t) = U(t)\vec{b} \qquad \vec{c}(t) = U(t)\vec{c}$

U یک خانواده تبدیل که طول‌ها و درنتیجه زوایا را حفظ می‌کند.

$$\left|\vec{a}(t)\cdot\left[\vec{b}(t)\times\vec{c}(t)\right]\right| = \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|$$

$U(0)$ همانی است:

$$\vec{a}(0)\cdot\left[\vec{b}(0)\times\vec{c}(0)\right] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$U(1)$ انعکاس:

$$\vec{a}(1)\cdot\left[\vec{b}(1)\times\vec{c}(1)\right] = -\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

اگر U نسبت به t پیوسته باشد $\vec{a}(t)\cdot\left[\vec{b}(t)\times\vec{c}(t)\right]$ نسبت به t پیوسته است. پس یک t هست که صفر

$$\vec{a}(t)\cdot\left[\vec{b}(t)\times\vec{c}(t)\right] = 0$$

یک خانواده تبدیل پیوسته وجود ندارد که طول‌ها را حفظ کند و یک عضو آن همانی و یک عضو آن انعکاسی باشد.

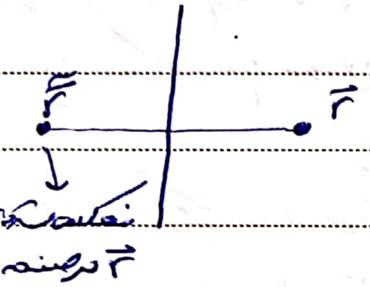
U دوران یا انعکاس معین

$$\rho \to \tilde{\rho} \qquad \tilde{\rho}(\vec r) = \rho(U^{-1}\vec r)$$

U دوران یا انعکاس باشد:

$$\tilde{\vec E}(\vec r) = k\int \frac{dV'\,\tilde\rho(\vec r')\,(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3} = k\int dV'\,\frac{\rho(U^{-1}\vec r')\,(\vec r-\vec r')}{|\vec r-\vec r'|^3}$$

انعکاس نسبت به صفحه $x=0$: $(x,y,z) \to (-x,y,z)$



$$U^{-1}\vec r' = \vec r'' \qquad dV' = dV''$$

$$\vec r' = U\vec r''$$

U ضرب می‌شود

$$\tilde{\vec E}(\vec r) = k\int dV''\,\frac{\rho(\vec r'')\,(\vec r-U\vec r'')}{|\vec r-U\vec r''|^3}$$

$$\vec r-U\vec r'' = U\left[U^{-1}\vec r-\vec r''\right] \qquad \text{U خطی است:} \longrightarrow ۱$$

$$\left|U(U^{-1}\vec r-\vec r'')\right| = \left|U^{-1}\vec r-\vec r''\right| \qquad \text{U طول را عوض نمی‌کند} \longrightarrow ۲$$

$$\tilde{\vec E}(\vec r) = k\int dV''\,\frac{\rho(\vec r'')\,U(U^{-1}\vec r-\vec r'')}{|U^{-1}\vec r-\vec r''|^3}$$

چون U ثابت است یک ماتریس ثابت هست

مثلاً در دو بعد:

$$U\vec r = \tilde{\vec r} = \begin{pmatrix}\tilde x\\ \tilde y\end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}}^{U}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\vec E}(\vec r) = Uk\int dV''\,\frac{\rho(\vec r'')\,(U^{-1}\vec r-\vec r'')}{|U^{-1}\vec r-\vec r''|^3} = U\left[\vec E(U^{-1}\vec r)\right]$$

$$\rho \to \tilde\rho \qquad \tilde\rho(\vec r) = \rho(U^{-1}\vec r)$$

$$\Downarrow$$

$$\vec E \to \tilde{\vec E} \qquad \tilde{\vec E}(\vec r) = U\left[\vec E(U^{-1}\vec r)\right]$$

Subject: .... Year ...... Month ...... Date ......

دوران یا انعکاس یا انتقال تابع
به طور ضمنی چه؟

$\phi \to \tilde{\phi} \qquad \tilde{\phi}(\vec r) = \phi(U^{-1}\vec r)$ — میدان پتانسیل مستقل به شکل مشابه گشت

اثبات تانسوری میدان برداری پتانسیل با دوران (یا انعکاس) دادن گرادیان

$\tilde{\vec E} = -\nabla\tilde{\phi} \qquad \tilde{\phi}(\vec r) = \phi(U^{-1}\vec r) \qquad U^{-1}\vec r = \vec s$

$$\frac{d}{dx}\left[f(\lambda^{-1}x)\right] = \frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \lambda^{-1} f'(\lambda^{-1}x) \qquad \lambda^{-1}x = y$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[f(y_1, y_2)\right] = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} \longrightarrow$$ از کجا آمد؟

$$\frac{\partial[f(y)]}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i}\left[\phi(U^{-1}\vec r)\right] = \sum_j \frac{\partial s_j}{\partial r_i}\frac{\partial \phi}{\partial s_j} \qquad U^{-1}\vec r = \vec s$$

$$\frac{\partial[\phi(U^{-1}\vec r)]}{\partial r_i} = \sum_j (U^{-1})_{ji}\frac{\partial\phi}{\partial s_j}$$

$(U^{-1})_{ji} = U_{ij}$ — اگر دوران یا انعکاس باشد، U متعامد می‌شود.

$$\frac{\partial[\phi(U^{-1}\vec r)]}{\partial r_i} = \sum_j U_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial s_j} = U\left[(\nabla\phi)(U^{-1}\vec r)\right]$$

$T(\alpha\vec u + \beta\vec v) = \alpha T(\vec u) + \beta T(\vec v)$ — تبدیل T خطی است اگر

α و β عدد هستند.

$T: W \longrightarrow W$ — اگر $\hat e_1$ تا $\hat e_m$ یک پایه برای W باشد

$u \in W \qquad u = \sum_i \underset{\text{عدد}}{u_i}\,\underset{\text{بردار}}{\hat e_i}$

خطی: $T(u) = T(u_1\hat e_1 + u_2\hat e_2 + \dots + u_m\hat e_m) = u_1 T(\hat e_1) + \dots + u_m T(\hat e_m)$

$$\underset{\text{بردار در W}}{T(e_j)} = \sum_{\alpha} \underbrace{[T(e_j)]_\alpha}_{\text{عدد}}\, \underset{\text{بردار در W}}{f_\alpha}$$ — اگر f_1 تا f_n یک پایه برای W باشد

$[T(e_j)]_\alpha = T_{\alpha j}$ مؤلفه‌ها

$$T(u) = T\Big(\sum_j u_j e_j\Big) = \sum_j u_j T(e_j) = \sum_{\alpha, j} u_j T(e_j) = \sum_{\alpha, j} u_j T_{\alpha j} f_\alpha$$

$$T(u) \in W \qquad T(u) = \sum_\alpha [T(u)]_\alpha f_\alpha \qquad = \sum_\alpha \Big(\sum_j T_{\alpha j} u_j\Big) f_\alpha$$

$$[T(u)]_\alpha = \sum_j T_{\alpha j} u_j$$

ماتریس تبدیل در حالت کلی مستطیلی است. زیرا لزومی ندارد فضاها هم بعد باشند
یکی باشند

$$\underset{n\times m}{\begin{bmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nm} \end{bmatrix}} \underset{m\times 1}{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}$$

$T_{n\times m} \quad u_{m\times 1} \qquad \underset{k\times m \;\; m\times n}{ST} = k\times n$ ماتریس
می‌شود

باید m برابر باشد تا ST تعریف شود

لزوماً ST تعریف شده نیست

در حالت کلی $ST \neq TS$

مثال: $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ST = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

تبدیل تجانس:

$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = \lambda \vec{r}$ λ، عدد ثابت

$\rho \longrightarrow \rho_1 : \rho_1(\vec{r}) = \rho(\lambda^{-1}\vec{r})$

برای این تبدیل در حالت کلی بار پایسته نمی‌باشد.

$$q_1 = \int \rho_1(\vec{r})\, dV = \int dV \rho(\lambda^{-1}\vec{r}) \qquad \lambda^{-1}\vec{r} = \vec{r}'$$

$$\vec{r} = \lambda \vec{r}' \qquad dV = \lambda^3 dV'$$

$$= \lambda^3 \int dV' \rho(\vec{r}') = \lambda^3 q$$

Subject: ....

Year ...... Month ...... Date ......

$$\rho_2(\vec r)=\lambda^{-3}\rho(\lambda^{-1}\vec r) \qquad q_2=q$$

$$\phi_1(\vec r)=k\int dv' \frac{\rho_1(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}=k\int dv' \frac{\rho(\lambda^{-1}\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}=k\lambda^3\int dv'' \frac{\rho(\vec r'')}{|\vec r-\lambda\vec r''|}$$

$$\lambda^{-1}\vec r'=\vec r'' \qquad dv'=\lambda^3 dv'' \qquad |\vec r-\lambda\vec r''|=\lambda|\lambda^{-1}\vec r-\vec r''|$$

$\lambda>0$ فرض شده

$$\phi_1(\vec r)=\frac{\lambda^3}{\lambda}\phi(\lambda^{-1}\vec r)$$

برای حالتی که

$$\phi_1(\vec r)=\lambda^2\phi(\lambda^{-1}\vec r)$$

$$\vec E_1(\vec r)=\lambda\phi(\lambda^{-1}\vec r)$$

برای حالتی که بار ثابت می‌ماند:

$$\phi_2(\vec r)=\frac{1}{\lambda}\phi(\lambda^{-1}\vec r) \qquad \vec E_2(\vec r)=\frac{1}{\lambda^2}\vec E(\lambda^{-1}\vec r)$$

$$\vec a\cdot\nabla=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}$$

اتحاد برداری کمکی

آیا می‌توان با ∇ شبیه یک بردار عادی رفتار کرد؟ بعضی جاها لازمه دقت کنیم.

مثال:

$$\nabla\times(\vec F\times\vec G)$$

$$\vec A\times(\vec F\times\vec G)=\vec F(\vec A\cdot\vec G)-\vec G(\vec A\cdot\vec F)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_iG_j)=\frac{\partial F_i}{\partial x}G_j+F_i\frac{\partial G_i}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\overset{\downarrow}{F_i}G_j)+\frac{\partial}{\partial x}(F_i\overset{\downarrow}{G_j})$$

این جایگذاری را ابداع می‌کنیم

$$\nabla\times(\vec F\times\vec G)=\nabla\times(\overset{\downarrow}{\vec F}\times\vec G)+\nabla\times(\vec F\times\overset{\downarrow}{\vec G})=(\vec G\cdot\nabla)\vec F-\vec G(\nabla\cdot\vec F)+\vec F(\nabla\cdot\vec G)-(\vec F\cdot\nabla)\vec G$$

$$(\vec A\times\vec B)_i=\sum_{jk}\epsilon_{ijk}A_jB_k \qquad \epsilon_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{جایگشت زوج ۱۲۳}\\ -1 & \text{جایگشت فرد از ۱۲۳}\\ 0 & \text{دو شاخص مساوی باشند.}\end{cases}$$

IranPhO.ir

$$\left[\nabla\times(\vec F\times\vec G)\right]_i=\sum_{jk}\epsilon_{ijk}\,\partial_j(\vec F\times\vec G)_k=\sum_{j,k,l,m}\epsilon_{ijk}\,\partial_j\left(\epsilon_{klm}F_l G_m\right)$$

$$=\sum_{j,k,l,m}\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{klm}\,\partial_j(F_l G_m)=\sum_{j,l,m}\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\partial_j(F_l G_m)=$$

$$\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$$

$$=\sum_j\left[\partial_j(F_i G_j)-\partial_j(F_j G_i)\right]$$

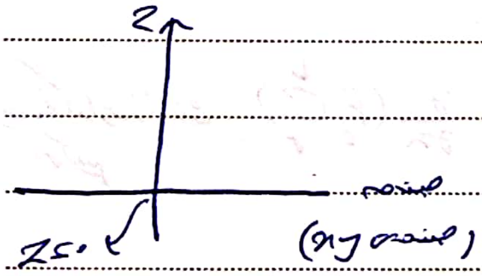
$$\left[\vec A\times(\vec F\times\vec G)\right]_i=\sum_j\left[A_j(F_i G_j)-A_j(F_j G_i)\right]=F_i(\vec A\cdot\vec G)-G_i(\vec A\cdot\vec F)$$

$\nabla\ \times$

صفحه بی‌نهایت با چگالی سطحی ثابت σ

میدان الکتریکی

تقارن چگالی بار: عملی که چگالی بار را عوض نکند و وارون پذیر است. تقارن‌های صفحه بی‌نهایت



محور z عمود بر صفحه و مبدأ z روی صفحه است

انتقال در راستای هر بردار در صفحه ، دوران حول محور z چگالی بار را

عوض نمی‌کنند یعنی این اعمال تقارن هستند.

دوران حول محور دلخواه می‌تواند چگالی بار را عوض کند

مضرب صحیح از

اعمال تقارن: دوران حول محور z — دوران حول یک محور در صفحه با زاویه π

انعکاس نسبت به صفحه x-y — انعکاس نسبت هر صفحه عمود بر صفحه xy

انتقال در راستای هر بردار در صفحه

با هر یک از این تبدیلها: $\rho'=\rho$, $\rho\to\rho'$ (این تعریف تقارن است)

چگالی بار عوض نشود یعنی $\rho(\vec r)$ عوض نشود

ako

با هر یک از این تبدیل‌ها $\vec{E} \to \tilde{\vec{E}}$ وقتی $\tilde{\rho} = \rho$ می‌نویسیم $\vec{E} = \tilde{\vec{E}}$

مثال: انتقال با $\vec{a}$

$\vec{E} \to \tilde{\vec{E}} = T_{\vec{a}}\vec{E} \qquad \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}-\vec{a})$

اگر $\vec{a} = a\hat{n}$

$\tilde{\rho} = \rho \Longrightarrow \tilde{\vec{E}} = \vec{E} \longrightarrow \tilde{\vec{E}}(\vec{r}-a\hat{n}) = \vec{E}(\vec{r})$

$\vec{E}(x-a,y,z) = \vec{E}(x,y,z)$ (به ازای هر $\vec{a}$ و x,y,z) $\Longrightarrow$ $\vec{E}$ تابع x نیست

با انتقال در جهت $\hat{y}$ (که تقارن است) معلوم می‌شود $\vec{E}$ تابع y نیست.

یعنی نتیجه‌ی تقارن تحت انتقال با بردارهای درون صفحه می‌شود:

$\vec{E} = \vec{E}(z) = \hat{x}E_x(z) + \hat{y}E_y(z) + \hat{z}E_z(z)$

دوران حول محور z

$\rho \to \tilde{\rho} = \rho \Longrightarrow \tilde{\vec{E}} = \vec{E}$

$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = U\vec{E}(U^{-1}\vec{r})$ U تبدیل دوران است حول محور z

$$\left.\begin{array}{l} U\vec{r} = \vec{r}' = (x',y',z') \\ \vec{r} = (x,y,z) \end{array}\right\} \longrightarrow z' = z$$

چون مولفه‌ی z آن ثابت است و x و y تغییر می‌کند و $\vec{E}$ تابع x و y نیست پس:

$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = U\left[\vec{E}(\vec{r})\right] \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(U^{-1}\vec{r})$

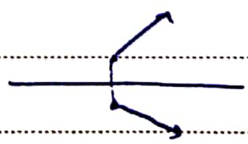
$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z}$ فرض کنیم تحت دوران حول محور z عوض نشود پس باید موازی محور z باشد

$E_x = E_y = 0$ $\qquad$ $\vec{E} \parallel \hat{z}$ باشد

$\Longrightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_z(z)\hat{z}$

انعکاس در صفحه x-y:

$\omega\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \qquad \omega\hat{x} = \hat{x} \quad \omega\hat{y} = \hat{y} \qquad \omega\hat{z} = -\hat{z}$ $\qquad$ ω انعکاس در صفحه‌ی xy است



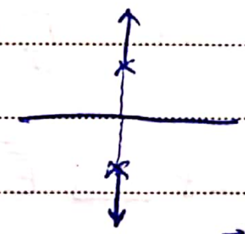
$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \omega\vec{E}(\omega^{-1}\vec{r}) \qquad \tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r})$ تقارن

$$\vec{E}(\vec{r}) = (\omega \vec{E})(\omega^{-1}\vec{r}) \qquad \omega\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ -E_z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \omega^{-1}\vec{r}$$

$$\hat{z}E(z) = -\hat{z}E(z)$$

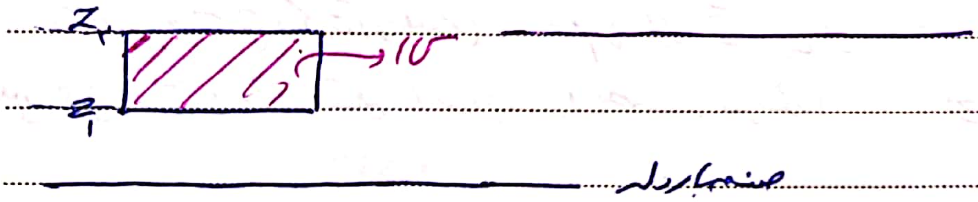
$$E(-z) = -E(z)$$

$\vec{E}$ یک تابع فرد از z است



سوم، اگر $\vec{E}$ تابع z باشد و فرد باشد باید صفر باشد چون از قانون گاوس استفاده می‌کنیم:

$$\vec{E}(-z) = \vec{E}(z) \quad \text{و} \quad \vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$$



صفحه باردار

S: مساحت قاعده های بالا و پایین

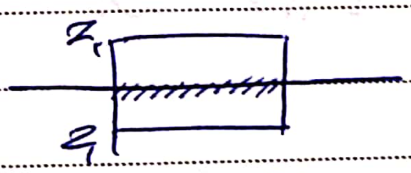
$$\oint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q(V)}{\epsilon_0} \xrightarrow{\vec{E} = E\hat{z}} \left(E(z_2) - E(z_1)\right) S = \frac{q(V)}{\epsilon_0}$$

$$z_1, z_2 > 0 \ \text{یا} \ z_1, z_2 < 0 \Longrightarrow q(V) = 0 \longrightarrow E(z_2) = E(z_1)$$

میدان الکتریکی در هر طرف صفحه یکنواخت است.

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0\hat{z} \,, & z > 0 \\ -E_0\hat{z} \,, & z < 0 \end{cases}$$

فرد بودن را یکبار دیگر لحاظ کردیم



$$q = S\sigma \qquad S\,2E_0 = \frac{S\sigma}{\epsilon_0} \longrightarrow E_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\begin{cases} \hat{z} & z > 0 \\ -\hat{z} & z < 0 \end{cases} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{|z|}\hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\,\mathrm{sgn}(z)\,\hat{z}$$

$$\mathrm{sgn}(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

یک توزیع حجمی بار، که تابع فقط z $\rho(z)$ (در جهت x و y بی‌نهایت است)

اعمال تقارن: انتقال در جهت x و y — دوران حول $\hat{z}$

$\vec{E} = E(z)\hat{z}$ $\qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{dE}{dz}$

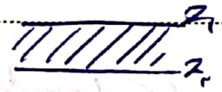
$$E(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{\rho(z')}{\epsilon_0}\,dz' + C$$

اگر کران پایین را از $-\infty$ تغییر دهیم ثابت تغییر می‌کند

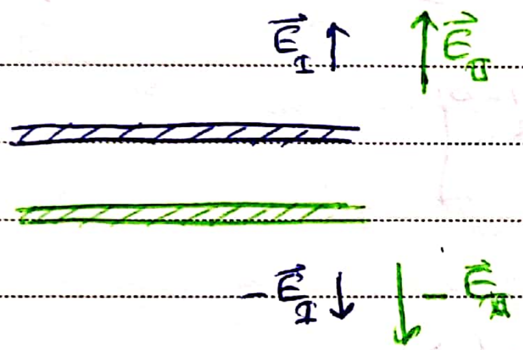
گذاشتن $-\infty$ با این فرض همراه است که حاصل انتگرال همیشه تعریف شده وجود داشته باشد

یعنی تابع چگالی تعریف باشد، و انتگرال با کران $-\infty$ تعریف نشود.

$$E(z) = \int_{0}^{z} dz'\,\frac{\rho(z')}{\epsilon_0} + \tilde{E}$$



قرینه‌سازی جهت z چگالی بار عوض شود.



$$\vec{E}(z<z_1) = -\vec{E}(z>z_2)$$

$$\vec{E}(-\infty) = -\vec{E}(\infty)$$

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{0}^{z}\rho(z')\,dz' + \tilde{E}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{0}^{\infty} dz'\rho(z') + \int_{0}^{-\infty} dz'\rho(z')\right] + 2\tilde{E} = 0$$

$$\tilde{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0}\left[\int_{0}^{\infty}\rho(z')\,dz' + \int_{0}^{-\infty} dz'\rho(z')\right]$$

$$E(z) = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{0}^{z}\rho(z')\,dz' - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} dz'\rho(z') - \frac{1}{2}\int_{0}^{-\infty} dz'\rho(z')\right]$$

$$E(z) = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{0}^{z} dz'\rho(z') - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz'\rho(z') - \int_{0}^{-\infty} dz'\rho(z')\right]$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\rho(z')\,dz' = -\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\rho(z')\,dz' - \int_{-\infty}^{0}\rho(z')\,dz'\right)$$

Subject: ....

Year ...... Month ...... Date ......

یعنی اگر کل بار موجود در توزیع را در یک صفحه می‌ریختیم چگالی سطحی این مقدار می‌شد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z')\,dz' = \sigma \rightarrow$$ چگالی سطحی کل

$$E(z) = \frac{1}{\epsilon}\left[\int_{-\infty}^{z} f(z')\,dz' - \frac{\sigma}{2}\right] = \frac{1}{\epsilon}\left[\int_{+\infty}^{z} f(z')\,dz' + \frac{\sigma}{2}\right]$$

$$E(-\infty) = -\frac{\sigma}{2\epsilon} \qquad E(\infty) = \frac{\sigma}{2\epsilon}$$

حال اینجا با فرض جمع شدن چگالی بار در یک نقطه کردیم (دلتای دیراک) می‌توان فرض تقارن را کرد.

$$\int_{-\infty}^{z} = \int_{\infty}^{z} \int_{-\infty}^{\infty}$$

اگر $\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(z')\,dz'$ وجود داشته باشد و عدد صحیحی بشود (به نوعی تشبیه)

مثال یک چگالی بار صفحه

$$f(z) = \frac{A}{|z|^{1+s}} \qquad s>0$$

این f یک نمونه از انتگرال‌پذیر است:

$$\int_{a}^{M} \frac{dz}{z^{b}} = \frac{1}{1-b}\left(z^{1-b}\right)_{a}^{M} = \frac{1}{1-b}\left[M^{1-b} - a^{1-b}\right]$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-b}\left[M^{1-b} - a^{1-b}\right] = \frac{a^{1-b}}{b-1} \qquad : b>1$$

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-b}\left[M^{1-b} - a^{1-b}\right] = \infty \qquad : b<1$$ → انتگرال بی‌نهایت است

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{1-b}\left[M^{1-b} - a^{1-b}\right] = \infty \qquad b=1$$

فرض صورت سوال این هست که f انتگرال‌پذیر باشد یعنی σ وجود داشته باشد

$$E(z) = \frac{1}{\epsilon}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z')\,dz' - \frac{\sigma}{\sigma}\right]$$

اگر f بر خلاف صورت سوال انتگرال‌پذیر نباشد جواب $E(z) = \frac{1}{\epsilon}\left\{\int_{0}^{\infty} f(z')\,dz'\right\} + C$ در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند اما E با انتگرال‌گیری به دست آمد اگر جواب وجود ندارد.

$\times z$

$z' > z: \; dE = \frac{-\rho(z')dz'}{2\epsilon}$ $\qquad$ $z' < z: \; dE = \frac{+\rho(z')dz'}{2\epsilon}$

$\vec{E}(z) = \frac{1}{2\epsilon}\left[\int_{-\infty}^{z} \rho(z')dz' - \int_{z}^{+\infty} \rho(z')dz'\right]$ این دو انتگرال یا هیچکدام یا یکی از آنها وجود ندارد.

اگر چگالی بار صرفاً جایگزیده باشد

جایگزیده: از جایی به بعد صفر شود یا با سرعت کافی به صفر میل کند.

مثال ساده: ρ در کل فضا ثابت باشد ⇐ تقارن انتقالی در همه جهت‌ها ⇐ $\vec{E}$ ثابت است

$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \neq \frac{\rho}{\epsilon}$

$\vec{E} = \frac{\rho x}{\epsilon}\hat{x}$ یا $\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon}$ میدان‌هایی که معادلات دیفرانسیل را ارضا کرده‌اند

اما حاصل انتگرال وجود ندارد. نه اینکه حل تحلیلی ندارد

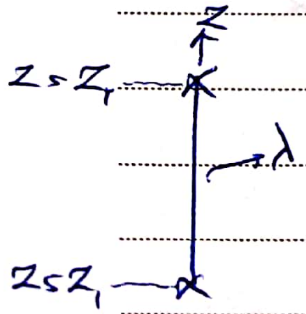
چگالی بار یکنواختی که کل فضا را پر کرده باشد وجود ندارد. به همین علت میدانش نیز همراه آن وجود ندارد

تقارن حکم می‌کند با این میدان یکنواخت و تقارن دورانی می‌گه باید صفر باشد ولی میدان صفر نمی‌تواند گاوس را ارضا کند
اشتباه

مثال وقتی مدلی فرض کنیم که فیزیکی نباشد، در معادلات به مشکل می‌خوریم:

$\dot{v} = \alpha v^{\beta}$ $\quad \alpha > 0$ $\quad \beta > 0$ $\quad$ با شرط اولیه $v(0) = 0$

یک جواب: $v(t) = 0$ $\quad$ جواب دیگر: $v = a t^{b}$ (a و b ثابت)



میدان الکتریکی یک تکه سیم باردار با چگالی طولی λ

اگر سیم بی‌نهایت باشد تقارن انتقالی در جهت z داریم.

■ تقارن دورانی حول محور z داریم.

راحت‌ترین روش این است که از مختصات ~~...~~ استوانه‌ای استفاده کنیم.

Subject: .... Year ...... Month ...... Date ......

تقارن محوری 2

$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}) = U\left[\vec{E}(U^{-1}\vec{r})\right]$ $\qquad$ U: دوران حول محور Z به اندازه α

$U\left[\vec{r}(\rho,\varphi,z)\right] = \vec{r}(\rho,\varphi+\alpha,z) \qquad U\left[\vec{r} = (\rho,\varphi,z)\right] = (\rho,\varphi+\alpha,z)$

$\tilde{\vec{E}}(U\vec{r}) = U\left[\vec{E}(\vec{r})\right] \qquad \tilde{\vec{E}}(\rho,\varphi+\alpha,z) = U\left[\vec{E}(\rho,\varphi,z)\right]$

$\hat{\rho}(\vec{r}),\ \hat{\varphi}(\vec{r}),\ \hat{z}(\vec{r})$

$\vec{E} = E_\rho\hat{\rho} + E_\varphi\hat{\varphi} + E_z\hat{z}$

$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{\rho}(\vec{r})E_\rho(\vec{r}) + \hat{\varphi}(\vec{r})E_\varphi(\vec{r}) + \hat{z}(\vec{r})E_z(\vec{r})$

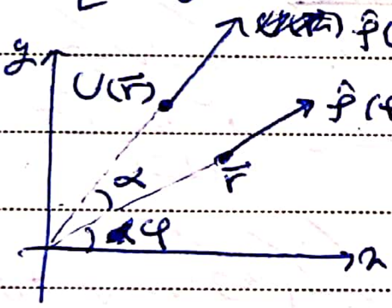
$U\left[\vec{E}(\vec{r})\right] = \left\{U\left[\hat{\rho}(\vec{r})\right]\right\}E_\rho(\vec{r}) + \left\{U\left[\hat{\varphi}(\vec{r})\right]\right\}E_\varphi(\vec{r}) + \left\{U\left[\hat{z}(\vec{r})\right]\right\}E_z(\vec{r})$

چون U یک تبدیل خطی است پس: $U(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha(U\vec{u}) + \beta(U\vec{v})$

$U\left[\hat{\rho}(\vec{r})\right] = \hat{\rho}(U\vec{r}) \qquad U\left[\hat{\varphi}(\vec{r})\right] = \hat{\varphi}(U\vec{r})$

$U\left[\hat{z}(\vec{r})\right] = \hat{z}(U\vec{r})$

$\hat{\rho} \parallel (\vec{r} - z\hat{z})$



$$U = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یعنی ستون‌های هر سطر ضرایب $\hat{x}$ و ... در پایه $\hat{x}$، $\hat{y}$، $\hat{z}$ هستند.

$$\hat{\rho}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \cos(\varphi)\hat{x} + \sin(\varphi)\hat{y}$$

$$U\left[\hat{\rho}(\varphi)\right] = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi \\ \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\varphi) \\ \sin(\alpha+\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\rho}(\varphi+\alpha)$$

$\hat{\varphi}(\varphi) = \hat{\rho}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

نتیجه مشابه را به همین ترتیب می‌توان نشان داد برای $\hat{\varphi}$ نیز برقرار است.

$$\vec{\tilde{E}}(U\vec r)=\left[\hat\rho(U\vec r)\right]E_\rho(\vec r)+\left[\hat\varphi(U\vec r)\right]E_\varphi(\vec r)+\left[\hat z(U\vec r)\right]E_z(\vec r)$$

این میدان تقارن یافته تحت دوران است

با اعمال تقارن تحت U: $\vec{\tilde E}=\vec E$

$$\vec{\tilde{E}}(U\vec r)=\left[\hat\rho(U\vec r)\right]\left[E_\rho(U\vec r)\right]+\left[\hat\varphi(U\vec r)\right]\left[E_\varphi(U\vec r)\right]+\left[\hat z(U\vec r)\right]\left[E_z(U\vec r)\right]$$

$$\tilde E_\rho(U\vec r)=E_\rho(\vec r)\qquad \tilde E_\varphi(U\vec r)=E_\varphi(\vec r)\qquad \tilde E_z(U\vec r)=E_z(\vec r)$$

تقارن: $\tilde E_\rho=E_\rho\qquad \tilde E_\varphi=E_\varphi\qquad \tilde E_z=E_z$

$\rightarrow E_i(U\vec r)=E_i(\vec r)\quad i=\rho,\varphi,z$

$E_i(\rho,\varphi+\alpha,z)=E_i(\rho,z)\rightarrow$ نتیجه تقارن دورانی حول محور $\hat z$ این است که E_i تابع φ نیست.

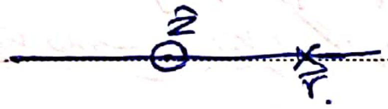
$$\vec E(\rho,\varphi,z)=E_\rho(\rho,z)\hat\rho+E_\varphi(\rho,z)\hat\varphi+E_z(\rho,z)\hat z$$

دلیل: هر چیزی که با دوران حول محور z عوض نمی‌شود.

سیستم تقارن انعکاسی نسبت به یک صفحه شامل محور $\hat z$ هم دارد

U را انعکاس نسبت به یک صفحه شامل محور $\hat z$

$\vec r_0$ هم درون صفحه است.



$$U\vec r_0=\vec r_0\qquad \vec{\tilde E}(U\vec r_0)=U\left[\vec E(\vec r_0)\right]\qquad \vec{\tilde E}(\vec r_0)=U\left[\vec E(\vec r_0)\right]$$

$\vec E(\vec r_0)=\vec E_\parallel(\vec r_0)+\vec E_\perp(\vec r_0)$ موازی و عمود نسبت به صفحه‌اند.

$$\vec E_\perp(\vec r_0)=\hat\varphi(\vec r_0)E_\varphi(\vec r_0)\qquad \vec E_\parallel(\vec r_0)=\hat\rho(\vec r_0)E_\rho(\vec r_0)+E_z(\vec r_0)\hat z(\vec r_0)$$

$$U\vec E_\perp=-\vec E_\perp\qquad U\vec E_\parallel=\vec E_\parallel\qquad \vec{\tilde E}(\vec r_0)=\vec E_\parallel(\vec r_0)-\vec E_\perp(\vec r_0)$$

تقارن: $\vec{\tilde E}=\vec E$

$$\vec E_\parallel(\vec r_0)-\vec E_\perp(\vec r_0)=\vec E_\parallel(\vec r_0)+\vec E_\perp(\vec r_0)\rightarrow \vec E_\varphi(\vec r_0)=0$$

$\vec E_\varphi=0$ $\qquad$ $\vec r_0$ دلخواه است.

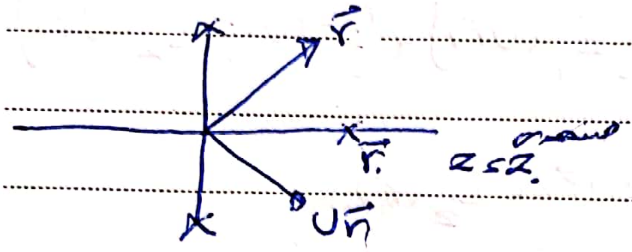
میدان بر روی همه صفحات شامل محور z عمود ندارد.

Subject: ....
Year ...... Month ...... Date ......

نتیجه: تقارن انعکاسی نسبت به هر صفحه ای شامل $\hat z$ ، $E_\varphi = 0$

در این نتیجه گیری از نتیجه قسمت قبل استفاده نکرده ام.

تقارن انعکاسی نسبت به صفحه عمود منصف سیم



$\tilde{\vec E}_\perp(\vec r_0)=0 \Rightarrow E_z(\vec r_0)=0$ $\tilde{\vec E}(U\vec r) = U\left[\vec E(\vec r)\right]$

$\tilde E_z(U\vec r) = -E_z(\vec r)$ $\tilde E_{x,y}(U\vec r) = +E_{x,y}(\vec r)$ $\tilde E_{\rho,\varphi}(U\vec r) = E_{\rho,\varphi}(\vec r)$

$\vec r=(x,y,z)$

$\tilde E_{x,y}(x,y,2z_0-z) = E_{x,y}(x,y,z)$ $\tilde E_z(x,y,2z_0-z) = -E_z(x,y,z)$

تقارن: $\tilde E = E$

E_x و E_y (یا E_ρ و E_φ) نسبت به z_0 زوج، E_z نسبت به z_0 فرد ⟵ ×

برای سیم بینهایت (یا جایی دور از لبه های سیم بینهایت) تقارن انتقالی در راستای $\hat z$

$\tilde{\vec E}(x,y,z+a) = \vec E(x,y,z)$ یا $\tilde{\vec E}(\rho,\varphi,z+a) = \vec E(\rho,\varphi,z)$

$\hat\rho(\varphi)\,\tilde E_\rho(\rho,\varphi,z+a) + \dots = \hat\rho(\varphi)\,E_\rho(\rho,\varphi,z)$

$\tilde E_i(\rho,\varphi,z+a) = E_i(\rho,\varphi,z)$ $i=\rho,\varphi,z$ یا x,y,z

تقارن: $\tilde{\vec E} = \vec E$

$E_i(\rho,\varphi,z+a) = E_i(\rho,\varphi,z) \Longrightarrow$ E_i مستقل از z

مشتق‌ها [illegible] در جهت $\hat\rho$ و $\hat\varphi$ و $\hat z$ باشند و [illegible] استفاده ای باشند.

ترکیب همه تقارن ها:

$\vec E(\rho,\varphi,z) = E_\rho(\rho)\,\hat\rho + E_z(\rho)\,\hat z$

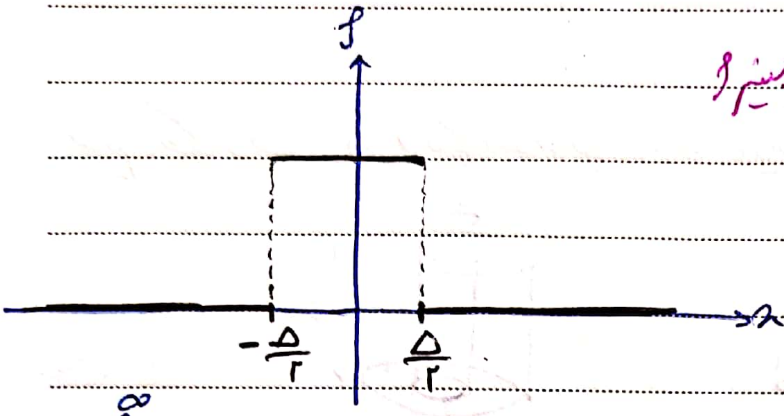
و البته: $E_z = 0$ $E_z(z_0)=0$ تقارن انعکاسی نسبت به صفحه $z=z_0$

برای سیم بینهایت با چگالی بار یکنواخت

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_\rho(\rho)\,\hat{\rho} = E(\rho)\,\hat{\rho}$$

اگر یک چگالی تابع فقط ρ باشد، همه تقارن‌های بالا را دارد. پس رابطه $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\,\hat{\rho}$ همچنان برقرار است.

چگونه برای یک سیم چگالی بار حجمی تعریف کنیم؟



$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{q}{\Delta}, & |x| < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$

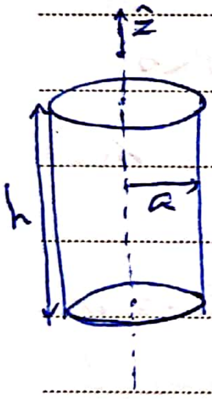
این چگالی بار یک سیم نازک می‌شود وقتی $\Delta \to 0$

همه جا صفر و درون سیم بینهایت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = q$$

حال می‌خواهیم $E(\rho)$ را بیابیم. با قانون گاوس:

چگالی مستقل از φ و z: $\vec{E} = E(\rho)\,\hat{\rho}$



یک استوانه فرض که محورش محور z است، شعاعش a و ارتفاعش h

شکل انتگرالی قانون گاوس:

$$\oint_{\text{استوانه}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$= \cancel{\int_{\text{قاعده‌ها}} \vec{E}\cdot d\vec{S}} + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{سطح جانبی}:\ \rho=a} E(\rho)\,\hat{\rho}\cdot\hat{\rho}\,dS$$

در قاعده‌ها $d\vec{S} \parallel \hat{z}$ و در سطح جانبی $\vec{E} \parallel \hat{\rho}$

$$= E(a)\int_{\text{سطح جانبی}} dS = E(a)\,2\pi a h$$

$$E(a) = \frac{Q(\text{درون استوانه})}{2\pi\epsilon_0 h a}$$

مقطع استوانه یک قرص است.

$$Q(\text{درون استوانه}) = h\,\lambda(\text{درون قرص})$$

$$\lambda = \int_{\rho\le a} dS\,\varrho(\rho) = 2\pi\int_0^a \rho\,d\rho\,\varrho(\rho)$$

چگالی بار حجمی

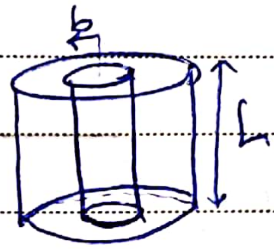
$$Q = \int_z^{z+h} dz \int_{\rho\le a} \varrho(\rho)\,dS = h\underbrace{\int_{\rho\le a} dS\,\varrho(\rho)}_{\lambda(a)}$$

$$E(a)=\frac{\lambda(a)}{\varepsilon_0 a 2\pi}$$

$$E(\rho)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho} \qquad \vec{E}=\frac{\lambda\hat{\rho}}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

سیم با چگالی طولی λ که به طور یکنواخت به شعاع b یکنواخت توزیع شده

$$\rho(\rho)=\begin{cases}A & \rho<b\\ 0 & \rho>b\end{cases}$$



$$A=\frac{\lambda}{\pi b^2} \Leftarrow Q=\lambda h=Ah\pi b^2$$

$$\vec{E}=E(\rho)\hat{\rho} \qquad E(\rho)=\frac{\lambda(\rho)}{2\pi\varepsilon_0\rho}$$

$$\rho<b:\ \lambda(\rho)=\pi\rho^2 A=\lambda\frac{\rho^2}{b^2}$$
$$\rho>b:\ \lambda(\rho)=\pi b^2 A=\lambda$$

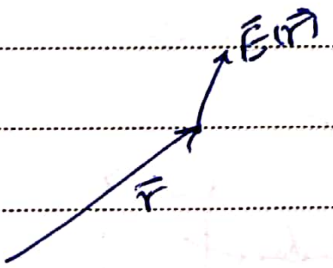
$$E(\rho)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\begin{cases}\dfrac{\rho}{b^2} & \rho<b\\[2mm] \dfrac{1}{\rho} & \rho>b\end{cases}$$

λ و ρ نمی‌توانند هم مرتبه باشند. اصطلاحاً شکل فرق دارد

بار با تقارن کروی

یعنی همهٔ جهت‌ها تقارن دارد

چگالی حجمی برحسب مختصات کروی $\rho(r)$



U دوران حول $\vec{r}$ — $\vec{r}$ محور دوران است. $U(\vec{r})=\vec{r}$

$\vec{E} \times$

تقارن: $\vec{E}=\vec{E}$

$$\vec{E}(\vec{r})=U\left[\vec{E}(\vec{r})\right] \Longrightarrow \vec{E}(\vec{r})\parallel\vec{r}$$

این برابر $\vec{r}$ درست است.

$$\vec{E}(\vec{r})\parallel\vec{r} \qquad \vec{E}(\vec{r})=E(\vec{r})\hat{r}$$

$$\tilde{E}(U\vec{r}) = \left[U\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\right] E(\vec{r})$$

دوران دلبخواه

تقارن:

$$\vec{E}(U\vec{r}) = U\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) E(\vec{r})$$

$$U\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) E(U\vec{r}) = U\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) E(\vec{r})$$

×

میگوییم کار میده: یک کره به مرکز مبدا (مبدا همین نقطه‌ای که بینیم برای تقارن دوران وجود داشته)

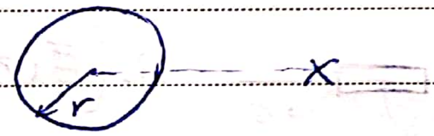
V: یک کره به شعاع a و مرکز مبدا

مرز یک کره به شعاع a و مرکز مبدا

$$\oint_{\partial V} E \cdot dS = \frac{Q(V)}{\epsilon_0}$$

$$= \oint_{r=a} E(a)\hat{r} \cdot \hat{r}\, dS = \frac{Q(a)}{\epsilon_0}$$

$$E(a) = \frac{Q(a)}{4\pi\epsilon_0 a^2} \qquad E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



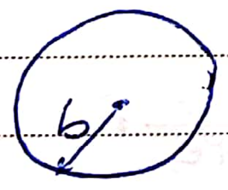
از جمله: مرا به تقارن کروی، بارهای بیرونی کره بر میدان اثر ندارند. دورتر از نقطه مشاهده

نقطه مشاهده نقطه‌ای است که میدان را در آنجا حساب میکنیم

اثر همه بارهای نزدیکتر هم مثل اثر یک بار نقطه‌ای در مبدا به اندازه کل بارهای نزدیکتر است.

بارهای دور را دور میریزیم و بارهای نزدیک را میگذاریم در مبدا

یک کره با چگالی سطحی یکنواخت σ شعاع کره b



$$Q(r) = \begin{cases} 0 & r<b \\ 4\pi b^2\sigma & r>b \end{cases} \qquad E(r) = \begin{cases} 0 & r<b \\ \dfrac{b^2\sigma}{2\pi\epsilon_0 r^2} & r>b \end{cases}$$

به جای گرانش رابطه گوس داریم فقط $kQ \to -GM$

یک سطح کروی تقریبا کامل (حفره دار) با شعاع b و چگالی سطحی بار σ

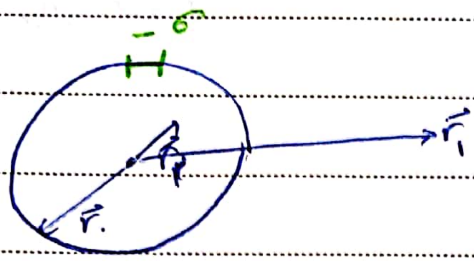
یک نقطه که فاصله‌اش از بخش ناقص کره در مقایسه با اندازه بخش ناقص بزرگ است.

میدان الکتریکی یک نقطه را میخواهیم

a بزرگترین جمله ممکن مال اندازه کره به صفر است

صفر شود با کره چیست.

تا این جا کره هر سطح را با شکل و بخش نازک تشبیه یک تکه است.



مسئله: یک کره کامل + یک بار نقطه‌ای $(-\sigma S)$

حل

تشکیل کره

$$\vec{E}(\vec{r}_1)=\frac{\sigma 4\pi b^2}{4\pi\epsilon_0 r_1^3}\vec{r}_1+\frac{k(\vec{r}_1-\vec{r}_0)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_0|^3}(-\sigma S)$$

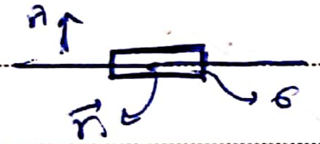
$$\vec{E}(\vec{r}_2)=\frac{k(\vec{r}_2-\vec{r}_0)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_0|^3}(-\sigma S)$$

فرض کردیم a در مقایسه با نقطه مشاهده کوچک است.
فاصله

میدان روی حفره

میدان روی صفحه خوب تعریف نیست. میدان یک لایه کمی حفره یک بیرون خوب تعریف است.

میدان روی خود حفره خوب تعریف نیست تعریف نمی‌شود.



$$\hat{n}\cdot\left[\vec{E}(\vec{r}_0+s\hat{n})-\vec{E}(\vec{r}_0-s\hat{n})\right]=\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

مؤلفه‌ی عمودی میدان ناپیوسته است.

در حالتی که سطح را تکه تخت شبیه یک صفحه باشد (و یعنی اندازه سطح بسیار کوچکتر از شعاع کره)

$a\ll b$، سطح شبیه یک صفحه

فرضاً سطح یک عرقچین است. نقطه‌ی مشاهده: مرکز عرقچین

$0\ll s\ll a\ll b$

$\vec{E}'$: میدان حاصل از عرقچین

$$\vec{E}'(\vec{r}_0+s\hat{n})=-\sigma\frac{\hat{n}}{2\epsilon_0}\qquad \vec{E}'(\vec{r}_0-s\hat{n})=\sigma\frac{\hat{n}}{2\epsilon_0}$$

میدان کل

$$\vec{E}(\vec{r}_0+s\hat{n})=\underbrace{\frac{k4\pi r_0^2\sigma}{r_0^2}\hat{n}}_{\text{میدان کره کامل}}\underbrace{-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}}_{\text{میدان عرقچین}}=\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{n}-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$$

$$\vec{E}(\vec{r}_0-s\hat{n})=\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$$

میدان کل درون و بیرون برابر شد و میدان کل پیوسته است.

انرژی الکتریکی

بار q_1 در نقطه $\vec r_1$

بار q_2 از بی‌نهایت به $\vec r_2$ منتقل می‌شود. (با سرعتی که به سمت صفر میل می‌کند) برای این کار، کار نیروی خارجی چیست؟

$\vec F_{1\to 2}$: نیروی الکتریکی ۱ به ۲

$$\vec F_2 = \vec F_{2ext} + \vec F_{1\to 2}$$

می‌خواهیم $\vec v_2 = 0 \Longleftarrow \vec a_2 = 0 \Longleftarrow \vec F_2 = 0$

$$\vec F_{2ext} = -\vec F_{1\to 2}$$

$$w_{ext} = -\int_{\infty}^{\vec r_2} \vec F_{1\to 2}\cdot d\vec r$$

چرا می‌گیریم سرعت صفر؟

می‌خواهیم شتاب صفر باشد و می‌خواهیم در مکان $\vec r_2$ ساکن باشد. پس می‌گیریم سرعت هم صفر میل کند. و از طرفی می‌خواهیم مسیر دلخواه باشد و مشکل در مسیر دلخواه تنها راه شتاب نداشتن سرعت صفر می‌شود

$$w_{ext} = -q_2\int_{\infty}^{\vec r_2} \vec E_1(\vec r)\cdot d\vec r = q_2\left[\phi_1(\vec r_2) - \phi_1(\infty)\right] = q_2\,\phi_1(\vec r_2)$$

قرارداد درست این هست که برای توزیع بار محدود جا بگیریم $\phi_1(\infty) = 0$ است.

$$\vec E_1(\vec r) = -(\nabla\phi_1)(\vec r)$$

$$w = q_2\,\phi_1(\vec r_2) = \frac{k q_1 q_2}{|\vec r_2 - \vec r_1|} = q_1\,\phi_2(\vec r_1)$$

اگر q_2 در $\vec r_2$ باشد و q_1 از بی‌نهایت به $\vec r_1$ بیاید هم باز هم همین مقدار کار لازم است

$q_1, \dots, q_N$ در $\vec r_1, \dots, \vec r_N$ می‌روند (با سرعت صفر). چقدر کار لازم است؟

$q_1: \infty \to \vec r_1 \quad w_1 = 0$

$q_2: \infty \to \vec r_2 \quad w_2 = \dfrac{k q_1 q_2}{|\vec r_2 - \vec r_1|}$

$q_3: \infty \to \vec r_3 \quad w_3 = \dfrac{k q_1 q_3}{|\vec r_3 - \vec r_1|} + \dfrac{k q_2 q_3}{|\vec r_3 - \vec r_2|}$

بارها از هم دور نمی‌خواهیم بیایند مشکل: مکان‌ها مشخص

$$\lim_{\vec v \to 0} w(\vec v)$$

$w(\vec 0)$ اصلاً تعریف نیست زیرا جابه‌جا نمی‌شه

$$\vec F_{ext} = -\vec F_{el} + \Delta \vec F \qquad w = \underbrace{-\int \vec F_{el}\cdot d\vec r}_{\text{مستقل از سرعت و مسیر}} + \underbrace{\int (\Delta \vec F)\cdot d\vec r}_{\text{اگر } \Delta F \text{ آنگاه به صفر میل می‌کنه}}$$

با سرعت صفر حرکت دادن یعنی با سرعت معمولی حرکت داده و هم همان کار را حساب کنیم سپس سرعت را به صفر میل دهیم.

$$q_N : \infty \to \vec r_N \qquad W_N = \frac{kq_1q_N}{|\vec r_N-\vec r_1|}+\frac{kq_2q_N}{|\vec r_N-\vec r_2|}+\cdots+\frac{kq_{N-1}q_N}{|\vec r_N-\vec r_{N-1}|}$$

$$W = W_1+W_2+\cdots+W_N = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{kq_iq_j}{|\vec r_i-\vec r_j|} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{kq_iq_j}{|\vec r_i-\vec r_j|}$$

ذکر می‌کنیم i ها و j ها تکراری نشند.

$$W = \sum_{\substack{\text{زوج‌ها}\ (ij)\\ i\neq j}} W_{ij} \qquad W_{ij} = \frac{kq_iq_j}{|\vec r_i-\vec r_j|} \qquad (ij)=(ji)$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij} W_{ij} \quad i\neq j \qquad W_{ij} = q_i\phi_j(\vec r_i) = q_j\phi_i(\vec r_j)$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} q_i\phi_j(\vec r_i) = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i\phi_j(\vec r_i)} - \frac{1}{2}\sum_i q_i\phi_i(\vec r_i)}_{\text{عبارت خود انرژی است.}}$$

در این شکل نوشتن به خاطر وجود $i \neq j$ مشکل داریم

با خود اثر

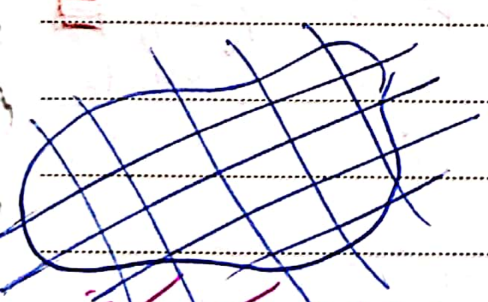
کار لازم برای ساختن بار نقطه‌ای:

q_1 در $\vec r_1$ را می‌خواهیم بسازیم اگر $\frac{q_1}{2}$ در $\vec r_1$ و $\frac{q_1}{2}$ در $\vec r_2$

$$W = \frac{k\left(\frac{q_1}{2}\right)^2}{|\vec r_1-\vec r_1|} = \infty$$

بار نقطه‌ای را نمی‌توان به صورت تنهایی جابه‌جا کرد.

چگونه یک توزیع بار بسازیم؟ چقدر باید کار انجام دهیم؟



$$W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} W_{ij}$$

از کجا بدانیم اگر طی دو مرحله بار را جابه‌جا کنیم، کار تغییر نمی‌کند؟

از کجا بدانیم اگر بارها را همزمان بیاوریم، کار تغییر نمی‌کند؟

بار q_1 را به $\vec r_1'$ و سپس به $\vec r_1$ می‌بریم

کاری که انجام می‌دهیم تا از بی‌نهایت به $\vec r_1'$ بیاوریم:

$$W' = kq_1\left[\frac{q_2}{|\vec r_1'-\vec r_2|}+\cdots+\frac{q_N}{|\vec r_1'-\vec r_N|}\right]$$

$$W' + \Delta W = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}}\frac{kq_iq_j}{|\vec r_i-\vec r_j|} = W$$

کاری که انجام می‌دهیم تا از $\vec r_1'$ به $\vec r_1$ ببریم:

$$\Delta W = kq_1\left[\frac{q_2}{|\vec r_1-\vec r_2|}-\frac{q_2}{|\vec r_1'-\vec r_2|}+\frac{q_3}{|\vec r_1-\vec r_3|}-\frac{q_3}{|\vec r_1'-\vec r_3|}+\cdots+\frac{q_N}{|\vec r_1'-\vec r_N|}-\frac{q_N}{|\vec r_1-\vec r_N|}\right]$$

انرژی چگونه اگر صفر و بقیه تکه تکه‌ها را به نزدیک میل می‌دهیم.

اندازه‌ی طول هر تکه: L ، بار هر تکه: q_i

$$\omega_{ii} \sim \frac{k(q_i)^2}{L}$$

$$\sum_i \omega_{ii} \sim \underset{\text{تعداد تکه‌ها}}{N}\,\frac{(q_i)^2}{\underset{\text{طول}}{L}} \sim N N^{\frac{1}{D}}\left(\frac{1}{N}\right)^2 = N^{\frac{1}{D}-1}$$

$$L^D \propto \frac{1}{N} \qquad L \propto \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}} \qquad q_i \propto \frac{1}{N}$$

$D>1 \quad \sum_i \omega_{ii} \to 0 \quad (N \to \infty)$

$D \leq 1 \quad \sum_i \omega_{ii}$ مهم است (بار نقطه‌ای یا خطی)

برای بار سطحی و حجمی لازم نیست نگران **خودانرژی** باشیم
هر امکان

$$\omega = \frac{1}{2}\int \phi\, dq \begin{cases} \xrightarrow{\text{حجم}} \frac{1}{2}\int dV\, \phi(\vec r)\, \rho(\vec r) \\ \xrightarrow{\text{سطح}} \frac{1}{2}\int ds\, \phi(\vec r)\, \sigma(\vec r) \end{cases}$$

کار لازم برای ساختن توزیع بار از بارهای بی‌نهایت کوچک که از هم دورند، انرژی الکتریکی توزیع بار می‌گوییم.

$\rho_1(\vec r) \longrightarrow \phi_1(\vec r)$

$\rho_2(\vec r) \longrightarrow \phi_2(\vec r)$

محاسبه‌ی انرژی الکتریکی توزیع بار

دو توزیع بار ρ_1 و ρ_2 پتانسیل ϕ_1 و ϕ_2 را درست می‌کنند.

$$\phi_i(\vec r) = k\int \frac{dq_i(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|} = k\int dV' \frac{\rho_i(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$U = \frac{1}{2}\int dV (\rho_1+\rho_2)(\phi_1+\phi_2) = \frac{1}{2}\int dV \rho_1\phi_1 + \frac{1}{2}\int dV \rho_2\phi_2 + \frac{1}{2}\int dV (\rho_1\phi_2+\phi_1\rho_2)$$

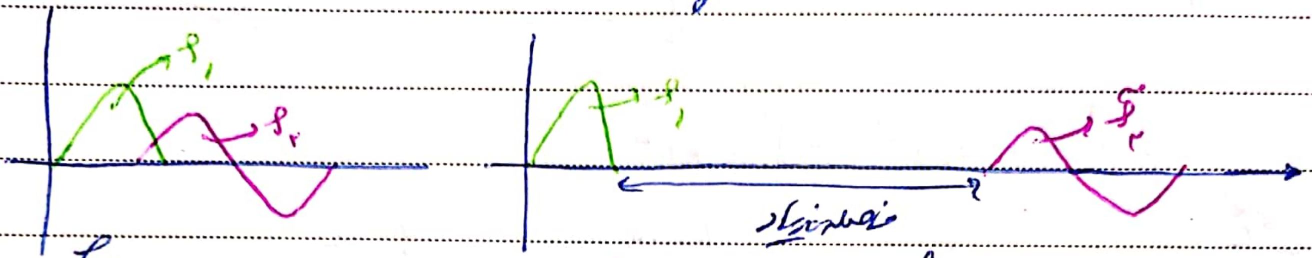
$$U = U_1+U_2+\frac{1}{2}\int(\rho_1\phi_2+\rho_2\phi_1)\,dV$$

$$\int \rho_1(\vec r)\phi_2(\vec r)\,dV = \int \rho_1(\vec r)\,dV\left[k\int dV' \frac{\rho_2(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}\right] = k\iint dV\,dV' \frac{\rho_1(\vec r)\,\rho_2(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$= \int \rho_2(\vec r)\phi_1(\vec r)\,dV = \int_{dV} \rho_2(\vec r)\int k\frac{\rho_1(\vec r')\,dV'}{|\vec r-\vec r'|}$$

$$U = U_1 + U_2 + \int \rho_1 \phi_2 \, dV = U_1 + U_2 + \int dV \rho_2 \phi_1$$

کار لازم برای گذاشتن ρ_2 کنار ρ_1



$$\int \rho_2 \phi_1 \, dV = 0 \qquad \tilde{U}_2 = \frac{1}{2}\int \rho_2 \phi_2 \, dV = \frac{1}{2}\int \rho_2 \phi_2 \, dV = U_2$$

فاصله زیاد با هم همپوشانی ندارند

$\int \rho_2 \phi_1 \, dV$: کار لازم برای آوردن ρ_2 به جای خود

$$\tilde{U} = U_1 + \underset{+0}{\tilde{U}_2} = U_1 + U_2 = U$$

$$W = q_2 \phi_1(\vec{r}_2)$$

q_2 مانند بار $\vec{r}_2$ نقطه‌ای هست می‌گیریم

$$U = U_1 + U_2 + U_{12}$$

U_{12}: اثر توزیع ۲ در پتانسیل توزیع ۱ (یا برعکس)

U_1: خود انرژی توزیع ۱

U_2: خود انرژی توزیع ۲

شکل دیگر انرژی الکتریکی

$$U = \frac{1}{2}\int \rho \phi \, dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV \, \phi (\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV \left[\nabla \cdot (\phi \vec{E}) - \vec{E} \cdot \nabla \phi\right]$$

$$\rho = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E})$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV \, \vec{E} \cdot \vec{E} + \frac{\epsilon_0}{2}\int dV \, \nabla \cdot (\phi \vec{E})$$

$$\nabla \cdot (\phi \vec{E}) = \phi \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \phi \cdot \vec{E}$$

$$\int dV \left[\nabla \cdot (\phi \vec{E})\right] = I \qquad I = \lim_{R \to \infty} I(R)$$

I را محاسبه می‌کنیم.

اول رو انتگرال روی یک کره که شعاعش را به ∞ میل میدهیم تعریف می‌کنیم.

$$I(R) = \int_{r<R} dV \, \nabla \cdot (\phi \vec{E}) = \oint_{r=R} dS \, \hat{r} \cdot (\phi \vec{E})$$

قضیه گاوس

اگر بتوان گفت توزیع بار ما گونه‌ای است که به نهایت دور از توزیع بار وجود دارد و در بی‌نهایت دور، میدان و پتانسیل به صفر میل می‌کند.

بریم به یک توزیع جایگزین بده

اگر R از اندازه توزیع خیلی بزرگتر باشد، میدان توزیع بر سطح کره مثل میدان بار نقطه‌ای است.

بقیه‌اش از $\frac{1}{R^3}$ صفر می‌شود.

$$\vec{E}\Big|_{r=R} = \frac{kQ}{R^2}\hat{r} + O\left(\frac{1}{R^3}\right) \qquad \phi\Big|_{r=R} = \frac{kQ}{R} + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

چون دقیقاً با بار نقطه‌ای برابر نیست

$$\phi(\vec r) = k\sum_i \frac{q_i}{|\vec r - \vec r_i|} \qquad \frac{1}{|\vec r-\vec r_i|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r_i^2-2\vec r_i\cdot\vec r}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2\vec r_i\cdot\vec r}{r^2}+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{r}\left[1+\frac{\vec r_i\cdot\vec r}{r^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^2+\dots\right]$$

$$\phi = k\,\frac{\sum q_i}{r} + k\,\frac{\left(\sum_i \vec r_i q_i\right)\cdot\vec r}{r^3}+\dots \rightarrow \propto \frac{1}{r^2}$$

$$\phi \propto \frac{1}{R}+\dots \qquad \vec E\cdot\hat r \sim \frac{1}{R^2}+\dots \qquad I(R) = \oint_{r=R} ds\left[\frac{A}{R^3}+O\left(\frac{1}{R^3}\right)\right]$$

حجم خیلی بزرگ

$S \propto R^2$

$$I(R) = \frac{B}{R} + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$I = \lim_{R\to\infty} I(R) = 0$$

مثل بالا

دقت: برقراری این تساوی مشروط است

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{\int dV\,\rho\phi}_{\text{روی کل فضا}} = \frac{\epsilon_0}{2}\underbrace{\int dV\,\vec E\cdot\vec E}_{\text{روی کل فضا}}$$

در حالت کلی $\rho\phi \neq \vec E\cdot\vec E$ ← چطور برابر گذاشته شد؟

$\frac{1}{2}\epsilon_0\,\vec E\cdot\vec E =: u$ چگالی انرژی

چگالی انرژی مشاهده‌پذیر نیست.

فرق چگالی انرژی با چگالی جرم یا چگالی بار؟

در مورد چگالی جرم و چگالی بار: چگالی جرم سنگ $= \frac{\text{جرم سنگ}}{\text{حجم سنگ}}$

می‌توانیم قسمت کوچکی را برداریم و چگالی جرم یا بار تعریف کنیم.

برای میدان الکتریکی نمی‌شه. یعنی یک ناحیه کوچکتر رو برداریم و چگالی انرژی همان قبل رو حساب کنیم اشتباه در میاد

چون میدان الکتریکی باید در معادلات صدق کند.

چگالی انرژی خوش‌تعریف نیست و مشاهده‌پذیر نیست.

~~چون می‌توانستیم $\frac{\rho\phi}{2}$ رو چگالی انرژی تعریف کنیم و اتفاقاً با $\frac{\epsilon_0 \vec E^2}{2}$ برابر نشد.~~

$\vec E_{c}$ $\vec E \neq 0$ $\qquad \oint \vec E\cdot d\vec r \neq 0$

انتگرال $\vec E$ در سنگ ناصفر است که نمی‌شود.

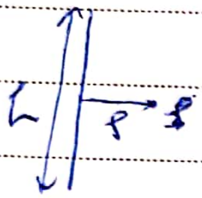
پتانسیل بار خطی

یک تکه از بار خطی که تکه ای کوچک باشد که طولش در مقایسه با طول مشخصه تغییرات λ و در مقایسه با شعاع خمش کم

$U = \int dV \frac{\epsilon}{2} E \cdot E$ $\qquad L \ll$ شعاع خمش و طول مشخصه تغییرات λ

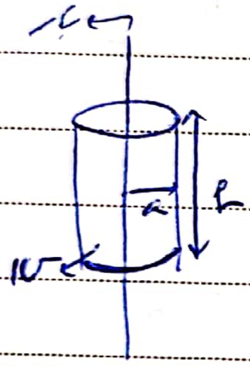
در این صورت این تکه مثل یک خط با بار دار (راست) با چگالی یکنواخت می شود.

ρ: فاصله از نقطه مشخص تا خط باردار $\qquad \rho \ll L \qquad$ فاصله کم



$\vec{E} \simeq \frac{2k\lambda}{\rho}\hat{\rho}$ فاصله از نزدیک $\qquad E \cdot E \sim \frac{4k^2\lambda^2}{\rho^2}$

$\rho \to 0$ $\qquad$ انتگرال گیری با مختصات استوانه ای: محور $\hat{z}$ واقع بر بار است.

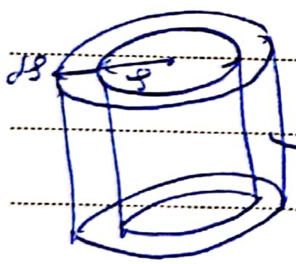


$a \ll L \qquad \int_V \frac{\epsilon}{2} dV\, E \cdot E = 2\pi\epsilon L \int_0^a \rho\, d\rho \frac{4k^2\lambda^2}{\rho^2} = A\int_0^a \frac{d\rho}{\rho} = \infty \to$ چرا صفر نه؟

انرژی پتانسیل یک توزیع بار خطی بی نهایت است. لذا حجم انرژی پتانسیل سیم را بی نهایت

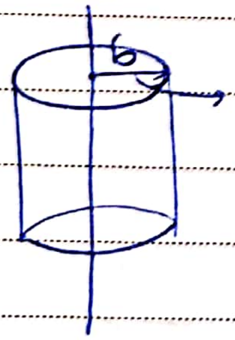
چرا انتگرال روی کل فضا نیست؟ چون این انتگرال $\bigcirc \to \infty$

اصلا ما دو بخش تقسیم کردیم در مرز فاصله خیلی بزرگ انرژی رو حساب کنیم.



$dV = (2\pi\rho\, d\rho)L$

سیم ضخامت دار



شعاع سیم $\qquad E(\rho) = 2k\lambda \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho > b \\ \frac{\rho}{b^2}, & \rho < b \end{cases}$ $\qquad$ برای سیم ضخامت دار تعریف λ چیست(بی سیم)

$b \ll L \ll$ طول مشخصه شعاع

انتگرال حجمی E^2 بر یک استوانه به شعاع a $\qquad b \ll a \ll L$

$\int_0^b \rho\, d\rho \left(\frac{\rho}{b^2}\right)^2 + \int \rho\, d\rho \left(\frac{1}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{4} + \ln\left|\frac{a}{b}\right|$ ← سهم کم است نوشته نشده

یعنی انرژی پتانسیل سیم ضخامت دار مانند $-\ln(b)$ به بی نهایت میل می کند.

با شعاع کم

در ضخامت صفر معادل بار داشتن یک بار خطی

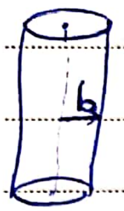
b: شعاع سیم ناحیه انتگرال گیری

b: شعاع سیم

λ: چگالی طولی سیم ثابت

$\rho = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi b^2} & \rho < b \\ 0 & \rho > b \end{cases}$ اگر شعاع b به صفر $\to$ آنگاه بار خطی را خواهیم داشت که قبلاً داشتیم.

سیم بی‌نهایت



سیم بی‌نهایت به شعاع b

$\frac{U}{\text{طول}} =$ انتگرال روی طول + $A \int_b^{\infty} \rho\, d\rho \frac{1}{\rho^2}$ + حدود (داخل سیم) انرژی داخل سیم

که تمام مشکلات از این رابطه است که دیده می‌شود.

$\underbrace{\qquad}_{A \ln\left(\frac{\infty}{b}\right)}$

برای سیم بی‌نهایت به شعاع b، U و $\frac{U}{\text{طول}}$ بی‌نهایت هستند.

سیم دو نقطه‌ای

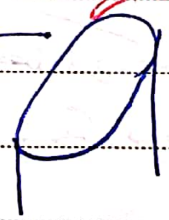
$\int_{\text{کل فضا}} \frac{\epsilon_0}{2} dV\, \vec{E}\cdot\vec{E} = \int_{\text{سیم}} dV \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}\cdot\vec{E} + \int_{\text{حدود سیم}} dV \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}\cdot\vec{E}$

انتگرال روی ناحیه دور خارج از سیم محدود است. $\vec{E}$ محدود است و بار جایگزین نیست پس مهم نیست.

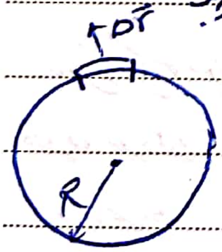
$E \propto \frac{1}{r^2}$ انتگرال کل بی‌نهایت محدود می‌ماند $E^2 dV \sim \underbrace{\frac{r^2 dr}{r^4}}_{\text{از کره}} = \frac{dr}{r^2}$

نیروی بار خطی

سیم به کلفتی b



$U = \underbrace{(\ )}_{\text{ضریب}} \int dl \ln\left(\frac{a}{b}\right) \lambda^2 + \dots$



$dF.(\Delta r)$ $\quad R \to R + \Delta R \quad \Delta r = \Delta R\, \hat{r}$

مشتق U نسبت به R نیرو می‌شود $\underbrace{(\ )}_{\text{ضریب}} \left[R \lambda^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]$ درای

$\to$ نیرو $\lambda^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

اگر $b \to 0$: $\frac{\text{نیرو}}{\text{طول}} \to \infty$

وقتی ضخامت یک توزیع بار به صفر میل می‌کند، انتگرال روی کل فضا شامل یک انتگرال روی نواحی اطراف بار و انتگرال روی بقیه فضاست. و انتگرال روی نواحی اطراف بار وقتی ضخامت به صفر میل کند به بی‌نهایت میل می‌کند.

~~نیروی به بی‌نهایت میل می‌کند وقتی ضخامت به صفر میل کند~~

$\to$ نیرویی که هر تکه از حلقه از طرف بقیه حلقه‌ها وارد می‌کند

نیرویی که به هر نقطه از سیم بی‌نهایت وارد می‌شود طبق تقارن صفر است. و در کل نیروی بی‌نهایت جمع شدن که صفر شده با هم‌دیگر کنار رفته

$\vec{E} = \frac{B}{\rho}\hat{\rho} \qquad \nabla\phi = -\frac{B\hat{\rho}}{\rho}$ $\qquad \rho$: فاصله استوانه‌ای

$$\phi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = -B\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$\lim_{\rho\to\infty}\phi = \infty$ مشکل از انتخاب ρ_0، پتانسیل در بی‌نهایت، بی‌نهایت می‌شود

کاربرد انرژی الکتریکی

یک کاربرد انرژی الکتریکی، محاسبه نیرو هست.

جسم را از $\vec{r}_0$ به $\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$ با سرعت صفر جابه‌جا می‌کنیم

$\vec{F}_e$: نیروی الکتریکی

$\vec{r}_0 \longrightarrow \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$

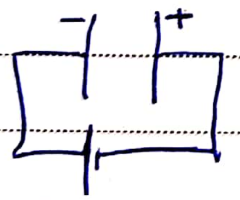
$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_e = 0$

خارجی

جابه‌جایی کوچک

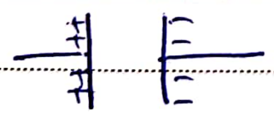
به شرطی که منبع دیگری برای انرژی وارد و خروج نداشته باشد $\Delta U = \vec{F}_{ext}\cdot\Delta\vec{r} = -\vec{F}_e\cdot\Delta\vec{r}$ برای این جابه‌جایی

جسم در یک موضع ایستا، کشش نیروی الکتریکی وارد می‌شود. نیروی خارجی تحت آن را وارد می‌کنیم تا شتاب آن صفر باشد و با سرعت ناچیز جابه‌جا می‌کنیم و در یک جابه‌جایی کار را محاسبه کنیم. به این طریق می‌توان نیروی الکتریکی را حساب کنیم



منبع دیگری برای انرژی وجود نداشته باشد یعنی:

خازن بار دارد، یعنی باتری قطع شده. علاوه بر F_{ext} منبعی به سیستم انرژی نمی‌دهد. اگر باتری قطع نشده، باتری با سیستم انرژی مبادله می‌کند.



$$(\Delta U)_Q = -\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

بار ثابت — جابه‌جایی کوچک

جابه‌جایی خازن: تغییر انرژی به شرایط جابه‌جایی (بار ثابت یا ...) بستگی دارد.

نیرو به جابه‌جایی بستگی ندارد.

نیروی مشخص به جابه‌جایی بستگی ندارد ولی تغییر انرژی در جابه‌جایی به شرایط بستگی دارد.

مشکل گسترده‌تر

$$(\Delta U)_Q = -F_a\, da$$

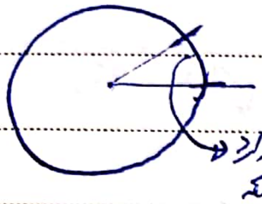
da: جابه‌جایی یک متغیر

F_a: نیروی تعمیم یافته متناظر با a

$$W_{ext} = (F_{ext})_a\, da$$

مسئله دو یک کره به شعاع R پوسته کروی

کره را از شعاع R به $R+dr$ می‌بریم



$\rightarrow$ نیروی وارد بر این تکه: $P_{ext}\Delta S\,\hat r$

$$d\vec r = \hat r\, dr \qquad W_{ext} = \sum (P_{ext}\,\Delta S)\,\hat r\cdot dr\,\hat r$$

$$= \underbrace{\left(\sum P_{ext}\,\Delta S\right)}_{F_{ext,r}} dr$$

اگر P_{ext} مستقل از مکان باشد

$$W_{ext} = \underbrace{S\,P_{ext}}_{F_{ext,r}}\, dr$$

$$\sum (P_{ext}\,\Delta S)\,\hat r = 0$$

در حالت کلی:

$$\sum P_{ext}\,\Delta S = \int dS\, P_{ext}$$

~~کره با بار یکنواخت~~ کره با بار یکنواخت

$$(dU)_Q = -(PS)\,dr$$

$$U = \frac{1}{2}\int \phi\, dq = \frac{\phi q}{2}$$

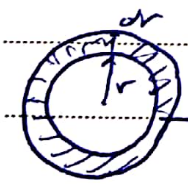
میدان بیرون مثل میدان بار نقطه‌ای است پس پتانسیل بیرون هم (با پتانسیل بی‌نهایت صفر) پتانسیل بار نقطه‌ای است

پتانسیل پیوسته است. پس پتانسیل در کره

$$\phi = \frac{kq}{R}$$

$$U = \frac{kq^2}{2R}$$

$$U = \frac{\epsilon}{2}\int \vec E\cdot\vec E\, dV = \frac{\epsilon}{2}\int \left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2 dV = \frac{4\pi\epsilon}{2} k^2q^2 \int_R^\infty \frac{r^2\, dr}{r^4}$$



$\rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

$$= \frac{kq^2}{2}\left(-\frac{1}{r}\right)_R^\infty = \frac{kq^2}{2R}$$

تقارن کروی

$$\vec E = E(r)\,\hat r$$

میدان کره با چگالی حجمی ρ: $\leftarrow r<R$

$$4\pi\epsilon\, r^2 E(r) = q(r) = \int_0^r \rho(r')\, d^3r'$$

$d^3r' \to dV'$

اگر ρ ثابت باشد

$$= \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon} \qquad r<R$$

$$E = \frac{1}{3\epsilon}\rho\frac{R^3}{r^2} \qquad r>R$$

Year ...... Month ...... Date ......

یک کره به شعاع R و بار q با چگالی حجمی یکنواخت

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{kqr}{R^3} & r<R\\[2mm] \dfrac{kq}{r^2} & r>R\end{cases}$$

$$U=\frac{\rho}{2}4\pi k q^2\left[\int_0^R r^2dr\,\frac{r^2}{R^6}+\int_R^{\infty} r^2dr\,\frac{1}{r^4}\right]=\frac{kq^2}{2}\left(\frac{1}{5R}+\frac{1}{R}\right)=\frac{kq^2}{2}\,\frac{6}{5R}$$

$4\pi r^2 dr$ حجم لایه

مساحت لایه - ضخامت

$$\int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} dr$$

حد بازه بین a و b کدام است؟

چرا کران پایین R و بالا ∞ هست؟ چرا برعکس نیست؟

حجم و چگالی چیزی نمی‌تواند منفی باشد.

مسئله دیگر:

$$U=\frac{kq^2}{2R}$$

بار q ثابت،

$$R\longrightarrow R+dr$$

$$(dU)_q=-\frac{kq^2}{2R^2}dr=-(PS)dr \qquad P=\frac{kq^2}{2R^2}\frac{1}{S}=\frac{kq}{2R}\underbrace{\left(\frac{q}{S}\right)}_{\sigma}=\frac{1}{2}(E_{in}+E_{out})\sigma$$

نیروی وارد بر یک تکه از سطح باردار میدان ناشی از بقیه بار سطح بر آن تکه است

$$\Delta F=\underbrace{\frac{\vec{E}_1+\vec{E}_2}{2}}_{\text{میانگین میدان دو طرف}}\sigma\,\Delta S=\frac{1}{2}\left(\frac{kq}{r^2}\hat{r}+0\right)\sigma\,\Delta S=P\,\hat{r}\,\Delta S$$

$$P=\frac{1}{2}\frac{kq}{r^2}\sigma$$

با q ثابت و کار طی یک فرایند مجازی کوچک از شعاع $\vec{R}$ به $\vec{R}+d\vec{r}$ می‌توانیم نیرو در $\vec{R}$ را حساب کنیم

$$P(R)=-\frac{1}{S}\left(\frac{dU}{dr}\right)_q\Bigg|_R$$

$$dU=-SP\,dr+\phi(dq)$$

$$U=\frac{kq^2}{2R}=\frac{1}{2}R\frac{\phi^2}{k} \qquad \phi=\frac{kq}{R}$$

اگر ϕ را ثابت نگه داریم بار عوض می‌شود،

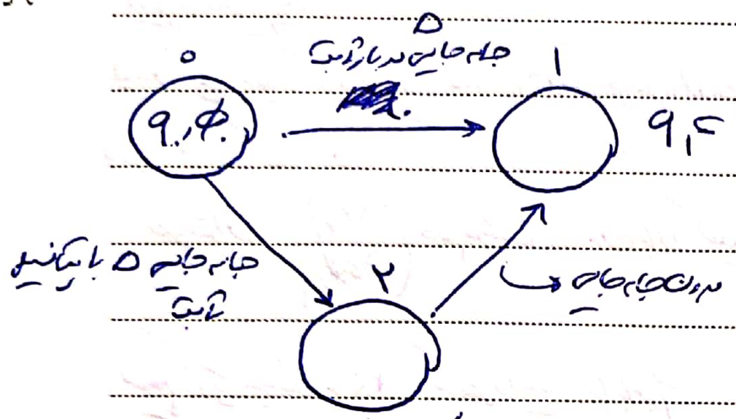
ako Note Book

$$(dU)_\phi = \frac{1}{2}\frac{\phi^2}{k}dr = \frac{kq^2}{2R^2}dr$$

$$(dU)_\phi = -(dU)_q$$ در این مسئله ΔU

حالت کلی: تغییر انرژی در پتانسیل ثابت، قرینه ی تغییر انرژی در بار ثابت است. (تا مرتبه یک) ← تغییرات کم است؟

اثبات: تساوی بالا را اثبات می کنیم.



$q_1 = q_0,\ \phi_1$

$\phi_2 = \phi_0,\ q_2$

$$\Delta U_{0\to1} = \Delta U_{0\to2} + \Delta U_{2\to1}$$

$$U = \frac{1}{2}\int q\phi$$

$$(\Delta U)_{0\to2} = \frac{1}{2}\phi_0(q_2 - q_0) \qquad (\Delta U)_{0\to1} = \frac{1}{2}q_0(\phi_1 - \phi_0)$$

$$= \frac{1}{2}(q_0\phi_1 - q_2\phi_0) = \frac{1}{2}\left[q_0(\phi_0 + d\phi) - (q_0 + dq)\phi_0\right] = \frac{1}{2}\left[q_0 d\phi - dq\,\phi_0\right]$$

$$(\Delta U)_{2\to1} = \frac{1}{2}\phi(q_1 - q_2) + \frac{1}{2}q(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2}\phi\,\Delta q_{2\to1} + \frac{1}{2}q\,\Delta\phi_{2\to1}$$

تا مرتبه یک مهم نیست که کدام ϕ باشد   تا مرتبه یک مهم نیست کدام q باشد

$$= \phi\,\Delta q_{2\to1} = q\,\Delta\phi_{2\to1}$$

$$\int \phi(\vec r)(\Delta\rho)(\vec r)\,dV = k\int \frac{\rho(\vec r')(\Delta\rho)(\vec r)}{|\vec r - \vec r'|}\,dV'\,dV$$

$$\int \rho(\vec r)(\Delta\phi)(\vec r)\,dV = k\int \frac{\rho(\vec r')(\Delta\rho)(\vec r)}{|\vec r - \vec r'|}\,dV'\,dV$$

$$\frac{1}{2}\phi\,\Delta q_{2\to1} = \frac{1}{2}q\,\Delta\phi_{2\to1} \qquad d\left(\frac{q}{\phi}\right) = \frac{dq\,\phi - q\,d\phi}{\phi^2} = 0$$

$$\Delta U_{0\to2} + \Delta U_{2\to1} = \Delta U_{0\to2} - 2\Delta U_{0\to2} = -\Delta U_{0\to2}$$

$$\Delta U_{0\to1} = \Delta U_{0\to2} + \Delta U_{2\to1}$$

$$\frac{1}{2}q\,d\phi = \frac{1}{2}\phi\,dq + \frac{1}{2}q\,d\phi - \frac{1}{2}\phi\,dq$$

Year .... Month .... Date ....

$$\Delta U_{1\to 2} = -\Delta U_{2\to 1} \qquad (\Delta U)_q = -(\Delta U)_\phi$$ یک مرتبه جزئی

$$(dU)_q = -F_a\,da \qquad (dU)_\phi = F_a\,da$$

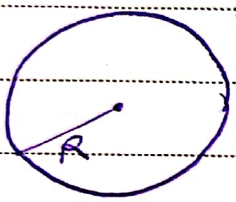
$$F_a = -\left(\frac{dU}{da}\right)_q = +\left(\frac{dU}{da}\right)_\phi \qquad \underbrace{F}_{\text{یک متغیر}}\,da = \underbrace{dW}_{\text{کار ها}}$$

نیروی تعمیم یافته

da یک تغییر بینهایت کوچک چیزی هست و F هم چیزی است که F da بهم کار بدهد.

کار = (تغییر یک چیز) (یک چیز دیگر)

می‌توان $\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_q$ هم نوشت. ما بالا گفتیم q کلاً ثابت می‌ماند پس هم برای U تابع یک متغیر a است.



سیم نازکی به شعاع R به شکل دایره با بار q ضخامت سیم b

حالا سیم به صورت بزرگ انرژی: بین دو استوانه به طول $2\pi R$ به شعاع های a و b

$a \gg b$

a خیلی کمتر از R است

ضخامت سیم در

$$E = \frac{2k}{\rho}\lambda = \frac{2k}{\rho}\,\frac{q}{2\pi R}$$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}(2\pi R)(2\pi)\int_b^a \rho\,d\rho\left(\frac{2k}{\rho}\,\frac{q}{2\pi R}\right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2}(2\pi R)(2\pi)\frac{4k^2q^2}{(2\pi R)^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$$

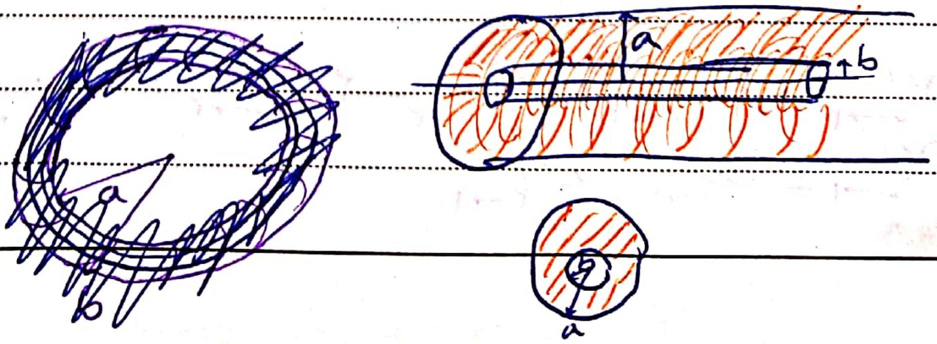
$$= \frac{kq^2}{2\pi R}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

حالا سیم یکی با استفاده از جابه‌جایی مجازی با بار ثابت

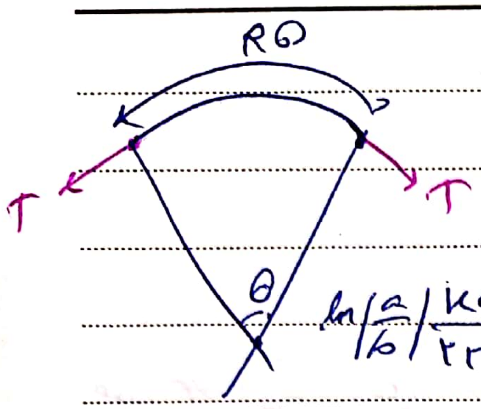
$$U = \frac{kq^2}{2\pi R}\ln\left(\frac{a}{b}\right) \qquad (dU)_q = -\left[\frac{kq^2}{2\pi R^2}\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]dr = -F_r\,dr$$

$$\Delta \vec F = \underbrace{\sigma}_{\text{کشش سطحی}}\underbrace{\Delta l}_{\text{المان طول روی سیم}}\,\hat r \qquad \omega = \left(\sum \sigma \Delta l\right)dr = (2\pi R)\,\sigma\,dr$$

$$F_r = 2\pi R\,\sigma$$



Year ...... Month ...... Date ......



T: کشش

$T\theta =$ نیروی کششی

$T\theta$ کشش بر $R\theta$ برابر است با σ

$$\frac{T\theta}{R\theta} = \sigma$$

$$\sigma = \frac{T}{R}$$

$$\ln\left|\frac{a}{b}\right|\frac{kq^2}{2\pi R^2} = 2\pi T$$

از مسئله‌ی حلقه صفحه پیش

$$\rightarrow T = \frac{kq^2}{(2\pi R)^2}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

در صورتی که سیم شبیه سیم بی‌نهایت

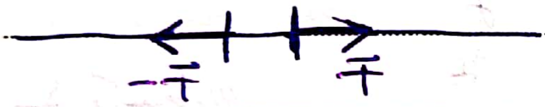
اگر a خیلی بزرگ شود

$a \sim$ ضریب کوچکتر $\times R$ / کوچک

T تقسیم شده ~~...~~ نیروی الکتریکی در دو راستای مخالف است. می‌توانستیم خود نیرو را در ... حساب کنیم

فقط یکم سخت‌تر می‌شد

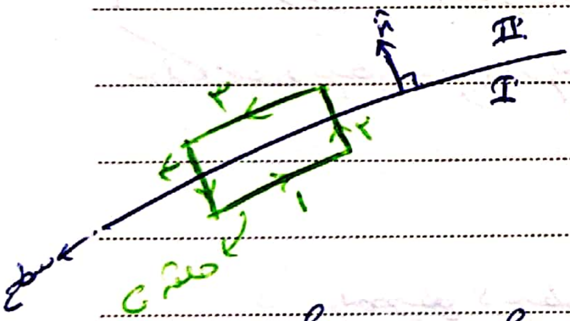
می‌شد اینجا را برای سیم بی‌نهایت هم نوشت اگر q و R بزرگ شوند.



$$T = k\lambda^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

شرایط مرزی در میدان الکتریکی

مولفه‌ی مماسی (موازی) با مرز میدان:



دو فضا هستیم پیوسته‌ای با سطح مشترک میدان در دو طرف سطحی که می‌تواند بار داشته باشد را اینجا داریم و سیم را بسته کنیم

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 = \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_3 \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_4 \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_2 \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_4 \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$$

اضلاع ۲ و ۴ را خیلی کوچک می‌کنیم (اگر $\vec{E}$ بی‌نهایت نشود)

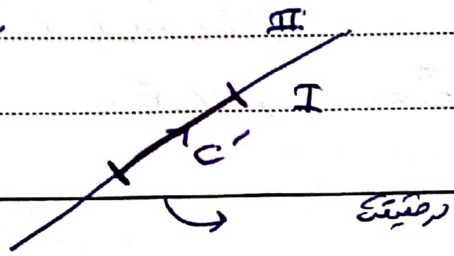
$\vec{E}_I$: همان $\vec{E}$ دقیقا در ناحیه‌ی I به مرز نزدیک است (شرط). $\vec{E}_{II}$: همان $\vec{E}$ دقیقا نزدیک به ناحیه‌ی II ~~...~~ به مرز نزدیک است.

$$\int_1 \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{C'} \vec{E}_I\cdot d\vec{r} \qquad \int_3 \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_{C'} \vec{E}_{II}\cdot d\vec{r}$$

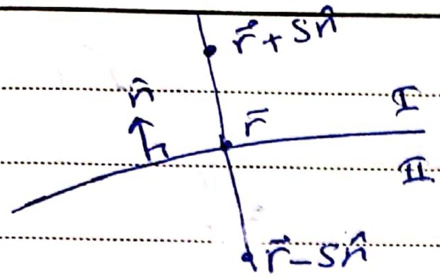
C': یک خم دلخواه در مرز

$$\int_{C'} (\vec{E}_I - \vec{E}_{II})\cdot d\vec{r} = 0$$

مماس بر مرز



میدان در سطح لایه خیلی نزدیک مرز جا است بشود، لحظه که مماس به مرز است.



$$\vec E_{I}(\vec r) := \lim_{s\to 0^+} \vec E(\vec r - s\hat n)$$

$$\vec E_{II}(\vec r) := \lim_{s\to 0^+} \vec E(\vec r + s\hat n)$$

چون که $\oint_C (\vec E_{I} - \vec E_{II})\cdot d\vec r$ به ازای هر خم C درست است پس انتگرالده باید صفر باشد.

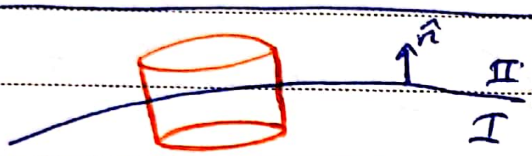
$\hat t$، یک بردار مماس بر سطح

$$(\vec E_{I} - \vec E_{II})\cdot \hat t = 0$$

این شرط به ازای هر $\hat t$ مماس بر سطح برقرار است.

$$(\vec E_{II})_{\parallel} = (\vec E_{I})_{\parallel}$$

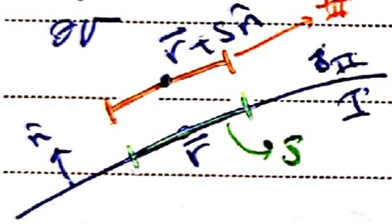
$\parallel$: مولفه‌ها (مماس بر سطح)



مولفه عمود بر مرز میدان

V: یک استوانه (قرص) کوتاه ساخته شده با یک سطح S بر مرز

$$\oint_{\partial V} \vec E\cdot d\vec S = \frac{q(V)}{\epsilon_0} = \int_{\text{سطح جانبی}} \vec E\cdot d\vec S + \int_{S_{II}} \vec E\cdot d\vec S + \int_{S_{I}} \vec E\cdot d\vec S$$



S_{II}: قاعده بالا

S_{I}: قاعده پایین

ارتفاع استوانه ← صفر، اگر میدان به حالت تکینه نباشد، انتگرال بر سطح جانبی صفر می‌شود.

بردار یکه عمود بر سطح ← بیرون‌سو که برای S_{II} برابر با $\hat n$ و برای S_{I} برابر با $-\hat n$ است.

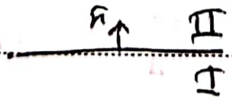
$$\frac{q(V)}{\epsilon_0} = \int_S \vec E_{II}\cdot\hat n\, dS - \int_S \vec E_{I}\cdot\hat n\, dS$$

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_S dS\,\sigma = \int_S (\vec E_{II} - \vec E_{I})\cdot\hat n\, dS$$

به ازای هر سطح S بر سطح جدایی برقرار است.

میدان روی سطح خوش‌تعریف نیست یعنی تعریف نشده.

$$(\vec E_{II} - \vec E_{I})\cdot\hat n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



$$\vec E_{II} - \vec E_{I} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat n$$

رسانا: موجودی که میدان الکتریکی اینجا درون آن صفر است. (در الکتروستاتیک)

درون رسانا $\vec E = 0 \longrightarrow \nabla\cdot\vec E = 0$ درون رسانا بار حجمی ندارد یعنی اگر به رسانا بار داده شود

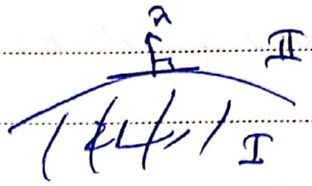
این بار به سطح می‌آید.

درون رسانا منظور بدون حفره رساناست

$(\vec E_{II})_\parallel = (\vec E_{I})_\parallel \qquad (\vec E_{II} - \vec E_{I})\cdot\hat n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Subject: ....
Year ...... Month ...... Date ......

$\vec E_{I} = 0 \qquad \vec E_{II} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat n$



اگر در ~~...~~ (انتگرال) به اندازه یکسان کران همه انتگرال گیری برابر باشند، آنگاه انتگرال در همه این نواحی یکسان برابر است.

$\Delta\vec F$: نیروی وارد بر سطح ΔS $\qquad$ $\vec f$: نیروی وارد بر واحد سطح

$\Delta F = (\sigma \Delta S)\vec E_{\text{میانگین}} = \vec f \Delta S \qquad \vec f = \frac{\sigma}{2}\left[\frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat n + 0\right] = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat n$

فشار $P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \qquad \vec f = pA \rightarrow \begin{cases} P = \frac{\epsilon_0}{2}(\vec E\cdot\vec E) \\ \sigma = \epsilon_0(\vec E\cdot\hat n)\end{cases}$ $\qquad$ $\vec E$: میدان بیرون رسانا

$\vec f = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\hat n$ $\qquad$ $\hat n$: از رسانا به بیرون

یکتایی جواب برای میدان الکتریکی

اگر کل بارها در کل فضا معلوم باشد، میدان معلوم است از رابطه کولن (محاسبه مستقیم با ...)

اما در بسیاری از مسائل، بار فقط در یک ناحیه V معلوم است:

$\rho(\vec r)$ معلوم است اگر $\vec r \in V$

آیا برای $\vec r$ های درون V با این داده‌ها میدان معلوم است؟ خیر، زیرا دانستن فقط بارهای درون کافی نیست بلکه بارهای بیرون در میدان این ناحیه سهم دارند.

با داشتن چه داده دیگری در مورد این ناحیه می‌توان میدان را دانست؟ اطلاعات اضافی برای تعیین میدان شرایط مرزی است.

$\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad E = -\nabla\phi$

$\nabla\cdot(\nabla\phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla^2\phi \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ لاپلاسی

معادله پواسون $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

یک مسئله ساده تک متغیره:

$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \qquad x_1 < x < x_2$

در یک بعد می‌توان انتگرال گرفت

$\phi(x) = \phi'(x_1) - \frac{1}{\epsilon_0}\int_{x_1}^{x}\rho(s)ds$

ako Note Book

$\frac{d\phi'(x)}{dx} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \rightarrow \int d\phi'(x) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int \rho(x)dx$

$$\nabla^2\varphi=0,\ \vec r\in V \xrightarrow{\text{شرایط مرزی}} \nabla\varphi=0,\ \vec r\in V$$

Subject: ....

Year ...... Month ...... Date ......

$$\phi(x)=\phi(x_1)+(x-x_1)\phi'(x_1)-\frac{1}{\epsilon}\int_{x_1}^{x}dt\int_{x_1}^{t}ds\,\rho(s)$$

$\phi(x_1)$ و $\phi'(x_1)$ در واقع ثابت‌هایی‌اند که از انتگرال‌گیری‌ها در می‌آیند.

اگر $\phi(x_1)$ و $\phi'(x_1)$ هر دو معلوم باشند ϕ به دست می‌آید.

نیاز داریم $\phi(x_1)$ یا $\phi'(x_1)$ و $\phi(x_2)$ یا $\phi'(x_2)$ را داشته باشیم.

وقتی $\phi(x_2)$ را بدونیم می‌توانیم $\phi'(x_1)$ را به دست بیاوریم. اگر $\phi'(x_2)$ را هم بدون داشته باشیم و در معادله صدق نکند آنگاه مسئله جواب ندارد.

اگر $\phi'(x_1)$ و $\phi'(x_2)$ چنان داده شوند که معادله I برقرار شود، آنگاه یک بار دیگر داده‌ها لازم است. ϕ با تقریب یک ثابت جمعی به دست می‌آید.

اطلاعات اضافی کافی برای یافتن میدان در یک بعد: ϕ و ϕ' در x_1 و x_2 ($\phi(x_1)$، $\phi(x_2)$) دلخواه می‌باشد.

در فضای سه بعد

داده‌ها: $\nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\epsilon}\qquad \vec r\in V$

علاوه بر داده‌ها، شرایط مرزی لازم برای یافتن میدان چیست؟

ϕ_1 و ϕ_2 دو جواب این معادله‌اند.

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi_1&=-\frac{\rho}{\epsilon}\quad \vec r\in V\\ \nabla^2\phi_2&=-\frac{\rho}{\epsilon}\quad \vec r\in V\end{aligned}\right\}\xrightarrow[\text{مرزی؟}]{\text{شرط}}\phi_2-\phi_1=0\ \text{یا}\ \phi_2-\phi_1=\text{ثابت}$$

$$\vec E_2-\vec E_1=0$$

اگر ϕ_1 و ϕ_2 دو جوابی باشند که در معادله صدق کنند، شرایط مرزی کافی برای اینکه مطمئن شویم این دو با هم برابر یا هم‌ارز هستند چیست؟

$\varphi\equiv\phi_2-\phi_1$

$\rightarrow \nabla^2\varphi=0\quad \vec r\in V$، معادله لاپلاس

$$\nabla\varphi=0 \iff (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)=0 \iff \int_V \underbrace{(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)}_{\text{نامنفی}}\,dV=0$$

$\vec r\in V$ یک بردار صفر است اگر و تنها اگر طول آن صفر باشد.

دنبال شرطی هستیم که نتیجه دهد: $\int_V(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\,dV=0$

$$\int_V(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\,dV=\int_V\left[\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)-\varphi\nabla^2\varphi\right]dV=\int_V\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)\,dV$$

$$=\oint_{\partial V}\varphi(\hat n\cdot\nabla\varphi)\,dS$$

$\int_V f\,dV=0$ ، $f\geq 0$ و f پیوسته $\Longrightarrow f=0$ — لازم نیست $\int_V f\,dV$ برای هر V صفر باشد.

ما گفتیم که اگر حاصل یک انتگرال صفر شود، لزوماً انتگرالده صفر نیست، اما اگر انتگرالده علامت معین داشته باشد و حاصل انتگرال صفر شد آنگاه انتگرالده صفر است.

شرایط مرزی که ما دنبالشون هستیم، شرایطی هستند که با در نظر گرفتن آنها و در نظر گرفتن معادله پواسون که در $\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ صدق می‌کنند، بتوان ϕ را به صورت یکتا تعیین کرد.

Subject: ....

Year ...... Month ...... Date ......

$$\oint_{\partial V} \varphi(\hat{n}\cdot\nabla\varphi)\,ds = 0 \Longleftarrow \varphi(\hat{n}\cdot\nabla\varphi) = 0 \quad \vec{r}\in\partial V$$

$\vec{r}\in\partial V$ $\boxed{\varphi(\hat{n}\cdot\nabla\varphi) = 0}$ یک شرط کافی برای اینکه $\nabla\varphi = 0$ اینه که

یعنی: $\partial V = S_D \cup S_N$

$\varphi = 0,\ \vec{r}\in S_D \qquad \hat{n}\cdot\nabla\varphi = 0,\ \vec{r}\in S_N$

$\vec{r}\in S_D \quad \phi_2 - \phi_1 = 0$

$\vec{r}\in S_N \quad \hat{n}\cdot\nabla\phi_2 - \hat{n}\cdot\nabla\phi_1 = 0$

شرایط مرزی مخلوط

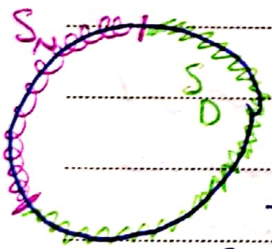
$$\left.\begin{aligned} &\phi = f \quad \vec{r}\in S_D\\ &\hat{n}\cdot\nabla\phi = g \quad \vec{r}\in S_N\\ &\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{r}\in V\end{aligned}\right\}$$ با شروط

$\vec{E} = -\nabla\phi$ جواب برابر یکتا می‌شود.

مسئله برای خود ϕ هم جواب یکتا می‌دهد اما

$\nabla(\phi_2 - \phi_1) = 0 \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 =$ ثابت

اگر $\phi_2 - \phi_1 = 0,\ \vec{r}\in S_D \Rightarrow \phi_2 - \phi_1 = 0 \Rightarrow$ مسئله برای ϕ هم جواب یکتا دارد.



S_N: جایی از مرز که لازمه $\hat{n}\cdot\nabla\phi$ رو مشخص کنیم

S_D: جایی از مرز که لازمه ϕ رو بدونیم.

~~حالت خاص~~

حالتهای خاص شرایط مرزی:

- مسئله دیریکله

$S_N = \phi$ (تهی) $\quad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{r}\in V$

$\phi = f,\ \vec{r}\in\partial V$

$S_D = \partial V$

- مسئله نویمان

$S_D = \phi$ (تهی) $\quad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},\ \vec{r}\in V \quad \hat{n}\cdot\nabla\phi = g,\ \vec{r}\in\partial V$

$$\oint_{\partial V} g\,ds = \oint_{\partial V}(\hat{n}\cdot\nabla\phi)\,ds = \oint_{\partial V}(\nabla\phi)\cdot d\vec{s} = \int_V (\nabla^2\phi)\,dV = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\,dV$$

aKo Note Book

برای داشتن ϕ ها باید ناصحیح را در مرز ... را تک تک ... نا صحیح حدس بگیریم $\hat{n}\cdot\nabla\phi$ را در تک تک نقاط کشش برابر نیستم

ρ دلبخواه نیست. باید $\vec{E}$ طوری باشد که $\oint \sigma\, ds = -\frac{1}{\epsilon}\int_{V} \rho\, dV$ در غیر اینصورت مسئله جواب ندارد.

اگر ρ و این شرط‌ها صدق کنند، φ با حداکثر یک ثابت جمعی به دست می‌آید.

اگر S_D هر جایی که سه بعدی است، یک بعدی باشد. مثلاً V: یک کره، مرز یک کره

S_D را یک خم

اگر یک خم به پتانسیل محدود وصل شود، اثری بر مسئله ندارد.

برای حل مسئله می‌شود پتانسیل را حذف کرد و به جای آن باری که بر سیم نشسته را گذاشت

$\overline{\quad} V \Longleftrightarrow \overline{\quad} \lambda$ (λ احتمالاً تابع مکان است)

λ صفر: λ باید صفر باشد

اگر یک سیم (خط) به پتانسیل محدود وصل شود، چگالی بارش صفر می‌شود. پس بر میدان اثری ندارد.

یعنی اضافه کردن یک سیم با پتانسیل محدود تغییری در مسئله ندارد.

$E \sim \frac{2k\lambda}{\rho} \Longrightarrow \phi = \infty$

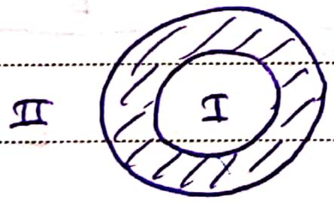
if $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \phi = \infty$

if $\phi \neq \infty \Longrightarrow \lambda = 0$

اثر بیرون بر درون رسانا

سوال: ~~...~~ بیرون احتمالاً بار هست.

ادعا: در ناحیه I اثر بار در ناحیه بیرون ظاهر نمی‌شود. چرا؟



برای ناحیه I:

$\phi = \overset{C}{\text{ثابت}} \qquad \vec{r} \in \partial V_I$

$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{r} \in V_I$

تنها اثر ممکن از بیرون احتمالاً C است. یعنی احتمالاً مقدار پتانسیل از بیرون تاثیر می‌گیرد

$\varphi = 0 \, , \quad \vec{r} \in \partial V_I$

$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \vec{r} \in V_I$

$\phi = \varphi + C \longrightarrow -\nabla\phi = -\nabla\varphi$ میدان درون به بیرون ربطی ندارد.

با مشخص شدن میدان درون نمی‌توان هیچ اطلاعاتی درباره‌ی بار بیرون به دست آورد.

ثابت کنید که اگر سطح رسانا بار الکتریکی نداشت میدان آن صفر می‌شد.

اگر میدان بیرون چگالی بار را عوض کنیم؟

$\rho = 0 \quad \vec{r} \in V_I$

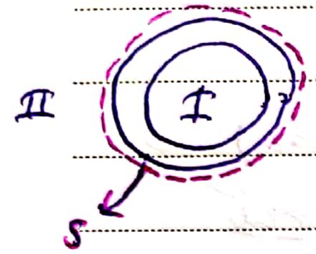
$\phi = c, \ \vec{r} \in \partial V_1 \longrightarrow \phi = c$ یک جواب $\xrightarrow{\text{یکتایی}}$ $\phi = c$ تنها جواب است.

$\nabla^2 \phi = 0, \ \vec{r} \in V_1$

پس میدان درون صفر است. پس هرگاه بار جدید را در I بریزیم، پتانسیل بیرون را عوض نمی‌کند. بعضی بیرون بیشتر چگالی بار هم شدت را عوض کند.

اثر درون بر بیرون رسانا

در ناحیه II:



$\phi = c, \ \vec{r} \in S$

$\phi = 0, \ \vec{r} \to \infty$

اگر $\rho = 0 \quad \vec{r} \in V_{II}$

اگر $c = 0 \Longrightarrow \phi = 0$

مسئله کمکی:

$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \vec{r} \in V_2 \qquad \varphi = 1, \ \vec{r} \in S \qquad \varphi = 0, \ \vec{r} \to \infty$

جواب (به خاطر یکتایی): $\phi = c\varphi$

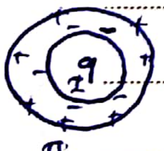
$\vec{E} = -c\nabla\varphi \qquad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -c\oint_S (\nabla\varphi) \cdot d\vec{s}$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = -c\oint (\nabla\varphi) \cdot d\vec{s} \longrightarrow c = -\frac{q}{\epsilon_0 \oint_S (\nabla\varphi) \cdot d\vec{s}}$$

q: بار روی رسانا و درون حفره هر کدام درون S است.

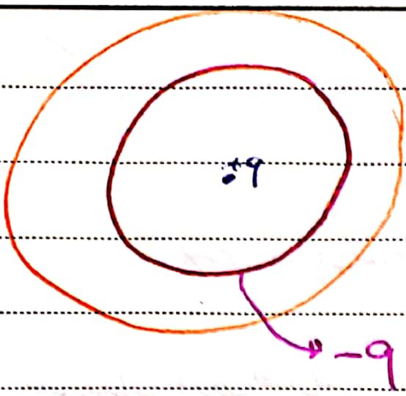
$$\phi = -\frac{q}{\epsilon_0} \frac{\varphi}{\oint_S (\nabla\varphi) \cdot d\vec{s}}$$

دقیقاً نزدیک به رسانا است.



II: برای سطح خارجی کره: q معلوم ⇐ چگالی بار هم معلوم ⇐ میدان درون I یکتاست ⇐ چگالی سطحی بر سطح درونی رسانا به طور یکتا معلوم می‌شود. (به صفحه قبل مربوط نیست)

بار کل سطح خارجی ثابت بود (I عوض نشود) میدان در رسانا صفر است. پس q و چگالی سطحی بیرونی عوض نشده پس میدان حاصل از q و چگالی سطحی درونی بیرون ناحیه I صفر است.



لایه کروی، بار کل Q دارد.

−q در سطح درونی است

Q+q در سطح بیرونی است و یکنواخت است

بیرون: $\vec{E} = \frac{k(Q+q)}{r^2}\hat{r}$

مسئله‌ی بیرون: $\phi = V,\ r = R \rightarrow$ شعاع کره‌ی بیرونی

$\phi = 0,\ r \to \infty$

حدس (با استدلال تقارن): $\phi = V\frac{R}{r}$

یکتایی جواب هم همین است.

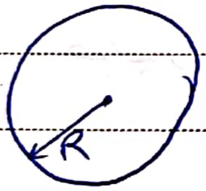
$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

$\oint\limits_{r=A} d\vec{S}\cdot\vec{E} = Q_{in} = B = 4\pi A^2 E(A) \rightarrow E(r) = \frac{B}{4\pi r^2}$

پتانسیل یک جسم با چگالی بار λ پیوسته دارد اگر پتانسیل بی‌نهایت نباشد

* پتانسیل پیوسته است اگر چگالی بار هم بی‌نهایت نباشد

مسائل پیوستگی پتانسیل



$\phi(r=R) = V$

$\phi(r\to\infty) = 0$

حدس (با تقارن): ϕ تابع فقط r

$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$

$\oint\limits_{r=A} \vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_{in} = B = 4\pi A^2 E(A) \rightarrow E(r) = \frac{B}{4\pi r^2}$

قانون گاوس

α

$\phi(r) = \frac{B}{4\pi r}$

یکتایی: هر که جواب یکتاست، اینکه آیا به مسئله جواب اصلاً وجود دارد؟

Subject: ....

Year .... Month .... Date ....

پتانسیل و مشتق عمودی پتانسیل اگر ناسازگار باشند آنگاه جواب ندارد.

$$\oint (\hat{n}\cdot\nabla\phi)\, dS = -\frac{1}{\epsilon}\int \rho\, dV$$

ako

IranPhO.ir