روابط فازی

دکتر محمد باقر منهاج
دانشکده مهندسی برق
دانشگاه امیرکبیر

زمستان 1391

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

بخش اول: سر فصل مطالب

- مفاهیم اولیه و پایه‌ای
- عملیات روی روابط فازی
- ترکیب روابط فازی
- معادلات رابطه‌ای فازی
- استنتاج تقریبی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

مفاهیم اولیه و پایه‌ای

رابطه‌ی فازی

روابط کریسپ

گرافهای فازی

رابطه‌ی فازی

- اصل کلی: *هر چیزی یا هر موضوعی تا درجه‌ای به چیزی یا موضوعی دیگر مرتبط و یا نامرتبط می‌باشد.*
- در روابط کریسپ، ارتباط دو عنصر، یا وجود دارد یا ندارد. (رابطه والدین و فرزندان)
- روابط فازی، تعمیمی بر روابط کریسپ می باشند.(فاصله بین شهرها)
- درجه ارتباط دو عنصر به یکدیگر تدریجي است (بین صفر و يك) وبه کمک آن مي توان درجه انتساب دو چيز يا دو عنصر را نسبت به همديگر فرمول بندي نمود.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

روابط کریسپ

دامنه و برد
بسط و تصویر استوانه‌ای
رابطه‌ی فازی روی
مجموعه‌های فازی

روابط کریسپ

فرض: مجموعه‌های U ، V . هر زیر مجموعه از ضرب دکارتی U ، V را یک «رابطه» از U به V گویند.

فرض: $U = \{1, 2, 3, 4\}$ $V = \{4, 5, 6\}$

ضرب دکارتی U و V در برابر است با:

$$U \times V = \{(1,4),(1,5),\ldots,(4,5),(4,6)\}$$

هر عنصر از U را به عنصری از V که کوچکتر از آن است متصل می کند.

$$R = \{(1,4),\mathbf{K},(1,6),\mathbf{K}(4,6)\}$$

$$R \subset U \times V$$

روابط کریسپ

- **نمایش جدولی**: مولفه‌های i و j از جدول برابر 1 است اگر و فقط اگر (u_i, v_j) در R موجود باشد، در غیر این [illegible] د.

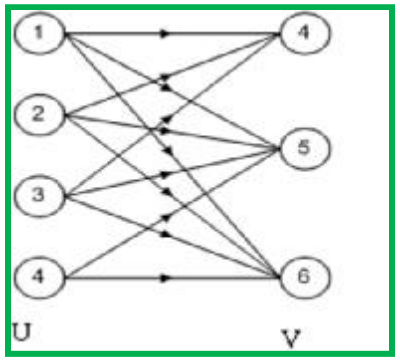
u \ v	4	5	6
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	0	1	1

- **نمایش ماتریسی**: $R(i,j)=1$ اگر و فقط اگر (u_i, v_j) در R باشد. در غیر این صورت صفر خواهد شد.

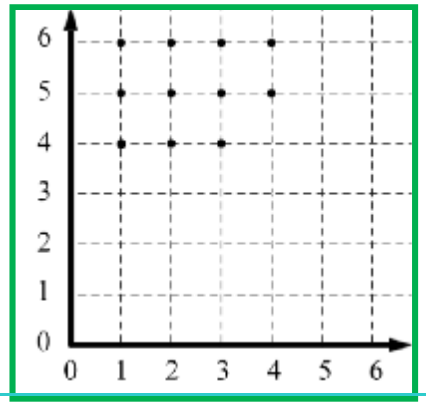
$$R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

روابط کریسپ

q نمایش گراف:



q منحنی نمایش:



روابط کریسپ

q **رابطه باینری** : می‌توان رابطه R را با یک مجموعه از عناصر دوتایی نمایش داد که تابع ویژگی آن به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$R(u,v)=1 \quad if \quad (u,v)\in R$$
$$R(u,v)=0 \quad o.w.$$

$$R: U\times V \to \{0,1\}$$

این رابطه دو عنصر از دو مجموعه V و U را به هم مرتبط می‌کند و اگر $U=V$ باشد، آنگاه میگوییم رابطه R در $U\times U$ تعریف شده است نه

در فرض $U_i \quad i=1,\dots,n$

$$R: U_1\times U_2\times\dots\times U_n = \mathop{X}_{i=1}^{n} U_i \to \{0,1\}$$

$$R(u_1,\dots,u_n)=$$

$$R(\underline{u})=\begin{cases}1 & \text{if } (u_1,\dots,u_n)\in R, \quad u_i\in U_i, \forall i=1,\dots,n\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

q **رابطه کریسپ روی** مجموعه $\mathop{X}_{i=1}^{n} U_i$

روابط کریسپ

- **روابط فازی**: تعمیمی بر رابطه کریسپ با تعریف زیر می‌باشد:

$$R : \mathop{X}_{i=1}^{n} U_i \to [0,1]$$

$$R(u_1,\ldots,u_n) = a \quad , \quad u_i \in U_i \, , \, i = 1,\ldots,n \, , \quad a \in [0,1]$$

- رابطه فازی یک مجموعه فازی تعریف شده روی $U = \mathop{X}_{i=1}^{n} U_i$ است که به هر $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$ n تایی a از U مقدار را به عنوان درجه عضویت آن به رابطه فازی تخصیص می‌دهد.
- a شدت ارتباطی که بین u_i ها $\underline{u}$ در وجود دارد را اندازه‌گیری میکند.
- رابطه فازی را رابطه بانیری گویند، اگر $n = 2$ باشد.

روابط کریسپ

q مثال: رابطه تقریباً ($\approx$) برابر را مدل نمائید.

$U_1 = U_2 = R$

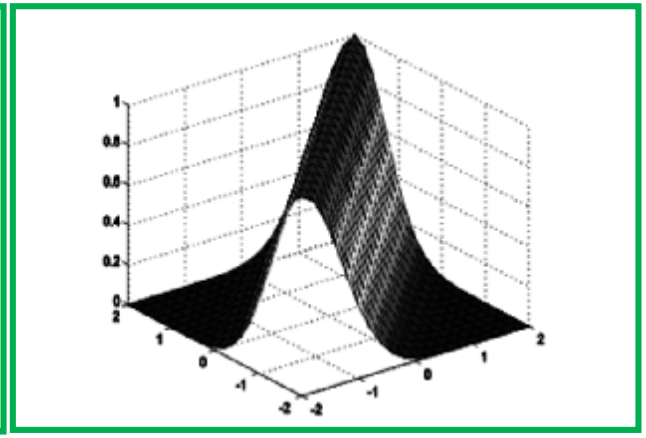
این مسئله را می‌توان توسط یک رابطه فازی با دو مجموعه به شکل زیر نمایش داد:

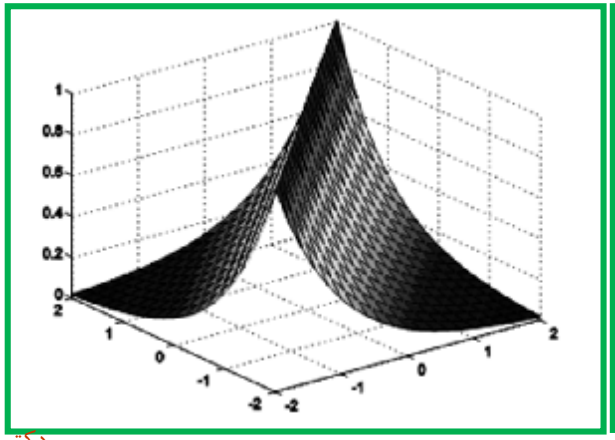
$u_1 \approx u_2 \ , \ u_1 \in U_1 \ , u_2 \in U_2$

منحنی نمایش دو رابطه فازی :

$R(u_1,u_2) = e^{-|u_1-u_2|}$

$R(u_1,u_2) = e^{-(u_1-u_2)^2}$



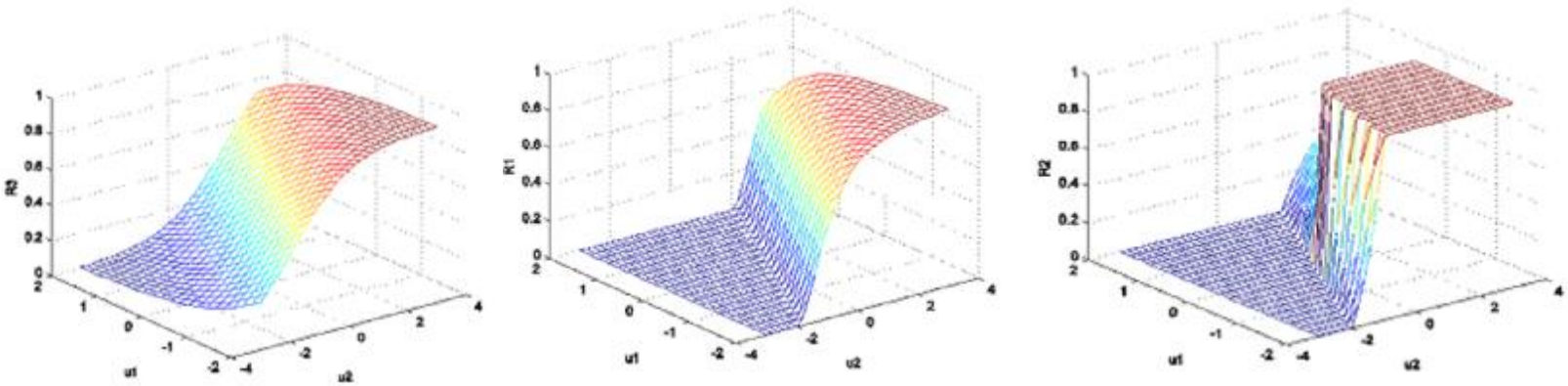


ü هر قدر که u_1 به u_2 نزدیکتر می‌شود میزان عضویت (u_1,u_2) ($\approx$) به رابطه بیشتر می‌شود.

روابط کریسپ

- **مثال**: رابطه «خیلی بزرگتر» را مدل نمائید.
- میزان عضویت (u_1,u_2) به رابطه $u_1 >> u_2$ بیشتر می گردد وقتی که از بیشتر فاصله می گیرد یا بزرگتر میشود.

$$R_1(u_1,u_2)=\begin{cases}0 & u_1>u_2\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(u_2-u_1)^2}}, & u_1<u_2\end{cases}\qquad R_2(u_1,u_2)=\begin{cases}0 & u_2<u_1\\ 1\wedge\dfrac{u_2-u_1}{u_2+e}, & u_2\ge u_1\end{cases},0<e<<1\qquad R_3(u_1,u_2)=\frac{1}{1+e^{(u_1-u_2)}}$$

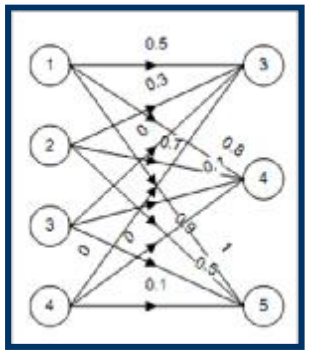


روابط کریسپ

- **مثال**: فرض می‌کنیم $U_1=\{1,2,3,4\}$ $U_2=\{3,4,5\}$ مجموعه های جهانی متناهی باشند. مایلیم رابطه R را مدل کنیم.

- نمایش ماتریسی (زیرا تعداد عناصر محدود)

u \ v	3	4	5
1	0.5	0.8	1
2	0.3	0.7	0.9
3	0	0.1	0.5
4	0	0	0.1



وقتی که محمل رابطه فازی R محدود و گسسته باشد، آنگاه رابطه فازی R را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت و نمایش گراف را داریم:

$$R:U_1\times U_2\to[0,1] \qquad R=\left[r_{ij}\right]_{n_1\times n_2},\ n_i=|U_i|,\quad i=1,2$$

روابط کریسپ

دامنه و برد: دامنه یک رابطه باینری کریسپ مجموعه u_1 تمامی عناصر مثل است که حداقل یک u_2 وجود دارد، طوری که $(u_1,u_2)\in R$

$$DOM(R)=\{u_1 | u_1\in U_1, \exists u_2\in U_2, (u_1,u_2)\in R\}$$

برد یک رابطه باینری کریسپ مجموعه ایست از $u_2\in U_2$ تمامی عناصر u_1 طوری که U_1 وجود $(u_1,u_2)\in R$ داشته باشد

$$\mathrm{RNG}(R)=\{u_2 | u_2\in U_2, \exists u_1\in U_1, (u_1,u_2)\in R\}$$

در با

برد و دامنه مجموعه فازی:

$$(\mathrm{DOM}(R))(u_1)=\bigvee_{u_2\in U_2} R(u_1,u_2) \qquad (\mathrm{RNG}(R))(u_2)=\bigvee_{u_1\in U_1} R(u_1,u_2)$$

رابطه فازی نرمال R :

$$\mathrm{hgt}(R)=\bigvee_{\substack{u_1\in U_1\\ u_2\in U_2}} R(u_1,u_2)=1$$

روابط کریسپ

مثال : دامنه، برد و ارتفاع رابطه فازی را به دست آورید.

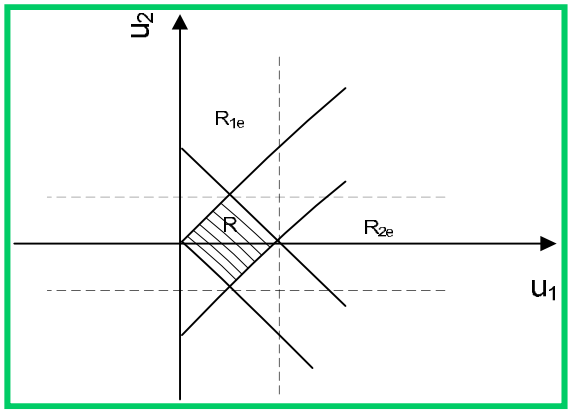
$$\mathrm{DOM}(R)=\frac{0.5\vee 0.8\vee 1}{1}+\frac{0.3\vee 0.7\vee 0.9}{2}+\frac{0\vee 0.1\vee 0.5}{3}$$
$$+\frac{0\vee 0\vee 0.1}{4}=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.1}{4}$$

$$\mathrm{RNG}(R)=\frac{0.5\vee 0.3\vee 0\vee 0}{3}+\frac{0.8\vee 0.7\vee 0.1\vee 0}{4}$$
$$+\frac{1\vee 0.9\vee 0.5\vee 0.1}{5}=\frac{0.5}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$$

$$hgt(R)=\bigvee_{\substack{u_1\in\{1,2,3,4\}\\ u_2\in\{3,4,5\}}} R(u_1,u_2)=1\Rightarrow$$ نرمال

بسط و تصویر استوانه‌ای

$$R=\left\{\begin{array}{r}(u_1,u_2)\in\square^2,\ u_1+u_2-2<0,\ u_2-u_1<0,\\ u_2+u_1>0\ ,\ u_2-u_1+2>0\end{array}\right\}$$



تصویر R روی R^2 :

$$\mathrm{Proj}(R;U_2)=R_2=[-1,1]$$

$$\mathrm{Proj}(R;U_1)=R_1=[0,2]$$

بسط استوانه ای ***R2*** و ***R1*** به R^2 :

$$R_{1e}=[0,2]\times R\subset R^2$$

$$R_{2e}=R\times[-1,1]\subseteq R^2$$

بسط و تصویر استوانه‌ای

تصویر رابطه فازی:

فرض : R رابطه‌ای روی $U_1 \times U_2$ است آنگاه **تصویر** R روی U_1 (U_2)

یک مجموعه فازی روی U_2 (U_1) :

$$R_1(u_1) = \bigvee_{u_2 \in U_2} R(u_1, u_2)$$

$$R_2(u_2) = \bigvee_{u_1 \in U_1} R(u_1, u_2)$$

برای $u_1 \approx u_2$:

$$R(u_1, u_2) = u_1 \approx u_2 = e^{-|u_1 - u_2|} \qquad R_1(u_1) = \bigvee_{u_2 \in U_2} e^{-|u_1 - u_2|} = \sup_{u_2 \in U_2} e^{-|u_1 - u_2|} = 1 \qquad R_2(u_2) = \bigvee_{u_1 \in U_1} e^{-|u_1 - u_2|} = 1$$

بسط استوانه ای را می‌توان به راحتی برای $n > 2$ هم تعمیم داد.

بسط و تصویر استوانه‌ای

بسط استوانه ای رابطه فازی

بسط استوانه ای: یک رابطه فازی تعریف شده روی یک زیر فضا را به کل فضا بسط می‌دهد.

بسط استوانه ای یک رابطه فازی روی زیر فضای U_1 ، به رابطه فازی دیگری برای $U_1 \times U_2$ کل فضای بسط می‌یابد.

اگر R_1 یک رابطه فازی روی U_1 باشد، بسط استوانه ای R_1 روی $U_1 \times U_2$ یک رابطه فازی است در $U_1 \times U_2$ با تابع عضویت:

$$R_{1e}(u_1,u_2) = R_1(u_1)$$

بسط استوانه ای R_2

$$R_{2e}(u_1,u_2) = R_2(u_2)$$

اگر R رابطه‌ای فازی روی $\mathop{X}_{i=1}^{n} U_i$ باشد و R_i تصویر R روی U_i باشد، آنگاه:

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} R_i \supset R \qquad \mathop{\times}_{i=1}^{n} R_i = \mathop{\cap}_{i=1}^{n} R_{ie}$$

بسط و تصویر استوانه‌ای

رابطه‌ی فازی روی مجموعه‌های فازی:

فرض: $A \in \Im(U)$ ، $B \in \Im(V)$ R رابطه :

$$R : U \times V \to [0,1]$$

$$R(u,v) \le A(u) \qquad R(u,v) \le B(v)$$

یک رابطه فازی روی A.B است، اگر برای هر $(u,v) \in U \times V$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گراف های فازی

عملیات روی روابط فازی

روابط باینری فازی

خاص

ترکیب روابط فازی

گرافهای فازی

گراف فازی :

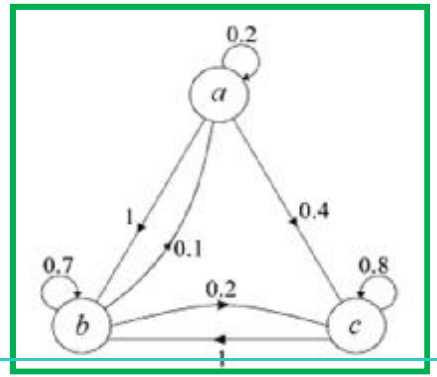
$$N = \{n_1, \ldots, n_m\}$$

$$G : N \times N \to [0,1] \qquad G(n_1, n_j) = a_{ij}\ , \quad a_{ij} \in [0,1]$$

مثال: با فرض $N = \{a, b, c\}$

$$G = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

گراف فاز :



گرافهای فازی

مسیر:

شدت مسیر: $G(n_i, n_j) = a_{ij} > 0$

طول مسیر: طول مسیر برای حداقل دو گره = تعداد گره‌های مسیر $\bigwedge_{i=0}^{n-1} a_{i,i+1}$

مفروض

کمان: هر زوج از گره‌های (n_i, n_{i+1}) با $G(n_i, n_{i+1}) > 0$

سیکل: یک مسیر $n_0, \ldots, n_m$ با حداقل سه گره مجزا را سیکل گراف $n_m = n_0$ گویند، اگر

طول - عضویت:

$$\mathbf{l}(n_0, \ldots, n_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G(n_i, n_{i+1})}$$

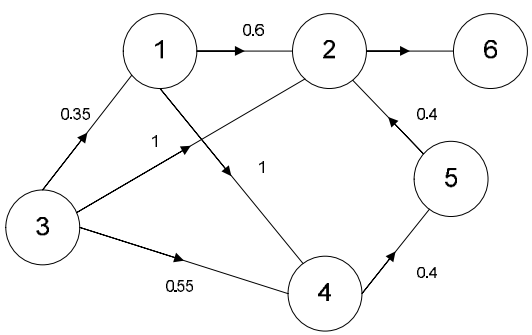
گرافهای فازی

فاصله-عضویت: کوچک‌ترین طول- عضویت هر مسیر از n_j به n_i است. n_j, n_i

گره‌های متصل: دو گره که از طریق یک مسیر به هم متصلند را گره‌های متصل گویند.

جنگل: جنگل یک گراف فازیست که در آن هیچ سیکلی وجود ندارد.

مثال:



طول- عضویت مسیر 2، 5، 4، 3، 1 برابر است با:

$$\mathbf{l}(1,3,4,5,2)=\frac{1}{0.35}+\frac{1}{0.55}+\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.4}$$

فاصله- عضویت گره‌های 4 و 1 برابر است با:

$$\mathbf{l}(1,3,4)=\frac{1}{0.35}+\frac{1}{0.55}$$

$$\mathbf{l}(1,4)=\frac{1}{1}=1$$

عملیات روی روابط فازی

با فرض: $R \in \Im(U \times V)$ $\quad S \in \Im(U \times V)$

اجتماع $R \cup S \Leftrightarrow (R \cup S)(u,v) = R(u,v) \vee S(u,v)$

اشتراک $R \cap S \Leftrightarrow (R \cap S)(u,v) = R(u,v) \wedge S(u,v)$

مکمل $\bar{R} \Leftrightarrow \bar{R}(u,v) = 1 - R(u,v)$

شمولیت $\forall u \in U,\ v \in V \qquad R \subset S \Leftrightarrow R(u,v) \le S(u,v)$

روابط باینری فازی خاص

رابطه فازی وارون

$$R^C(u_2,u_1)=R(u_1,u_2)$$

رابطه فازی واحد

$$I(u_1,u_2)=\begin{cases}1, & u_1=u_2\\ 0, & u_1\neq u_2\end{cases}$$

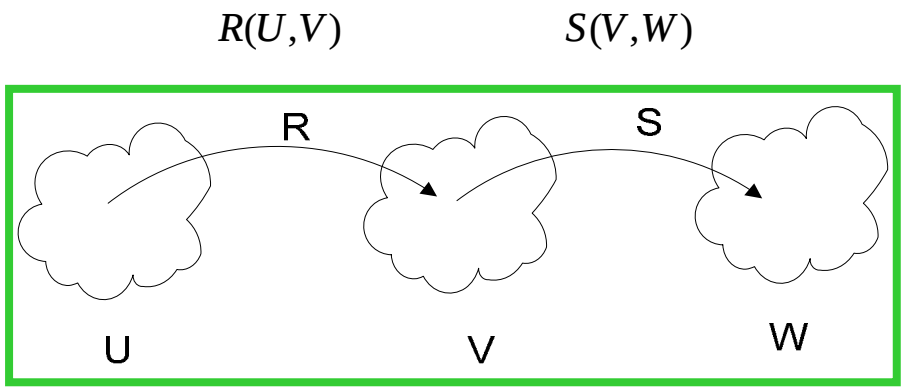
رابطه فازی صفر

$$O(u_1,u_2)=0\ ,\forall u_1,u_2$$

رابطه فازی جهانی

$$U(u_1,u_2)=1\ ,\forall u_1,u_2$$

ترکیب روابط فازی



$$R \circ S$$

$$(u,v) \in R \ \& \ (v,w) \in S$$

$$R \circ S(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \hat{*} S(v,w)$$

ترکیب رابطه‌های فازی: $R \circ S(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \hat{*} S(v,w)$

ترکیب روابط فازی

چند شاخص مهم:

ترکیب مینیمم - ماکزیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \wedge S(v,w), \ \forall (u,w) \in U \times W$$

ترکیب ضرب - ماکزیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \cdot S(v,w), \ \forall (u,w) \in U \times W$$

رکیب میانگین - ماکزیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \frac{1}{2} \bigvee_{v \in V} [R(u,v) + S(v,w)], \ \forall (u,w) \in U \times W$$

ترکیب ماکزیمم - مینیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \bigwedge_{v \in V} R(u,v) \vee S(v,u), \ \forall (u,w) \in U \times W$$

روابط فازی

دکتر محمد باقر منهاج
دانشکده مهندسی برق
دانشگاه امیرکبیر

زمستان 1391

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

بخش اول: سر فصل مطالب

- مفاهیم اولیه و پایه‌ای
- عملیات روی روابط فازی
- ترکیب روابط فازی
- معادلات رابطه‌ای فازی
- استنتاج تقریبی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

مفاهیم اولیه و پایه‌ای

رابطه‌ی فازی

روابط کریسپ

گرافهای فازی

رابطه‌ی فازی

- اصل کلی: *هر چیزی یا هر موضوعی تا درجه‌ای به چیزی یا موضوعی دیگر مرتبط و یا نامرتبط می‌باشد.*
- در روابط کریسپ، ارتباط دو عنصر، یا وجود دارد یا ندارد. (رابطه والدین و فرزندان)
- روابط فازی، تعمیمی بر روابط کریسپ می باشند.(فاصله بین شهرها)
- درجه ارتباط دو عنصر به یکدیگر تدریجي است (بین صفر و يك) وبه کمک آن مي توان درجه انتساب دو چيز يا دو عنصر را نسبت به همديگر فرمول بندي نمود.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

روابط کریسپ

دامنه و برد
بسط و تصویر استوانه‌ای
رابطه‌ی فازی روی
مجموعه‌های فازی

روابط کریسپ

فرض: مجموعه‌های U ، V . هر زیر مجموعه از ضرب دکارتی U ، V را یک «رابطه» از U به V گویند.

فرض: $U = \{1, 2, 3, 4\}$ $V = \{4, 5, 6\}$

ضرب دکارتی U و V در برابر است با:

$$U \times V = \{(1,4),(1,5),\ldots,(4,5),(4,6)\}$$

هر عنصر از U را به عنصری از V که کوچکتر از آن است متصل می کند.

$$R = \{(1,4),\mathbf{K},(1,6),\mathbf{K}(4,6)\}$$

$$R \subset U \times V$$

روابط کریسپ

- **نمایش جدولی**: مولفه‌های i و j از جدول برابر 1 است اگر و فقط اگر (u_i, v_j) در R موجود باشد، در غیر این [illegible] د.

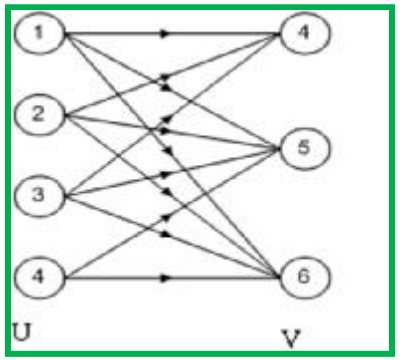
u \ v	4	5	6
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	0	1	1

- **نمایش ماتریسی**: $R(i,j)=1$ اگر و فقط اگر (u_i, v_j) در R باشد. در غیر این صورت صفر خواهد شد.

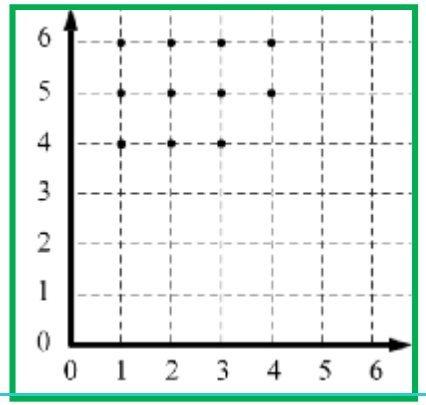
$$R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

روابط کریسپ

q نمایش گراف:



q منحنی نمایش:



روابط کریسپ

q **رابطه باینری** : می‌توان رابطه R را با یک مجموعه از عناصر دوتایی نمایش داد که تابع ویژگی آن به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$R(u,v)=1 \quad if \quad (u,v)\in R$$
$$R(u,v)=0 \quad o.w.$$

$$R: U\times V \to \{0,1\}$$

این رابطه دو عنصر از دو مجموعه V و U را به هم مرتبط می‌کند و اگر $U=V$ باشد، آنگاه میگوییم رابطه R در $U\times U$ تعریف شده است نه

در فرض $U_i \quad i=1,\dots,n$

$$R: U_1\times U_2\times\dots\times U_n = \mathop{X}_{i=1}^{n} U_i \to \{0,1\}$$

$$R(u_1,\dots,u_n)=$$

$$R(\underline{u})=\begin{cases}1 & \text{if } (u_1,\dots,u_n)\in R, \quad u_i\in U_i, \forall i=1,\dots,n\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

q **رابطه کریسپ روی** مجموعه $\mathop{X}_{i=1}^{n} U_i$

روابط کریسپ

- **روابط فازی**: تعمیمی بر رابطه کریسپ با تعریف زیر می‌باشد:

$$R : \mathop{X}_{i=1}^{n} U_i \to [0,1]$$

$$R(u_1,\ldots,u_n) = a \quad , \quad u_i \in U_i \, , \, i = 1,\ldots,n \, , \quad a \in [0,1]$$

- رابطه فازی یک مجموعه فازی تعریف شده روی $U = \mathop{X}_{i=1}^{n} U_i$ است که به هر $\underline{u} = (u_1,\ldots,u_n)$ n تایی a از U مقدار را به عنوان درجه عضویت آن به رابطه فازی تخصیص می‌دهد.
- a شدت ارتباطی که بین u_i ها $\underline{u}$ در وجود دارد را اندازه‌گیری میکند.
- رابطه فازی را رابطه بانیری گویند، اگر $n = 2$ باشد.

روابط کریسپ

q مثال: رابطه تقریباً ($\approx$) برابر را مدل نمائید.

$U_1 = U_2 = R$

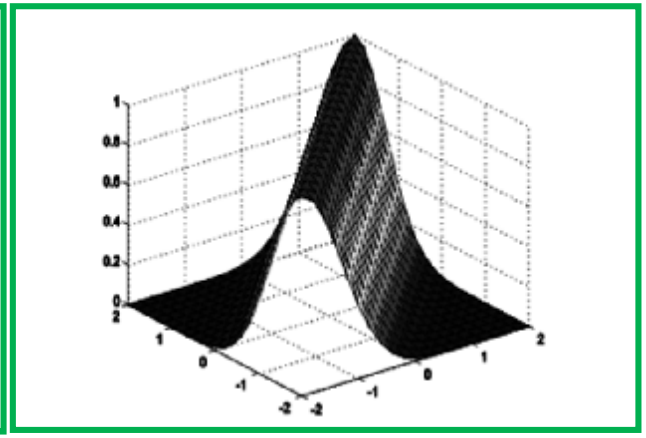
این مسئله را می‌توان توسط یک رابطه فازی با دو مجموعه به شکل زیر نمایش داد:

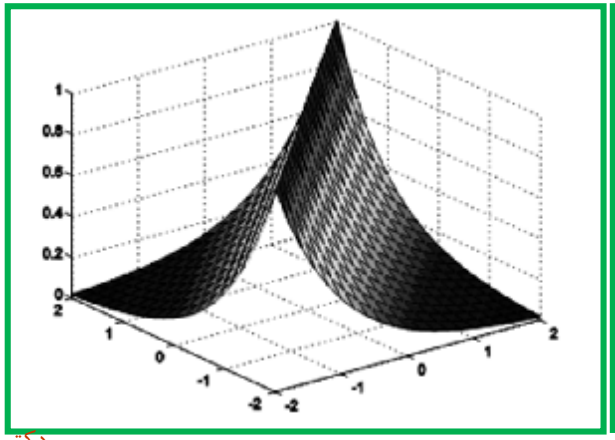
$u_1 \approx u_2 \ , \ u_1 \in U_1 \ , u_2 \in U_2$

منحنی نمایش دو رابطه فازی :

$R(u_1,u_2) = e^{-|u_1-u_2|}$

$R(u_1,u_2) = e^{-(u_1-u_2)^2}$



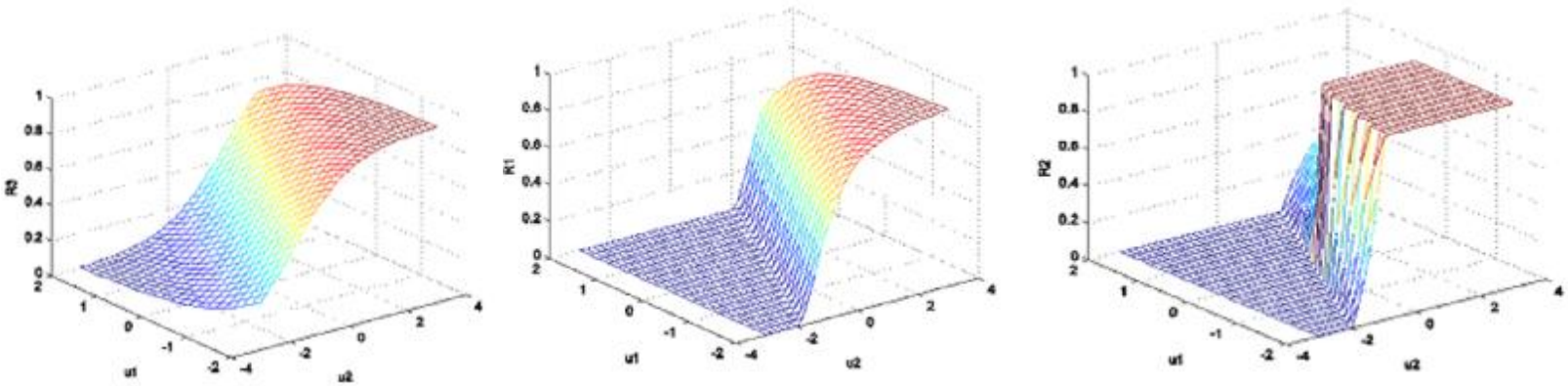


ü هر قدر که u_1 به u_2 نزدیکتر می‌شود میزان عضویت (u_1,u_2) ($\approx$) به رابطه بیشتر می‌شود.

روابط کریسپ

- **مثال**: رابطه «خیلی بزرگتر» را مدل نمائید.
- میزان عضویت (u_1,u_2) به رابطه $u_1 >> u_2$ بیشتر می گردد وقتی که از بیشتر فاصله می گیرد یا بزرگتر میشود.

$$R_1(u_1,u_2)=\begin{cases}0 & u_1>u_2\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(u_2-u_1)^2}}, & u_1<u_2\end{cases}\qquad R_2(u_1,u_2)=\begin{cases}0 & u_2<u_1\\ 1\wedge\dfrac{u_2-u_1}{u_2+e}, & u_2\ge u_1\end{cases},0<e<<1\qquad R_3(u_1,u_2)=\frac{1}{1+e^{(u_1-u_2)}}$$

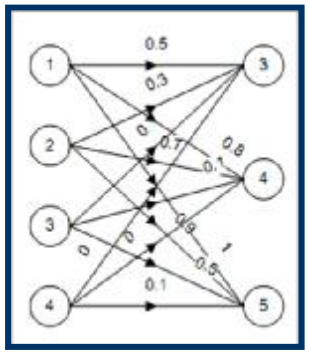


روابط کریسپ

- **مثال**: فرض می‌کنیم $U_1=\{1,2,3,4\}$ $U_2=\{3,4,5\}$ مجموعه های جهانی متناهی باشند. مایلیم رابطه R را مدل کنیم.

- نمایش ماتریسی (زیرا تعداد عناصر محدود)

u \ v	3	4	5
1	0.5	0.8	1
2	0.3	0.7	0.9
3	0	0.1	0.5
4	0	0	0.1



وقتی که محمل رابطه فازی R محدود و گسسته باشد، آنگاه رابطه فازی R را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت و نمایش گراف را داریم:

$$R:U_1\times U_2\to[0,1] \qquad R=\left[r_{ij}\right]_{n_1\times n_2},\ n_i=|U_i|,\quad i=1,2$$

روابط کریسپ

دامنه و برد: دامنه یک رابطه باینری کریسپ مجموعه u_1 تمامی عناصر مثل است که حداقل یک u_2 وجود دارد، طوری که $(u_1,u_2)\in R$

$$DOM(R)=\{u_1 | u_1\in U_1, \exists u_2\in U_2, (u_1,u_2)\in R\}$$

برد یک رابطه باینری کریسپ مجموعه ایست از $u_2\in U_2$ تمامی عناصر u_1 طوری که U_1 وجود $(u_1,u_2)\in R$ داشته باشد

$$\mathrm{RNG}(R)=\{u_2 | u_2\in U_2, \exists u_1\in U_1, (u_1,u_2)\in R\}$$

در با

برد و دامنه مجموعه فازی:

$$(\mathrm{DOM}(R))(u_1)=\bigvee_{u_2\in U_2} R(u_1,u_2) \qquad (\mathrm{RNG}(R))(u_2)=\bigvee_{u_1\in U_1} R(u_1,u_2)$$

رابطه فازی نرمال R :

$$\mathrm{hgt}(R)=\bigvee_{\substack{u_1\in U_1\\ u_2\in U_2}} R(u_1,u_2)=1$$

روابط کریسپ

مثال : دامنه، برد و ارتفاع رابطه فازی را به دست آورید.

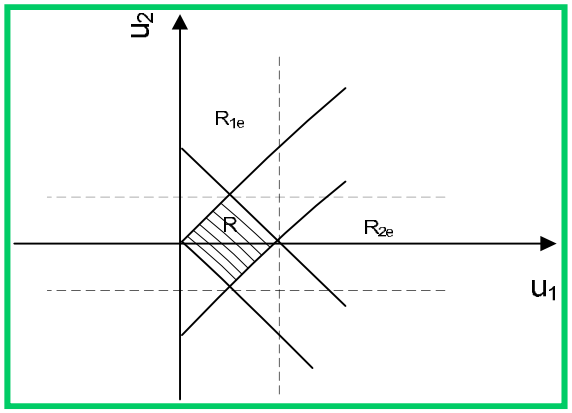
$$\mathrm{DOM}(R)=\frac{0.5\vee 0.8\vee 1}{1}+\frac{0.3\vee 0.7\vee 0.9}{2}+\frac{0\vee 0.1\vee 0.5}{3}$$
$$+\frac{0\vee 0\vee 0.1}{4}=\frac{1}{1}+\frac{0.9}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.1}{4}$$

$$\mathrm{RNG}(R)=\frac{0.5\vee 0.3\vee 0\vee 0}{3}+\frac{0.8\vee 0.7\vee 0.1\vee 0}{4}$$
$$+\frac{1\vee 0.9\vee 0.5\vee 0.1}{5}=\frac{0.5}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}$$

$$hgt(R)=\bigvee_{\substack{u_1\in\{1,2,3,4\}\\ u_2\in\{3,4,5\}}} R(u_1,u_2)=1\Rightarrow$$ نرمال

بسط و تصویر استوانه‌ای

$$R=\left\{\begin{array}{r}(u_1,u_2)\in\square^2,\ u_1+u_2-2<0,\ u_2-u_1<0,\\ u_2+u_1>0\ ,\ u_2-u_1+2>0\end{array}\right\}$$



تصویر R روی R^2 :

$$\mathrm{Proj}(R;U_2)=R_2=[-1,1]$$

$$\mathrm{Proj}(R;U_1)=R_1=[0,2]$$

بسط استوانه ای ***R2*** و ***R1*** به R^2 :

$$R_{1e}=[0,2]\times R\subset R^2$$

$$R_{2e}=R\times[-1,1]\subseteq R^2$$

بسط و تصویر استوانه‌ای

تصویر رابطه فازی:

فرض : R رابطه‌ای روی $U_1 \times U_2$ است آنگاه **تصویر** R روی U_1 (U_2)

یک مجموعه فازی روی U_2 (U_1) :

$$R_1(u_1) = \bigvee_{u_2 \in U_2} R(u_1, u_2)$$

$$R_2(u_2) = \bigvee_{u_1 \in U_1} R(u_1, u_2)$$

برای $u_1 \approx u_2$:

$$R(u_1, u_2) = u_1 \approx u_2 = e^{-|u_1 - u_2|} \qquad R_1(u_1) = \bigvee_{u_2 \in U_2} e^{-|u_1 - u_2|} = \sup_{u_2 \in U_2} e^{-|u_1 - u_2|} = 1 \qquad R_2(u_2) = \bigvee_{u_1 \in U_1} e^{-|u_1 - u_2|} = 1$$

بسط استوانه ای را می‌توان به راحتی برای $n > 2$ هم تعمیم داد.

بسط و تصویر استوانه‌ای

بسط استوانه ای رابطه فازی

بسط استوانه ای: یک رابطه فازی تعریف شده روی یک زیر فضا را به کل فضا بسط می‌دهد.

بسط استوانه ای یک رابطه فازی روی زیر فضای U_1 ، به رابطه فازی دیگری برای $U_1 \times U_2$ کل فضای بسط می‌یابد.

اگر R_1 یک رابطه فازی روی U_1 باشد، بسط استوانه ای R_1 روی $U_1 \times U_2$ یک رابطه فازی است در $U_1 \times U_2$ با تابع عضویت:

$$R_{1e}(u_1,u_2) = R_1(u_1)$$

بسط استوانه ای R_2

$$R_{2e}(u_1,u_2) = R_2(u_2)$$

اگر R رابطه‌ای فازی روی $\mathop{X}_{i=1}^{n} U_i$ باشد و R_i تصویر R روی U_i باشد، آنگاه:

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n} R_i \supset R \qquad \mathop{\times}_{i=1}^{n} R_i = \mathop{\cap}_{i=1}^{n} R_{ie}$$

بسط و تصویر استوانه‌ای

رابطه‌ی فازی روی مجموعه‌های فازی:

فرض: $A \in \Im(U)$ ، $B \in \Im(V)$ R رابطه :

$$R : U \times V \to [0,1]$$

$$R(u,v) \le A(u) \qquad R(u,v) \le B(v)$$

یک رابطه فازی روی A.B است، اگر برای هر $(u,v) \in U \times V$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

گراف های فازی

عملیات روی روابط فازی

روابط باینری فازی

خاص

ترکیب روابط فازی

گرافهای فازی

گراف فازی :

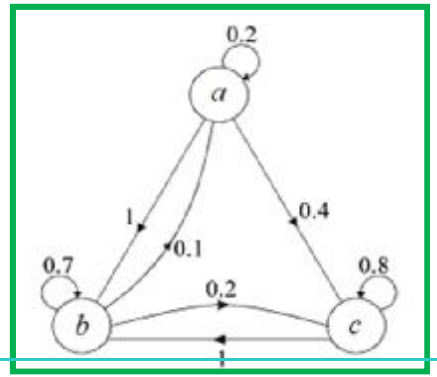
$$N = \{n_1, \ldots, n_m\}$$

$$G : N \times N \to [0,1] \qquad G(n_1, n_j) = a_{ij}\ , \quad a_{ij} \in [0,1]$$

مثال: با فرض $N = \{a, b, c\}$

$$G = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

گراف فاز :



گرافهای فازی

مسیر:

شدت مسیر: $G(n_i, n_j) = a_{ij} > 0$

طول مسیر: طول مسیر برای حداقل دو گره = تعداد گره‌های مسیر $\bigwedge_{i=0}^{n-1} a_{i,i+1}$

مفروض

کمان: هر زوج از گره‌های (n_i, n_{i+1}) با $G(n_i, n_{i+1}) > 0$

سیکل: یک مسیر $n_0, \ldots, n_m$ با حداقل سه گره مجزا را سیکل گراف $n_m = n_0$ گویند، اگر

طول - عضویت:

$$\mathbf{l}(n_0, \ldots, n_m) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{G(n_i, n_{i+1})}$$

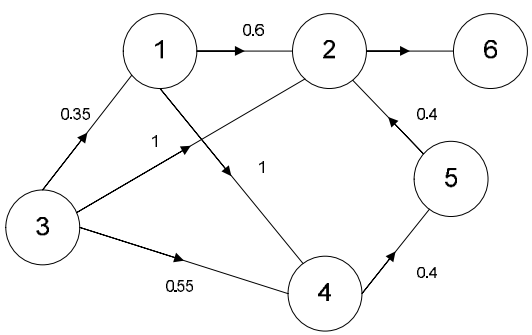
گرافهای فازی

فاصله-عضویت: کوچک‌ترین طول- عضویت هر مسیر از n_j به n_i است. n_j, n_i

گره‌های متصل: دو گره که از طریق یک مسیر به هم متصلند را گره‌های متصل گویند.

جنگل: جنگل یک گراف فازیست که در آن هیچ سیکلی وجود ندارد.

مثال:



طول- عضویت مسیر 2، 5، 4، 3، 1 برابر است با:

$$\mathbf{l}(1,3,4,5,2)=\frac{1}{0.35}+\frac{1}{0.55}+\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.4}$$

فاصله- عضویت گره‌های 4 و 1 برابر است با:

$$\mathbf{l}(1,3,4)=\frac{1}{0.35}+\frac{1}{0.55}$$

$$\mathbf{l}(1,4)=\frac{1}{1}=1$$

عملیات روی روابط فازی

با فرض: $R \in \Im(U \times V)$ $\quad S \in \Im(U \times V)$

اجتماع $R \cup S \Leftrightarrow (R \cup S)(u,v) = R(u,v) \vee S(u,v)$

اشتراک $R \cap S \Leftrightarrow (R \cap S)(u,v) = R(u,v) \wedge S(u,v)$

مکمل $\bar{R} \Leftrightarrow \bar{R}(u,v) = 1 - R(u,v)$

شمولیت $\forall u \in U,\ v \in V \qquad R \subset S \Leftrightarrow R(u,v) \le S(u,v)$

روابط باینری فازی خاص

رابطه فازی وارون

$$R^C(u_2,u_1)=R(u_1,u_2)$$

رابطه فازی واحد

$$I(u_1,u_2)=\begin{cases}1, & u_1=u_2\\ 0, & u_1\neq u_2\end{cases}$$

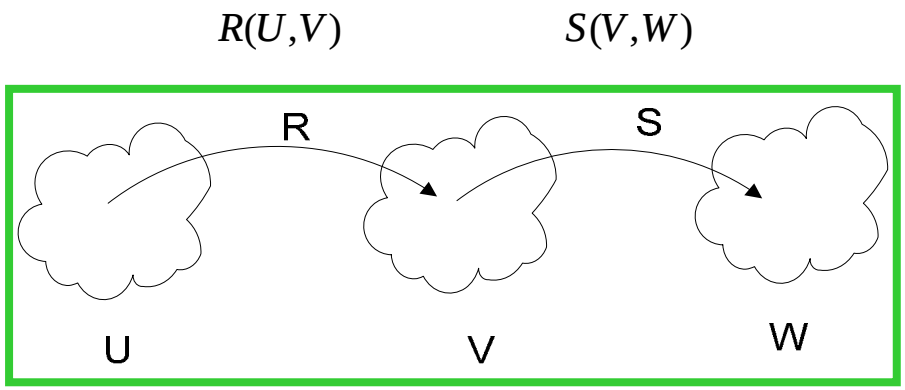
رابطه فازی صفر

$$O(u_1,u_2)=0\ ,\forall u_1,u_2$$

رابطه فازی جهانی

$$U(u_1,u_2)=1\ ,\forall u_1,u_2$$

ترکیب روابط فازی



$$R \circ S$$

$$(u,v) \in R \ \& \ (v,w) \in S$$

$$R \circ S(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \hat{*} S(v,w)$$

ترکیب رابطه‌های فازی: $R \circ S(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \hat{*} S(v,w)$

ترکیب روابط فازی

چند شاخص مهم:

ترکیب مینیمم - ماکزیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \wedge S(v,w), \ \forall (u,w) \in U \times W$$

ترکیب ضرب - ماکزیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \bigvee_{v \in V} R(u,v) \cdot S(v,w), \ \forall (u,w) \in U \times W$$

رکیب میانگین - ماکزیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \frac{1}{2} \bigvee_{v \in V} [R(u,v) + S(v,w)], \ \forall (u,w) \in U \times W$$

ترکیب ماکزیمم - مینیمم

$$(R \circ S)(u,w) = \bigwedge_{v \in V} R(u,v) \vee S(v,u), \ \forall (u,w) \in U \times W$$