اعداد فازي

دکتر محمد باقر منهاج

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سر فصل مطالب

- مقدمه
- ويژگيهاي يك عدد فازي
- عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش
- عمليات و خواص اعداد فازي
- نمايش اعداد فازي در مجموعه اعداد صحيح در R
- الگوريتم عمومي جهت محاسبه دقيق عمليات جبري فازي
- اعداد فازي كانوني
- معادلات فازي

ويژگيهاي يك عدد فازي

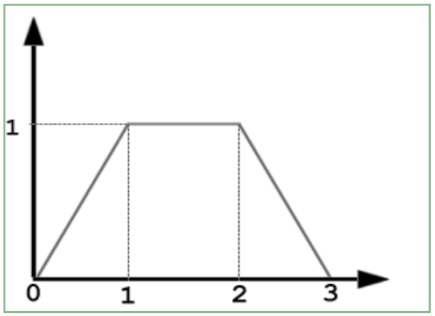
- يك عدد فازي يك مجموعه فازيست مثل A روي R:

بايستي حداقل از سه خاصيت زير برخوردار باشد:

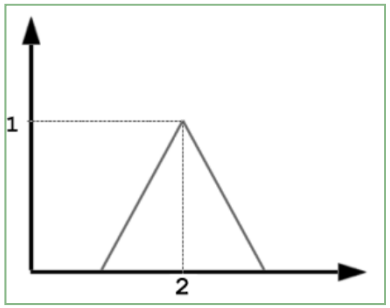
$$A : R \rightarrow [0,1]$$

- A نرمال باشد $hgt(A) = 1$
- براي هر $\alpha \in (0,1]$ بايستي A_α يك بازه بسته باشد.
- محمل A، $Supp\ (A)$ ، بايستي محدود باشد.

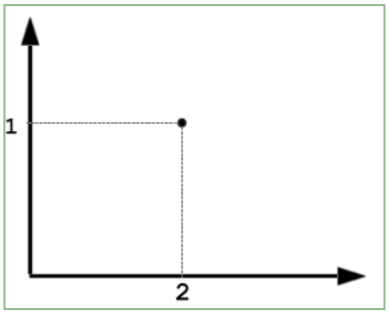
ويژگيهاي يك عدد فازي



بازه فازی $[0,2]$



عدد فازی حدوداً 2

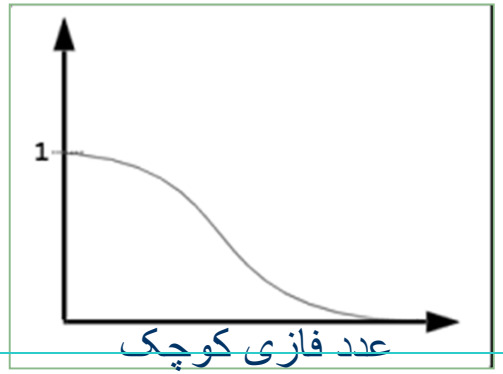


عدد کریسپ 2

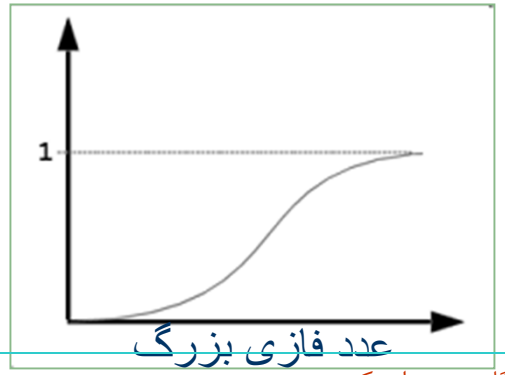
توجيه: براي فرموله كردن «اعداد حقيقي نزديك به 2 » انتظار داريم كه اين مجموعه فازي براي عدد 2 كاملاً برقرار باشد و اين بدان معناست كه $A(2)$ بايستي برابر 1 باشد ، شرط 1 اين خاصيت را تضمين مي‌كند. محدود بودن تكيه گاه مجموعه فازي ، و تمامي برشهاي آلفا براي $\alpha \in (0,1]$ كه بايستي بازه‌هاي بسته باشند ، به ما اين فرصت را مي‌دهند كه عمليات جبري با معنايي را روي اعداد فازي با زبان عمليات جبري استاندارد كه روي بازه‌هاي بسته انجام مي‌شوند ، تعريف كنيم.

ويژگيهاي يك عدد فازي

- نكته: نمي توان گفت كه چون برشهاي- هر عدد فازي يك بازه بسته است ، اعداد فازي مجموعه فازي محدب خواهند بود. اعداد فازي مي توانند غير محدب باشند.
- نكته: مجموعه‌هاي فازي زير ، چون شرايط سه گانه را برقرار مي‌سازند ، اعداد فازي را بيان ميكنند.



عدد فازی کوچک



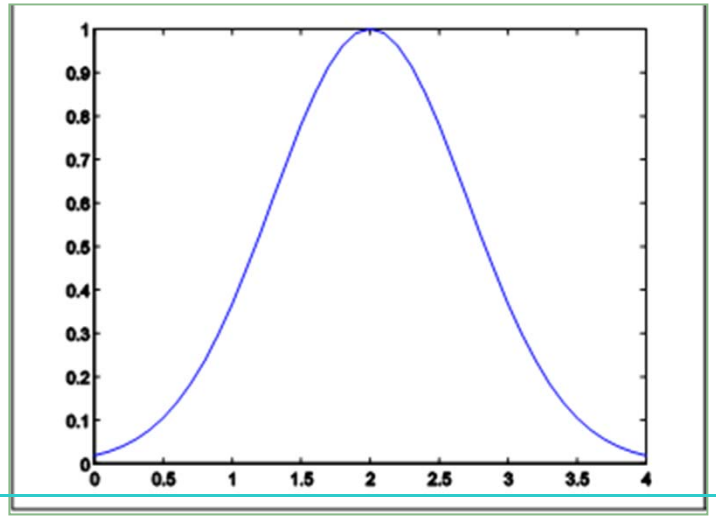
عدد فازی بزرگ

ويژگيهاي يك عدد فازي

- تعريف اعداد فازي مثبت (منفي):

يك عدد فازي A را مثبت (منفي) نامند ، اگر براي هر x $A(x) = 0$ $x < 0$ $(x > 0)$

- مثال: عدد فازي حدوداً $A = 2$

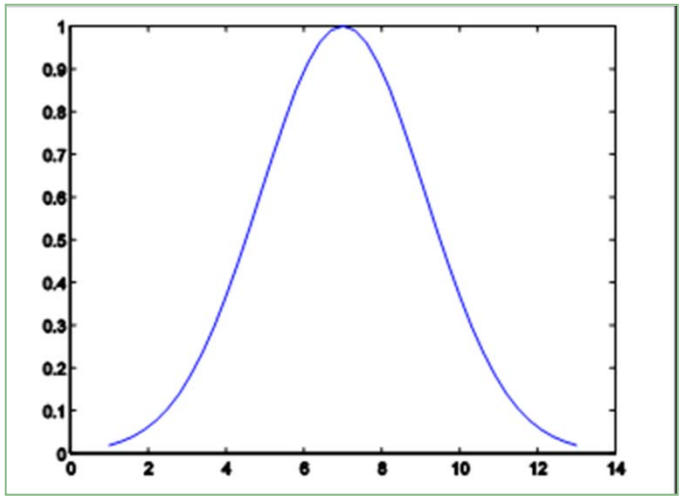


ويژگيهاي يك عدد فازي

- تابع $g(x) = 3x+1$ مفروض است. مقدار $g(A)$ برابر مي‌شود با:

$$A = \begin{cases} 2 & \alpha = 1 \\ [1.5\ ,\ 2.5] & \alpha = 0.7 \\ [1,3] & \alpha = 0.3 \end{cases}$$

$$g(A) = \begin{cases} 7 & \alpha = 1 \\ [4,10] & \alpha = 0.3 \\ [5.5,8.5] & \alpha = 0.7 \end{cases} \quad \underline{\underline{\Delta}}\ 7$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

اعداد فازي

عمليات جبري روي اعداد فازي
با استفاده از اصل گسترش

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

- عمليات جبري اعداد حقيقي به عمليات جبري اعداد فازي قابل گسترش مي‌باشند. فرض كنيد توابع عضويت اعداد فازي پيوسته باشند. يك عدد فازي را مي‌توان به عنوان يك بسط بازه‌ها در نظر گرفت. به جاي بررسي بازه‌ها در يك سطح خاص ، اعداد فازي بازه‌ها در سطوح مختلف مورد بررسي قرار مي‌گيرند كه هر يك از اين سطوح با يكي از برشهاي- عدد فازي متناظر است.

α

يك بازه بسته از عدد فازي A در سطح :

$$A_\alpha = \left[a_1^\alpha, a_2^\alpha\right]$$

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

- اکنون مي‌خواهيم بحث محاسبات بازه‌اي را که براي بازه‌هاي بسته تعريف شده بود ، بر اعداد فازي گسترش دهيم. فرض کنيم " * " يکي از عمليات چهارگانه را تبيين مي‌کند (جمع ، ضرب ، تفريق و تقسيم).

$$A, B \in \Im(R) \Rightarrow A * B \in \Im(R)$$

اصل گسترش:

$$C = A * B \Leftrightarrow C(z) = \bigvee_{\substack{x,y \\ z = x*y}} A(x) * B(y)$$

- با استفاده از برشهاي- α ، تعريف مي‌کنيم:

$$C_\alpha \overset{\Delta}{=} A_\alpha * B_\alpha \; \forall \; \alpha \in (0,1]$$

$$C = A * B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha . C_\alpha$$

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

چون براي هر $\alpha \in (0,1]$ C_a يك بازه بسته است و A,B اعداد فازيند ، C يك عدد فازي خواهد بود:

$$A_\alpha + B_\alpha = \left[a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha\right]$$

$$A_\alpha - B_\alpha = \left[a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha\right]$$

$$A_\alpha . B_\alpha = \left[a_1^\alpha . b_1^\alpha, a_2^\alpha . b_2^\alpha\right]:$$

براي $A, B \in \Im(\square^+)$

$$A_\alpha | B_\alpha = \left[\frac{a_1^\alpha}{b_2^\alpha}, \frac{a_2^\alpha}{b_1^\alpha}\right], \quad b_2^\alpha > 0$$

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

و ضرب يك عدد فازي روي $A \in \Im(R),\ R$ و $K \in R^{+}$ يك عدد اسكالر

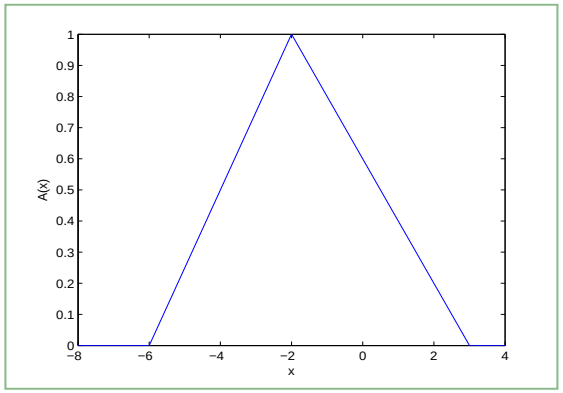
$$(k.A)_{\alpha} = K.A_{\alpha} = \left[ka_1^{\alpha}, ka_2^{\alpha}\right]$$

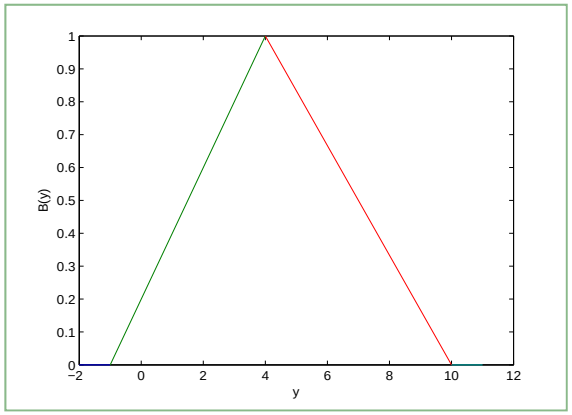
$$\left(k^{-1}.A\right)(x) = A(kx)\ ,\ \forall x \in R$$

مثال: مجموعه‌هاي فازي $A, B \in \Im(\square)$ را در نظر بگيريد:

$$A(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le -6 \\ \dfrac{x+6}{4}\ , & -6 < x \le -2 \\ \dfrac{3-x}{5}\ , & -2 \le x \le 3 \\ 0\ , & x \ge 3 \end{cases} \qquad B(x) = \begin{cases} 0\ , & x \le -1 \\ \dfrac{x+1}{5}\ , & -1 < x \le 4 \\ \dfrac{10-x}{6}\ , & 4 < x \le 10 \\ 0\ , & x > 10 \end{cases}$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش





برای به دست آوردن: $C = A + B$

نخست برشهاي α ، A_α , B_α را بدست مي آوريم .

براي به دست آوردن a_1^α , a_2^α لازم است به ترتيب X را برابر حدهاي بالا وپائين قرار دهيم:

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

$$\frac{a_1^\alpha + 6}{4} = \alpha \ , \Rightarrow a_1^\alpha = 4\alpha - 6$$

$$\frac{3 - a_2^\alpha}{5} = \alpha \ \Rightarrow a_2^\alpha = 3 - 5\alpha$$

$$: A_\alpha = \left[a_1^\alpha , a_2^\alpha\right]$$

و همين طور براي B ، $B_\alpha = \left[b_1^\alpha , b_2^\alpha\right]$ خواهيم داشت:

$$\frac{b_1^\alpha + 1}{5} = \alpha \quad , \quad \frac{-b_2^\alpha + 10}{6} = \alpha$$

$$b_1^\alpha = 5\alpha - 1 \ , \quad b_2^\alpha = 10 - 6\alpha$$

براي به دست آوردن $C_\alpha C = A + B$ را به شكل زير محاسبه مي‌كنيم:

$$C_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = [9\alpha - 7, -11\alpha + 13] \square \left[c_1^\alpha , c_2^\alpha\right]$$

محدوده $x \in \square$ را كه در آن برشهاي- C_a n a معتبر است به دست مي‌آوريم:

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

$$x = 9\alpha - 7 \Rightarrow \alpha = \frac{x+7}{9} : \quad c_1^{\alpha}$$

$$x = -11\alpha + 13 \Rightarrow \alpha = \frac{13-x}{11} : c_2^{\alpha}$$

از دو عبارت فوق و اين كه $\alpha \in [0,1]$ به راحتي تابع عضويت C برابر مي‌شود با:

$$C(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -7 \\ \frac{x+7}{9} & , \quad -7 < x < 2 \\ \frac{13-x}{11} & , \quad 2 < x \le 13 \\ 0 & , \quad x > 13 \end{cases}$$

نكته: محدوده X براي $\alpha_i \ge 0$ روي جمع محدوده اي به دست مي‌آيد.

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

برای به دست آوردن $D = A - B$

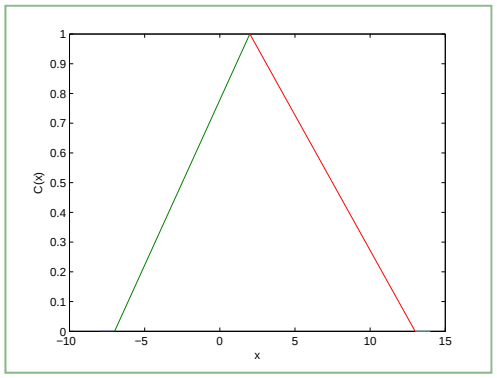
همان طور که در اسلاید های قبلی عمل نمودیم ، خواهیم داشت :

$$D_\alpha = [4\alpha - 6, 3 - 5\alpha] + [6\alpha - 10, 1 - 5\alpha]$$

$$= [10\alpha - 16, 4 - 10\alpha] \square [d_1^\alpha, d_2^\alpha]$$

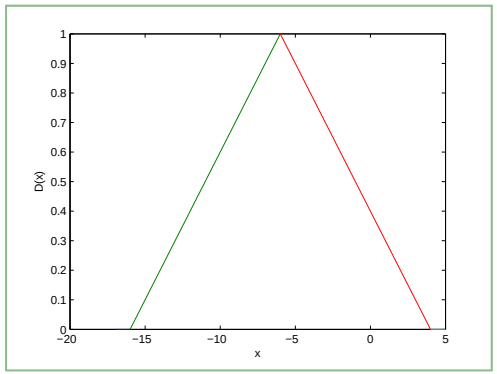
$$x = 10\alpha - 16 \Rightarrow \alpha = \frac{x + 16}{10} \quad : d_1^\alpha$$

$$D(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \le -16 \\ \dfrac{x + 16}{10} \ , & -16 < x < -6 \\ \dfrac{4 - x}{10} \ , & -6 < x \le 4 \\ 0 \ , & x > 4 \end{cases}$$

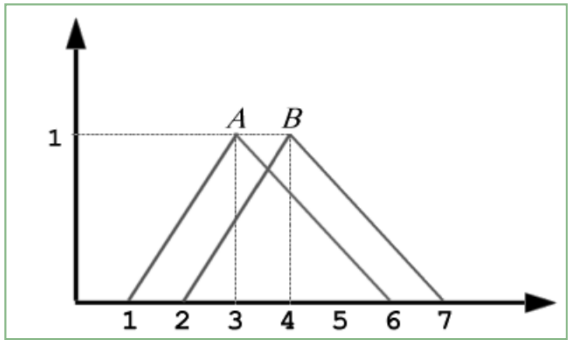


C(x)

D(x)



عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش



مثال: ضرب و تقسيم دو عدد فازي زير رامحاسبه كنيد.

$$A(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 1\\ \dfrac{x-1}{2}\ , & 1<x\le 3\\ \dfrac{6-x}{3}\ , & 3<x\le 6\\ 0\ , & x>6\end{cases}\qquad B(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 2\\ \dfrac{x-2}{2}\ , & 2<x\le 4\\ \dfrac{7-x}{3}\ , & 4<x\le 7\\ 0\ , & x>7\end{cases}$$

ا. برشهاي- از $A\alpha$ رابه دست آوريد:

$$\alpha=\frac{a_1^{\alpha}-1}{2}\Rightarrow a_1^{\alpha}=2\alpha+1$$

$$\alpha=\frac{6-a_2^{\alpha}}{3}\Rightarrow a_2^{\alpha}=-3\alpha+6$$

$$\Rightarrow A_{\alpha}=[2\alpha+1,-3\alpha+6]$$

برشهاي- از $B\alpha$ رابه دست آوريد:

$$B_{\alpha}=[2\alpha+2,7-3\alpha]$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

ب. $C_\alpha = A_\alpha . B_\alpha$ را به دست آورید:

$$C_\alpha = A_\alpha . B_\alpha = [\,(2\alpha+1)\ (2\alpha+2), (-3\alpha+6)\ (7-3\alpha)\,]$$
$$= \left[4\alpha^2+6\alpha+2, 9\alpha^2-39\alpha+42\right]$$

$D_\alpha = A_\alpha / B_\alpha$ را به دست آورید:

$$D_\alpha = A_\alpha / B_\alpha = \left[\frac{2\alpha+1}{7-3\alpha}, \frac{-3\alpha+6}{2\alpha+2}\right] \square \left[d^{\alpha_1}, d^{\alpha_2}\right]$$

Cرا از روي C_α ها به دست می آوریم:

$$4\alpha^2+6\alpha+2 = x \Rightarrow$$
$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4(2-x)}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1+4x}}{4}$$
$$9\alpha^2-39\alpha+42 = x \Rightarrow$$
$$\alpha = \frac{39 \pm \sqrt{39^2-4.9(42-x)}}{2/9} = \frac{39 \pm \sqrt{9+4/9x}}{2/9} = \frac{13 \pm \sqrt{1+4x}}{6}$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

و نهایتاً خواهیم داشت:

$$C(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{-3+\sqrt{1+4x}}{4}, & 2<x\le 12\\ \dfrac{13-\sqrt{1+4x}}{6}, & 12<x\le 42\\ 0, & x>42\end{cases}$$

ج. $D(x)$ را از روي D_α ها ، به دست آورید:

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\le \frac{1}{7}\\ \dfrac{7x-1}{3x+2}, & \frac{1}{7}<x\le \frac{3}{4}\\ \dfrac{-2x+6}{2x+3}, & \frac{3}{4}<x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

از روي d^{α_1} محدوده X در برابر R^+ است با:

$$\frac{2\alpha+1}{7-3\alpha}=x \Rightarrow 2\alpha+1=7x-3\alpha x \Rightarrow$$

$$\alpha(2+3x)=7x-1 \Rightarrow \alpha=\frac{7x-1}{2+3x}$$

از روي d^{α_2} محدوده X در برابر R^+ است با:

$$\frac{-3\alpha+6}{2\alpha+2}=x \Rightarrow -3\alpha+6=2\alpha x+2x \Rightarrow$$

$$\alpha(-3-2x)=2x-6 \Rightarrow \alpha=\frac{-2x+6}{2x+3}$$

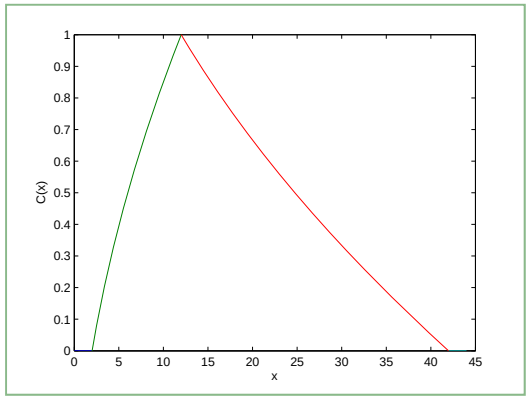
و به وضوح براي $x<\frac{1}{7}$, $x>3$ برابر $D(x)$ صفر مي گردد

. $\alpha=1$ خواهد بود اگر $x=\frac{3}{4}$ گردد و بنابراين:

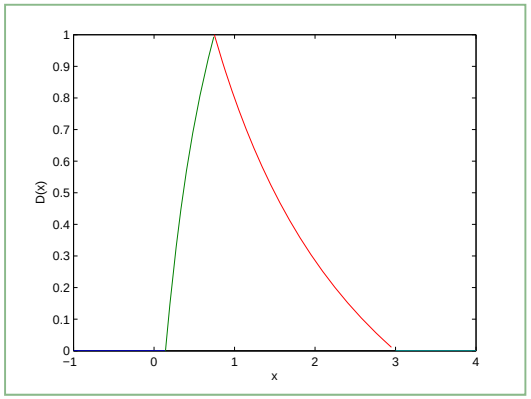
$$D(x)=\frac{6-2x}{2x+3}, \quad \frac{3}{4}<x\le 3,$$

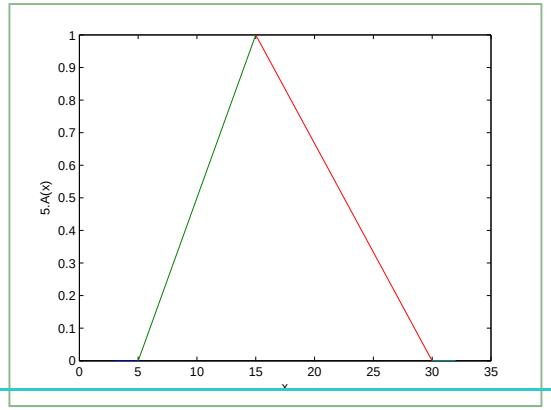
$$D(x)=\frac{7x-1}{3x+2}, \quad \frac{1}{7}\le x\le\frac{3}{4}$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش



C(x) D(x)





ح. پیدا کنید $kA(x)$ براي $k=5$.

$$5.A(x)=A\left(\frac{x}{5}\right)=\begin{cases}0\ , & x\le 5\\ \dfrac{x-5}{10}, & 5<x\le 15\\ \dfrac{30-x}{15}\ , & 15<x\le 30\\ 0 & x>30\end{cases}$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

مسئله:

1.نشان دهید اگر A, B اعداد فازي روي R باشند ، آنگاه A+B و A-B هم اعدادي فازي روي R خواهند بود.

2.اگر $B, A \in \Im(\square^{+})$ ، آنگاه $A.B \in \Im(\square^{+}), A/B \in \Im(\square^{+})$

3.هیچ $\bar{A} = -A$ و A^{-1} موجود نیست ، طوري که: $A + \bar{A} = 0 \;,\; A.A^{-1} = 1$

4. $(A - B) + B \neq A$

$(A/B).B \neq A$

5. اگر $A, B.C \in \Im(\square)$ و آنگاه $A + B = B + A$ ، $A + \bar{A} = \bar{A} + A \neq 0 \;,\; A + 0 = 0 + A$

6.اگر $A, B.C \in \Im(\square)$ و آنگاه $A + (B + C) = (A + B) + C$ ، $A.B = B.A \;,\; (A.B).C = A.(B.C)$

$A.1 = 1.A = A \;,\; A.A^{-1} = A^{-1}.A \neq 1$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

نکته: تفريق و تقسيم نه خاصيت جابجايي و نه خاصيت شرکت پذيري دارند.

مسئله : فرض کنید $A,B,C \in \Im(\square^{+})$ آنگاه $(A+B).C = A.C + B.C$

$$(A+B).C = \left(\left[a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}\right] + \left[b_1^{\alpha}, b_2^{\alpha}\right]\right).\left[c_1^{\alpha}, c_2^{\alpha}\right]$$

$$= \left[a_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} + b_2^{\alpha}\right].\left[c_1^{\alpha}, c_2^{\alpha}\right]$$

$$= \left[a_1^{\alpha}.c_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}c_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}.c_2^{\alpha} + b_2^{\alpha}c_2^{\alpha}\right]$$

$$A.C + B.C = \left[a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}\right].\left[c_1^{\alpha}, c_2^{\alpha}\right] + \left[b_1^{\alpha}, b_2^{\alpha}\right].\left[c_1^{\alpha}, c_2^{\alpha}\right]$$

$$= \left[a_1^{\alpha}.c_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}.c_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}.c_2^{\alpha} + b_2^{\alpha}.c_2^{\alpha}\right]$$

سؤال: چگونه مي‌توان دو عدد فازي A,B را با هم مقايسه نمود ؟

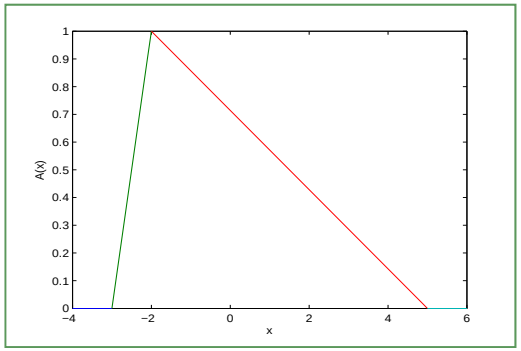
جواب: دو عدد فازي B,A قابل مقايسه‌اند اگر $a_1^{\alpha} \le b_1^{\alpha} \;,\; a_2^{\alpha} \le b_2^{\alpha} \;,\; \forall \alpha \in [0,1]$

آنگاه مي‌توانيم بنويسيم: $A \le B$

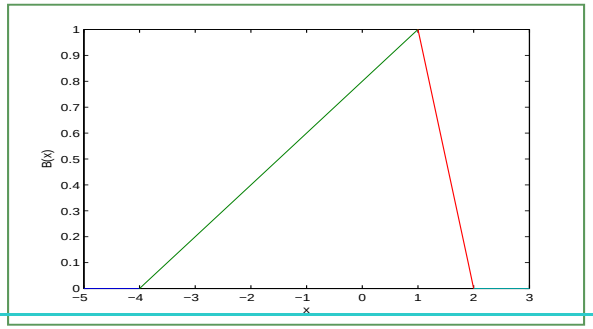
عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

مثال: مینیمم و ماکزیمم فازي دو عدد زیر را پیدا کنید:

$$A(x)=\begin{cases}0\,, & x\le -3\\ x+3\,, & -3<x\le -2\\ \dfrac{5-x}{7}\,, & -2<x\le 5\\ 0\,, & x>5\end{cases}$$



$$B(x)=\begin{cases}0\,, & x\le -4\\ \dfrac{x+4}{5}\,, & -4<x\le 1\\ 2-x\,, & 1<x\le 2\\ 0\,, & x>2\end{cases}$$



عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

به دست مي‌آوريم:

$$A_\alpha = [\alpha - 3, 5 - 7\alpha]$$
$$B_\alpha = [5\alpha - 4, 2 - \alpha]$$
$$A_\alpha \cap B_\alpha = [(\alpha - 3) \wedge (5\alpha - 4), (5 - 7\alpha) \wedge (2 - \alpha)]$$
$$= [c_1^\alpha, c_2^\alpha]$$

براساس معادله فوق ، چهار ترکیب مختلف از برشهاي آلفا موجود خواهند بود.

$$\{[a_1^\alpha, a_2^\alpha], [a_1^\alpha, b_2^\alpha], [b_1^\alpha, a_2^\alpha], [b_1^\alpha, b_2^\alpha]\}$$

جهت تعیین این ترکیبات ، لازم است مقادیر مشخصي α را تعیین کنیم که در آن توابع عضویت همدیگر را قطع مي‌کنند. این مقادیر را مي‌توان از روي حل معادلات از در معادله C_2^α , C_1^α بالا به دست آورد $B(x)$, $A(x)$

$$\alpha - 3 = 5\alpha - 4 \Rightarrow \alpha = 0.25$$
$$-7\alpha + 5 = -\alpha + 2 \Rightarrow \alpha = 0.5$$

عمليات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

$$A_\alpha \wedge B_\alpha = \begin{cases} [5\alpha-4, 2-\alpha], & 0 \le \alpha \le 0.25 \\ [\alpha-3, 2-\alpha], & 0.25 < \alpha \le 0.5 \\ [\alpha-3, 5-7\alpha], & 0.5 < \alpha \le 1 \end{cases}$$

با استفاده از اين برشهاي ، مي‌توانيم تابع عضويت a $A \wedge B$ را به دست آوريم

$$\alpha = 0 \Rightarrow [-4, 2]$$

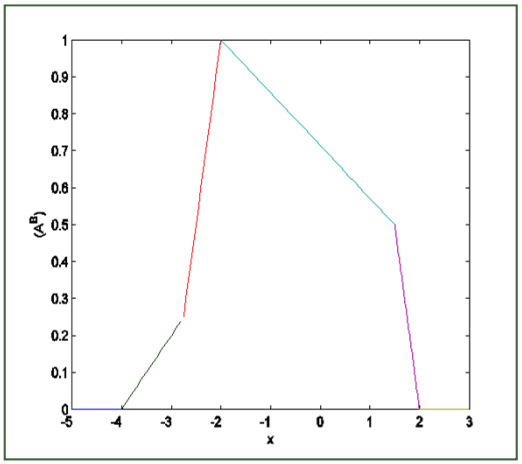
$$\alpha = 0.25 \Rightarrow [-2.75, 1.75]$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow [-2, 2]$$

$$\alpha = 0.5 \Rightarrow [-2.5, 1.5]$$

$$(A \wedge B)(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4 \\ \dfrac{x+4}{5}, & -4 < x \le -2.75 \\ x+3, & -2.75 < x \le -2 \\ \dfrac{5-x}{7}, & -2 < x \le 1.5 \\ 2-x, & 1.5 < x \le 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش



$$(A \wedge B)(x)$$

نکته: اگر A و B اعداد فازي داراي توابع عضويت پيوسته باشند ، آنگاه مجموعه فازي يك عدد فازي $A * B$ پيوسته خواهد بود.

عملیات جبري روي اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

« 2حدوداً» + «7حدوداً » =?

$$=\begin{cases}2 & \alpha=1\\ [1,3] & \alpha=0.3\\ [1.5,2.5] & \alpha=0.7\end{cases}+\begin{cases}7 & \alpha=1\\ [1,9], & \alpha=0.3\\ [5.5,8.5], & \alpha=0.7\end{cases}$$

$$[a,b]+[c,d]=\{\omega\,|\,\omega=u+v\ ,u\in[a,b],v\in[c,d]\}$$
$$=[a+c,b+d]$$

$$=\begin{cases}[5,13], & \alpha=0.3\\ [7,11], & \alpha=0.7\\ 9, & \alpha=1\end{cases}\approx$$ ((9 حدوداً))

توجه: «حدوداً 7 » $\neq$ «حدوداً2 » + («حدوداً2 »- «حدوداً7 »)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

اعداد فازي

عملیات با اعداد فازي با استفاده
از اصل گسترش

عمليات با اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

براي اعداد فازي A,B خواهيم داشت:

$$(A+B)(w)=\bigvee_{\substack{u,v\\ w=u+v}} A(u)\wedge B(v)$$

$$(A-B)(w)=\bigvee_{\substack{u,v\\ w=u-v}} A(u)\wedge B(v)$$

$$(A.B)(w)=\bigvee_{\substack{u,v\\ w=u.v}} A(u)\wedge B(v)$$

$$(A/B)(w)=\bigvee_{\substack{u,v\\ w=u/v}} A(u)\wedge B(v)$$

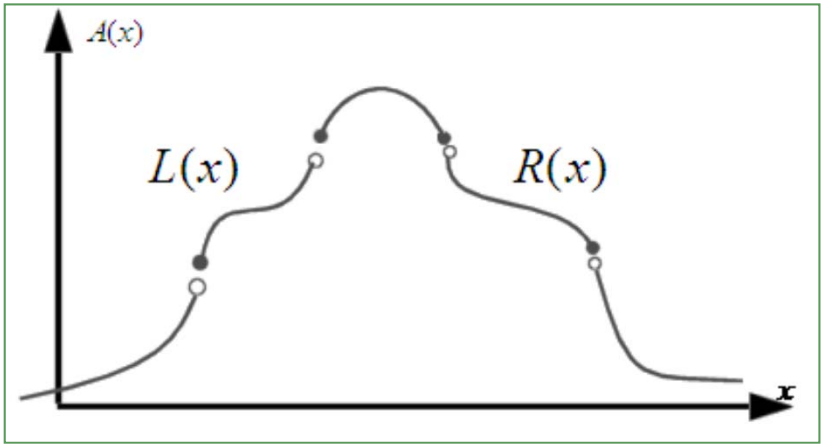
توجه: اپراتور $(\vee)$ عمل سوپريمم (Sup) را انجام مي دهد.

عمليات با اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

مسئله : نشان دهيد كه $A \in \Im(\square)$ يك عدد فازي را تبيين مي‌كند اگر و فقط اگر يك بازه بسته غيرتهي موجود باشد طوري كه:

$$A(x)=0$$

$$A(x)=\begin{cases} 1\ , & x\in[x_1,x_2] \\ L(x)\ , & x\in(-\infty,x_1) \\ R(x)\ , & x\in(x_2,\infty) \end{cases}$$



$$L:(-\infty,x_1)\to[0,1]$$

$$L(x)=0,\ \forall x\in(-\infty,a)$$

$$R:(x_2,\infty)\to[0,1]$$

$$R(x)=0\ ,\quad \forall x\in(b,\infty)$$

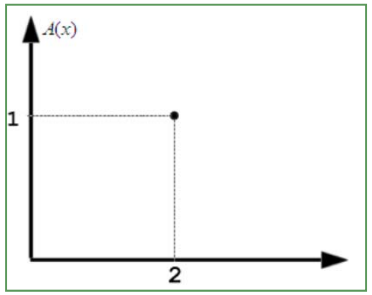
چون A يك عدد فازيست ، A_0 بايستي محدود باشد و اين بدان معناست كه بايستي يك زوج $a,b<\infty$ در R موجود باشد طوري كه براي هر $x\in(-\infty,a)\cup(b,\infty)$.

عملیات با اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

نکته: هر عدد فازي محدب را مي‌توان به فرم زير نوشت

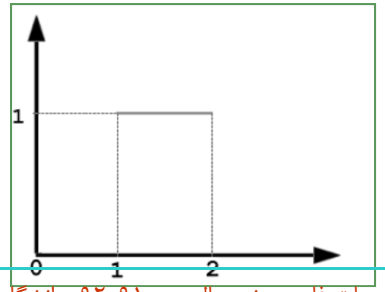
$$A(x)=\begin{cases}1 & x\in[x_1,x_2]\\ L(x)\ , & x\in(-\infty,x_1)\\ R(x)\ , & x\in(x_2,\infty)\end{cases}$$

عدد فازي سينگلتون 2:



$$a=x_1=x_2=b=2\ ,\ \ L(x)=0,\forall x\in(-\infty,2),\ \ R(x)=0\ ,\ \ \forall x\in(2,\infty).$$

بازه كريسپ:



$$a=2=x_1\ ,\ x_2=3=b\ ,L(x)=0\ ,\ \forall x\in(-\infty,2),R(x)=0\ ,\forall x\in(3,\infty)$$

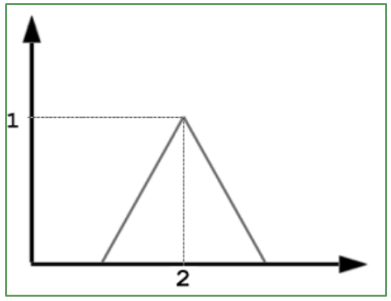
عملیات با اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

عدد فازي حدودا 2 :

$$x_1 = x_2 = 2\ ,\ a = 1,\quad b = 3$$

$$L(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in (-\infty, 1) \\ (x-2)+1\ , & x \in [1,2] \end{cases}$$

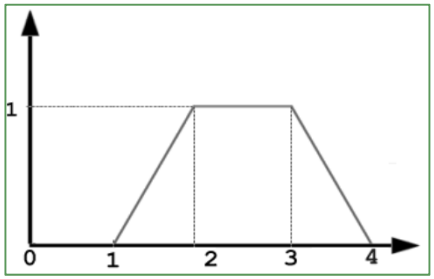
$$R(x) = \begin{cases} (2-x)+1\ , & x \in [2,3] \\ 0\ , & x \in (3,\infty) \end{cases}$$



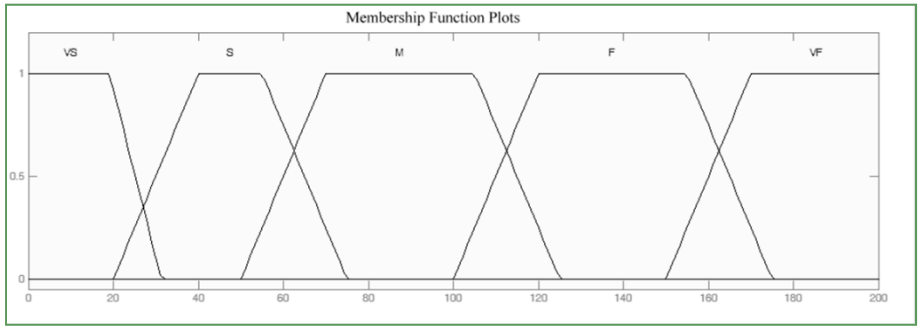
بازه فازي :

$$x_1 = 2\ ,\ x_2 = 3\ ,\ a = 1\ ,\ b = 4$$

$$L(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in (-\infty, 1) \\ x\ , & x \in [1,2] \end{cases} \quad , \quad R(x) = \begin{cases} 4-x\ , & x \in (3,4] \\ 0\ , & x \in (4,\infty) \end{cases}$$



عمليات با اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش

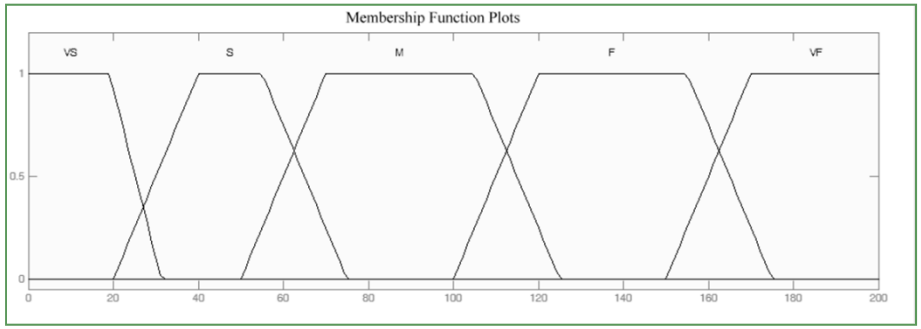


مفهوم «خيلي كند»:

$$x_1 = a = 0 \ , \ x_2 = 20 \ , \ b = 25$$

$$R(x) = \begin{cases} 0.2(20 - x) + 1 \ , & x \in [20, 25] \\ 0 \ , & x \geq 25 \end{cases} \ , L(x) = 0 \ , \forall x \in (-\infty, 0)$$

عمليات با اعداد فازي با استفاده از اصل گسترش



مفهوم «خيلي كند»:

$$x_1 = a = 0 \ , \ x_2 = 20 \ , \ b = 25$$

$$R(x) = \begin{cases} 0.2(20 - x) + 1 \ , & x \in [20, 25] \\ 0 \ , & x \geq 25 \end{cases} \ , L(x) = 0 \ , \forall x \in (-\infty, 0)$$

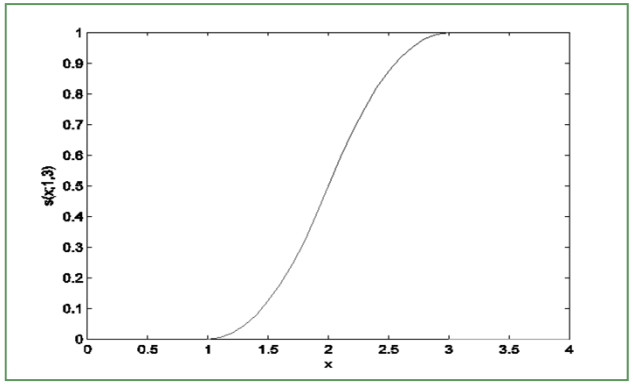
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

اعداد فازي

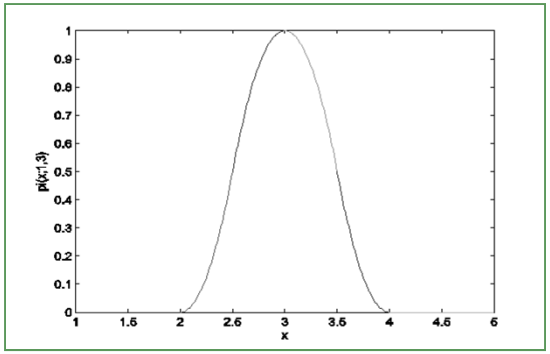
عمليات و خواص اعداد فازي

عمليات و خواص اعداد فازي

$$S(x;x_1,x_2)=\begin{cases}0\,, & x<x_1\\ 2\left(\dfrac{2-x_1}{x_2-x_1}\right)^2, & x_1\le x<\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ 1-2\left(\dfrac{x-x_2}{x-x_1}\right)^2, & \dfrac{x_1+x_2}{2}\le x<x_2\\ 1 & x\ge x_2\end{cases}$$



$$\Pi(x;x_1,x_2)=\begin{cases}S(x;x_2-x_1,x_2)\,, & x\le x_2\\ 1-S(x;x_2,x_1+x_2)\,, & x>x_2\end{cases}$$

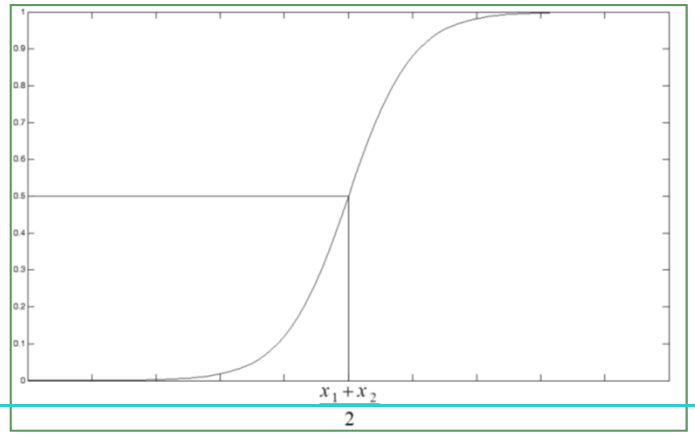


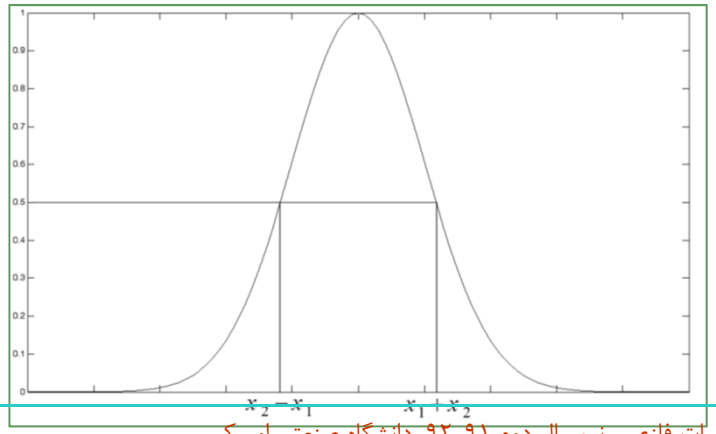
عملیات و خواص اعداد فازي

نکته: معمولاً x_2 نقطه‌ایست که در آن تابع P داراي مقدار واحد است و نقاط تقاطع برابرند با:

$$x_2+\frac{x_1}{2},\ x_2-\frac{x_1}{2}$$

$$\Pi(x,x_1,x_2)=\frac{1}{1+\left(x-\frac{x_1}{x_2}\right)^2}$$





عمليات و خواص اعداد فازي

نكات:

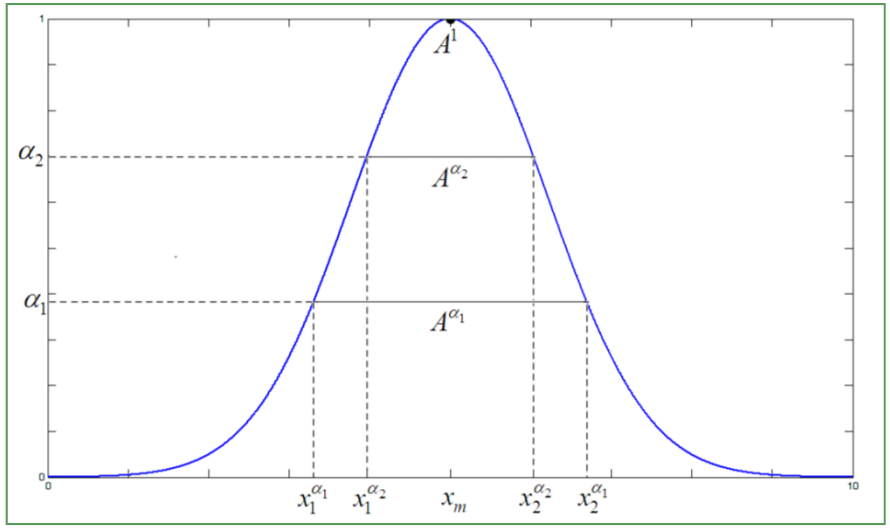
1. $A^l(x_m) = A^r(x_m)$

2. عدد بازه‌اي بي‌نهايت سطحي :

$$\left\{A^{\alpha} = \alpha.[x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}], \alpha \in (0,1]\right\}$$

$$\begin{bmatrix} x_2^{\alpha} \\ \alpha \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} x_1^{\alpha} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{cases} A^l\left(x_1^{\alpha}\right), & x_1 \le x_1^{\alpha} \le x_m \\ A^r\left(x_2^{\alpha}\right), & x_m \le x_2^{\alpha} \le x_2 \end{cases}$$



عمليات و خواص اعداد فازي

سؤال: چگونه مي توان يك تابع عضويت را براي يك مسئله خاص به دست آورد ؟

فاكتورهايي از قبيل اطلاعات ناكامل و نادقيق كه به شكل زباني و ذهني به صورت درجات كم و يا زياد مطرح مي‌شوند ، بايستي مورد توجه قرار گيرند. براي جلوگيري از پيچيدگيهاي بي مورد ، رابطه $\alpha = A(x)$ معمولاً بدون درجه بالايي از دقت ساخته مي‌شود.

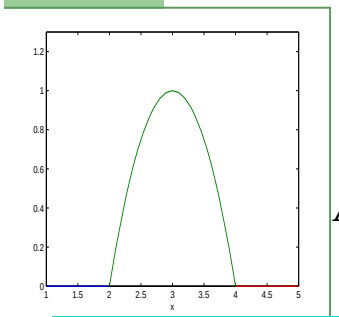
نكته كليدي: بهتر است توابع عضويت با تعداد پارامترهاي كمتر انتخاب شوند ، زيرا اگرچه انتخاب توابع عضويت ذهني است: انتخاب آن‌ها بايستي معقول باشد.

مثال: عدد فازي A زير را در نظر بگيريد:

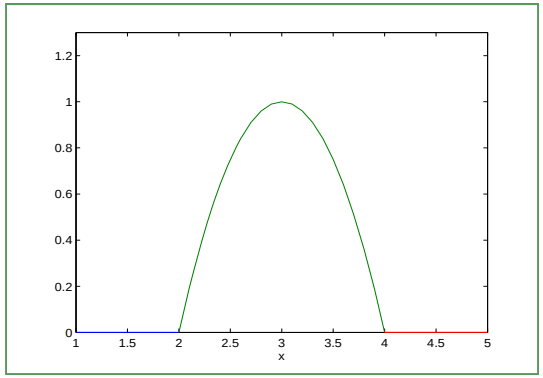
$$A(x)=1-(x-3)^2=1-x^2+6x-4=-x^2+6x-8$$

محمل A برابر است با:

$$A_{\bar{0}}=(2,4)$$



عمليات و خواص اعداد فازي



$$-x^2+6x-8=\alpha \Rightarrow$$

$$x^2-6x+8+\alpha=0 \Rightarrow$$

$$x^l=x_1^\alpha=3-\sqrt{9-8-\alpha}=3-\sqrt{1-\alpha}$$

$$x^r=x_2^\alpha=3+\sqrt{1-\alpha}$$

$$A_{0.5}=\left[3-\sqrt{\frac{1}{2}},3+\sqrt{\frac{1}{2}}\right]$$

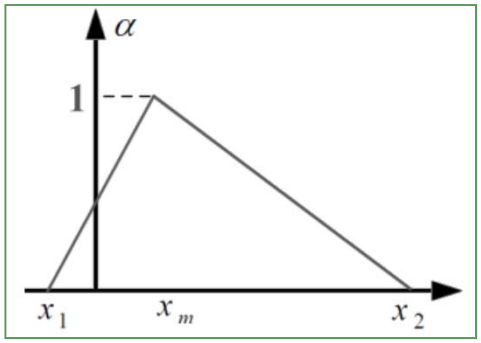
$$A(x)=\alpha=1-(x-3)^2,\ 2\le x\le 4$$

عمليات و خواص اعداد فازي

اعداد فازي مثلثي:

اين اعداد توسط تابع عضويت زير تعريف مي‌شوند:

$$\alpha = A(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_m - x_1}, & x_1 \le x \le x_m \\ \dfrac{x - x_2}{x_m - x_2}, & x_m \le x \le x_2 \\ 0, & \text{در غـــير اينصـــورت} \end{cases}$$



$$A_\alpha = [x_1^l, x_2^r] = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]$$
$$= [x_1 + \alpha(x_m - x_1),\ x_2 - \alpha(x_2 - x_m)]$$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

عمليات و خواص اعداد فازي

نكته : اعداد فازي مثلثي ، در مسايل فني مهندسي ، كنترل فازي و مسايل تصميم‌گيري بسيارپر كاربرد هستند ، زيرا آنها را مي‌توان براساس حداقل اطلاعات ساخت. $A \equiv (x_1, x_m, x_2)$

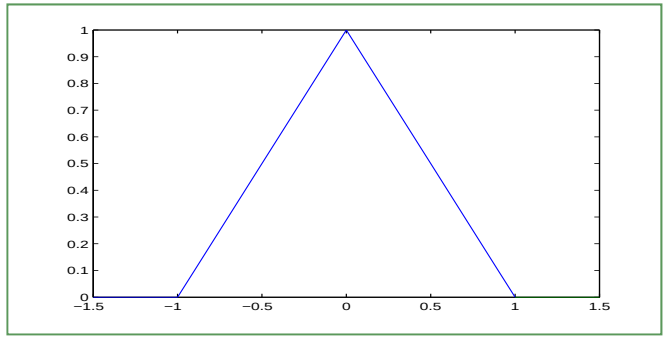
اگر دو متغير x_1 , x_2 به عبارتي بازه محمل A را بدانيم يا بتوانيم تخمين بزنيم ، و جائي كه داراي ماكزيمم x_m است ، را بلد باشيم $A(x)$ را مي‌توان رسم نمود. مثلاً مي‌دانيم كه در بازه محمل ، داراي بيشترين امكاني است كه x_m بتواند مقدار نا يقيني A را تبيين كند.

مثال : عدد فازي مثلثي $A \equiv (-1, 0, 1)$ را رسم كنيد.

$$A(x) = \begin{cases} 2\dfrac{x+1}{2}, & -1 \le x \le 0 \\ 2\dfrac{x-1}{-2}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & o.w. \end{cases} \Rightarrow A(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x \le 0 \\ 1-x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{در غـــير اينصـــورت} \end{cases}$$

عمليات و خواص اعداد فازي

$$A(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0 \\ 1-x\ , & 0\le x\le 1 \\ 0 & \end{cases}$$



$$A_\alpha=[-1+\alpha(0+1)\ ,1-\alpha(1-0)]=[-1+\alpha\ ,1-\alpha]$$

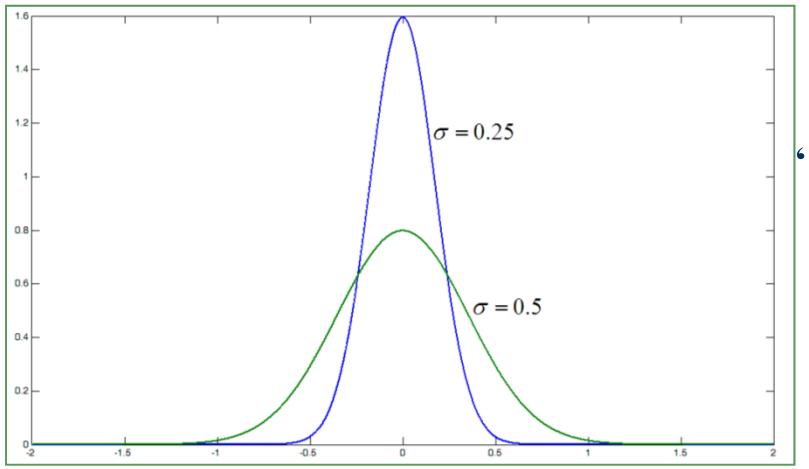
$$A_{0.1}=[-0.9\,,0.9]\ ,A_{\frac{1}{2}}=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

عمليات و خواص اعداد فازي

مثال : اعداد فازي به شكل «زنگوله»

توزيع نرمال فازي: مي‌دانيم كه توزيع نرمال (گوسي) در احتمالات بدين شكل تعريف مي‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \square$$



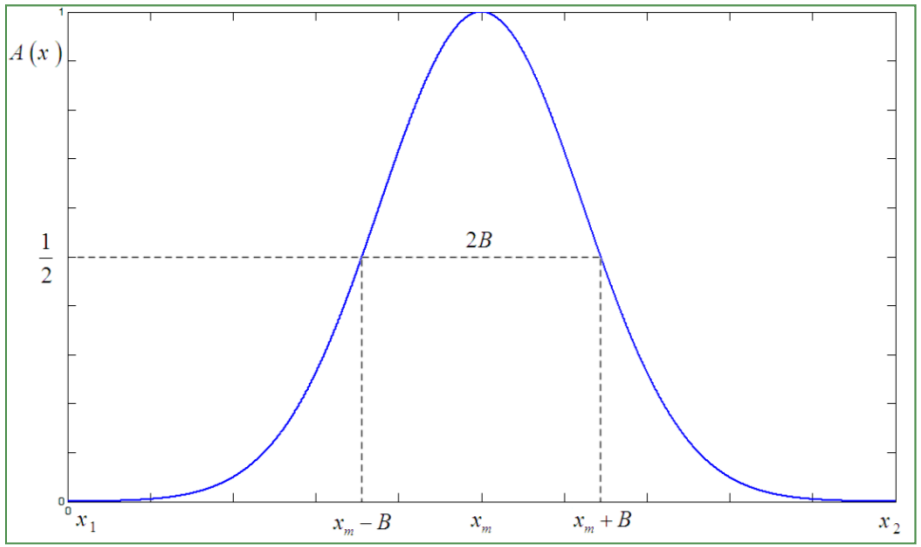
ميانگين m

انحراف معيار: s

اين تابع توزيع بسيار اهميت دارد و پر كاربرد است ، زيرا بسياري از متغيرهاي تصادفي در كاربردهاي متنوع مهندسي و فني داراي فرم نرمال يا نزديك به نرمال مي‌باشند ، منحني نمايش توزيع نرمال : P

عمليات و خواص اعداد فازي

عدد فازي قطعه – قطعه‌اي - درجه دو:

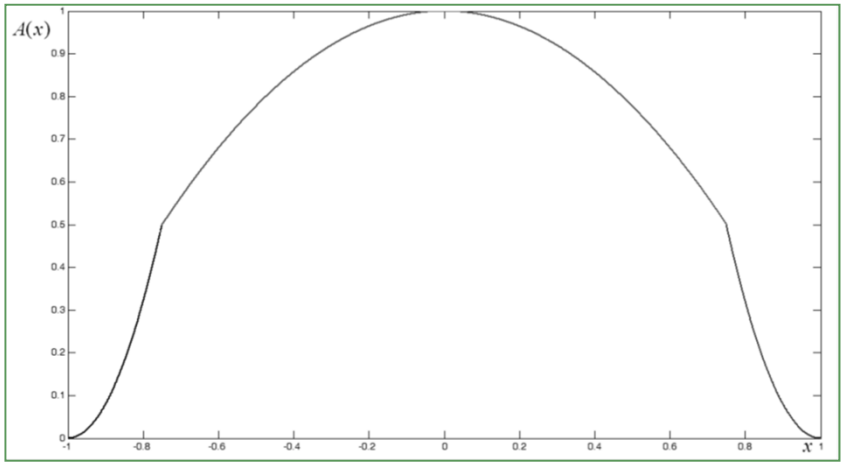


$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$A(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(x_m - B - x_1)^2}(x - x_1)^2, & x_1 \le x < x_m - B \\ -\dfrac{1}{2B^2}(x - x_m)^2 + 1, & x_m - B \le x \le x_m + B \\ \dfrac{1}{2(x_m + B - x_2)^2}(x - x_2)^2, & x_m + B \le x \le x_2 \\ 0, & ow. \end{cases}$$

عمليات و خواص اعداد فازي

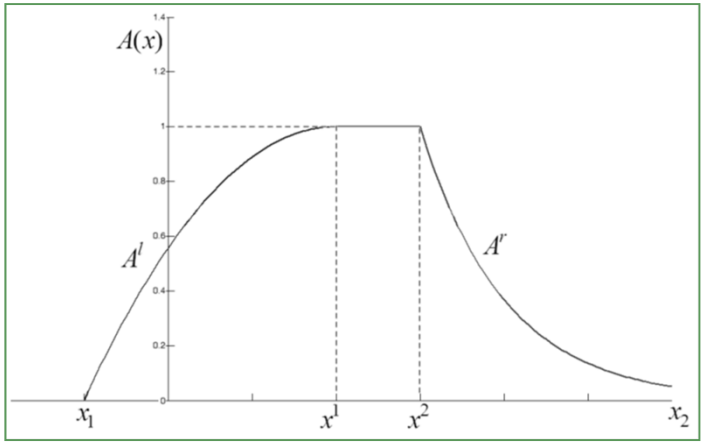
متغير زباني "كوچك" توسط توزيع فازي نرمال :



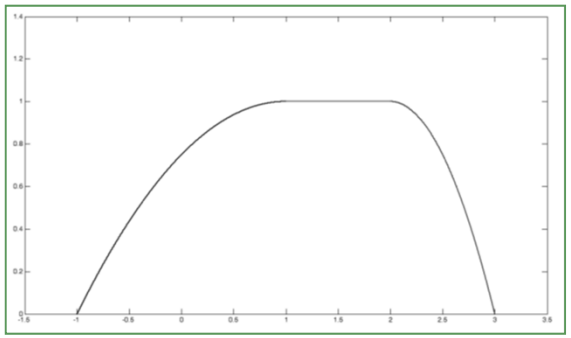
$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}(x+1)^2 & -1\le x<-\dfrac{3}{4}\\[2ex] -\dfrac{1}{2\frac{9}{16}}x^2+1 & -\dfrac{3}{4}\le x\le\dfrac{3}{4}\\[2ex] \dfrac{1}{2(\frac{3}{4}-1)^2}(x-1)^2 & \dfrac{3}{4}\le x\le 1\\[2ex] 0, \text{ در غـــير اينصـــورت} & \end{cases}$$

عمليات و خواص اعداد فازي

عدد فازي با سطح ماكزيمم هموار



$$A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\left(x-x^1\right)^2}{\left(x_1-x^1\right)^2}, & x_1\le x\le x_1^1\\ 1, & x^1\le x\le x^2\\ e^{-\left(x-x^2\right)}, & x\ge x^2\\ 0, & \text{در غـــير اينصـــورت}\end{cases}$$

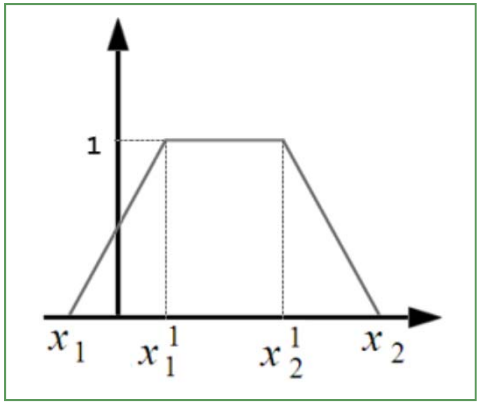


عدد فازي با يك سطح صاف در $\alpha=1$

$$A(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{4}(x-1)^2 & -1\le x\le 1\\ 1 & 1\le x\le 2\\ 1-(x-2)^2 & 2\le x\le 3\\ 0, & \text{در غـــير اينصـــورت}\end{cases}$$

عمليات و خواص اعداد فازي

اعداد فازي ذوزنقه اي:

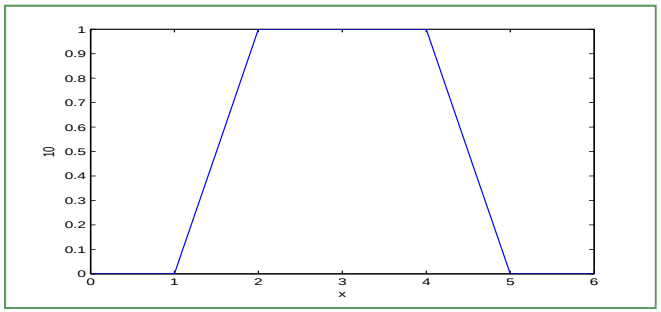


$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_1}{x_1^1-x_1}, & x_1\le x\le x_1^1\\ 1, & x_1^1\le x\le x_2^1\\ \dfrac{x-x_2}{x_2^1-x_2}, & x_2^1\le x\le x_2\\ 0, & \text{در غـــير اينصـــورت}\end{cases}$$

$$A\square\left(x_1,x_1^1,x_2^1,x_2\right)$$

$$x=\frac{x_1^1+x_1^2}{2}$$

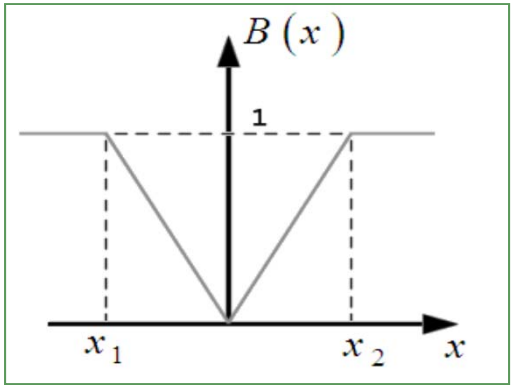
اعداد فازي ذوزنقه اي متقارن:



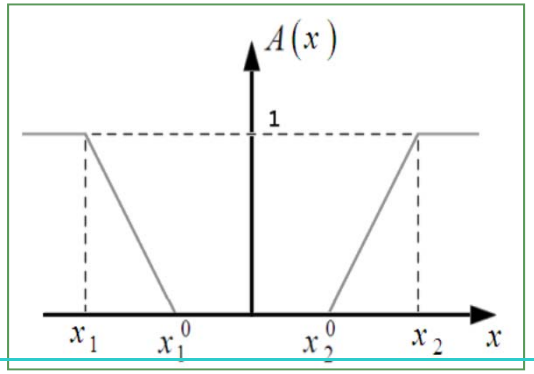
$$A(x)=\begin{cases}x-1 & 1\le x\le 2\\ 1 & 2\le x\le 4\\ 5-x & 4\le x\le 5\\ 0, & \text{در غـــير اينصـــورت}\end{cases}$$

عمليات و خواص اعداد فازي

عدد فازي مثلثي وارون و وارون ذوزنقه اي :



$$B(x)=\begin{cases}1 \quad , & -\infty < x \le x_1 \\ \dfrac{1}{|x_1|}x \quad , & x_1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{|x_2|}x \quad , & 0 \le x \le x_2 \\ 1 \quad , & x_2 \le x < \infty\end{cases}$$



$$A(x)=\begin{cases}1 & -\infty < x < x_1 \\ -\dfrac{1}{x_1^0 - x_1}(x - x_1^0) \, , & x_1 \le x \le x_1^0 \\ 0 & x_1^0 \le x \le x_2^0 \\ \dfrac{1}{x_2 - x_2^0}(x - x_2^0) & x_2^0 \le x \le x_2 \\ 1 & x_2 \le x < \infty\end{cases}$$

اعداد فازي

نمایش اعداد فازی در مجموعه

اعداد صحیح در i

نمایش اعداد فازی در مجموعه اعداد صحیح در

¡

¢ A_α

تابع عضویت ، یك تابع گسسته است عناصر به مجموعه ¢ تعلق دارد. در این [x1, x2] یك عدد فازي با يك مقدار ماكزيمم در با بازه محمل با مجموعه زير نمايش داده مي‌شود:

$$A=\left\{x_1,x_1^{\alpha_1},x_1^{\alpha_2},\ldots,x_1^{\alpha_n},x_m,x_2^{\alpha_n},x_2^{\alpha_{n-1}},\ldots,x_2^{\alpha_1},x_2\right\}$$

$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n < 1$ و نقطه x_m نقطه ماكزيمم است. به وضوح مي‌توان تابع عضويت را توسط يك جدول نمايش داد:

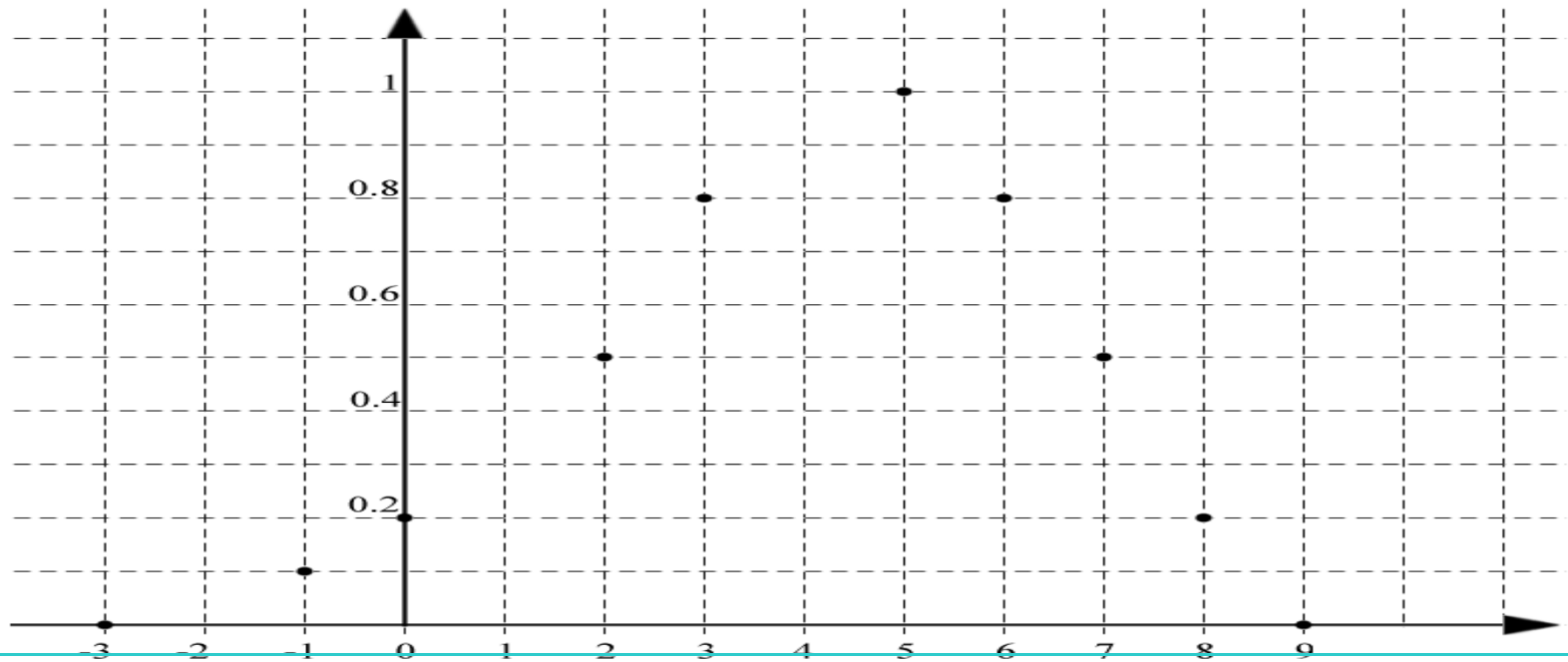
x	x_1	$x_1^{\alpha_1}\ldots$	$x_1^{\alpha_n}$	x_m	$x_2^{\alpha_n}\ldots$	$x_2^{\alpha_1}$	; 2
$A(x)$	0	α_1	α_n	1	α_n	α_1	0

نمایش اعداد فازی در مجموعه اعداد صحیح در

¡

مثال : عدد فازی

x	-۳	-۱	۰	۲	۳	۵	۶	۷	۸	۹
α	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۱	۰/۸	۰/۵	۰/۲	۰



اعداد فازي

الگوريتم عمومي جهت محاسبه
دقيق عمليات جبري فازي

الگوريتم عمومي جهت محاسبه دقيق عمليات جبري فازي

عملگر صعودي يا نزولي:

يك عملگر باينري را صعودي گويند اگر و فقط اگر:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \square \ , \ x_1 > y_1 \,\&\, x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 > y_1 * y_2$$

و نزولي گويند اگر و فقط اگر:

$$x_1 > y_1 \,\&\, x_2 > y_2 \Rightarrow x_1 * x_2 < y_1 * y_2$$

لم :اگر **A** , **B** اعداد فازي باشند كه توابع عضويت آن‌ها پوششي و پيوسته است و يك عملگر افزايشي پيوسته باشد ،آنگاه *يك عدد فازي پيوسته است و هم پوششي است $A * B = C$

$C\ (.)$

الگوريتم عمومي جهت محاسبه دقيق عمليات جبري فازي

خواص عمليات فازي:

1-اگر عملگر باينري $*$ خاصيت جابه جايي داشته باشد ، آنگاه:

$$A, B \in \Im(\square), B * A = A * B$$

2-اگر $*$ شركت پذير باشد ، آنگاه:

$$A * (B * C) = (A * B) * C,\ A, B, C \in \Im(\square)$$

3- اگر $*$ توزيع پذير باشد ، آنگاه خواهيم داشت:

$$A * (B \cup C) = (A * B) \cup (A * C)$$

براى $A, B, C \in \Im(\square)$

الگوريتم عمومي جهت محاسبه دقيق عمليات جبري فازي

A

براي هر عملي مي‌توان نشان داد:

$$A * B = C * D$$

در نتيجه:

1. A , B ، بر روي C , D تخت شده‌اند كه از مقدار ماكزيمم يكسان برخوردارند:

$$hgt(C) = \bigvee_x (A(x) \wedge \alpha_A \wedge \alpha_B) = \alpha_A \wedge \alpha_B$$

$$hgt(D) = \bigvee_y (A(y) \wedge \alpha_A \wedge \alpha_B) = \alpha_A \wedge \alpha_B$$

2. براي مجموعه‌هاي فازي A , B كه بر روي محدب و پيوسته هستند، در مواردي كه روي صعودی یا نزولی باشد و بازه با بازه I جایگزین گردد، مي‌توان لم اسلاید 55 را روي مجموعه‌هاي D,C I براي محاسبه $A*B$ به كار برد. $[0, \alpha_A \wedge \alpha_B]$ $[0,1]$

الگوريتم عمومي جهت محاسبه دقيق عمليات جبري فازي

شرح الگوريتم كلی برای محاسبه دقيق عمليات فازی:

1-مي‌دانيم هر مجموعه فازي پيوسته را مي‌توان به صورت تعدادي از مجموعه‌هاي فازي محدب (غالباً زير نرمال) بيان نمود طوري كه توابع عضويت آن‌ها اكيداً صعودي، اكيداً نزولي يا ثابت غيرصفرند.

2- عملگر * يك عملگر توزيع پذير بر مجموعه مفروض $\left(\bigcup_n A_n\right)$ است.

3-لم اسلايد 55 را مي‌توان بر مجموعه‌هاي فازي محدب و قطعه- قطعه پيوسته اعمال نمود.

با توجه به نكاتي كه در بخش ملاحظات از قبيل تخت نمودن مجموعه‌هاي فازي ارائه شد، گامهايي برداشته مي‌شود.

الگوريتم عمومي جهت محاسبه دقيق عمليات جبري فازي

مراحل انجام الگوريتم:

هر مجموعه فازي را مي‌توان به شكل زير گسسته سازي نمود:

گام اول: انتخاب تعداد محدودي از سطوح عضويت : α_i

براي $i = 0,1,\ldots,N$ $\alpha_0 = 0,\ldots,\alpha_N = 1$

به عبارتي فاصله [0,1] را به تعداد **N** قسمت تجزيه مي‌كنيم.

گام دوم: به هر يك از سطوح عضويت يك مجموعه به صورت زير نسبت مي‌دهيم:

$$S_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{iL}\}\ ,\ S_{ij} \in \square\ ,\ A(S_{ij}) = \alpha_i,\ j = 1,..L$$

گام سوم: مجموعه‌هاي فازي را به مجموعه‌هاي فازي ديگر تخت مي‌كنيم (كه همگي از ارتفاع يكساني برخوردارند)

گام چهارم: هر مجموعه فازي را به دو گروه مجموعه‌هاي غير نزولي و غير صعودي تقسيم مي‌كنيم.

گام پنجم: اعمال عملگر" *" .

گام ششم: نتايج به دست آمده را با هم اجتماع مي‌كنيم.

اعداد فازي

اعداد فازی کانونی

اعداد فازی کانونی

همان طور که دیدیم ، محاسبه دقیق عملیات جبري فازي در حالت كلي بسيار پيچيده است.

براي سادگي محاسبات ، فرم كانوني اعداد فازي معرفي مي‌شوند.

نمايش نوع LR براي اعداد فازي:

$$A(x)=\begin{cases} L(x) \ , & -\infty < x < 0 \\ 1 & x=0 \\ R(x) & 0 < x < \infty \end{cases} \quad , \quad x \in \square$$

$L(x)$، $R(x)$ توابع مرجعند که دارای خواص زیر می‌باشند:

یک تابع مثل ϕ، یک تابع مرجع برای عدد فازی خواهد بود اگر و فقط اگر:

۱. متقارن باشد حول $x=0$: $\phi(x)=\phi(-x)$

۲. $\phi(0)=1$

۳. $\phi(x_1)\geq\phi(x_2), \quad \forall x_1,x_2\in[0,\infty),\ x_2>x_1$

معادلات فازی

تعریف معادله فازي: يك معادله فازي معادله ايست كه در آن ضرايب و يا متغيرهايش مجموعه‌هاي فازي در مي‌باشند (به عبارتي اعداد فازي هستند).

فرض كنيد كه $x \in \square,\ A, B \in \Im(\square)$ ، لذا مي توانيم از معادله زير:

$$A * x = B$$

مقدار **X** را به دست آوريم.

X را مي‌توان طبق اصل تفكيك از X_α براي $a \hat{\mathrm{I}} [0,1]$ مشروط بر موجود بودن X_α ساخت.

معادلات فازی

مسئله : با فرض این که **B,A** ، اعداد فازي مثبتند ، و **X** يك عدد فازي نامعلوم است ، **X** را پيدا كنيد طوري كه:

$$A.X = B$$

شروط جواب:

با انتخاب $X_\alpha = \left[x_\alpha^l , x_\alpha^u\right]$ ، $A_\alpha = \left[a_\alpha^l , a_\alpha^u\right]$ و $B_\alpha = \left[b_\alpha^l , b_\alpha^u\right]$ به راحتی می‌توان نشان داد که معادله فازی $A.X = B$ دارای جواب است اگر و فقط اگر:

۱. برای هر $\alpha \in (0,1]$ نامعادله زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{b_\alpha^l}{a_\alpha^l} \le \frac{b_\alpha^u}{a_\alpha^u}$$

توجه: این شرط تضمین می‌کند که $x_\alpha^l \le x_\alpha^u$ باشد و X_α جواب معادله $A_\alpha.X_\alpha = B_\alpha$ است.

۲. برای $\alpha_1 , \alpha_2 \in (0,1]$ می توانیم بنویسیم:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \Rightarrow \frac{b_{\alpha_1}^l}{a_{\alpha_1}^l} \le \frac{b_{\alpha_2}^l}{a_{\alpha_2}^l} \le \frac{b_{\alpha_2}^u}{a_{\alpha_2}^u} \le \frac{b_{\alpha_1}^u}{a_{\alpha_1}^u}$$

معادلات فازی

مسئله : با فرض این که B,A اعداد فازیند ، معادله $A + X = B$ را برای به دست آوردن عدد فازي مجهول X حل نمائید.

به راحتی می‌توان نشان داد که معادله فوق دارای جواب است، اگر و فقط اگر:

۱. برای هر $\alpha \in (0,1]$ ، داشته باشیم:

$$b_\alpha^l - a_\alpha^l \le b_\alpha^u - a_\alpha^u$$

۲. برای هر $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1]$ داریم:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \Rightarrow b_{\alpha_1}^l - a_{\alpha_1}^l \le b_{\alpha_2}^l - a_{\alpha_2}^l \le b_{\alpha_2}^u - a_{\alpha_2}^u \le b_{\alpha_1}^u - a_{\alpha_1}^u$$

از توجه شما

متشکرم