فصل سوم
اصول پایه

دکتر محمد باقر منهاج

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

اصل تفکیک

- اصل تفکیک بیان می‌کند که چگونه می‌توان از روی برشهای- α، مجموعه فازی را تشکیل داد. قبل از بیان این اصل، نخست مروری کوتاه به برشهای- αخواهیم داشت.
- برای هر $A \in \Im(U)$

$$A_{\alpha} = \{x \in U \mid A(x) \geq \alpha\} \ , \ \alpha \in [0,1]$$

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in U \mid A(x) > \alpha\} \ , \ \alpha \in [0,1]$$

خواص برشهای- α

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

- ۱-۴-برای هر $A,B \in \Im(U)$ وهر $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,1]$,داریم:
- ۱)

$$A_{\bar{\alpha}} \subseteq A_{\alpha}$$

- ۲)

$$A_{\alpha_1} \supseteq A_{\alpha_2} \quad \& \quad A_{\bar{\alpha}_1} \supseteq A_{\bar{\alpha}_2} \quad , \forall \alpha_1 \le \alpha_2$$

- ۳)

$$(A \cap B)_{\alpha} = A_{\alpha} \cap B_{\alpha} \quad , \quad (A \cap B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \cap B_{\bar{\alpha}}$$

$$(A \cup B)_{\alpha} = A_{\alpha} \cup B_{\alpha} \quad , \quad (A \cup B)_{\bar{\alpha}} = A_{\bar{\alpha}} \cup B_{\bar{\alpha}}$$

- ۴)

$$\bar{A}_{\alpha} = \overline{A_{\overline{1-\alpha}}}$$

$$(\bar{A})_{\alpha} \neq (\overline{A_{\alpha}})$$

- ۵)

$$\bigcup_{i\in I} A^i_{\bar{\alpha}} = \left(\bigcup_{i\in I} A^i\right)_{\bar{\alpha}} \quad \& \quad \bigcap_{i\in I} A^i_{\bar{\alpha}} \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} A^i\right)_{\bar{\alpha}}$$

$$\bigcup_{i\in I} A^i_{\alpha} \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A^i\right)_{\alpha} \quad \& \quad \bigcap_{i\in I} A^i_{\alpha} = \left(\bigcap_{i\in I} A^i\right)_{\alpha}$$

- مثال۴-۱:فرض کنیم $A^i(x) = 1 - \frac{1}{i}$ برای تمامی $x \in U$, $i \in \mathbb{N}$. آنگاه:
- $\forall x \in U \ , \ \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i\right)(x) = \bigvee_{i\in\mathbb{N}} A^i(x) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{i}\right) = 1$
- حال فرض کنیم $\alpha = 1$ ، آنگاه:

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i\right)_{\alpha=1} = U$$

- لیکن برای هر $i \in \mathbb{N}$, $A^i_1 = \varnothing$ زیرا برای هر $x \in U$

$$A^i(x) = 1 - \frac{1}{i} < 1 \quad \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(A^i\right)_{\alpha} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varnothing = \varnothing \neq U = \left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A^i\right)_{\alpha}$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- ۶) برای $A,B \in \Im(U)$ و برای تمامی $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$A = B \Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha$$

$$A = B \Leftrightarrow A_{\bar{\alpha}} = B_{\bar{\alpha}}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B_\alpha \supseteq A_\alpha$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B_{\bar{\alpha}} \supseteq A_{\bar{\alpha}}$$

- ۷) برای هر $A \in \Im(U)$ ، می‌توان نشان داد:

$$A_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta = \bigcap_{\beta<\alpha} A_{\bar{\beta}}$$

$$A_{\bar{\alpha}} = \bigcup_{\alpha<\beta} A_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} A_{\bar{\beta}}$$

نکته

- نکته : نقش اصلی برشهای- α و برشهای- α موکد در محاسبات فازی، توانایی آن‌ها در بیان و نمایش مجموعه‌های فازی است.
- قضیه:برای هر $A \in \Im(U)$ ، ثابت کنید:

$$A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} A^{\alpha}$$

- مجموعه A^{α} یک مجموعه فازی خاص است که برای هر $x \in U$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A^{\alpha}(x) = \alpha . A_{\alpha}(x)$$

$$A(x) = \bigvee_{\alpha \in (0,1]} A^{\alpha}(x) = \bigvee_{\alpha \in (0,1]} \alpha . A_{\alpha}(x) = \bigvee_{\alpha \in (0,1]} \alpha \wedge A_{\alpha}(x)$$

- مثال:برای $U = \{1,2,3,4\}$ زیر مجموعه مفهوم "بزرگ" B به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$B = \frac{0.1}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{1}{4}$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- برای مجموعه سطح $\Lambda = \{0.1\ ,0.3,0.6,1\}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$B_{0.1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$B_{0.3} = \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$B_{0.6} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$B_{1} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}$$

- حال هر برش- α را به مجموعه فازی خاص B^{α} تبدیل می‌کنیم:

$$B^{0.1} = \frac{0.1}{1} + \frac{0.1}{2} + \frac{0.1}{3} + \frac{0.1}{4}$$

$$B^{0.3} = \frac{0}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.3}{4}$$

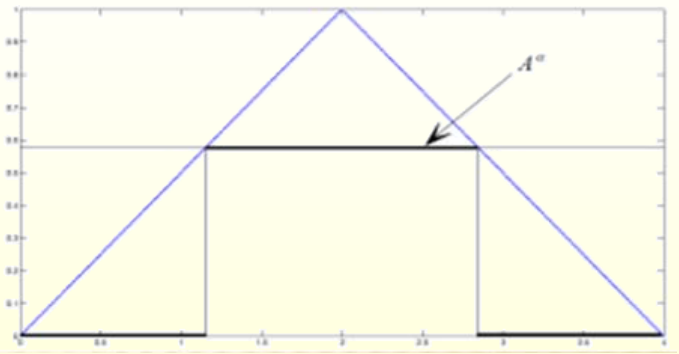
$$B^{0.6} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{0.6}{4}$$

$$B^{1} = \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B^{\alpha} = \frac{0.1}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.6}{3} + \frac{1}{4} = B$$

❖ مجموعه فازی A را در نظر بگیرید:

$$A(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x) & 0\le x\le 2\\ -\frac{1}{2}(x-4) & 2<x\le 4\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$



$$A_\alpha=\{x\in X \mid A(x)\ge\alpha\},\quad 0\le\alpha\le 1$$

$$\frac{1}{2}x=\alpha\Rightarrow x_1=2\alpha$$

$$\frac{4-x}{2}=\alpha\Rightarrow 4-x_2=2\alpha\Rightarrow x_2=4-2\alpha$$

$$A_\alpha=[2\alpha \quad 4-2\alpha]$$

$$\Rightarrow \quad A^\alpha(x)=\alpha \;.\; A_\alpha(x)=\alpha \;,\quad \forall x\in[2\alpha\;,\;4-2\alpha]$$
$$=0$$

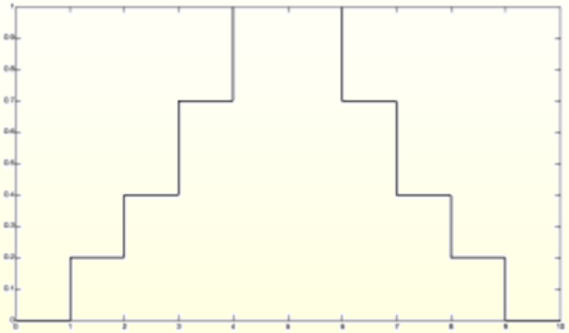
$$A=\bigcup_{\alpha\in[0,1)} A^{\bar{\alpha}}$$

$$A^{\bar{\alpha}}\equiv A^{\bar{\alpha}}(x)=\alpha \;.A_{\bar{\alpha}}(x)$$

❖ **قضیه:** برای هر $A\in\Im(U)$

- مجموعه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$A(x)=\begin{cases}0.2 & 1\le x<2\\ 0.4 & 2\le x<3\\ 0.7 & 3\le x<4\\ 1 & 4\le x<5\\ 0.7 & 5\le x<6\\ 0.4 & 6\le x<7\\ 0.2 & 7\le x<8\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$



$$\Lambda(A)=\{0.2,0.4,0.7,1\}$$

$$A^{0.2}(x)=\begin{cases}0.2 & 1\le x<8\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

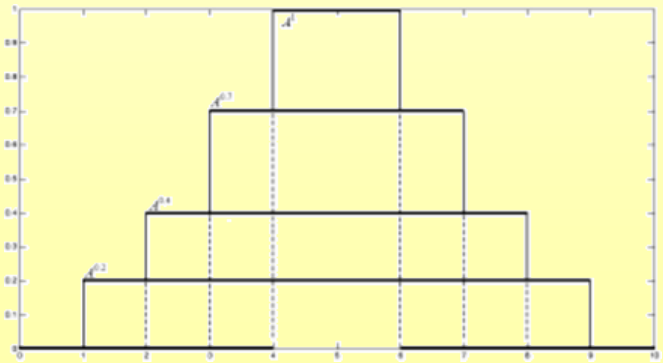
$$A^{0.7}(x)=\begin{cases}0.7 & 3\le x<6\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\alpha\in\Lambda(A)} A^{\alpha}=A$$

$$A^{0.4}(x)=\begin{cases}0.4 & 2\le x<7\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

$$A^{1}(x)=\begin{cases}1 & 4\le x<5\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

$$A^{0}(x)=\varnothing$$



- نکته مهم:اگر بخواهیم از زبان تصویرسخن بگوئیم,
- واضح است که یک مجموعه فازی را می توان از روی
- پوش بالای برشهای α آن به دست آوردواین یعنی این
- که, برشهای α را به موازات محور افقی در ارتفاع های
- رسم کنید.

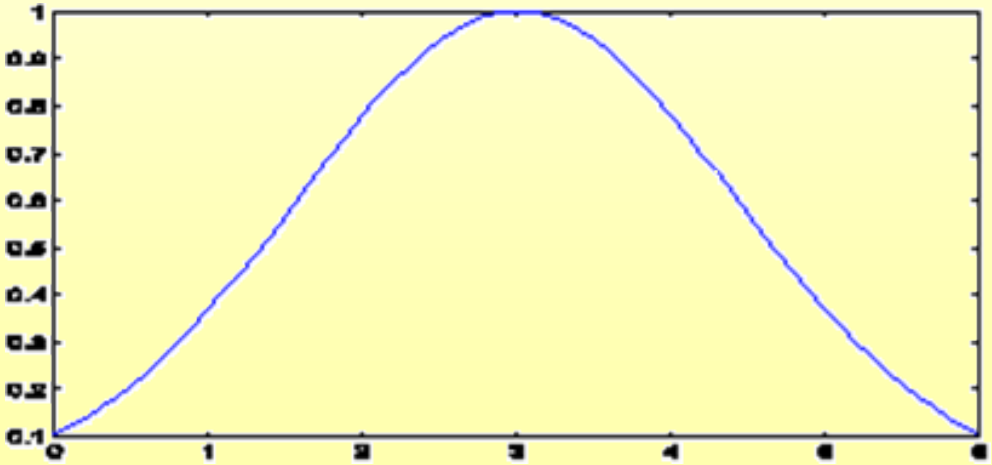
اصل گسترش

- اصل گسترش یک ابزار اصلی و اساسی در تئوری مجموعه‌های فازیست که توسط آن می‌توان مفاهیم متعارف ریاضی را به دنیای فازی تعمیم داد
- گویند یک تابع متداول و مرسوم (کریسپ) فازی می‌گردد، اگر طوری گسترش یابد که بر مجموعه‌های فازی تعریف شده در و عمل نماید، یعنی:

$$f : \Im(U) \rightarrow \Im(V)$$

$$f^{-1} : \Im(V) \rightarrow \Im(U)$$

- اصلی که جهت فازی سازی توابع و روابط کریسپ (غیرفازی) به کار می‌رود به اصل گسترش موسوم است.
- مثلاً مفهوم «حدوداً ۳» را در نظر بگیرید:



- خلاصه: نگاشت تعمیم یافته $f:\Im(\mathsf{U}^n)\to\Im(\mathsf{V})$ با $f(A_1,\ldots,A_n)=B\in\Im(\mathsf{V})$

$$B(y)=\begin{cases}\displaystyle\bigvee_{\substack{\underline{x}\in\mathsf{U}^n\\ y=f(\underline{x})}}\bigwedge_{i=1}^{n}A_i(x_i)\ , & \exists\underline{x}\in\mathsf{U}^n\ \Big|\ y=f(\underline{x})\\ 0,\ \text{if}\quad f^{-1}(y)=\varnothing,\quad i.e.\quad \nexists\underline{x}\in\mathsf{U}^n\ \Big|\ y=f(\underline{x}) & \end{cases}$$

- و برای حالت ساده $n=1$،اصل گسترش می‌گوید که برای هر تابع مفروض به صورت $f:\mathsf{U}\to\mathsf{V}$ دو تابع زیر قابل تعمیمند:

$$f:\Im(\mathsf{U})\to\Im(\mathsf{V})$$

$$B(y)=\big(f(A)\big)(y)=\bigvee_{\substack{x\\ y=f(x)}}A(x)\ ,\ \forall A\in\Im(\mathsf{U})$$

$$f^{-1}:\Im(\mathsf{V})\to\Im(\mathsf{U})$$

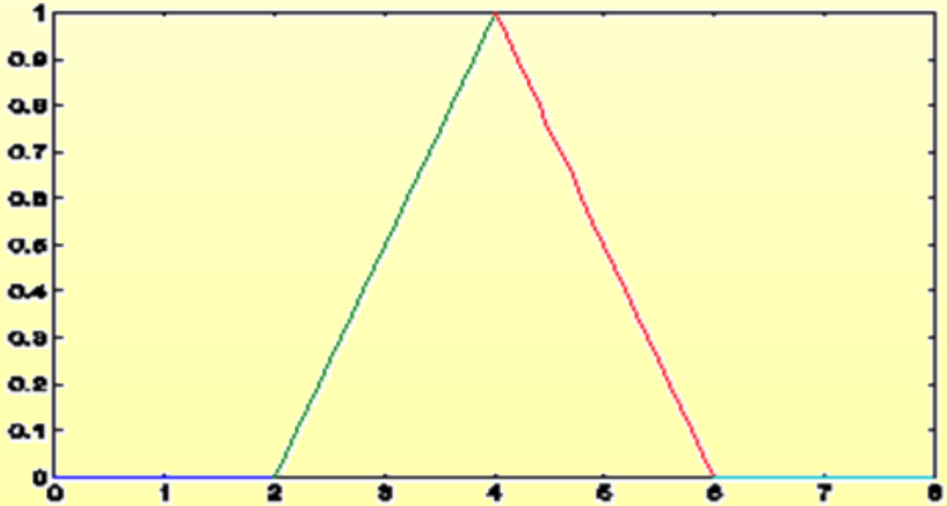
$$A(x)=\big(f^{-1}(B)\big)(x)=B\big(f(x)\big)\ ,\ \forall B\in\Im(\mathsf{V})$$

نکات:

- ۱. از روی nتایی‌های $(x_1,\ldots,x_n)$ که y را از روی f می‌سازند، $B(y)$ بین مقادیر عضویت $\overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i(\underline{x})$ بزرگترین است.
-
- ۲. $B_\alpha = f\left((A_1)_\alpha\ ,\ \ldots\ (A_n)_\alpha\right)$ ، اگر و فقط اگر برای هر $y \in V$ ، یک $\underline{x}^*$ موجود باشد، به طوری که:

$$B(y) = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} A_i(x_i^*)$$

- مثال: مفهوم«تقریباً۴ »را به شکل زیر در نظر بگیرید.



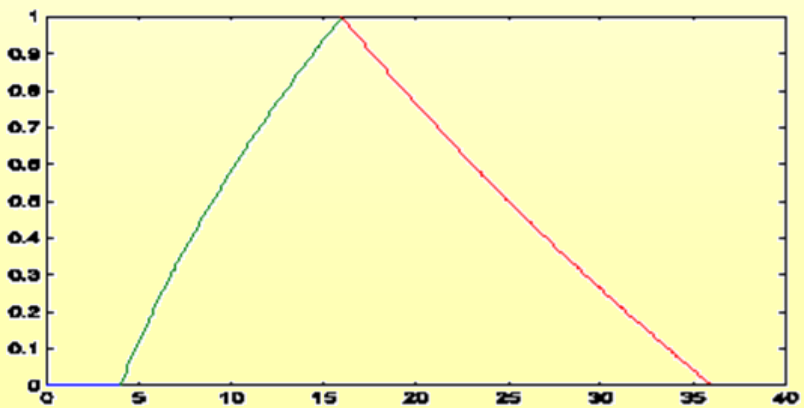
$$\tilde{4}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} & , \quad 2 \le x \le 4 \\ \dfrac{6-x}{2} & , \quad 4 \le x \le 6 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad \in \Im(\square)$$

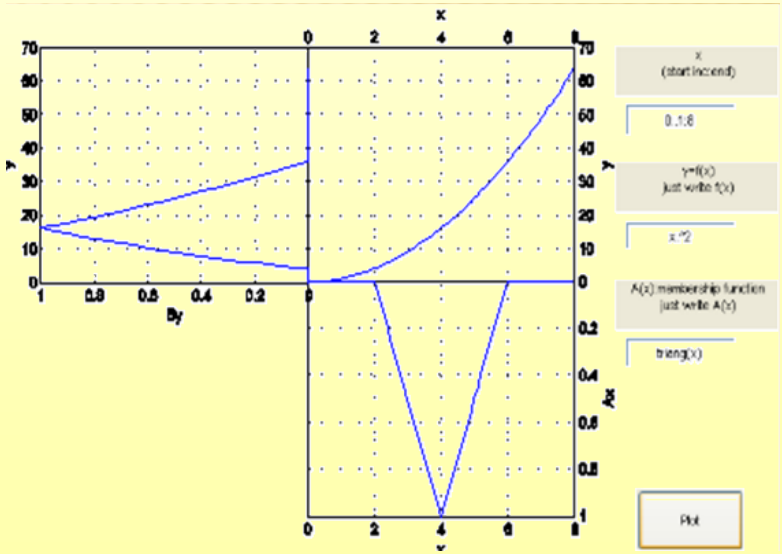
❖ تابع $f:\square \to \square^{+}$ با $f(x)=x^2$ را به مجموعه‌های فازی روی تعمیم دهید:

$$f:\Im(\square)\to\Im(\square^{+})$$

$$f(A)=B\ ,\quad B(y)=\bigvee_{\substack{x\in\square\\ y=x^2}} A(x)\Rightarrow$$

$$B(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y}-2}{2}\ , & 4\le y\le 16\\[2ex] \dfrac{6-\sqrt{y}}{2}\ , & 16\le y\le 36\\[2ex] 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$





- نکته مهم: روش تشریح شده در فوق را که در آن یک تابع f با دامنه و برد غیر فازی را می‌توان روی مجموعه‌های فازی تعریف شده، گسترش داد اصل گسترش گویند.
- فرض کنید تابع کریسپ $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ با دامنه $\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2 \times \ldots \times \mathrm{U}_n \overset{\Delta}{=} \overset{n}{\underset{i=1}{X}} \mathrm{U}_i$ و برد موجود است. گسترش f برابر است با:

$$f : \Im(\mathrm{U}) \to \Im(\mathrm{V})$$

$$f(A_1,..,A_n) = B \in \Im(\mathrm{V}), \quad A_i \in \Im(\mathrm{U}_i) \ , \ x_i \in \mathrm{I}_i \ , \ \forall i = 1,..,n \qquad B(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \bigvee\limits_{\substack{\underline{x} \in \mathrm{U} \\ y = f(\underline{x})}} \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i(x_i) & \\ 0, & f^{-1}(y) = \varnothing \end{array} \right\}$$

- **نکته:** $\vee$ یعنی عمل سوپریمم گیری (ماکزیمم گیری) و $\wedge$ یعنی عمل اینفمیم‌گیری (مینیمم).
- **نکته:** اصول گسترش دیگری را هم می‌توان در نظر داشت. به جای $\vee$ از جمع احتمالاتی و به جای مینیمم‌گیری از ضرب جبری استفاده نمود. در کل می‌توان گفت:

$$f_2(A_1,A_2) \subseteq f_1(A_1,A_2) \qquad f_1 \equiv \sup - \min \qquad f_2 \equiv \sup - \square$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i) \equiv \bigtimes_{i=1}^{n} A_i(x_i) \equiv A_1(x_1) \times \ldots \times A_n(x_n) \Rightarrow \bigvee \bigwedge A_i \subseteq \bigvee \bigtimes A_i$$

- با فرض تابع کریسپ $f : U \to V$ ، نشان دهیدبرای هر $i \in I$, $A_i \in \Im(U)$, $B_i \in \Im(V)$
- خواص زیر ازتوابع گسترش یافته برقرارند(۱۳ خاصیت زیر)
- ۱. $A = \varnothing$ اگر و فقط اگر $f(A) = \varnothing$
- ۲.اگر $A_1 \subseteq A_2$ آنگاه $B_1 = f(A_1) \subseteq f(A_2) = B_2$
- ۳. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$
- ۴. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
- ۵.اگر $B_1 \subseteq B_2$ آنگاه $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
- ۶. $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
- ۷. $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
- ۸. $\overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(\overline{B})$

- ۹. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
- ۱۰. $B \supseteq f(f^{-1}(B))$
- ۱۱. $(f(A))_{\bar{\alpha}} = f(A_{\bar{\alpha}})\ ,\ \forall \alpha \in [0,1)$
- ۱۲.برای هر $(f(A))_{\alpha} \supseteq f(A_{\alpha})\ ,\ \alpha \in [0,1]$
- مثال:فرض کنید: $U = \square$, $V = \{1,-1\}$ و تابع کریسپ : f
- مجموعه فازی Aرا تعریف کنیم:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & , \ |z| \le 3 \\ -1 & , \ |z| > 3 \end{cases}$$

$$A(z) = 1 - \frac{1}{|z|}\ ,\ z \in \square - \{0\}$$

- $f(A)$ راپیدا کنید.

$$f(A)(1) = \bigvee_{\substack{z \\ 1 = f(z)}} A(z) = \bigvee_{z \in \{-3,-2,-1,1,2,3\}} A(z) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f(A)(-1) = \bigvee_{\substack{z \\ -1 = f(z)}} A(z) = \lim_{|z| \to \infty} A(z) = 1 - \lim_{|z| \to \infty} \frac{1}{|z|} = 1 - 0 = 1$$

- واما برای $\alpha = 1$

$$(f(A))_1 = \{y \mid f(y) \ge 1\} = \{-1\}$$

- چون که $A_1 = \varnothing$ لذا $f(A_1) = \varnothing$ قابل حصول است و این نشان می‌دهد که:

$$\left(f(A)\right)_\alpha \neq f\left(A_\alpha\right)$$

- حال اگر $y \in f\left(A_\alpha\right)$ باشد، بدان معناست که وجود دارد $x_0 \in A_\alpha$، طوریکه $y = f\left(x_0\right)$ و این نتیجه می‌دهد:

$$\left(f(A)\right)(y) = \bigvee_{\substack{x \\ y=f(x)}} A(x) \geq A(x_0) \geq \alpha \Rightarrow y \in \left(f(A)\right)_\alpha$$

- ۱۳.برای هر $A \in \mathfrak{I}(U)$، خواهیم داشت:

$$f(A) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} f\left(A^{\bar{\alpha}}\right) \quad , \quad f(A^{\bar{\alpha}}) = \alpha . f\left(A_{\bar{\alpha}}\right)$$

کاربرد اصل گسترش

- با اصل گسترش می‌توان فاصله فازی بین دو مجموعه B,Aرا تعریف نمود:

$$A,B \in \Im(\mathrm{U})$$

$$D = |A - B|$$

$$D(d) = \bigvee_{\substack{a,b \\ d=|a-b|}} A(a) \wedge B(b), \ \forall d \in \square^{+}$$

- از اصل گسترش می‌توان برای به دست آوردن میزان سازگاری مقدار فازی Aبا مقدار فازی) Bمقدار مرجع) استفاده کرد.
- مثال :فرض کنید:

$$\mathrm{U}_1 = \{1,2,3,4,5\}$$

$$\mathrm{U}_2 = \{0,1,2\}$$

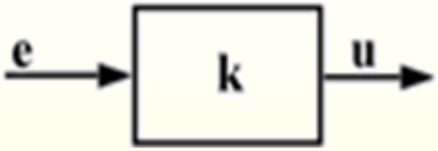
$$A_1 \in \Im(\mathrm{U}_1) \equiv A_1 = \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} \qquad A_2 = \frac{1}{0} + \frac{0.5}{1} + \frac{0.1}{2} \in \Im(\mathrm{U}_2)$$

- پیدا کنید: $B = A_1 + A_2$

$$B = \frac{0.1}{1} + \frac{\{(0.1 \wedge 0.5) \vee (0.2 \wedge 1)\}}{2} + \frac{\{(0.5 \wedge 1) \vee (0.2 \wedge 0.5) \vee (0.1 \wedge 0.1)\}}{3} +$$

$$\frac{(0.1 \vee 0.5 \vee 0.7)}{4} + \frac{(0.1 \vee 0.5 \vee 1)}{5} + \frac{0.5}{6} + \frac{0.1}{7} = \quad B = \frac{0.1}{1} + \frac{0.2}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.7}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.5}{6} + \frac{0.1}{7}$$

❖ مثال:: سیستم کنترلی Kبا بهره Kدر نظر بگیرید (ورودی خطا و خروجی u)



$$E=\{1,2,3,4,5,6,7\} \quad , \quad K=\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

$$A_1=\frac{0.1}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.5}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.9}{6}+\frac{1}{7}\in\Im(E)$$

$$A_2=\frac{0.1}{0}+\frac{0.3}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.5}{5}+\frac{0.1}{6}\in\Im(K)$$

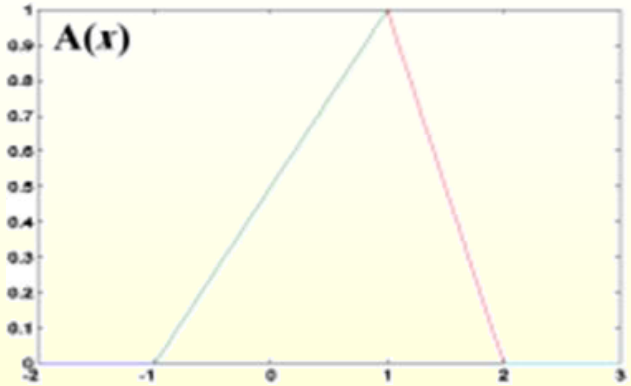
$$B=A_1.A_2$$

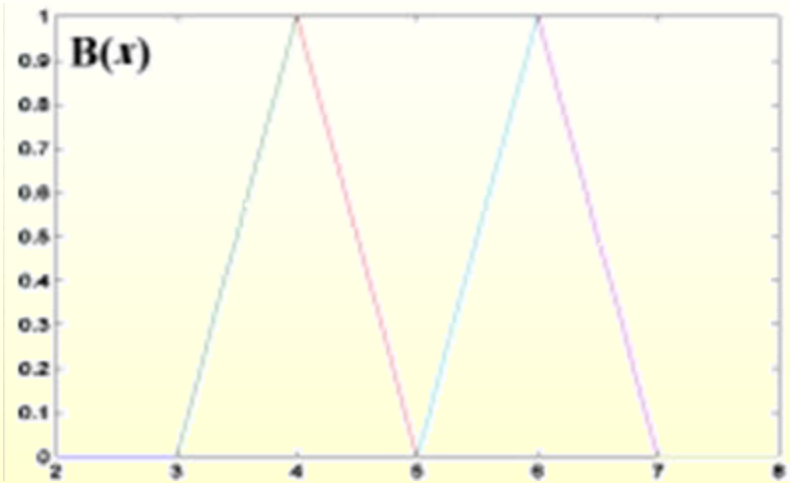
$$B=\frac{0.1}{0}+\frac{0.1}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.3}{3}+\frac{0.3}{4}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.3}{6}+\frac{0.3}{7}$$

$$+\frac{0.5}{8}+\frac{0.3}{9}+\frac{0.5}{10}+\frac{0.8}{12}+\frac{0.8}{14}+\frac{0.7}{15}+\frac{0.5}{16}+\frac{0.8}{18}+\frac{0.7}{20}+\frac{1}{21}+\frac{0.8}{24}+\frac{0.3}{25}+\frac{0.8}{28}+\frac{0.3}{30}+\frac{0.3}{35}+\frac{0.1}{36}+\frac{0.1}{42}$$

عملیات روی مجموعه های فازی

- مثال:مجموعه های فازی زیر را در نظر بگیرید:

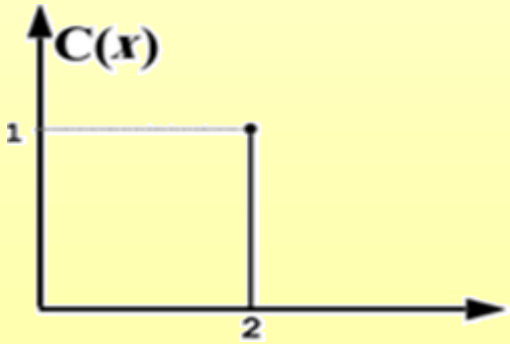




$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} \quad , & x\in[-1,1]\\ 2-x \quad , & x\in[1,2]\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}x-3 \quad , & x\in[3,4]\\ 5-x \quad , & x\in[4,5]\\ x-5 \quad , & x\in[5,6]\\ 7-x \quad , & x\in[6,7]\\ 0, & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

$$C(x)=\delta(x-2)$$



❖ A , Bبازه‌های فازی و Cسینگلتون فازی را نشان می دهد.

$$D = A + B \Leftrightarrow D(z) = \bigvee_{\substack{x,\ y \\ z=x+y}} A(x) \wedge B(y)$$

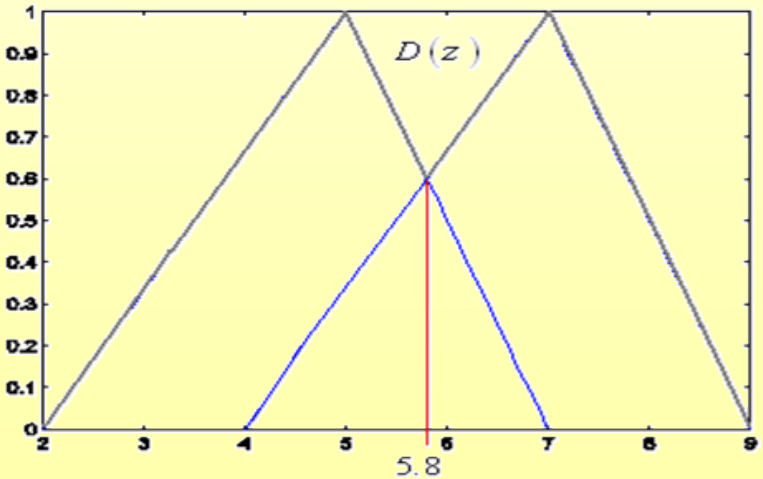
$$D(z) = 0 \qquad z \in (-\infty, 2)$$

$$D(2) = \bigvee_{\substack{x,\ y \\ z=x+y}} A(x) \wedge B(y) = A(-1) \wedge B(3) = 0$$

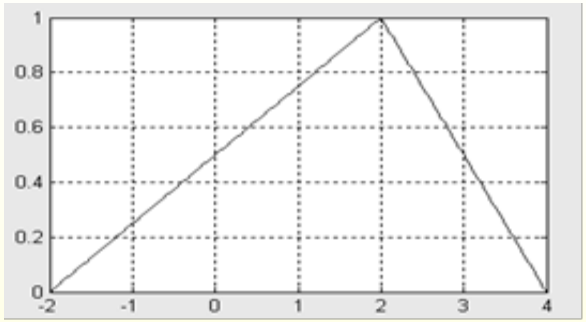
$$D(z) = \bigvee_{\substack{x,y \\ z=x+y}} A(x) \wedge B(y) \qquad 2 \le z \le 5$$

$$= \frac{1}{3} z - \frac{4}{3}$$

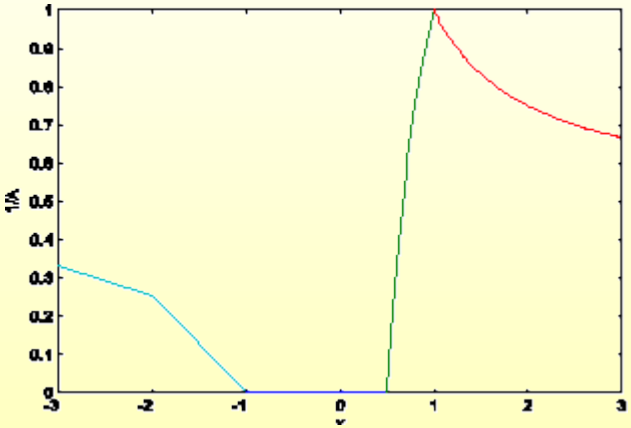
$$D(z) = \begin{cases} \frac{-1}{2} z + \frac{7}{2}, & 5 \le z \le 5.8 \\ \frac{1}{3} z - \frac{4}{3}, & 5.8 \le z \le 7 \\ \frac{-1}{2} z + \frac{9}{2}, & 7 \le z \le 9 \end{cases}$$



$$E = A.C \Rightarrow E(z) = \begin{cases} \frac{1}{4}z + 0.5, & -2 \le z \le 2 \\ \frac{-1}{2}z + 2, & 2 \le z \le 4 \end{cases}$$



$$F = A^{-1} \Leftrightarrow F(x) = \bigvee_{x \in \square - \{0\}} A\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} & , x \ge 1, x \le -1 \\ 2 - \frac{1}{x} & , 0.5 \le x \le 1 \\ 0, & -1 \le x \le 0.5 \end{cases}$$



- در حالت کلی، عملیات روی مجموعه‌های فازی بسیار پیچیده تر از این مثال ها می‌باشد به خصوص اگر مجموعه های فازی، محدب نباشند.

- **هدف** :پیداکردن تناظری بین مجموعه‌های فازی روی و خانواده ای از برشهای- αروی است.
- حقایق: هر خانواده ای از A_α ها و $\alpha \in [0,1]$ از مجموعه جهانی که در آن شرایط

$$A_0 = U \quad , \quad A_\alpha \supseteq A_\beta \quad , \quad \alpha < \beta \quad , \quad \bigcap_{\substack{\alpha \\ \alpha<\beta}} A_\alpha = A_\beta$$

- برقرارند، یک مجموعه فازی را تبیین می‌کنند. این خانواده از A_α ها را با
- $\Im_\alpha(U) \square (A_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ نمایش می دهیم.
- و برعکس اگر $B \in \Im(U)$ موجود باشد، آنگاه خانواده ای از $(B_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ موجود است که تمامی‌سه شرط فوق در آن برقراراست.

$\Im_\alpha(\square)$

- اکنون دنبال راهی جهت یافتن تابعی مثل f هستیم که تناظری بین مجموعه‌های فازی روی $\square$ با ایجاد نماید.

$$f:\Im_\alpha(\square)\to\Im(\square)$$

$$f\left(\left(A_\alpha\right)_{\alpha\in[0,1]}\right)\square A \qquad A(x)\square\bigvee_\alpha\left\{\alpha \;\middle|\; \alpha\in[0,1]\wedge x\in A_\alpha\right\}$$

- روابط بالایک نگاشت یک به یک می‌باشد.

- اما اگر بخواهیم مجموعه‌های فازی نرمال را با خانواده‌ای از مجموعه‌ها که تا آنجا که مقدور است کلی باشد، به شکل $A\equiv(A_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ نشان بدهیم، شرط پیوستگی

$$\bigcap_{\substack{\alpha\\ \alpha<\beta}} A_\alpha = A_\beta$$

- را همراه با شرط $A_0=\mathbf{U}$ حذف می‌کنیم. صرفاً استفاده از شرط $\alpha<\beta\Rightarrow A_\alpha\supset A_\beta$ و شرط اضافه دیگر

$$\bigcap_{\alpha\in[0,1]} A_\alpha\neq\varnothing$$

- (این شرط تضمین می‌کند که A نرمال باشد)، مجموعه فازی A را که توسط $A=\left(A_\alpha\right)_{\alpha\in[0,1]}$ القأ می شود,توسط رابطه زیر مشخص وبیان میکند:

$$A(x)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\left\{\alpha \;\middle|\; x\in A_\alpha\right\}$$

- یک خانواده از $(A_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ را یک نمایش مجموعه‌ای از $A\in\Im_N(\square)$ گویند، اگر

- ۱. $A_\beta\subseteq A_\alpha\subseteq\square \Leftarrow 0<\alpha<\beta<1$

- ۲. $A(x)=\bigvee_{\alpha\in[0,1]}\left\{\alpha \;\middle|\; x\in A_\alpha\right\}$

❖ به مثال قبل برمی‌گردیم, برای B,A داریم:

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2} & , \quad x\in[-1,1]\\ 2-x & , \quad x\in[1,2]\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}x-3 & , \quad x\in[3,4]\\ 5-x & , \quad x\in[4,5]\\ x-5 & , \quad x\in[5,6]\\ 7-x & , \quad x\in[6,7]\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

$$[A]_\alpha=[2\alpha-1,2-\alpha]$$

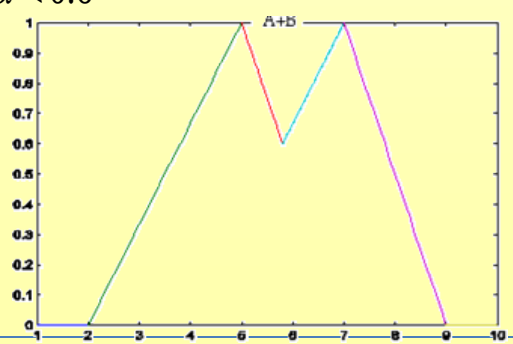
$$[B]_\alpha=[\alpha+3,5-\alpha]\cup[\alpha+5,7-\alpha]$$

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \qquad f(x,y)=x+y$$

$$\{[C]_\alpha,\alpha\in(0,1)\}\ ,C_\alpha=f([A]_\alpha,[B]_\alpha)$$

$$C_\alpha=f([A]_\alpha\ ,[B]_\alpha)=\ [3\alpha+2,7-2\alpha]\cup[3\alpha+4,9-2\alpha]=$$

$$=\begin{cases}[3\alpha+2,7-2\alpha]\cup[3\alpha+4,9-2\alpha]\ , & \alpha\ge 0.6\\ [3\alpha+2,9-2\alpha]\ , & \alpha<0.6\end{cases}$$



$$(A+B)(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{3} & , \quad 2\le x\le 5\\ \dfrac{7-x}{2} & , \quad 5\le x\le 5.8\\ \dfrac{x-4}{3} & , \quad 5.8\le x\le 7\\ \dfrac{9-x}{2} & , \quad 7\le x\le 9\\ 0, & \text{در سایر موارد}\end{cases}$$

- یک بازه Aشامل مجموعه ای از اعداد حقیقی xتعریف می‌کنیم به طوری که یا: $a_1 \le x \le a_2$

$$A = [a_1, a_2] = \{x | a_1 \le x \le a_2, x \in \square\}$$

- بازه فوق یک عدد نا دقیق xرا که در بازه $[a_1, a_2]$ قرار دارد، نشان می‌دهد. به طور هندسی، Aیک قطعه از خط اعداد حقیقی را تبیین می‌کند.

- در حالت خاص $a_1 = a_2 = a$ ، عدد بازه ای که با بازه فوق بیان می‌شود، به یک عدد حقیقی $a = [a, a]$تبدیل می‌شود که به یک بازه نقطه‌ای یا سینگلتون موسوم است.

- برای بازهA، تعاریف زیر را داریم:
- عرض $W(A) = a_2 - a_1$
- اندازه $|A| = |a_1| \vee |a_2|$
- تصویر $A^- = [a_1, a_2]^- = [-a_2, -a_1]$
- معکوس $0 \notin [a_1, a_2]$ $A^{-1} = [a_1, a_2]^{-1} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right]$
- مثال :فرض کنید: $A = [2, 5]$
- آنگاه داریم: $W(A) = 3$, $|A| = 5$ $A^{-1} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]$ $A^- = [-5, -2]$
-
- برابری دو بازه: بازه‌های $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ برابرند، اگر و فقط اگر $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ ، آنگاه $A = B$

- عملیات محاسباتی با بازه‌ها در $I(\square)$
- $[a_1,a_2]*[b_1,b_2]=\{e*f \mid a_1\le e\le a_2\ ,\ b_1\le f\le b_2\}$ $\qquad * \in \{+,-,.,1\}$

$$A+B=[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=[a_1+b_1,a_2+b_2] \qquad A-B=[a_1,a_2]-[b_1,b_2]=[a_1,a_2]+[-b_2,-b_1]=[a_1-b_2,a_2-b_1]$$

$$A.B=[a_1b_1\wedge a_1b_2\wedge a_2b_1\wedge a_2b_2, a_1b_1\vee a_2b_1\vee a_1b_2\vee a_2b_2]$$

$$=\begin{cases}[a_1b_1,a_2b_2] & a_1\ge 0, b_1\ge 0\\ [a_2b_2,a_1b_1] & a_2<0, b_2<0\\ [a_1b_2\wedge a_2b_1, a_1b_2\vee a_2b_1] & a_1a_2\ge 0, b_1b_2\ge 0\\ [a_1b_2\wedge a_2b_1, a_1b_1\vee a_2b_2] & a_1a_2<0, b_1b_2<0\end{cases}$$

$$A:B=A/B=[a_1,a_2]:[b_1,b_2]$$

$$=[a_1,a_2].\left[\frac{1}{b_2},\frac{1}{b_2}\right], 0\notin[b_1,b_2]$$

$$A^{-1}=\frac{1}{[a,b]}=\begin{cases}\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right] & 0\notin[a,b]\\ \left[\frac{1}{b},\infty\right)\cup\left(-\infty,\frac{1}{a}\right] & a<0\ ,\ b>0\\ \left[\frac{1}{b},\infty\right) & a=0\ ,\ b>0\\ \left(-\infty,\frac{1}{a}\right] & a<0\ ,\ b=0\end{cases}$$

- ۱.نتیجه یک عمل جبری روی یک بازه بسته، یک بازه بسته است.
- ۲. $a \in \square$, $a \square [a,a]$ را می‌توان به عنوان یک بازه بسته در نظر گرفت.
- مثال:

$$[3,7]-[4,5]=[-3,3] \qquad [3,5].[2,3]=[6,15] \qquad [-1,1]/[-2,-0.5]=[-2,2]$$

- توجه:

$$A+A^{-}=\left[-(a_2-a_1),a_2-a_1\right]\neq 0$$

$$A.A^{-1}=[a_1,a_2].\left[\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_1}\right]\neq 1$$

$$a=[a,a]\Rightarrow a^{-}=[-a,-a]=-a\ ,a^{-1}=\left[\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right]=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow a+(-a)=0\ ,\ a.a^{-1}=1$$

- قوانین محاسباتی:
- برای بازه های

$$C=[c_1,c_2]\ ,\ B=[b_1,b_2],\ A=[a_1,a_2]$$

- جابجایی: $A+B=B+A,\quad AB=BA$
- شرکت پذیری: $(AB)C=A(BC)\qquad (A+B)+C=A+(B+C)$
- عضو خنثی: $A=0+A=A+0,\quad 0\in A-A$

$$A=1.A=A.1,\quad 1\in A/A$$

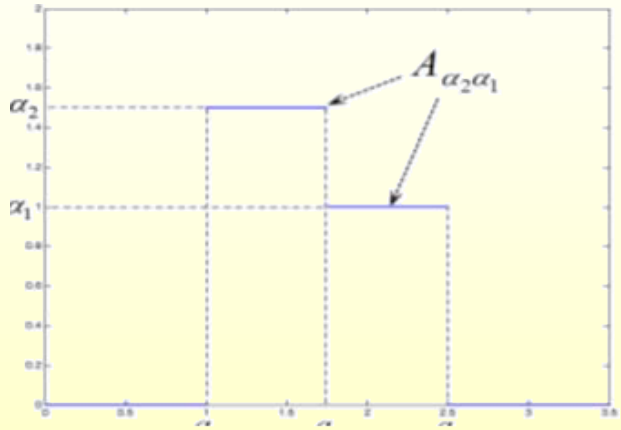
- توزیع پذیری: $a(B+C)=aB+aC\ ,\quad a=[a,a]$
- زیرتوزیع پذیری: $A(B+C)\subseteq AB+AC$
- شمولیت یکنوا:

$$A\subseteq B\ \ \&\ \ C\subseteq D\Rightarrow\begin{cases}A+C\subseteq B+D\\ A-C\subseteq B-D\\ AC\subseteq BD\\ \dfrac{A}{C}\subseteq\dfrac{B}{D}\quad if\quad 0\notin C,D\end{cases}$$

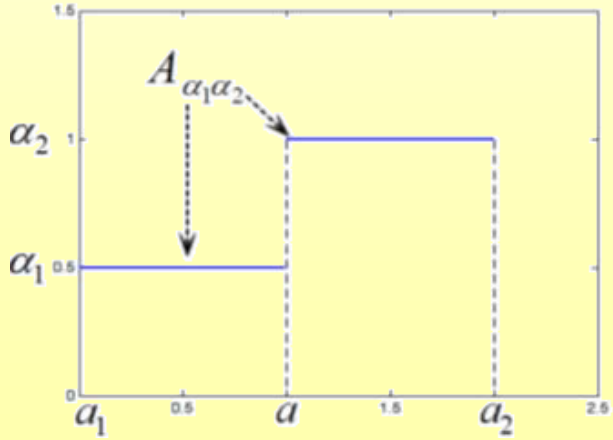
اعداد بازه ای دوسطحی

- عدد بازه ای $A=[a_1,a_2]$ یک عدد نادقیق در بازه $[a_1,a_2]$ را مدل می‌کند. مقبولیت برای عدد x که هر مقداری در $[a_1,a_2]$ را بپذیرد، یکسان است. هیچ مقادیری یا نقاطی در $[a_1,a_2]$ بیش از دیگر نقاط ارجح نیست

$$A_{\alpha_2\alpha_1}=[a_1,a]_{\alpha_2}\cup[a,a_1]_{\alpha_1}$$



$$A_{\alpha_1\alpha_2}=[a_1,a]_{\alpha_1}\cup[a,a_2]_{\alpha_2}\qquad 0\le\alpha_1<\alpha_2$$

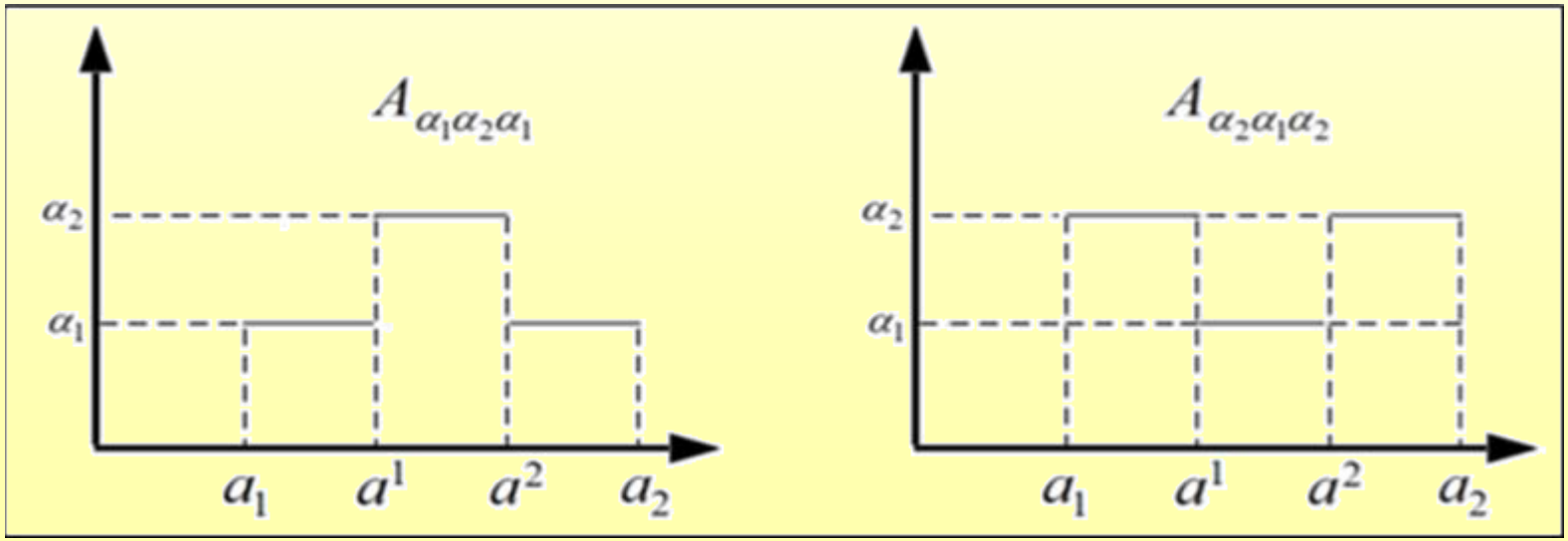


❖ بازه های دو سطحی با عمومیت بیشتر

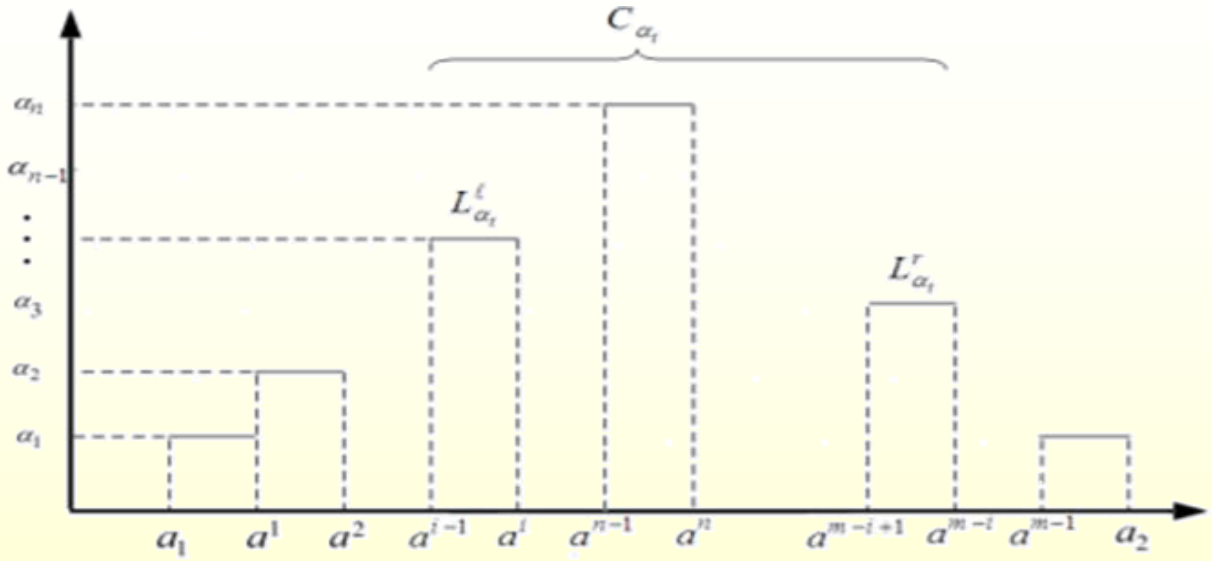
$$A=\left[a_1,a^1\right]\cup\left[a^1,a^2\right]\cup\left[a^2,a_2\right],\ a_1<a^1<a^2<a_2$$

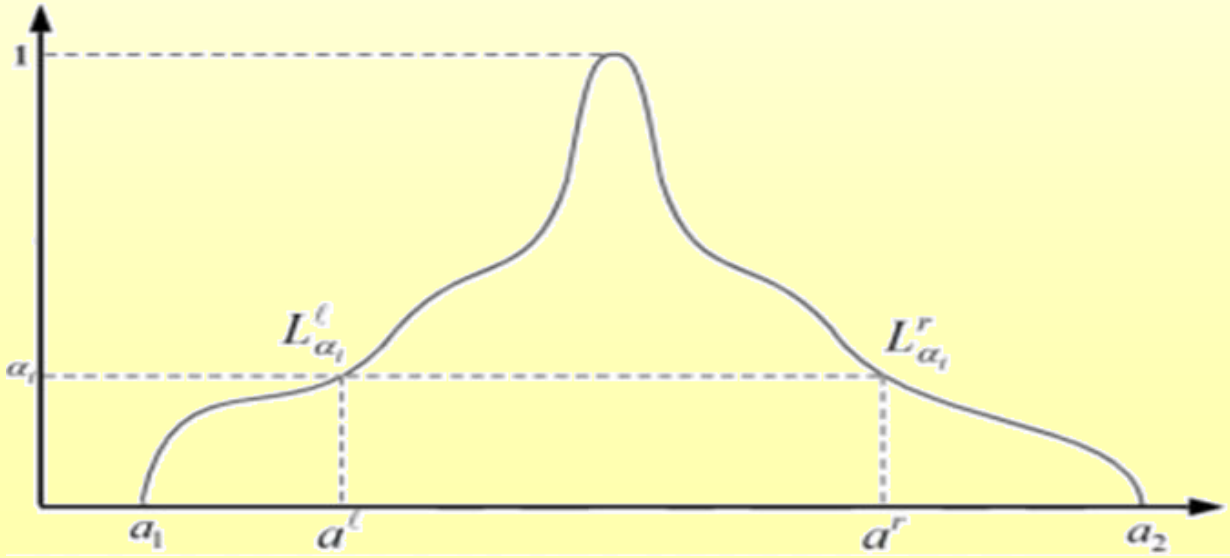
$$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_1}=\left[a_1,a^1\right]_{\alpha_1}\cup\left[a^1,a^2\right]_{\alpha_2}\cup\left[a^2,a_2\right]_{\alpha_1}$$

$$A_{\alpha_2\alpha_1\alpha_2}=\left[a_1,a^1\right]_{\alpha_2}\cup\left[a^1,a^2\right]_{\alpha_1}\cup\left[a^2,a_2\right]_{\alpha_2}$$



اعداد بازه‌ای بی‌نهایت سطحی





- یک عدد فازی را می‌توان به عنوان یک بسط از مفهوم بازه‌ها در نظر گرفت. به جای بررسی بازه‌ها فقط در یک سطح خاص و واحد، اعداد فازی بازه‌ها در سطوح مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرند، که هر یک از این سطوح با یکی از برشهای- عدد فازی متناظر است.
- یک بازه بسته از عدد فازی در سطح α $A_\alpha = \left[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \right]$
- عملیات جبری فازی:
- عملگرهای جبری از قبیل جمع و ضرب روی مجموعه $\square$ به روی مجموعه‌های فازی از اعداد حقیقی گسترش می یابند. این مجموعه‌های فازی دارای معنای کمی هستند و تحت شرایطی می‌توان آن ها را به عنوان اعداد یا بازه‌های فازی در نظر گرفت. چنین مفاهیمی کاربردهای زیادی در مسایل مهندسی کنترل، بهینه سازی، مسایل تصمیم گیری، و استدلال (استنتاج) تقریبی و آماره ها با اطلاعات غیردقیق دارند.