فصل سوم
عملیات روی مجموعه‌های فازی

دکتر محمد باقر منهاج

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

عناوین مورد بررسی

- نیاز عملیات روی مجموعه‌های فازی
- مبانی استدلال تقریبی فازی
- ویژگی‌های استدلال عرفی
- عملیات روی مجموعه‌ها
  - عملیات جبری
  - معرفی t-norm و s-norm

مبانی استدلال تقریبی فازی

- منطق:
  - روش درست اندیشیدن را مورد بحث قرار می‌دهد
  - فرآیند تفکر و اندیشه خصوصاً در استدلالات عرفی انسان‌ها
- استدلالات عرفی، جزء همان روابط و استنتاجات منطقی است، اگرچه ممکن است خطا در آن‌ها راه پیدا کند.
- انسان‌های عاقل همانند قوانین بدون علم منطق آن را نیز می‌پذیرند.
- استدلالات عرفی در صورت مدون و فرموله شدن، می توانند به طور سیستماتیک در بسیاری زمینه‌ها از جمله مهندسی و سیستم‌های مدیریتی به کار روند.
- تئوری مجموعه‌های فازی نوعی تکنیک مدل‌سازی قوی برای سیستم‌هایی با ویژگی‌های خاص ارائه می‌دهد.

مبانی استدلال تقریبی فازی

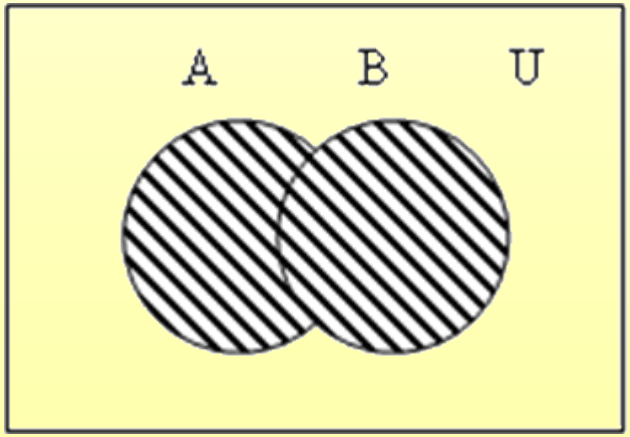
- همراه بودن استدلالات عرفی با قرائن
  - در ذهن شخص تصمیم‌گیرنده به تقدیر وجود دارد
- تقریبی بودن طبیعت استدلالات فازی
  - انسان‌ها همیشه با تقریب به نتیجه می‌رسند
- همراه بودن استدلالات عرفی با ساده‌سازی
  - عرف انسانی در استنتاج خود پارامترهای کم اهمیت را حذف می‌کند.
- بالا بودن سرعت دراستدلالات عرفی
  - به علت ساده بودن در مقایسه با استدلالات دقیق ریاضی از سرعت بیشتری برخوردارند.
- قطعی بودن احکام در استدلالات عرفی
  - در مقام توصیف، تقریبی و نا دقیق هستند اما در مقام حکم قطعی می باشند.

عملیات روی مجموعه‌ها

- ارتباط بین زیرمجموعه‌های مختلف مجموعه جهانی بر اساس عملیات مناسب از قبیل:
  - اجتماع
  - اشتراک
  - مکمل
- مجموعه‌ی غیرفازی کریسپ
  - اجتماع:

$$C = A \cup B = \{x | x \in A \quad or \quad x \in B\}$$

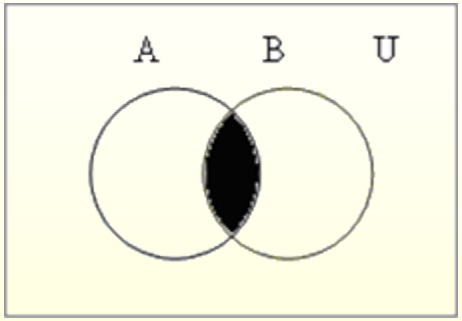
$$B, A : \mathrm{U} \rightarrow \{0 \ ,1\}$$



عملیات روی مجموعه‌ها

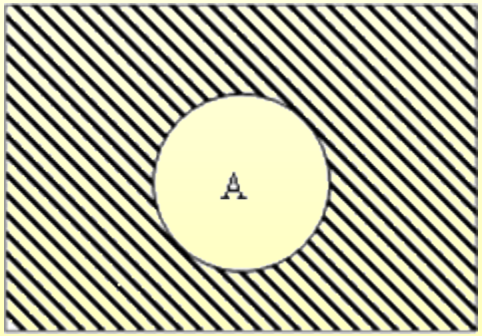
- اشتراک:

$$D = A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



- مکمل:

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \quad \wedge \quad x \notin A\}$$



- مکملِ مکمل یک مجموعه، خود مجموعه است و به این خاصیت، خاصیت نقیض مزدوج گویند.

عملیات روی مجموعه‌ها

- اختلاف:

$$E = A - B = A \cap \overline{B} = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

- اختلاف متقارن:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$$

- ضرب کارتزین:

$$A \times B = \{(a,b) \quad a \in A, \ b \in B\}$$

- مجموعه توان یک مجموعه:

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- توان -nام یک مجموعه:

$$A^n = A \times A \times \ldots\ldots \times A$$

-

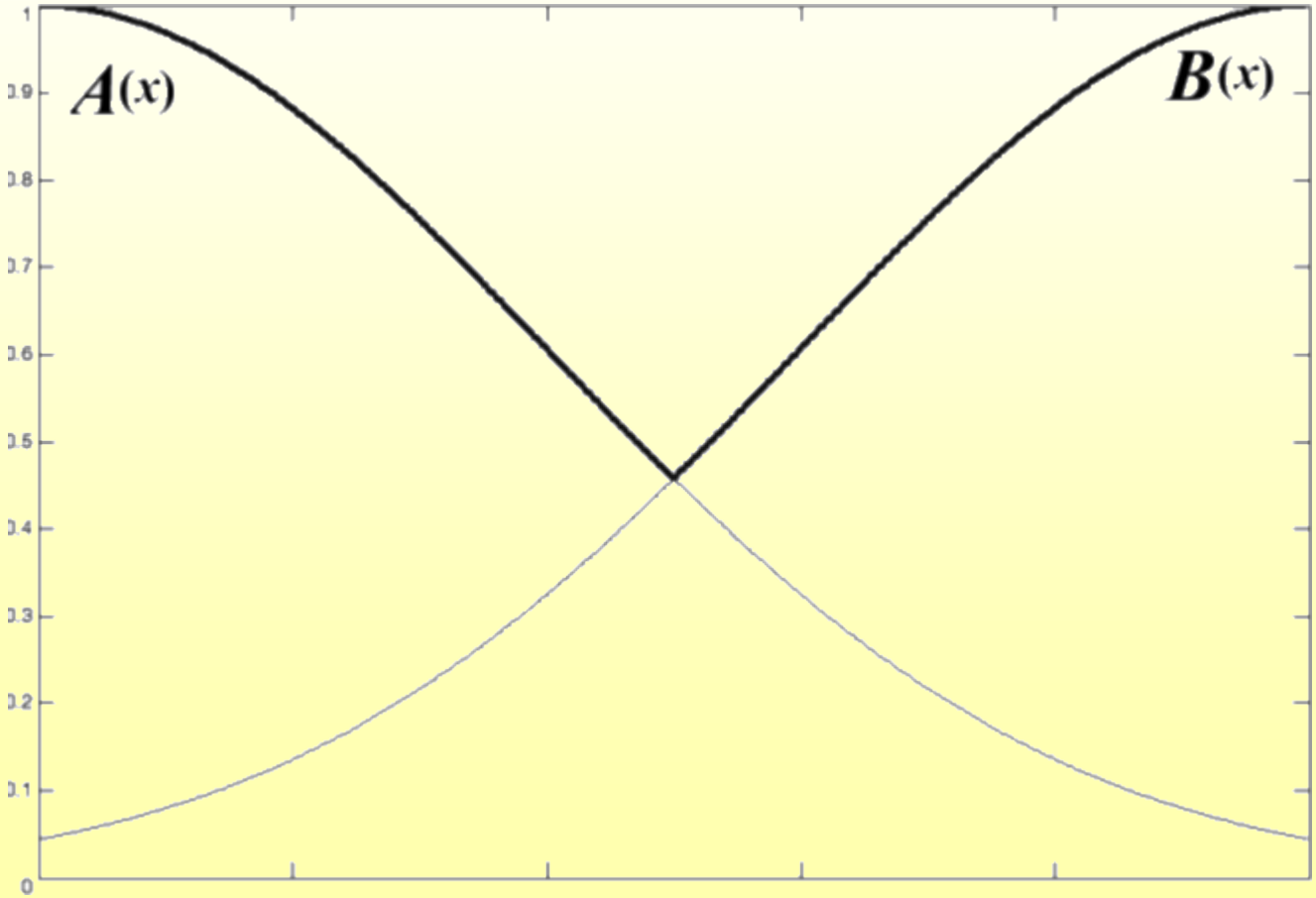
عملیات روی مجموعه‌ها

- خواص عملیات اجتماع، اشتراک و مکمل
- خاصیت شرکت‌پذیری $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
- خاصیت Idempotency $A\cap A = A, A\cup A = A$
- جابه‌جایی $A\cap B = B\cap A, A\cup B = B\cup A$
- خاصیت توزیعی $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C), A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
- قوانین دمورگان $\overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}, \overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$
- خاصیت جذب $A\cap(A\cup B) = A \;,\quad A\cup(A\cap B) = A$
- اصل دوال

عملیات روی مجموعه‌ها

- مجموعه فازی:
  - اجتماع:

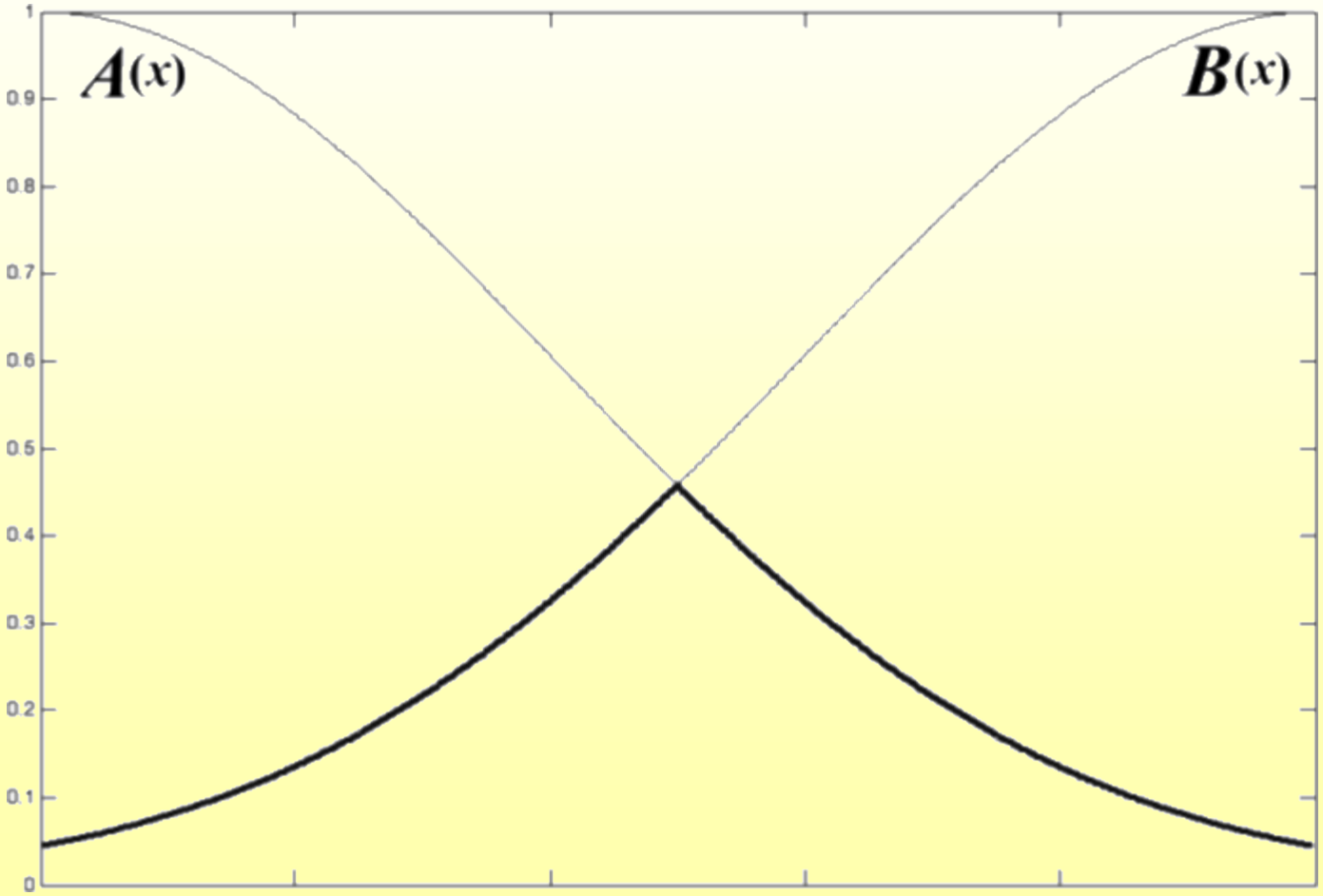
$$C(x) = A(x) \vee B(x)$$



عملیات روی مجموعه‌ها

- مجموعه فازی:
  - اشتراک:

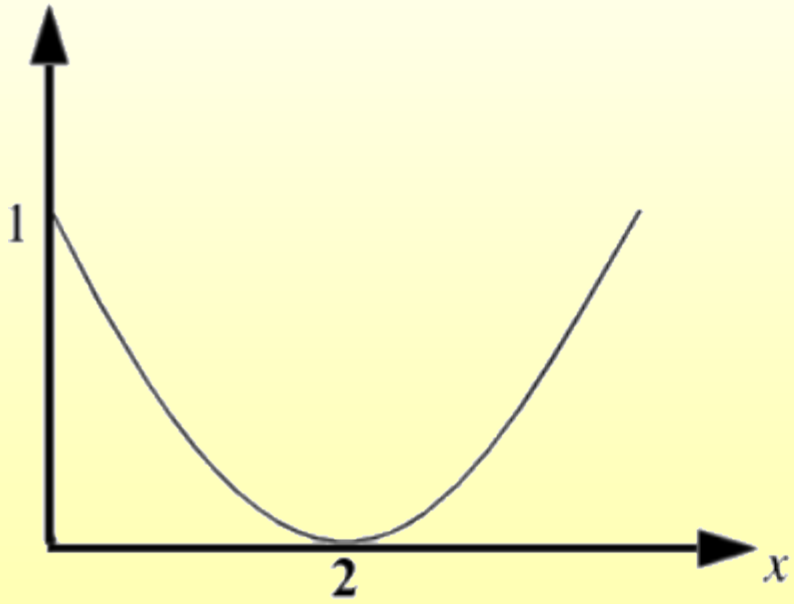
$$C(x) = A(x) \wedge B(x)$$

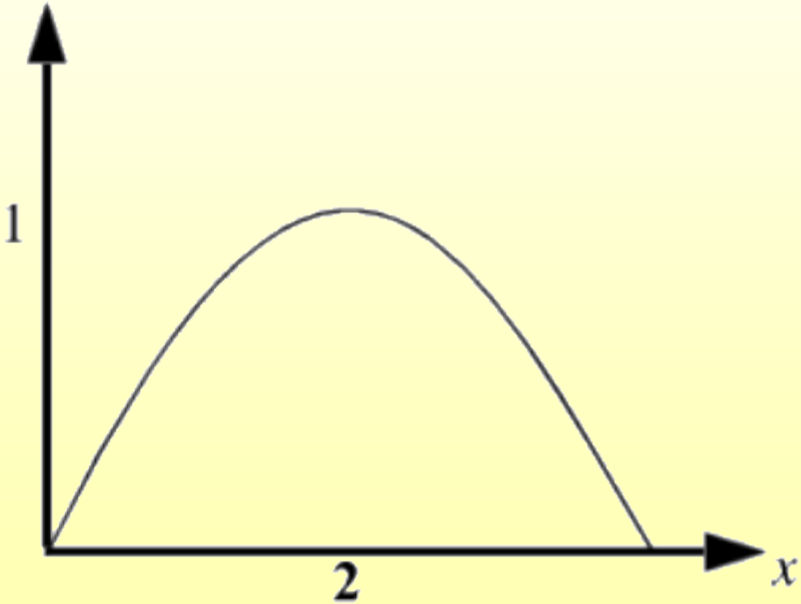


عملیات روی مجموعه‌ها

- مجموعه فازی:
  - مکمل:

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$$





عملیات روی مجموعه‌ها

- اشتراک:

$$C(x) = A(x) \wedge B(x)$$

  - نکته: اشتراک دو مجموعه فازی نرمال، لزوماً نرمال نیست.

- هم‌ارزی:

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A(x) = B(x) \quad \forall \quad x \in U$$

- دربرگیری:

$$A \subset B \Leftrightarrow \; A(x) \le B(x) \;\; , \;\; \forall x \in U$$

عملیات روی مجموعه‌ها

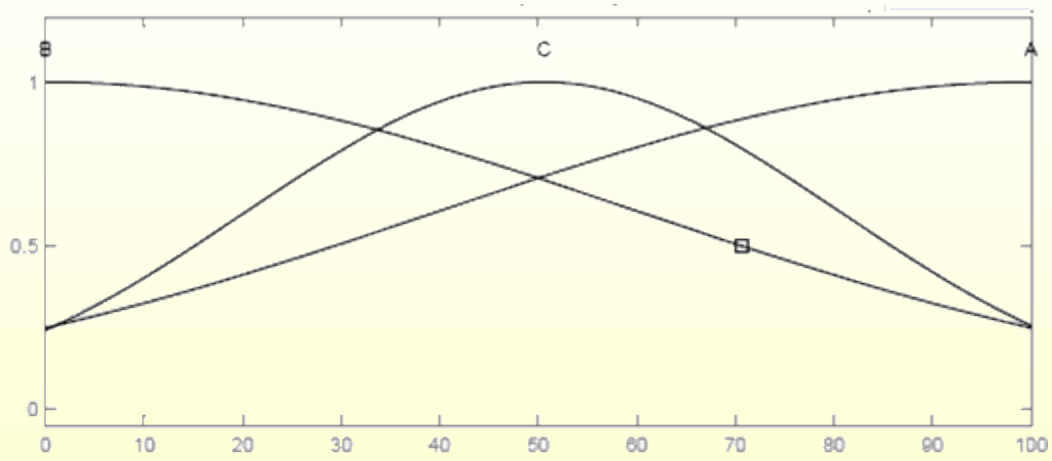
❖ نکته:

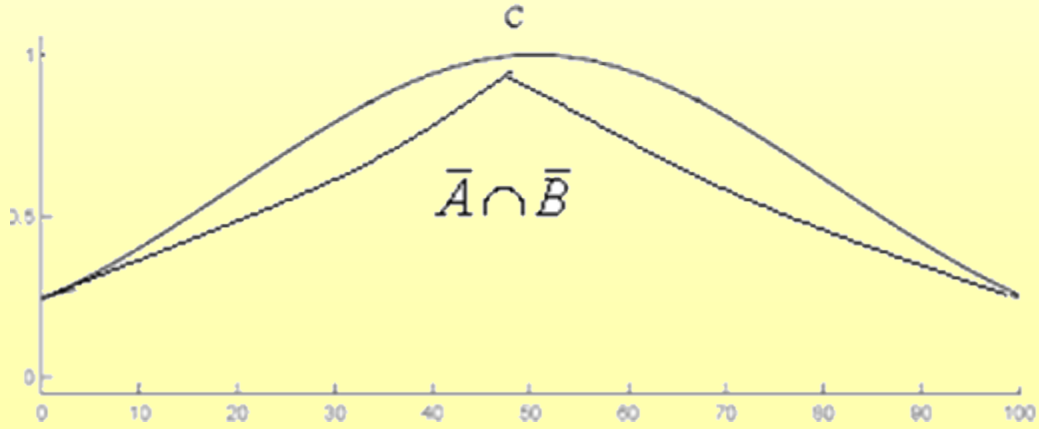
$A, B \in \Im(U)$

$A - Old$

$B - Young$

$C - Middle\ Age$



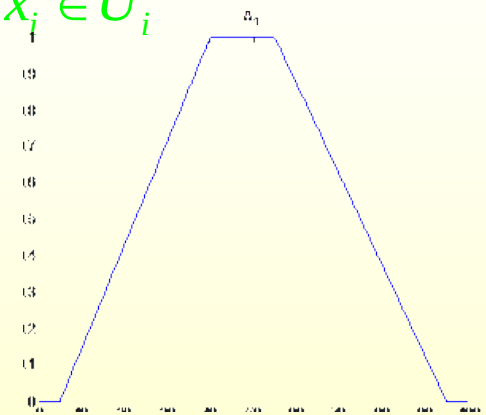


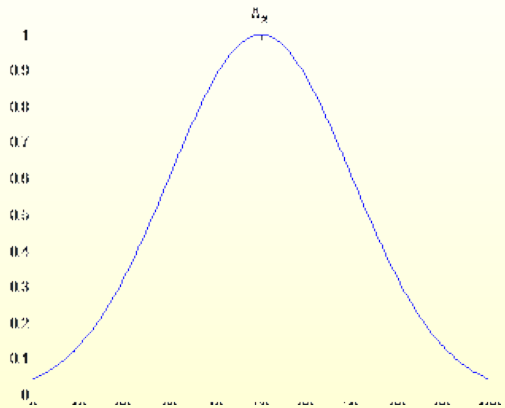
عملیات روی مجموعه‌ها

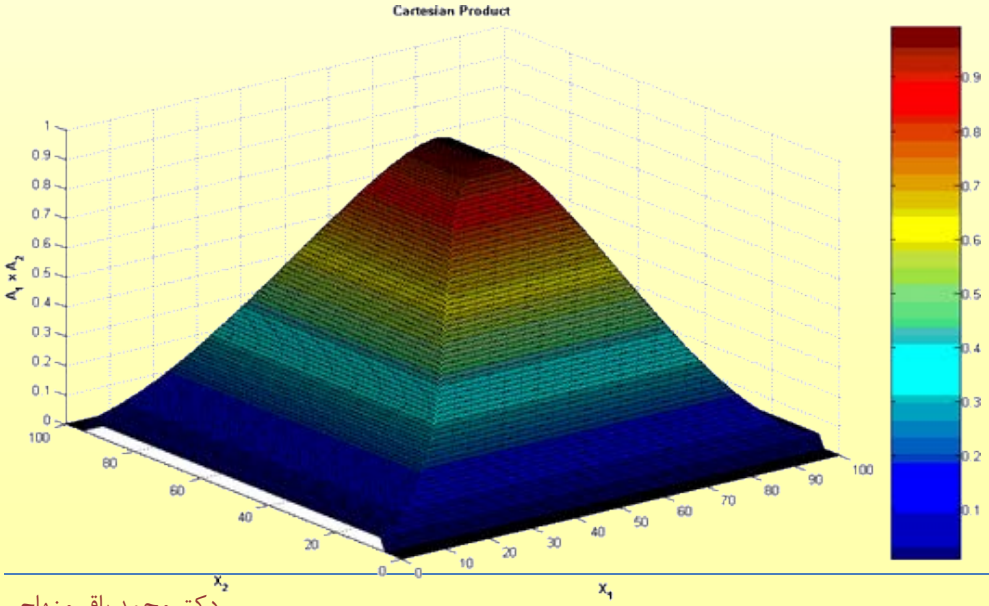
$$A = \mathop{X}_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \ldots \times A_n$$

❖ ضرب کارترین:

$$A(\underline{x}) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i) \Big| \quad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \ , \quad x_i \in U_i$$



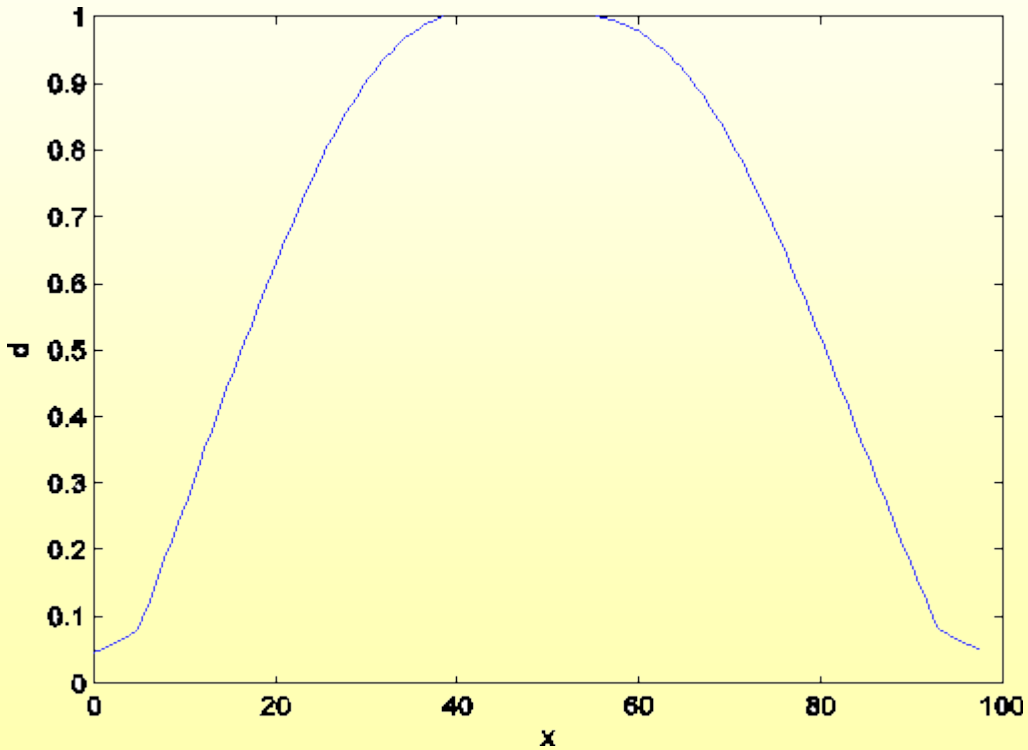




عملیات روی مجموعه‌ها

- جمع جبری:
- در مثال قبل:

$$D(x) = A(x) + B(x) - A(x)B(x) \quad , \quad \forall x \in U$$

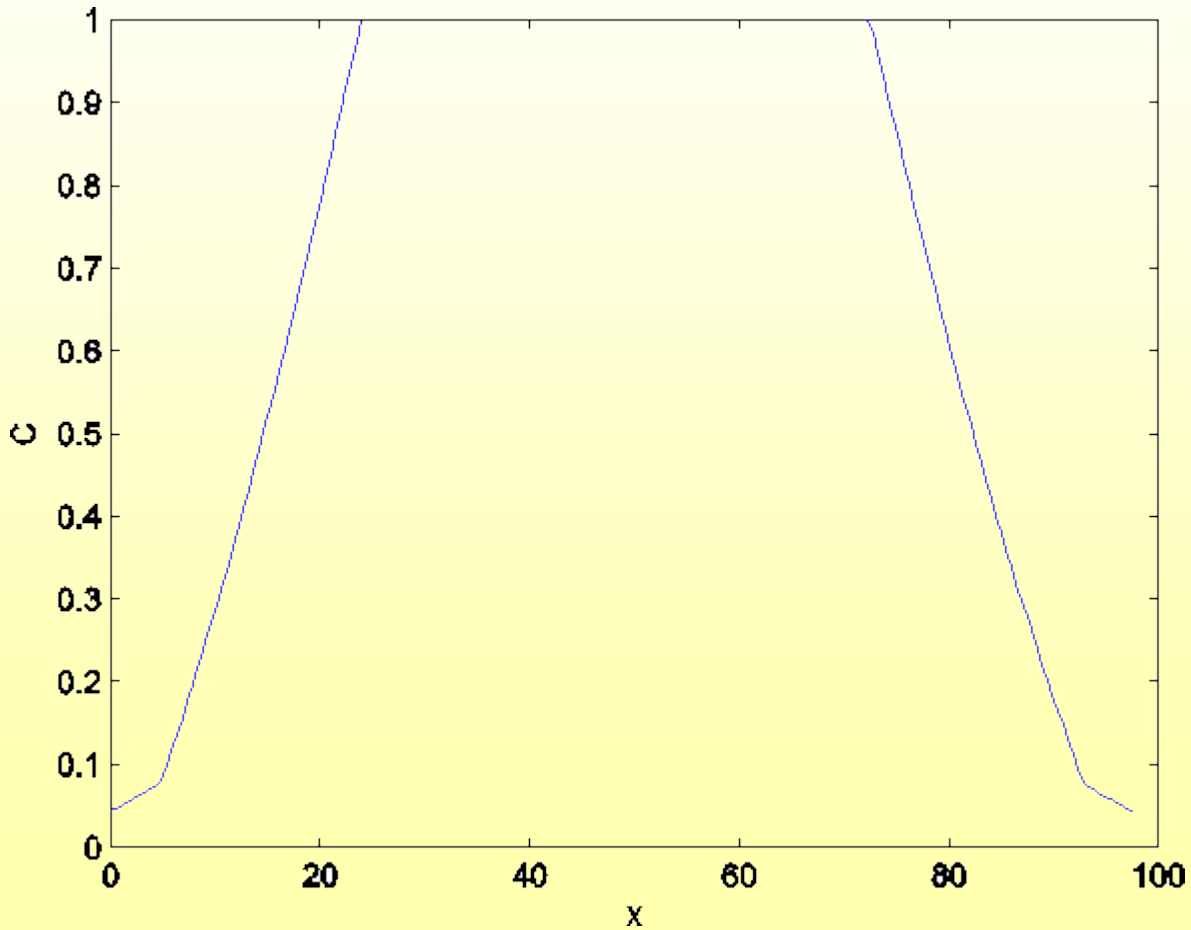


عملیات روی مجموعه‌ها

- جمع کراندار:

$$C = A \hat{+} B \Leftrightarrow C(x) = 1 \wedge (A(x) + B(x))$$

- در مثال قبل:



عملیات روی مجموعه‌ها

- تفریق کراندار:

$$C = A(-)B$$
$$C(x) = 0 \vee (A(x) - B(x))$$

- توان یک مجموعه فازی:

$$C = A^m$$
$$C(x) = \left(A(x)\right)^m \quad , \quad \forall x \in \mathrm{U}$$

- درجه‌ی برابری:

$$E(A,B) = \deg ree \quad (A = B) \overset{\Delta}{=} \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$$

- اشتراک فازی:

$$A, B \in \Im(\mathrm{U}):$$
$$C = (A \cap B) \Rightarrow C(x) = A(x) \hat{*} B(x)$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- نرم t (اشتراک):

  - شرایط مرزی

$$a \hat{*} 1 = a \ , \quad \forall \quad a \in [0,1]$$

  - خاصیت جابه‌جایی

$$a \hat{*} b = b \hat{*} a \ , \quad \forall \quad a,b \in [0,1]$$

  - خاصیت شرکت‌پذیری

$$(a \hat{*} b) \hat{*} \leq a \hat{*} (b \hat{*} c) \ , \quad \forall \quad a,b,c \in [0,1]$$

  - خاصیت یکنوایی

$$b \leq c \Rightarrow a \hat{*} b \leq a \hat{*} c \ , \quad \forall \quad a,b,c \in [0,1]$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- نرم s (اتحاد فازی):
- شرایط مرزی

$$s(a,0)=a$$

- شرط یکنوایی

$$a \le b \Rightarrow s(a,b) \le s(a,c)$$

- شرط جابه‌جایی

$$s(a,b)=s(b,a)$$

- شرط شرکت پذیری

$$s(s(a,b),c)=s(a,(b,c))$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- مثال نرم s :
- اتحاد استاندارد

$$a \hat{+} b = a \vee b$$

- جمع جبری

$$a \hat{+} b = a + b - ab$$

- جمع کراندار

$$a \hat{+} b = 1 \wedge (a + b)$$

- اتحاد الاستیک

$$a \hat{+}_d b = \begin{cases} a & , \quad b = 0 \\ b & , \quad a = 0 \\ 1 & , \quad \text{o.w.} \end{cases}$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- مکمل فازی:
- خواص اپراتور مکمل

$$\neg : [0,1] \to [0,1]$$

- **که تابع بایستی اصول زیر را ارضا کند:**
  - شرایط مرزی

$$\neg(0) = 1 \quad \text{و} \quad \neg(1) = 0$$

  - خاصیت یکنوایی

$$a \le b \Rightarrow \neg a \ge \neg b \quad , \quad \forall a,\ b \in [0,\ 1]$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- نرم عمومی‌تر t :

$$a \hat{*}_p b = 1 - \left[(1-a)^p + (1-b)^p - (1-a)^p.(1-b)^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad , \quad p \in \square$$

- حالت خاص وقتی $p = 1$

$$a \hat{*}_1 b = 1 - \left[(1-a) + (1-b) - (1-a) \quad (1-b) \right] = a.b$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- ترکیب عملگرها:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- مکمل فازی دوال:

$$\neg\left(a \hat{+} b\right) = \left(\neg a\right) \hat{*} \left(\neg b\right)$$

$$\neg\left(a \hat{*} b\right) = \left(\neg a\right) \hat{+} \left(\neg b\right)$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- سه‌تایی‌های دوال:

$$\left(a \wedge b \ , \ a \vee b \ , \ -\right)$$

$$\left(a.b \ , \ a+b-ab \ , \ -\right)$$

$$\left(0 \vee \left(a+b-1\right) \ , \ 1 \wedge \left(a+b\right) \ , \ -\right)$$

$$\neg\left(a \hat{*} b\right) = \left(\neg a\right) \hat{+} \left(\neg b\right)$$

عملیات روی مجموعه‌ها

- عملیات تجمعی:
- عملیاتی است که توسط آن چندین مجموعه فازی به شکل مطلوبی جهت ایجاد یک تک مجموعه فازی با هم ترکیب می‌شوند.
- عملیات متوسط‌گیری وزن‌دار:
- با فرض بردار وزن $\underline{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$ طوری‌که:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \ , \quad 0 \le w_i \le 1 \ , \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- تابع متوسط وزن‌گیری وزن دار عبارتست از:

$$g_w(\underline{a}) = \sum_{i=1}^{n} w_i m_i$$

- که m_i ، iامین بزرگترین عنصر در $\underline{a}$ می باشد.