انتگرال معین

انتگرال جملات مثلثاتی با توان زوج

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۱

AvaEducation16.blog.ir
AvaEducation16@gmail.com
@AvaEducation16
@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

حاصل انتگرال معین زیر کدام است؟

$$\int_0^{\pi} \sin^6 x \cos^4 x \mathrm{d}x$$

۱) $\frac{\pi}{256}$ ۲) $\frac{\pi}{128}$

۳) $\frac{3\pi}{256}$ ۴) $\frac{\pi}{64}$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: در انتگرال توان‌های زوج باید جمله مثلثاتی بر حسب نصف قوس نوشته شود. رابطه اصلی در این نوع مسائل با نکته زیر نمایش داده می‌شود.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

نکته دوم، صفر بودن انتگرال جملات مثلثاتی با توان کلی فرد روی یک دوره تناوب است.

$$\int_T \sin^n x \cos^m x = 0, \quad m+n = 2k+1$$

در رابطه فوق، باید دوره تناوب به درستی تعیین گردد. معمولا ضرایب صحیح π برای $\sin nx$ یا $\cos nx$ یک دوره تناوب هستند.

با استفاده از نکات فوق، حل انتگرال به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin^6 x \cos^4 x \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} (\sin x \cos x)^4 \sin^2 x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16} \int_0^{\pi} (2 \sin x \cos x)^4 \sin^2 x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16} \int_0^{\pi} \sin^4 2x \sin^2 x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16} \int_0^{\pi} \sin^4 2x (\frac{1-\cos 2x}{2}) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{32} \int_0^{\pi} (\sin^4 2x - \sin^4 2x \cos 2x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{32} \int_0^{\pi} \sin^4 2x \mathrm{d}x - \frac{1}{32} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^4 2x \cos 2x \mathrm{d}x}_{=0} \\
&= \frac{1}{32} \int_0^{\pi} \sin^4 2x \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{32} \int_0^{\pi} (\frac{1-\cos 4x}{2})^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{128} \int_0^{\pi} (1-\cos 4x)^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{128} \int_0^{\pi} (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{128} \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 4x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{128} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x + \frac{1}{256} \int_0^{\pi} (1 + \cos 8x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{128} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x + \frac{1}{256} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{128} + \frac{\pi}{256} \\
&= \frac{3\pi}{256}
\end{aligned}$$

گزینه ۳ صحیح است.

یکی از بدترین استفاده‌ها از زمان این
است که کاری را بسیار خوب انجام دهید
در حالیکه اصلاً نیاز به انجام آن نبود!

برایان تریسی

AvaEducation16.blog.ir
@AvaEducation16
@AvaEducation16
AvaEducation16@gmail.com