نکته : صورت سوالات بصورت واضح در پاسخنامه آمده.

math-teacher.blog.ir

مسئله ۱. فرض کنید C منحنی فصل مشترک دو رویهٔ

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 1 \qquad \text{و} \qquad x^2 + y^2 = z$$

باشد. مطلوب است $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$، $\mathbf{B}$ و تاب و انحناء (۱۲ نمره)

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۲. مقدار ثابت c را به گونه‌ای بیابید که صفحات مماس بر دو کرهٔ زیر

$$(x-c)^2+y^2+z^2=3 \qquad \text{و} \qquad x^2+(y-1)^2+z^2=1$$

در نقطه‌ای از فصل مشترک دو کره بر هم عمود باشند. (۱۲ نمره)

حل.

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۳. فرض کنید
$$f(x,y)=\begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
، ابتدا پیوستگی $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ در نقطهٔ $(0,0)$ را بررسی کرده و سپس $f_{xy}(0,0)$ و $f_{yx}(0,0)$ را محاسبه کنید. (۱۴ نمره)

حل:

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۴. فرض کنید $f(2xy - x^2, y^2 + z^3) = 0$ و z تابعی از x و y است و مشتقات جزیی f مخالف صفر باشد. نشان دهید(۱۲ نمره)

$$6xz^2\frac{\partial z}{\partial x} = (2y - 2x)\left(2y + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

حل.

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۵. میدان اسکالر مشتق‌پذیر $f(x,y)$ در نقطه (۱,۲) و در جهت (۱,۲) به (۲,۲) دارای مشتق سویی ۲ و درجهت (۱,۲) به (۱,۱) دارای مشتق سویی ۲ است. مشتق سویی f را در جهت (۱,۲) به (۴,۶) را محاسبه کنید. **(۱۲ نمره)**

حل.

math-teacher.blog.ir

« پاسخ میانترم ریاضی ۲ »

1) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2+1 \\ x^2+y^2=z \end{cases} \longrightarrow z=\frac{1}{4}z^2+1 \longrightarrow z^2-4z+4=0 \longrightarrow \boxed{z=2}$

$\longrightarrow x^2+y^2=2 \quad \begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \end{cases} \longrightarrow \vec{r}_{(t)}=(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, 2)$

$\vec{v}_{(t)}=(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)$

$\vec{a}_{(t)}=(-\sqrt{2}\cos t, -\sqrt{2}\sin t, 0)$

$\vec{a}'_{(t)}=(\sqrt{2}\sin t, -\sqrt{2}\cos t, 0)$

$(\vec{v}\times\vec{a})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sqrt{2}\sin t & \sqrt{2}\cos t & 0 \\ -\sqrt{2}\cos t & -\sqrt{2}\sin t & 0 \end{vmatrix}=(0,0,2)$

$|\vec{v}\times a|=2 \qquad |\vec{v}|=\sqrt{2\sin^2 t+2\cos^2 t}=\sqrt{2}$

$K=\frac{|\vec{v}\times a|}{|\vec{v}|^3}=\frac{2}{\sqrt{2}^3}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

نکته: با توجه به معادله $x^2+y^2=2$ هم می‌شد فهمید که شعاع $\sqrt{2}$ هست و انحنا $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\tau=\frac{(\vec{v}\times a)\cdot a'}{|\vec{v}\times a|^2}=\frac{(0,0,2)\cdot(\sqrt{2}\sin t,-\sqrt{2}\cos t,0)}{2^2}=\boxed{0}$

نکته: با توجه به اینکه منحنی در صفحه xy قرار دارد هم می‌شد فهمید که مسطح است و فاقد تاب.

$\vec{T}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\boxed{\frac{(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0)}{\sqrt{2}}}$

$\vec{B}=\frac{\vec{v}\times\vec{a}}{|\vec{v}\times a|}=\boxed{\frac{(0,0,2)}{2}}$

$\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix}=\boxed{(-\cos t, -\sin t, 0)}$

« پاسخ میانترم ریاضی ۲ »

$$ (2)\quad \begin{cases} (x-c)^2+y^2+z^2=3 \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1 \end{cases} $$

مقدار c را طوری بیابید که صفحات مماس بر دو کره در نقطه ای از فصل مشترک برهم عمود باشند.

نکته : وقتی دو صفحه برهم عمودند که بردارهای نرمال آن ها برهم عمود باشند.

گرادیان یعنی بردار عمود بر سطح.

بنابراین کافیست گرادیان آن ها برهم عمود باشند $\longrightarrow \vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g = 0$

$$ \xrightarrow{f=0} f:(x-c)^2+y^2+z^2-3=0 \longrightarrow \vec{\nabla}f=(2(x-c),2y,2z) $$

$$ \xrightarrow{g=0} g:x^2+(y-1)^2+z^2-1=0 \longrightarrow \vec{\nabla}g=(2x,2(y-1),2z) $$

$$ \xrightarrow[\text{اعمال شرط}]{\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}g=0} 4x(x-c)+4y(y-1)+4z^2=0 \longrightarrow \boxed{x^2-cx+y^2-y+z^2=0} \quad (I) $$

هدف یافتن c است. بنابراین باید سعی در حذف مقادیر x و y و z کنیم به کمک معادلات موجود.

$$ \xrightarrow[\text{حل دستگاه}]{\text{معادلات داده شده}} \begin{cases} \cancel{x^2}-2cx+c^2+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}=3 \\ \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}+\cancel{z^2}=\cancel{1} \end{cases} \longrightarrow \boxed{-2cx+c^2+2y=3} \quad (II) $$

اگر در معادله (I) بتوانیم z را حذف کنیم می توانیم معادلات (I) و (II) را ساده تر کنیم.

$$ \xrightarrow[\text{جایگذاری در (I)}]{z^2=1-x^2-(y-1)^2 \text{ از صورت سوال}} \cancel{x^2}-cx+\cancel{y^2}-y+\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}+2y-\cancel{1}=0 \longrightarrow y-cx=0 \longrightarrow \boxed{y=cx} $$

جایگذاری در معادله (II)

$$ -\cancel{2cx}+c^2+\cancel{2cx}=3 $$

$$ c^2=3 \longrightarrow \boxed{c=\pm\sqrt{3}} $$

• ابراهیم شاه ابراهیمی
فارغ التحصیل مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد
• معادلات دیفرانسیل ، ریاضی۱و۲
• ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

«پاسخ میانترم ریاضی ۲»

$$f(x,y)=\begin{cases} y\,\dfrac{x^2-y^2}{y^2+x^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

پیوستگی f_x و f_y ؟

$f_{xy}(0,0)$ و $f_{yx}(0,0)$ ؟

ابتدا ضابطه $f_x(x,y)$ و $f_y(x,y)$ را می‌یابیم.

$$f(x,y)\overset{\text{ساده سازی}}{=}\begin{cases} \dfrac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \longrightarrow f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0-0}{h}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر}}=0$$

برای چک کردن پیوستگی $f_x(x,y)$ باید حد آن را بیابیم و سپس با مقدار تابع آن که صفر است مقایسه کنیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{y=mx}\lim_{x\to0}\frac{4x(mx)^3}{(x^2+m^2x^2)^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=mx}}\frac{4m^3\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2}=\boxed{\frac{4m^3}{(1+m^2)^2}}$$

حد ندارد.

$\boxed{\text{بنابراین } f_x(x,y) \text{ در مبدأ پیوسته نیست.}}$

$$\xrightarrow{\text{از ضابطه سوال}} f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ -1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=-1$$

• ابراهیم شاه ابراهیمی
فارغ التحصیل مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

برای چک کردن پیوستگی $f_y(x,y)$ باید حد آن را بیابیم و سپس با مقدار تابع آن که ۱- است مقایسه کنیم.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y)=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}\ \xrightarrow{y=mx}\lim_{\substack{x\to0\\y=mx}}\frac{x^4-4m^2x^4-m^4x^4}{(x^2+m^2x^2)^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=mx}}\frac{\cancel{x^4}(1-4m^2-m^4)}{\cancel{x^4}(1+m^2)^2}=\boxed{\frac{1-4m^2-m^4}{(1+m^2)^2}}$$

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد
• معادلات دیفرانسیل ، ریاضی۱و۲
• ریاضی مهندسی ، محاسبات

حد ندارد

بنابراین $f_y(x,y)$ هم در مبدأ پیوسته نیست.

$$\boxed{f_{xy}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x,y+h) - f_x(x,y)}{h}}$$ فرمول

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \frac{\text{۰ مطلق}}{\text{۰ حدی}} = \boxed{0}$$

$$\boxed{f_{yx}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x+h,y) - f_y(x,y)}{h}}$$ فرمول

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^4} - (-1)}{h} = \frac{2}{0} \begin{cases} 0^+ \to \boxed{\infty} \\ 0^- \to \boxed{-\infty} \end{cases}$$

$\boxed{\text{حد ندارد}}$

۸ پاسخ میانترم ریاضی۲

ابراهیم شاه ابراهیمی

$$f(\underbrace{2xy-x^2}_{u},\ \underbrace{y^2+z^3}_{v})=0$$

z تابعی از x و y

اثبات کنید: $6xz^2\frac{\partial z}{\partial x}=(2y-2x)(2y+3z^2\frac{\partial z}{\partial y})$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(2xy-x^2,\ y^2+z^3)\right]=0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left[f(2xy-x^2,\ y^2+z^3)\right]=0$$

[redacted]

«پاسخ مباحثه ریاضی ۲»

«ابراهیم شاه ابراهیمی»

$D_{\vec{\lambda}_{(u)}} f(1,2) = ?$

فرض $\begin{cases} D_{AB} f(1,2) = 2 & AB\ (1,2) \to (2,2) \\ D_{AC} f(1,2) = -2 & AC\ (1,2) \to (1,1) \end{cases}$

$\boxed{D_u = \vec{\nabla}_f \cdot \vec{\lambda}_u}$

فرمول

$AB = (1,0)$

$AC = (0,-1)$

$\begin{cases} \vec{\nabla}_f(1,2) \cdot (1,0) = 2 \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \\ \vec{\nabla}_f(1,2) \cdot (0,-1) = -2 \to \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2 \end{cases}$

اندیس

$\boxed{\vec{\nabla}_f(1,2) = (2,2)}$

$D_{\lambda_{(u)}} f(1,2) = \vec{\nabla}_f \cdot \vec{\lambda}_u$

$= (2,2) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \boxed{\frac{14}{5}}$

$\boxed{\begin{array}{l} u\ (1,2) \to (4,6) \\ u = (3,4) \to \lambda_a = \left(\dfrac{3,4}{\sqrt{25}}\right) \end{array}}$

• ابراهیم شاه ابراهیمی

فارغ التحصیل مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد

• معادلات دیفرانسیل ، ریاضی۱و۲

• ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی