قسمت ششم

تبدیلات ریاضی درمهندسی برق

تبدیلات ریاضی درمهندسی برق

هدف از استفاده تبدیل های ریاضی یکی از موارد زیر میباشد:

1. مجزا کردن(**Decoupled**) متغییرها
2. تسهیل حل معادلات با ضرایب متغییر با زمان
3. ارجاع متغییرها به یک چارچوب مشترک

تبدیلات بکار رفته در مهندسی برق

۱. تبدیل فورتسکیو(مولفه های متقارن)

۲. تبدیل کلارک

۳. تبدیل کنکوردیا

۴. تبدیل پارک

۵. تبدیل استنلی

تبدیل فورتسکیو

برای مطالعه شرایط نا متعادل در سیستمهای قدرت و اجزا آن نظیر ژنراتورها، ترانسفورماتورها و موتورهای الکتریکی بکار میرود. در واقع یک سیستم نامتعادل سه فاز به سه سیستم متعادل سه فاز تبدیل و محاسبات در این فضا انجام میشود.

$$[f_{012}] = [T_{012}]\,[f_{abc}]$$

$$[T_{012}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

$$a = e^{\frac{2p}{3} j}$$

تبدیل معکوس

$$[f_{abc}]=\underline{[T_{012}]}^{-1}[f_{012}] \longrightarrow [T_{012}]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^{2} & a\\ 1 & a & a^{2}\end{bmatrix}$$

در روابط مربوط به تبدیل f میتواند ولتاژ، جریان یا شار باشد.

تبدیل کلارک

یک تبدیل سه فاز به دو فاز می باشد و دارای یک مولفه هموپلار است.

تبدیل معکوس

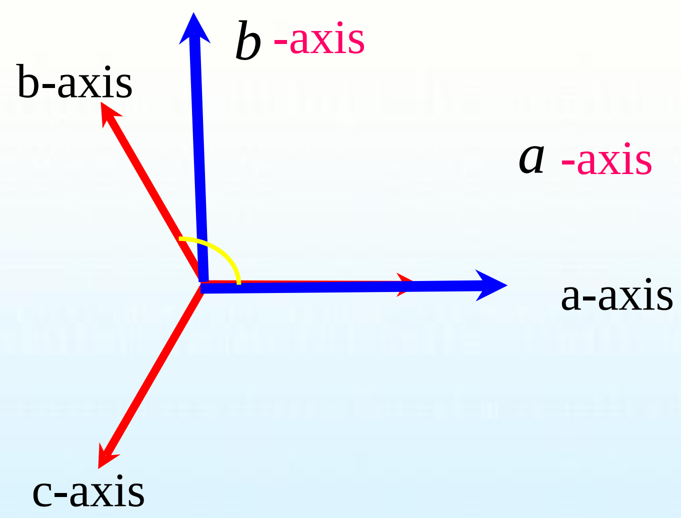
$$[f_{ab0}] = [T_{ab0}][f_{abc}]$$

$$[T_{ab0}] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[f_{abc}] = [T_{ab0}]^{-1}[f_{ab0}]$$

$$[T_{ab0}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

نحوه تبدیل سه فاز به دو فاز



مثال

توان لحظه ای یک سیستم سه فاز رابا شرایط بار اهمی در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} V_a = V_m \sin wt \\ V_b = V_m \sin(wt - \frac{2p}{3}) \\ V_c = V_m \sin(wt + \frac{2p}{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_a = I_m \sin wt \\ i_b = I_m \sin(wt - \frac{2p}{3}) \\ i_c = I_m \sin(wt + \frac{2p}{3}) \end{cases}$$

در لحظه $wt = \frac{p}{2}$ توان لحظه ای سیستم برابر است با :

$$\begin{cases} V_a = V_m \\ V_b = -\frac{V_m}{2} \\ V_c = -\frac{V_m}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_a = I_m \\ i_b = \frac{-I_m}{2} \\ i_c = \frac{-I_m}{2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad p = \frac{3V_m I_m}{2}$$

در لحظه $wt = \frac{p}{2}$ ولتاژ وجریان لحظه ای تبدیل یافته توسط تبدیل کلارک وتوان لحظه ای مربوطه به شکل زیر میباشند :

$$\begin{cases} V_a = V_m \\ V_b = 0 \\ V_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_a = I_m \\ I_b = 0 \\ I_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$p = V_m I_m$$

تبدیل کنکوردیا

همان تبدیل کلارک است با این تفاوت که این تبدیل حافظ توان میباشد.
یک ماتریس تبدیل زمانی میتواند حافظ توان باشد که ماتریس متعامد باشد.
ماتریسی متعامد است که معکوس آن با ترانسپوزه آن برابر باشد .

$$[f_{\alpha\beta\mathbf{o}}]=\underline{[T_{\alpha\beta\mathbf{o}}]}[f_{abc}] \quad \longrightarrow \quad [T_{ab\mathbf{o}}]=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

در لحظه $wt = \frac{p}{2}$ ولتاژ وجریان لحظه ای تبدیل یافته همان سیستم قبلی توسط تبدیل کنکوردیا وتوان لحظه ای مربوطه به شکل زیر میباشند :

$$\begin{cases} V_a = \sqrt{\frac{3}{2}} V_m \\ V_b = 0 \\ V_c = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \qquad p = \frac{3}{2} V_m I_m$$

$$\begin{cases} i_a = \sqrt{\frac{3}{2}} I_m \\ i_b = 0 \\ i_0 = 0 \end{cases}$$

تبدیل n فازه به دو فازه

$$[f_{xy}] = [\underline{T(q)}][F_{1,2,3,\ldots n}]$$

$$T(q) = \frac{\sqrt{2}}{n}\begin{bmatrix} \cos\frac{p}{2}q & \cos(\frac{p}{2}q - a) & \cos[\frac{p}{2}q - (n-1)a] \\ \sin\frac{p}{2}q & \sin(\frac{p}{2}q - a) & \sin[\frac{p}{2}q - (n-1)a] \end{bmatrix}$$

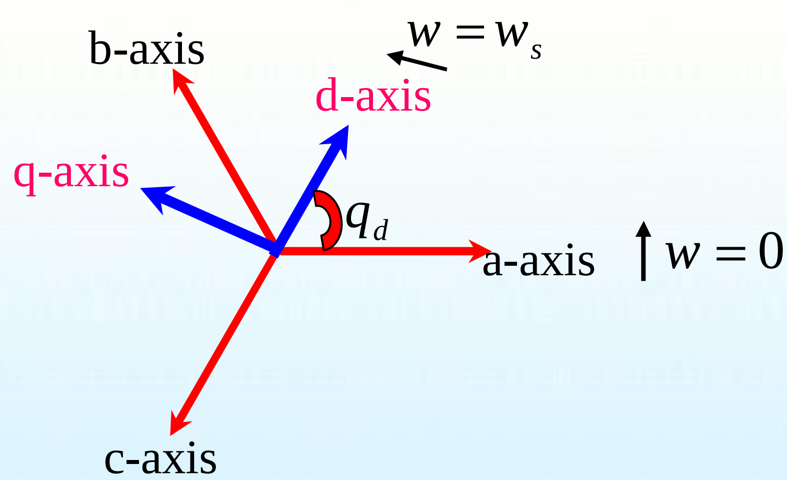
$$[F_{1,2,3,\ldots n}] = [T(q)]^{-1}[f_{xy}]$$

تبدیل پارک

- تاریخچه
- مزایا
- انواع بکار رفته

حالت اول

محور q 90 درجه جلوتر از محور d



ماتریس تبدیل

$$[F_{dq0}] = [T_{dq0}(q_d)][F_{abc}] = \begin{bmatrix} fd \\ fq \\ f\,0 \end{bmatrix} \rightarrow [T_{dq0}(q_d)] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q_d & \cos(q_d - \frac{2p}{3}) & \cos(q_d + \frac{2p}{3}) \\ -\sin q_d & -\sin(q_d - \frac{2p}{3}) & -\sin(q_d + \frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

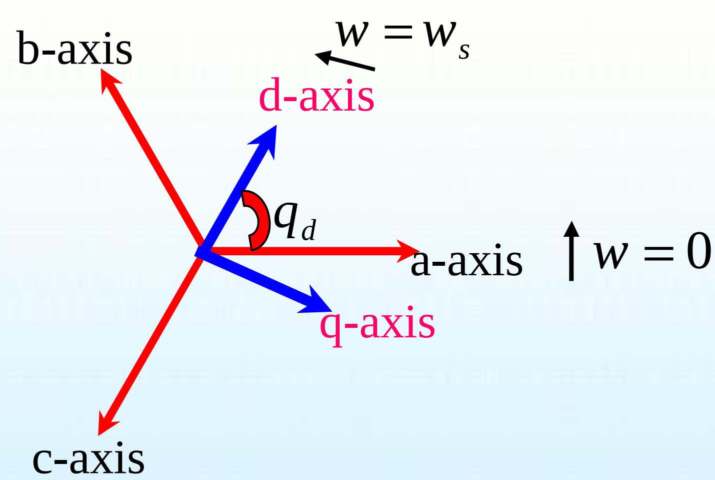
$$q_d = wt + q\,0$$

تبدیل معکوس

$$[F_{abc}] = [T_{dq0}(q_d)]^{-1}[F_{dq0}] \rightarrow [T_{dq0}(q_d)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q_d & -\sin q_d & 1 \\ \cos(q_d - \frac{2p}{3}) & -\sin(q_d - \frac{2p}{3}) & 1 \\ \cos(q_d + \frac{2p}{3}) & -\sin(q_d + \frac{2p}{3}) & 1 \end{bmatrix}$$

حالت دوم

محور q 90 درجه عقبتر از محور d



ماتریس تبدیل

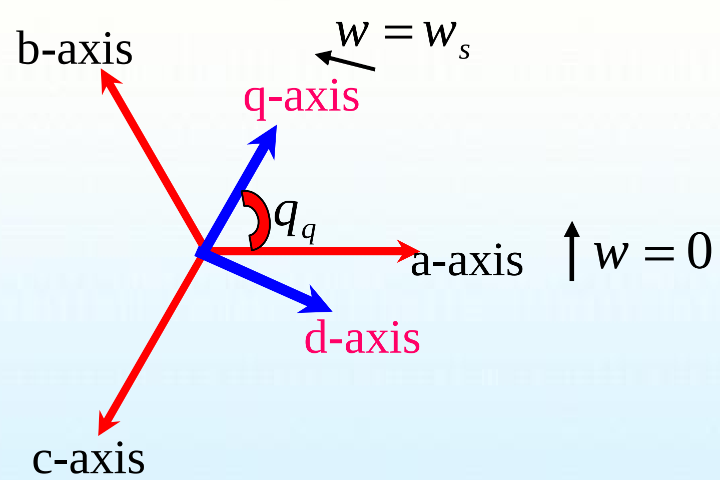
$$[F_{dq0}] = [T_{dq0}(q_d)][F_{abc}] = \begin{bmatrix} fd \\ fq \\ f\,0 \end{bmatrix} \rightarrow [T_{dq0}(q_d)] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q_d & \cos(q_d - \frac{2p}{3}) & \cos(q_d + \frac{2p}{3}) \\ \sin q_d & \sin(q_d - \frac{2p}{3}) & \sin(q_d + \frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تبدیل معکوس

$$[F_{abc}] = [T_{dq0}(q_d)]^{-1}[F_{dq0}] \rightarrow [T_{dq0}(q_d)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos q_d & \sin q_d & 1 \\ \cos(q_d - \frac{2p}{3}) & \sin(q_d - \frac{2p}{3}) & 1 \\ \cos(q_d + \frac{2p}{3}) & \sin(q_d + \frac{2p}{3}) & 1 \end{bmatrix}$$

حالت سوم

این حالت مانند قسمت اول است با این تفاوت که جای محورq با d عوض میشود.



ماتریس تبدیل

$$[F_{qd0}]=[T_{qd0}(q_q)][F_{abc}]=\begin{bmatrix} fq \\ fd \\ f\,\mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow [T_{qd0}(q_q)]=\frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q_q & \cos(q_q-\frac{2p}{3}) & \cos(q_q+\frac{2p}{3}) \\ \sin q_q & \sin(q_q-\frac{2p}{3}) & \sin(q_q+\frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تبدیل معکوس

$$[F_{abc}]=[T_{qd0}(q_q)]^{-1}[F_{qd0}] \rightarrow [T_{qd0}(qq)]^{-1}=\begin{bmatrix} \cos q_q & \sin q_q & 1 \\ \cos(q_q-\frac{2p}{3}) & \sin(q_q-\frac{2p}{3}) & 1 \\ \cos(q_q+\frac{2p}{3}) & \sin(q_q+\frac{2p}{3}) & 1 \end{bmatrix}$$

تبدیل یک سیستم سه فاز سینوسی

$$[V_{abc}]=\begin{bmatrix} V_m \cos wt \\ V_m \cos(wt-\frac{2p}{3}) \\ V_m \cos(wt+\frac{2p}{3}) \end{bmatrix}$$

$$[V_{qd0}]=[T_{qd0}][V_{abc}]$$

$$[V_{qd0}]=\frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q_q & \cos(q_q-\frac{2p}{3}) & \cos(q_q+\frac{2p}{3}) \\ \sin q_q & \sin(q_q-\frac{2p}{3}) & \sin(q_q+\frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \cos wt \\ V_m \cos(wt-\frac{2p}{3}) \\ V_m \cos(wt+\frac{2p}{3}) \end{bmatrix}$$

تبدیل یک سیستم سه فاز سینوسی

$$[V_{qd0}] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q_q & \cos(q_q - \frac{2p}{3}) & \cos(q_q + \frac{2p}{3}) \\ \sin q_q & \sin(q_q - \frac{2p}{3}) & \sin(q_q + \frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_m \cos wt \\ V_m \cos(wt - \frac{2p}{3}) \\ V_m \cos(wt + \frac{2p}{3}) \end{bmatrix}$$

$$[V_{qd0}] = \frac{2V_m}{3}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\cos(q_q - wt) \\ \frac{-3}{2}\sin(wt - q_q) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[V_{qd0}] = V_m\begin{bmatrix} \cos(q_q - wt) \\ \sin(q_q - wt) \\ 0 \end{bmatrix}$$

تبدیل یک سیستم سه فاز سینوسی

$$V_{qd0} = V_m \begin{bmatrix} \cos(q_q - wt) \\ \sin(q_q - wt) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_q = wt + q_0 \longrightarrow V_{qd0} = V_m \begin{bmatrix} \cos q_0 \\ \sin q_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

انتقال توان در تبدیل پارک

$$p_{abc} = [V_{abc}]^T [i_{abc}]$$

$$[V_{abc}] = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \qquad [i_{abc}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

$$[V_{qd0}] = [T_{qd0}][V_{abc}]$$

$$[V_{abc}] = [T_{qd0}]^{-1}[V_{qd0}]$$

$$\Rightarrow \quad p_{abc} = \left([T_{qd0}]^{-1}[V_{qd0}]\right)^T \left([T_{qd0}]^{-1}[i_{qd0}]\right)$$

از طرفی $\longrightarrow$

$$[T_{qd0}(qq)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos qq & \sin qq & 1 \\ \cos(qq - \frac{2p}{3}) & \sin(qq - \frac{2p}{3}) & 1 \\ \cos(qq + \frac{2p}{3}) & \sin(qq + \frac{2p}{3}) & 1 \end{bmatrix}$$

& $\longrightarrow$

$$\left([T_{qd0}(q_q)]^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \cos qq & \cos(qq - \frac{2p}{3}) & \cos(qq + \frac{2p}{3}) \\ \sin qq & \sin(qq - \frac{2p}{3}) & \sin(qq + \frac{2p}{3}) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه به دست خواهیم آورد $\Rightarrow$

$$\left([T_{qd0}]^{-1}\right)^T [T_{qd0}]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

پس

$$p_{abc} = \frac{3}{2} V_q I_q + \frac{3}{2} V_d I_d + 3 V_0 I_0$$

این تبدیل حافظ توان نیست .

$$p_{abc} = [V_{qd0}]^T \left([T_{qd0}]^{-1}\right)^T [T_{qd0}]^{-1} [i_{qd0}]$$

اگر بخواهیم حافظ توان باشد:

$$\left([T_{qd0}]^{-1}\right)^T [T_{qd0}]^{-1} = [I]$$

$$\left([T_{qd0}]^{-1}\right)^T = [T_{qd0}] \quad \Rightarrow \quad [T_{qd0}]^{-1} = [T_{qd0}]^T$$

یعنی ترانهاده ماتریس با معکوس ان باید برابر باشد. به تعبیر دیگر باید ماتریس متعامد باشد.

تبدیل تعمیم یافته پارک (qd0)

$$[F_{qd0}]=[T_{qd0}(q)][F_{abc}]=\begin{bmatrix} fq \\ fd \\ f\,0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad [T_{qd0}(q)]=\frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos q & \cos(q-\frac{2p}{3}) & \cos(q+\frac{2p}{3}) \\ \sin q & \sin(q-\frac{2p}{3}) & \sin(q+\frac{2p}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

سرعت چرخش محور **q** سرعتی دلخواه (سنکرون،غیر سنکرون یا صفر) است