در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۱. فرض کنید C منحنی $\mathbf{r}(t) = \langle \cosh t, \sinh t, t \rangle$ است. مطلوب است بردارهای $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ و مقادیر انحناء و تاب در نقطهٔ متناظر با $t = 0$. (۲۵ نمره)

حل.

در این قسمت چیزی ننویسید:
شماره آزمون:

مسئله ۲. تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^3}{|x|+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

الف) پیوستگی تابع را در مبداء بررسی کنید. (۱۰ نمره)

ب) آیا مشتقات جزیی $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$ وجود دارند؟ در صورت وجود آنها را تعیین کنید. (۱۰ نمره)

حل.

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۳. فرض کنید z تابعی از x و y بوده و $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z+xy}{x}\right) = 0$ تابعی با مشتقات جزیی مرتبه اول ناصفر باشد. حاصل عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ را به‌دست آورید. (۱۵ نمره)

حل.

در این قسمت چیزی ننویسید:

شماره آزمون:

مسئله ۴. الف) رویهٔ $z = x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۵$ را رسم کنید. (۵ نمره)
ب) مشتق سویی (جهتی) تابع $f(x, y, z) = x^۲ - ۵xy + \frac{۳}{۸}z^۲$ را در امتداد بردار عمود بر رویهٔ داده شده در قسمت (الف) در نقطهٔ $(-۱, ۲, ۰)$ بیابید. (۱۵ نمره)

حل.

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پاسخ

۱- بردارهای N و B و T و تاب و انحنا در $t=0$ ؟

$r(t)=(\cosh t, \sinh t, t)$

$V(t)=(\sinh t, \cosh t, 1) \xrightarrow{t=0} (0,1,1) \rightarrow |V|=\sqrt{2}$

$a(t)=(\cosh t, \sinh t, 0) \rightarrow (1,0,0)$

$a'(t)=(\sinh t, \cosh t, 0) \rightarrow (0,1,0)$

$$V\times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -1) \rightarrow |V\times a| = \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{انحنا}} K=\frac{|V\times a|}{|V|^3}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^3}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{تاب}} \tau=\frac{(V\times a)\cdot a'}{|V\times a|^2}=\frac{(0,+1,-1)\cdot(0,1,0)}{(\sqrt{2})^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$T=\frac{V}{|V|}=\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} \qquad B=\frac{V\times a}{|V\times a|}=\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$$

$$N=B\times T=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}=(1,0,0)$$

پاسخنامه آزمون میانترم ریاضی ۲ - ۶ اردیبهشت ۹۴

#پاسخ ۲-
الف) بررسی پیوستگی در مبدأ
ب) بررسی وجود f_x , f_y در مبدأ

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^3}{|x|+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \to \left|\frac{x^2+y^3}{|x|+y^2}-0\right|<\varepsilon \to \frac{|x^2+y^3|}{\big||x|+y^2\big|}<\varepsilon$$

$$\xrightarrow{|u+v|\leq|u|+|v|} \frac{|x|^2+|y|^3}{|x|+|y|^2}<\varepsilon \xrightarrow[|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}]{|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}} \frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2+(\sqrt{x^2+y^2})^3}{\sqrt{x^2+y^2}+(\sqrt{x^2+y^2})^2}<\varepsilon$$

$$\to \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,\cancel{\left(\sqrt{x^2+y^2}+(\sqrt{x^2+y^2})^2\right)}}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}+(\sqrt{x^2+y^2})^2}}<\varepsilon \to \sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \to \boxed{\delta<\varepsilon}$$

کافیست $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ انتخاب شود تا حد در $(0,0)$ برابر صفر شود.

بنابراین $f(0,0)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ پس تابع در مبدأ پیوسته است.

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{|h|}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2}{h|h|}\quad \begin{cases}h^+ \xrightarrow{\text{حد}} +1\\ h^- \xrightarrow{\text{حد}} -1\end{cases} \to f_x(0,0)\ \text{وجود ندارد}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3}{h^3}=\boxed{1}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y^2(|x|+y^2)-2y(x^2+y^3)}{(|x|+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

۶ اردیبهشت ۹۴
میانترم ریاضی ۲

شاه ابراهیمی

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پاسخ
-۳

$F\left(\frac{x}{y},\ \frac{z+xy}{x}\right)=0$ z تابعی از x و y

$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=?$

$\begin{cases} \frac{x}{y}=u \\ \frac{z+xy}{x}=v \end{cases}$ $F(u,v)=0$ $\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \end{cases}$ F نسبت به x و y مستقل است.

$F\begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$

$F_x=0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}=0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}=0$

$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{1}{y}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{(z_x+y)x-z-xy}{x^2}=0$

$F_y=0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}=0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}=0$

$\rightarrow \frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{-x}{y^2}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\left(\frac{z_y}{x}+1\right)=0$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}=-\frac{\frac{(z_x+y)x-z-xy}{x^2}}{\frac{1}{y}}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial v}}=-\frac{\frac{z_y}{x}+1}{\frac{-x}{y^2}}$$

$\rightarrow \frac{xyz_x+y^2x-zy-xy^2}{x^2}=\frac{y^2z_y+xy^2}{-x^2}$

$\rightarrow xz_x+yx-z-\cancel{xy}=-yz_y-\cancel{xy}$

$\boxed{xz_x+yz_y=z-xy}$

۶ دی بهمن ۹۶
(میانترم ریاضی ۲)

شاه ابراهیمی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد
معادلات دیفرانسیل ، ریاضی۱و۲
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

ابراهیم شاه ابراهیمی
کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

پاسخ

۱۴-

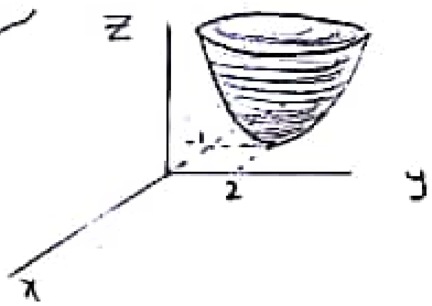
الف) رسم رویه

ب) مشتق سوی f در امتداد عمود بر رویه در $(-1,2,0)$؟

رویه: $z = x^2+y^2+2x-4y+5$

$f(x,y,z) = x^2 - 5xy + \frac{3}{8}z^3$

$z = (x+1)^2 + (y-2)^2 \xrightarrow[\text{سهموی}]{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}}$ $(-1,2)$ سهموی به مرکز



$D_u = \vec{\nabla}_f \cdot \vec{\lambda}_u$

$\vec{\nabla}_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2x, -5x, \frac{9}{8}z^2\right) \xrightarrow{(-1,2,0)} (-2, -10, 0)$

$\xrightarrow[x^2+y^2+2x-4y+5-z=0]{\text{در جهت عمود بر رویه}}$ گرادیان $\rightarrow \nabla_{\text{رویه}} = (2x+2, 2y-4, -1) \xrightarrow{(-1,2,0)} (0, 0, -1) \rightarrow \lambda_u = \frac{(0,0,-1)}{1}$

$\rightarrow D_u = \vec{\nabla}_f \cdot \vec{\lambda}_u = (-2,-10,0)\cdot(0,0,-1) = \boxed{0}$

۶ اردیبهشت ۹۴
میانترم ریاضی ۲

ش. ابراهیمی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد
معادلات دیفرانسیل ، ریاضی۱و۲
ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی