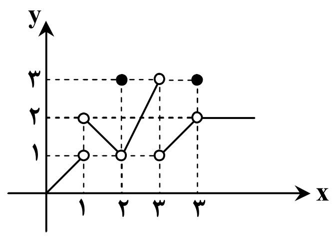
باسمه تعالی

۱- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده ⁎ حیطه: کاربرد ⁎ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

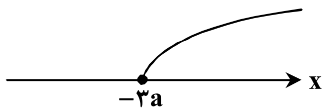


با توجه به نمودار، وقتی متغیر x به عدد $x = ۲$ نزدیک می‌شود، مقدار تابع f(x) به ۱ نزدیک می‌شود. پس $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۱$. به همین ترتیب $\lim\limits_{x\to ۴} f(x) = ۲$. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲} f(x) + \lim_{x\to ۴} f(x) = ۱ + ۲ = ۳$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار ⁎ حیطه: کاربرد ⁎ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

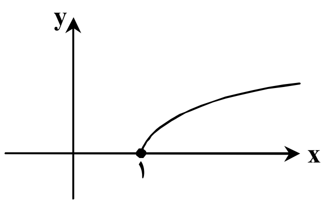


نکته: شرط لازم برای وجود حد تابع $f(x)$ در $x = a$، تعریف شدن $f(x)$ در همسایگی این نقطه است.

مطابق فرض سؤال تابع در $x = ۱$ تعریف شده است، ولی حد ندارد. نمودار تابع داده شده به‌صورت مقابل است.

$$y = \sqrt{x + ۳a}$$

تنها نقطه‌ای که می‌تواند تعریف شده باشد، ولی حد نداشته باشد، نقطهٔ $x = -۳a$ یا همان ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است؛ زیرا تابع در این نقطه همسایگی چپ ندارد، پس در این نقطه حد ندارد، بنابراین می‌توان فهمید عدد ۱ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.



$$\sqrt{۳a + x} : \qquad ۳a + ۱ = ۰ \Rightarrow ۳a = -۱ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۳}$$

نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است:

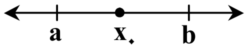
$$y = \sqrt{x - ۱}$$

همان طور که مشخص است، این تابع در $x = ۱$ تعریف شده است، ولی حد ندارد.

۳- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط ❊ حیطه: کاربرد ❊ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: اگر $x_۰$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم. اگر نقطهٔ $x_۰$ را از این بازه حذف کنیم، مجموعهٔ $(a,b)-\{x_۰\}$ را همسایگی محذوف $x_۰$ می‌نامیم.



ابتدا دامنهٔ این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a-x^{۲}\geq ۰ \Rightarrow x^{۲}\leq a \Rightarrow -\sqrt{a}\leq x\leq \sqrt{a} \\ x-۳\neq ۰ \Rightarrow x\neq ۳ \end{cases} \Rightarrow D_f=\left[-\sqrt{a},\sqrt{a}\right]-\{۳\}$$

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

✗ (گزینهٔ ۱) $a=۱ \Rightarrow D_f=[-۱,۱]-\{۳\}$ شامل همسایگی محذوف عدد ۳ نیست.

✓ (گزینهٔ ۲) $a=۱۶ \Rightarrow D_f=[-۴,۴]-\{۳\}$ این مجموعه شامل همسایگی محذوف عدد ۳ است مانند: $(-۴,۴)-\{۳\}$

✗ (گزینهٔ ۳) $a=۹ \Rightarrow D_f=[-۳,۳]-\{۳\}$ شامل همسایگی محذوف عدد ۳ نیست.

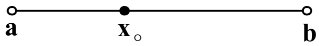
✗ (گزینهٔ ۴) $a=۴ \Rightarrow D_f=[-۲,۲]-\{۳\}$ شامل همسایگی محذوف عدد ۳ نیست.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۴- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار ※ حیطه: کاربرد ※ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکتهٔ ۱: اگر $x_\circ$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می‌نامیم. بنابراین اگر $x_\circ \in (a , b)$، آن‌گاه بازهٔ (a , b) یک همسایگی $x_\circ$ است.



اگر $r > \circ$، در این صورت بازهٔ $(x_\circ , x_\circ + r)$ را یک همسایگی راست و بازهٔ $(x_\circ - r , x_\circ)$ را یک همسایگی چپ $x_\circ$ می‌نامیم.

نکتهٔ ۲: جدول تعیین علامت عبارت $ax^2 + bx + c = \circ$ با ریشه‌های x_1 و x_2 به‌صورت زیر است $(x_1 < x_2)$:

x		x_1		x_2	
$ax^2 + bc + c$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

مجموع جواب این نامعادله یک همسایگی راست ۱- و یک همسایگی چپ عدد ۵ است. پس مطابق نکتهٔ ۱ این مجموعه جواب به صورت بازهٔ $(-1 , 5)$ می‌باشد. از طرفی مطابق جدول تعیین علامت عبارت‌های درجهٔ دوم که در نکتهٔ ۲ آمده، اعداد ۱- و ۵ ریشه‌های این عبارت هستند. پس:

$$x = -1 : 1 - b + c = \circ \quad \Rightarrow -b + c = -1$$
$$x = 5 \quad : 25 + 5b + c = \circ \Rightarrow \underline{5b + c = -25}$$
$$-6b = 24 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = -5$$

بنابراین: $b + c = (-4) + (-5) = -9$

۵- پاسخ: گزینهٔ ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط ※ حیطه: کاربرد ※ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

برای وجود حد در $x = 2$، باید $f(x)$ در همسایگی عدد $x = 2$ تعریف‌شده باشد، یعنی $f(x)$ در یک بازهٔ باز شامل ۲ (به‌جز احتمالاً در $x = 2$) تعریف‌شده باشد. با توجه به تابع داده‌شده، این شرط برقرار نیست. بنابراین $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ وجود ندارد.

۶- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

در هر دو حالت $x \to ۱^+$ و $x \to ۱^-$، داریم $x \notin \mathbb{Z}$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^+} ۲x+۱=۳\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to ۱^-} ۲x+۱=۳\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$$

۷- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

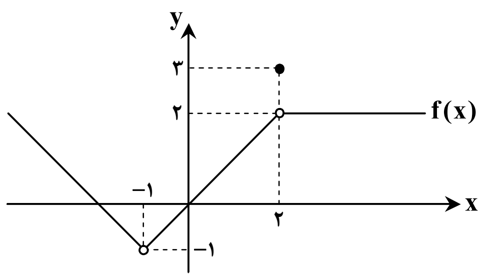
نکته: هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دو طرف) به‌قدر کافی به a نزدیک شود، می‌نویسیم:

$$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$$

با توجه به تعریف حد و نمودار $f(x)$ داریم: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)=-۱$ ، بنابراین:

$$\lim\limits_{x\to -۱} f(x)+\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=-۱+۲=۱$$

توجه کنید تعریف شده یا تعریف نشده بودن تابع در یک نقطه ارتباطی به حد تابع در آن نقطه ندارد.



۸- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

دقت کنید که در محاسبهٔ حد در یک نقطه، خود نقطه اهمیتی ندارد و همسایگی‌های عدد در نظر گرفته می‌شود. به همین جهت در محاسبهٔ حد تابع f، باید از ضابطهٔ دوم استفاده کنیم. همچنین این تابع در نقاط غیرصحیح حاصلی برابر ۱- دارد. پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\sqrt{۳}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}^-}([x]+[-x])=-۱ \\ \lim\limits_{x\to-۱} f(x)=\lim\limits_{x\to-۱}([x]+[-x])=-۱ \\ f(۰)=\sqrt{۲} \end{cases}$$

بنابراین:

$$A=\lim\limits_{x\to\sqrt{۳}^-} f(x)+\lim\limits_{x\to-۱} f(x)+f(۰)=(-۱)+(-۱)+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۲$$

۹- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: دانش * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به‌جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است» هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از هر دو طرف) به‌قدر کافی به a، نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: دامنهٔ f به‌صورت $[۲,+\infty)$ است، پس تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده است، پس در $x=۲$ حد چپ ندارد و در نتیجه در $x=۲$ حد ندارد.

گزینهٔ ۲: تابع g در بازهٔ $(۲,۳]$ تعریف نشده است (زیرا $[x]=۲$ و مخرج صفر می‌شود) پس تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده و در نتیجه حد راست ندارد، پس در $x=۲$ حد ندارد.

گزینهٔ ۳: دامنهٔ تابع h، برابر $[۱,+\infty)$ است. پس تابع در همسایگی ۲ تعریف شده است و در این نقطه حد دارد:

$$\lim\limits_{x\to۲}\sqrt{x-۱}=\sqrt{۲-۱}=۱$$

گزینهٔ ۴: دامنهٔ تابع k شامل بازهٔ $[۱,۲)$ نیست، پس تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف نشده و در نتیجه حد چپ ندارد. پس در $x=۲$ حد ندارد.

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

۱۰- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

مطابق شکل‌های داده‌شده حد توابع گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ برابر b است، ولی حد تابع گزینهٔ ۳ مقداری کمتر از $f(a)=b$ است.

۱۱- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

ابتدا دامنهٔ تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۴-۲x \ge ۰ \Rightarrow ۲x \le ۴ \Rightarrow x \le ۲ \\ ۶x^۲-۱۳x-۵ \ne ۰ \Rightarrow x \ne \frac{۱۳ \pm \sqrt{۱۶۹+۱۲۰}}{۱۲} \Rightarrow x \ne \frac{۱۳ \pm ۱۷}{۱۲} \Rightarrow x \ne \frac{۵}{۲}, \frac{-۱}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (-\infty, ۲] - \left\{-\frac{۱}{۳}\right\}$$

بنابراین تابع در همسایگی $-\frac{۱}{۳}$ تعریف‌شده است و در خود $-\frac{۱}{۳}$ تعریف‌نشده است.

۱۲- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: دانش * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

می‌دانیم دامنهٔ f تابع به‌صورت $(-\infty, ۲]$ است. چون تابع f در همسایگی محذوف ۲ تعریف نشده است، بنابراین تابع f در بین اعداد طبیعی فقط در نقطهٔ $x=۱$ دارای همسایگی محذوف است و حد دارد.

۱۳- پاسخ: گزینهٔ ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: اگر $x_{\circ} \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) همسایگی $x_{\circ}$ است.

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$۴ \in (۲m, m+۷) \Rightarrow ۲m < ۴ < m+۷ \Rightarrow \begin{cases} ۴ < m+۷ \\ ۴ > ۲m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -۳ \\ m < ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -۳ < m < ۲ \xrightarrow{m \in Z} m = -۲, -۱, ۰, ۱$$

بنابراین به ازای ۴ مقدار صحیح برای m، بازهٔ $(۲m, m+۷)$ یک همسایگی عدد ۴ است.

۱۴- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط ✻ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

وقتی تابع f در $x = ۲$ حد ندارد که حد چپ و راست وجود داشته باشند ولی یکسان نباشند یا این‌که حداقل یکی از حدهای چپ یا راست آن نامتناهی باشد.

بنابراین توابع اول و آخر دارای حد هستند. (مقدار تابع f در $x = ۲$ در حد آن تأثیری ندارد.)

۱۵- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: دشوار ✻ حیطه: کاربرد ✻ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ ، وضعیت تابع f در همسایگی نقطهٔ c (نه خود نقطهٔ c) را بررسی می‌کند. برای بررسی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x)$ از ضابطهٔ $f(x) = a$ که به‌ازای اعداد غیرصحیح می باشد، استفاده می‌کنیم. دقت کنید که اعداد در همسایگی ۱ مانند همسایگی $\frac{۱}{۲}$، غیر صحیح هستند، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x) = a \Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x) + \lim_{x\to \frac{۱}{۲}} f(x) = a + a = ۲a$$

بنابراین طبق فرض سؤال داریم: $۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳$

۱۶- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده ✻ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

مقدار مؤلفه‌های اول یک دنباله تقریبات اعشاری برای عدد ۵ است و مقدار مؤلفه‌های دوم یک دنباله تقریبات اعشاری برای عدد ۲ می‌باشد، پس وقتی $x \to ۵^+$ ، آن‌گاه $y \to ۲^-$ یعنی $\lim\limits_{x\to ۵^+} f(x) = ۲$.

توجه: دنباله‌ی هم‌گرا به عدد a که هر جمله‌ی آن به تعداد شماره‌ی جمله، رقم اعشاری داشته باشد را یک دنباله تقریبات اعشاری برای عدد a گویند.

۱۷- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: اگر $x_\circ$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل $x_\circ$ را یک همسایگی $x_\circ$ می‌نامیم. اگر نقطهٔ $x_\circ$ را در این بازه حذف کنیم، مجموعهٔ $(a,b)-\{x_\circ\}$ را همسایگی محذوف $x_\circ$ می‌نامیم.

عدد محذوف همان عدد صفر است، پس:

$$۲x+۴=۰ \Rightarrow x=-۲$$

بنابراین مجموعهٔ موردنظر برابر $(-۳,۲)-\{۰\}$ است و اعداد صحیح ۲-، ۱- و ۱ در این بازه قرار دارند.

۱۸- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

ابتدا دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$۱-x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱\leq x\leq ۱$$

دامنهٔ این تابع برابر $[-۱,۱]$ است. تابع در همسایگی راست $x=۱$ تعریف نشده، پس در این نقطه حد ندارد. همچنین تـابع در همســایگی چپ $x=-۱$ تعریف نشده است، پس در این نقطه هم حد ندارد.

تابع در همسایگی $x=۰/۸$ تعریف شده است و مطابق جدول زیر داریم:

x	$\cdots$	۰/۷۸	۰/۷۹ $\rightarrow$	۰/۸	$\leftarrow$ ۰/۸۱	۰/۸۲	$\cdots$
y	$\cdots$	۰/۶۲	۰/۶۱ $\rightarrow$	۰/۶	$\leftarrow$ ۰/۵۸	۰/۵۷	$\cdots$

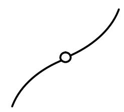
بنابراین این تابع تنها در یک نقطه از نقاط داده شده دارای حد است.

۱۹- پاسخ: گزینهٔ ۴

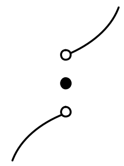
▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ درست هستند، مثالی از این گزینه‌ها در زیر آمده است:

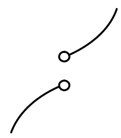
مثال برای گزینهٔ ۱:



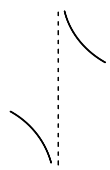
مثال برای گزینهٔ ۲:



مثال برای گزینهٔ ۳:



یا

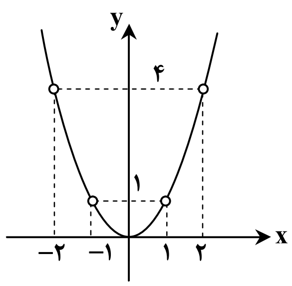


گزینهٔ ۴ صحیح نیست، زیرا شرط لازم برای وجود حد تابع f در $x = a$ ، آن است که تابع در همسایگی a تعریف شده باشد.

۲۰- پاسخ: گزینهٔ ۴

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نمودار تابع $f(x) = x^2$ با دامنهٔ $R - Z$ به‌صورت روبه‌رو است. مطابق شکل تابع f در تمامی نقاط (با طول‌های صحیح و غیرصحیح) حد دارد و داریم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a^2$

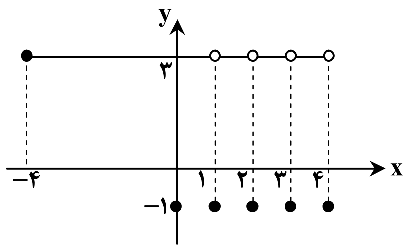


۲۱- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط ❊ حیطه: کاربرد ❊ حسابان ۱(فصل ۵◀درس ۱)

نکته: فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به a نزدیک می‌شود، عدد حقیقی l است؛ هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ را بتوان هر اندازهٔ دلخواه به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x (با مقادیر مخالف a از دو طرف) به قدر کافی به a نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار داریم:

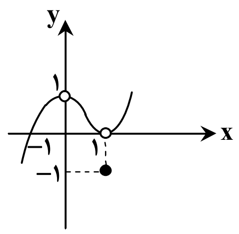
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳ \\ \lim\limits_{x\to -۱} f(x) = ۳ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x) - ۲\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = ۳ - ۶ = -۳$$

۲۲- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده ❊ حیطه: کاربرد ❊ حسابان ۱(فصل ۵◀درس ۱)

نکته: فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به a نزدیک می‌شود، عدد حقیقی l است؛ هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ را بتوان هر اندازهٔ دلخواه به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x (با مقادیر مخالف a از دو طرف) به قدر کافی به a نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

با استفاده از نکتهٔ بالا در نمودار داده‌شده داریم:



$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x) - \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۱ - ۰ = ۱$$

۲۳- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: متوسط ❋ حیطه: کاربرد ❋ حسابان ۱(فصل ۵◀درس ۱)

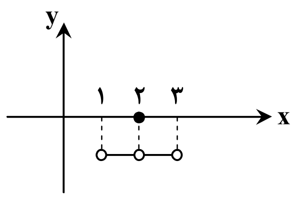
نکته: فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک همسایگی a (به‌جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد، می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x به a نزدیک می‌شود، عدد حقیقی l است؛ هرگاه مقادیر تابع $f(x)$ را بتوان هر اندازهٔ دلخواه به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x (با مقادیر مخالف a از دو طرف) به قدر کافی به a نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$

ابتدا با کمک بازه‌بندی، نمودار تابع را در همسایگی $x = ۲$ رسم می‌کنیم.

$$f(x) = [x] + [-x] \Rightarrow f(۲) = [۲] + [-۲] = ۰$$

$$۲ < x < ۳ \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۲ \\ -۳ < -x < -۲ \Rightarrow [-x] = -۳ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۲ + (-۳) = -۱$$

$$۱ < x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۱ \\ -۲ < -x < -۱ \Rightarrow [-x] = -۲ \end{cases} \Rightarrow f(x) = ۱ + (-۲) = -۱$$

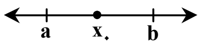


با توجه به نمودار تابع داریم:

$$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = -۱$$

۲۴- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ حیطه: دانش ❋ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)



نکته: اگر $x_۰$ یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم. اگر نقطهٔ $x_۰$ را از این بازه حذف کنیم، مجموعهٔ $(a,b)-\{x_۰\}$ را همسایگی محذوف $x_۰$ می‌نامیم.

نکته: اگر $r>۰$ ، در این صورت بازهٔ $(x_۰,x_۰+r)$ را یک همسایگی راست و بازهٔ $(x_۰-r,x_۰)$ را یک همسایگی چپ $x_۰$ می‌نامیم.

با توجه به تعریف همسایگی و همسایگی محذوف، مشخص است که تابع f در همسایگی محذوف ۱- تعریف شده است. (مثلاً تابع در همسایگی محذوف $(-۲,۰)-\{-۱\}$ تعریف شده است.) اما در هیچ همسایگی ۱- تعریف نشده است. (زیرا ۱- در دامنهٔ تابع نیست.)

سایر گزینه‌ها اشتباه است زیرا:

گزینهٔ ۱: f در همسایگی ۱ (مثلاً $(۰,۲)$) تعریف شده است.

گزینهٔ ۲: f در هیچ همسایگی محذوف ۲ تعریف نشده است، زیرا $x>۲$ در دامنهٔ تابع f نیست.

گزینهٔ ۴: f در هیچ همسایگی محذوف ۲- تعریف نشده است، زیرا $x<-۲$ در دامنهٔ تابع f نیست.

۲۵- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: ساده ❋ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

مطابق تعریف حد، گزینه‌ی ۲ درست می‌باشد.

گزینه‌ی ۱ نادرست است زیرا مثلاً $f(x)=\dfrac{\text{Sin}x}{x}$ در $x=۰$ حد دارد ولی $f(۰)$ وجود ندارد.

گزینه‌ی ۳: مثلاً حد تابع ثابت با مقدار تابع همواره برابر است، پس گزینه‌ی ۳ نادرست است.

۲۶- پاسخ: گزینهٔ ۲

▲ مشخصات سؤال: دشوار ❋ حیطه: کاربرد ❋ حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: اگر $x_۰\in(a\,,\,b)$ ، آنگاه بازهٔ $(a\,,\,b)$ یک همسایگی $x_۰$ است. همچنین مجموعهٔ $(a\,,\,b)-\{x_۰\}=(a\,,\,x_۰)\cup(x_۰\,,\,b)$ را همسایگی محذوف $x_۰$ می‌نامیم.

با توجه به نکتهٔ بالا، باید نقطهٔ انتهایی بازهٔ اول و نقطهٔ ابتدایی بازهٔ دوم برابر ۱- باشند.

$$(a\,,\,a+b)\cup(b-۲\,,\,a+۵):\begin{cases}b-۲=-۱\Rightarrow\ b=۱\\ a+b=-۱\ \xrightarrow{b=۱}\ a=-۲\end{cases}$$

بنابراین: $a-b=-۲-۱=-۳$

دقت کنید حالتی که نقطهٔ انتهای بازهٔ $(b-۲\,,\,a+۵)$ برابر نقطهٔ ابتدایی بازهٔ $(a\,,\,a+b)$ باشد، غیرقابل‌قبول است؛ زیرا:

$a+۵=a\ \Leftrightarrow\ ۵=۰\quad\times$

۲۷- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

بازهٔ $(n-m, 2n-3m)$ همسایگی راست ۱ است، پس $n-m=1$، همچنین این بازه همسایگی چپ ۵ است، پس $2n-3m=5$. بنابراین از این دو معادله داریم:

$$\begin{cases} n-m=1 \\ 2n-3m=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n-2m=2 \\ -2n+3m=-5 \end{cases} \Rightarrow m=-3 \text{ و } n=-2$$

بنابراین بازهٔ (m,n) همان بازهٔ $(-3,-2)$ است. در بین گزینه‌های داده‌شده این بازه فقط یک همسایگی برای عدد ۲/۵- بوده و همسایگی سایر گزینه‌ها نیست، زیرا اعداد $-2, -3, -3/5$ در این بازه وجود ندارند.

۲۸- پاسخ: گزینهٔ ۱

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: اگر $r>0$، بازهٔ (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست x_0 می‌نامیم.

مطابق نکته داریم:

$$2x^2-1=7 \Rightarrow 2x^2=8 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

اگر $x=2$ آنگاه بازه به‌صورت $(7,6)$ درمی‌آید که با توجه به اینکه $6<7$، اشتباه است.

اگر $x=-2$ آنگاه بازه به‌صورت $(7,10)$ درمی‌آید که یک همسایگی راست عدد ۷ است.

۲۹- پاسخ: گزینهٔ ۳

▲ مشخصات سؤال: متوسط * حیطه: کاربرد * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نکته: حد تابع f در نقطهٔ $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{[x]-3}$ موجود نیست، پس این تابع در $x=3$ حد ندارد.

گزینهٔ ۲: $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{3-x}$ موجود نیست، پس این تابع در $x=3$ حد ندارد.

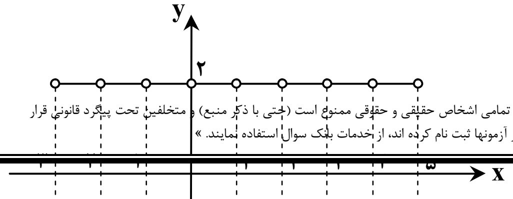
گزینهٔ ۳: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9$ و $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 3x = 9$، پس این تابع در $x=3$ حد دارد.

گزینهٔ ۴: $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$ و $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (2x-3) = 3$، پس این تابع در $x=3$ حد ندارد.

۳۰- پاسخ: گزینهٔ ۴

▲ مشخصات سؤال: ساده * حیطه: دانش * حسابان ۱(فصل ۵◄درس ۱)

نمودار تابع $g(x)$ به‌صورت مقابل است.



مطابق شکل، حد این تابع در هر نقطه‌ای (چه صحیح باشد، چه غیرصـحیح)

برابر ۲ است، پس:

$$\lim_{x\to ۱} g(x) + \lim_{x\to \sqrt{۲}} g(x) = ۲ + ۲ = ۴$$