به نام خدا

ترکیبات

جلسه چهارم

۱۳۸۹/۵/۴

سید احسان آزرم سا
seazarmsa@gmail.com

نگین السادات موسوی
mousavi۸@gmail.com

اعداد ۱ و ۱- در خانه های یک جدول ۲۰۰۰×۲۰۰۰ نوشته شده اند. می دانیم که مجموع اعداد خانه های این جدول عددی مثبت است. ثابت کنید می توان ۱۰۰۰ سطر و ۱۰۰۰ ستون را طوری انتخاب کرد که مجموع اعدادی که در تقاطع این ها نوشته شده اند، لااقل برابر ۱۰۰۰ باشد(*روسیه ۹۵- سوال ۸ پایه ۹*)

- **سعی کنید حکم مسئله را به ازای هر n طبیعی بیان کنید.**

در مسائلی شبیه به این که در صورت مسئله به جای متغیرها از اعداد ثابت بزرگ و بدون ویژگی خاصی استفاده می شود، خوب است که بر اساس شکل و ارتباط اعداد در مسئله، حکم را به کمک متغیر ها به مجموعه بزرگتری از اعداد گسترش دهیم. این کار به ما کمک می کند که با ساختار مسئله بیشتر آشنا شویم و همچنین از قید محاسبات عددی خارج شویم. در ادامه این مطالب را بهتر درک خواهید کرد.

در صورت مسئله عدد ۱۰۰۰ نقش اساسی را ایفا می کند. به طوری که تمامی اعداد مسئله ارتباط ملموسی با این عدد دارند. خوب اگر جای ۱۰۰۰ یک متغیر مثل n را قرار دهیم، چه می شود؟

مسئله به شکل زیر تبدیل می شود:

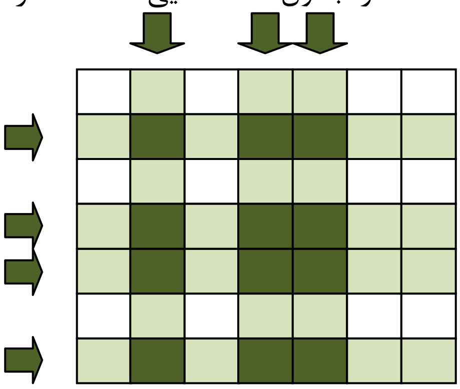
اعداد ۱ و ۱- در خانه های یک جدول $2n \times 2n$ نوشته شده اند. می دانیم که مجموع اعداد خانه های این جدول عددی مثبت است. ثابت کنید می توان n سطر و n ستون را طوری انتخاب کرد که مجموع اعدادی که در تقاطع این ها نوشته شده اند، حداقل برابر n باشد.

حدس می زنیم که حکم فوق نیز درست باشد. اما توجه کنید که این یک حدس است. مثلا ممکن است حکم برای اعداد فرد، درست نباشد.

از این به بعد سعی می کنیم، مسئله دوم را حل کنیم.

در ابتدا باید مسئله را خوب درک کنیم و ببنیم که این فرض بلافاصله چه حکم هایی را نتیجه می دهد و حکم از چه گزاره هایی، بلافاصله بدست می آید. یکی از نتایجی که به سادگی در همان ابتدا می توان بدست آورد، این است که سطر و ستونی با مجموع مثبت وجود دارد.

همچنین منظور از یک زیرجدول $k \times l$ از جدول، خانه هایی است که از تقاطع k سطر و l ستون این جدول به دست می آیند.



یک زیر جدول ۴×۳

همچنین اگر در میان $\binom{2n}{n} \times \binom{2n}{n}$ زیرجدول $n \times n$، زیرجدول با بیشترین مجموع را در نظر بگیریم، طبق حکم باید دارای مجموعی حداقل n باشد.

- **حکم را برای $\mathbf{n = 1}$** ثابت کنید.

حکم مسئله در این حالت معادل با این است که در این جدول خانه ای با مقدار ۱ وجود دارد که با توجه به فرض مسئله، این امر بدیهی است.

- **حکم را برای $\mathbf{n = 2}$ ثابت کنید.**

در این جا با یک جدول ۴×۴ سروکار داریم که مجموع اعدادش مثبت است و هدف این است که ۲ سطر و ۲ ستون بیابیم که مجموع اعداد ۴ خانه حاصل از تقاطع این ها دست کم برابر ۲ شود. می توان دید که سطر و ستونی وجود دارند که مجموع اعداد در آن ها مثبت است و همچنین حداقل برابر ۲ است. برای پیدا کردن این ها می توانید سطر (یا ستونی) با بیشترین مجموع را در نظر بگیرید. برای سادگی فرض کنید که این سطر، سطر بالا و این ستون، ستون سمت چپی باشد. توجه کنید که جابه جایی دو سطر (ستون) خللی روی مفروضات مسئله ایجاد نمی کند. زیرا این کار تعداد خانه های با مقدار ۱ را تغییر نمی دهد و همچنین اگر قبل از جابه جایی زیرجدولی موجود باشد که لااقل دارای ۳ عدد ۱ باشد، بعد از جابه جایی نیز چنین زیرجدولی وجود دارد.

-۱	۱	-۱	۱
۱	۱	۱	۱
-۱	-۱	۱	۱
-۱	۱	۱	-۱

۱	۱	۱	۱
۱	-۱	-۱	۱
-۱	-۱	۱	۱
۱	-۱	۱	-۱

در این سطر و ستون با بیشترین مجموع لااقل ۳ عدد ۱ وجود خواهد داشت. دو حالت ممکن است رخ دهد:

۱) در تقاطع این سطر و ستون ۱ نوشته شده باشد:

در این حالت هر خانه نیلی رنگ با ۳ خانه صورتی رنگ تشکیل یک زیرجدول ۲×۲ می دهند که مجموع اعداد در این زیرجدول حداقل برابر ۲ است. حال می توان به عنوان مثال ۴ خانه ای که در روبرو پررنگ شده اند را انتخاب کرد.

۱	۱	۱	؟
۱	؟	؟	؟
۱	؟	؟	؟
؟	؟	؟	؟

۲) در تقاطع این سطر و ستون ۱- نوشته شده باشد.

اگر یکی از خانه های نیلی رنگ، برابر ۱ باشد، زیرجدولی که این خانه با سطر و ستون اول ایجاد می کند، شرط مسئله را ارضا می کند. اگر هم هیچ کدام از این خانه ها ۱ نباشند و همگی ۱- باشند، به راحتی می توان دید که مجموع اعداد جدول منفی می شود که با فرض مسئله در تناقض است.

-۱	۱	۱	۱
۱	؟	؟	؟
۱	؟	؟	؟
۱	؟	؟	؟

- **حکم را برای $n = 3$ ثابت کنید.**

اولین ایده ما در این جا این خواهد بود که با استدلالی مشابه قسمت قبل، مسئله را حل کنیم. اما در این صورت خواهیم دید که تلاش هایمان راه به جایی نخواهد برد. پس به دنبال روش دیگری هستیم. همان طور که در مقاله قبل دیدید، همواره سعی داریم تا حد امکان پیچیدگی ها را از بین ببریم تا راحت تر با مسئله درگیر شویم. در این جا هم سعیمان براین است که چنین کنیم.

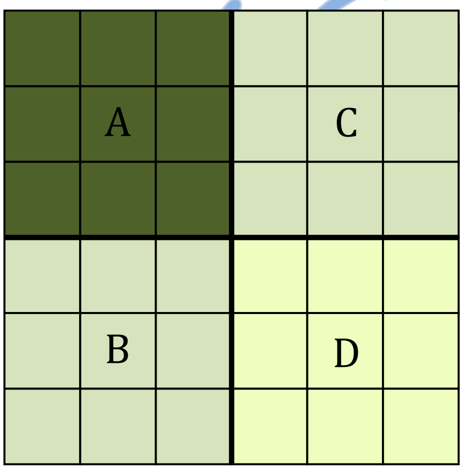
فرض و حکم مسئله، در مورد مجموع چند ۱ و ۱- است. حال اگر تعداد اعضای آن مجموع و تعداد ۱ ها را بدانیم، حاصلجمع را به راحتی می توانیم به دست بیاوریم. مثلا وقتی گفته می شود که مجموع اعداد درون جدول مثبت است، این بدان معنا است که تعداد خانه های ۱ در این حالت حداقل ۱۹تا است. پس می توان در این حالت، مسئله معادل زیر را بیان کرد.

در یک جدول ۶×۶، حداقل ۱۹ خانه علامت گذاری شده است. ثابت کنید یک زیرجدول ۳×۳ از این جدول وجود دارد که حداقل ۶ خانه در آن علامت گذاری شده است.

بدیهی است که اگر حکم برقرار باشد، در زیرجدولی که بیشترین تعداد علامت را دارد، لااقل ۶ خانه ی علامت خورده موجود است.

از طرفی همان طور که گفتیم می توانیم سطرها و ستون ها را جابه جا کنیم بدون این که خللی در مفروضات و حکم مسئله ایجاد شود. پس می توانیم به هر ترتیبی که بخواهیم سطرها و ستون های جدول را جابه جا کنیم و سپس حکم را برای جدول حاصل ثابت کنیم. این امکان بسیار بزرگی است که باید به نحو احسن از آن استفاده کرد.

حال در میان $\binom{۶}{۳} \times \binom{۶}{۳}$ زیرجدول ۳×۳ این جدول، آن را در نظر بگیرید که بیشترین تعداد علامت را داشته باشد. با جابه جایی سطرها و ستون ها، این زیرجدول را به گوشه بالا - سمت چپ جدول می آوریم. مطابق شکل جدول به چهار قسمت تقسیم می شود.



قسمت A، همان زیرجدولی است که بیشترین علامت را دارد. فرض(خلف) کنید که این زیرجدول حداکثر ۵ علامت داشته باشد. این زیرجدول دارای سه سطر است. از این سطرها، سطری وجود دارد که حداکثر ۱ علامت دارد. در نتیجه هر سطر B حداکثر ۱ علامت دارد. زیرا اگر سطری بیش از ۱ علامت داشته باشد، می توان آن را با سطری از A که حداکثر ۱ علامت دارد، جابه جا کرد و زیرجدولی با علامت های بیشتر به دست آورد که این ممکن نیست چون گفته بودیم که A زیرجدولی با بیشترین تعداد علامت در میان تمام زیرجدول ها است.

به همین ترتیب هم هر ستون C حداکثر ۱ علامت دارد. پس تعداد علامت های D لااقل برابر است با:

$$|D| \geq ۱۹ - |A| - |B| - |C| \geq ۱۹ - ۵ - ۳ - ۳ = ۸$$

در نتیجه در D حداقل ۸ علامت وجود دارد که این با نوع تعریف A در تناقض است.

- **حکم را برای n های فرد ثابت کنید.**

در قسمت پیش، ابتدا مسئله را به شکلی ساده تر تبدیل کردیم و سپس راه حلی برای آن ارائه دادیم. همانند آن، می توان مسئله به ازای n را، با روندی مشابه، به صورتی ساده تر تبدیل کرد. هم چنین به نظر می رسد بتوان استدلالی که ارائه شد به تمامی n ها تعمیم داد. با بررسی می توان دید که این روش به این اندازه قدرتمند نیست اما خواهیم دید برای تمامی n های فرد کارا است.

- **حکم را برای n های زوج ثابت کنید.**

در قسمت قبل مسئله به ازای هر n، به این شکل تبدیل می شد:

در یک جدول $۲n×۲n$، حداقل $۲n^۲+۱$ خانه علامت گذاری شده است. ثابت کنید یک زیرجدول $n\times n$ از این جدول وجود دارد که حداقل $\frac{n^۲+n}{۲}$ خانه در آن علامت گذاری شده است. همواره سعی می کنیم تمامی نتایج بدست آمده را مدنظر داشته باشیم.

معادل نتیجه ای که در ابتدای بخش گفتیم داریم که سطر و ستونی با حداقل $n+۱$ خانه علامت خورده وجود دارند. سعی می کنیم با روش اقتباس شده از مثال $n=۳$ که برای n های فرد می توان به کار برد، این قسمت را نیز اثبات کنیم. در واقع با درنظر گرفتن بهترین زیر جدول(بیشترین تعداد خانه علامت خورده) و انتقال به گوشه بالا-چپ کار را آغاز می کنیم. حال فرض کنید تعداد علامت های این زیرجدول کمتر از $\frac{n^۲+n}{۲}-۱$ باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت سطر (ستونی) با حداکثر $\frac{n}{۲}$ علامت خورده وجود دارد. زیرا در غیر این صورت هر سطر (ستون) حداقل دارای $\frac{n}{۲}+۱$ علامت خواهد بود و این نتیجه می دهد در این زیرجدول بیش از $\frac{n^۲+n}{۲}-۱$ علامت خواهد داشت. لذا هیچ یک از سطر های مربع $n\times n$ پایینش (و همچنین ستون های مربع سمت راستش) بیش از $\frac{n}{۲}$ علامت نخواهند داشت. با انجام محاسبات مشابه قبل برای حداقل تعداد علایم (k) مربع $n\times n$ مقابل این مربع داریم:

$$k\geq ۲n^۲+۱-\left(\frac{n^۲+n}{۲}-۱+۲\times n\times\frac{n}{۲}\right)=\frac{n^۲-n}{۲}+۲$$

اما این نتیجه مورد نظر را بدست نمی دهد. برای قسمت فرد به مقدار $\frac{n^۲+n}{۲}+۲$ می رسیدیم و با توجه به نحوه انتخاب مربع اولیه به تناقض می رسیدیم و سپس حکم را نتیجه می گرفتیم. مشکل کار در این جا است که کران $\frac{n}{۲}$ کمی بزرگتر از آن است که بتواند تناقضی در مسئله پیدا کند. (اگر با سوالات نامساوی کار کرده باشید، با اصطلاح این نامساوی ضعیف یا قوی است حتما آشنایی دارید. در این جا هم اتفاقی شبیه همان رخ می دهد که در حالت فرد این گونه نیست).

سعی می کنیم با استفاده از نتایج به دست آمده، نامساوی های بهتر و دقیق تری را به دست آوریم.

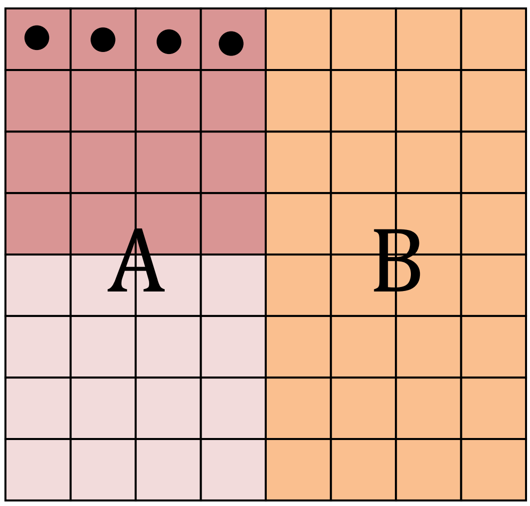
همچنین توجه داریم که طبق فرض(خلف) هیچ زیرجدولی $n \times n$ بیش از $\frac{n^۲+n}{۲}-۱$ نمی تواند علامت داشته باشد.

از قبل به دست آورده بودیم که سطری با حداقل $n+۱$ علامت در اختیار داریم. این سطر را با سطر اول جابجا می کنیم سپس با جابه جایی ستون ها n علامت از آن را در نیمه سمت چپ این سطر قرار می دهیم. سپس سطرهای دیگر را طوری جابجا می کنیم که زیرجدول $n \times n$ که بیشترین تعداد علایم را در میان $\binom{۲n}{n}$ زیرجدول مستطیل A (شکل زیر را مشاهده کنید) دارد در n سطر ابتدایی قرار گیرد(سطر اول نیز جزء این زیرجدول خواهد بود و آن را در جای خود ثابت نگه دارید). حداکثر علایم این زیر جدول برابر $\frac{n^۲+n}{۲}-۱$ است. ادعا می کنیم سطری با حداکثر $\frac{n}{۲}-۱$ علامت در این زیرجدول وجود خواهد داشت. می دانیم در سطر های ۲ الی n ام آن، حداکثر $\frac{n^۲-n}{۲}-۱$ علامت وجود دارد. پس در یکی از این سطرها حداکثر

$$\left\lfloor \frac{\frac{n^۲-n}{۲}-۱}{n-۱} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(n-۱)-۲}{۲(n-۱)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{۲} - \frac{۱}{n-۱} \right\rfloor = \frac{n}{۲}-۱$$

علامت وجود دارد. مانند قبل نتیجه می گیریم که هیچ یک از سطرهای مربع $n \times n$ زیرینش بیش از این تعداد علامت نخواهد داشت. (اما این استدلال را دیگر نمی توان برای ستون های مربع سمت راستش به کار برد.) و برای حداکثر علایم مستطیل A (مشخص شده در شکل) داریم:

$$|A| \leq \frac{n^۲+n}{۲} - ۱ + n \times \left(\frac{n}{۲}-۱\right) = n^۲ - \frac{n}{۲} - ۱$$



حال با استفاده از نتایجی که تا به اینجا بدست آورده ایم، به بررسی بخش دیگر جدول (B) می پردازیم.

در B دست کم $۲n^۲+۱-\left(n^۲-\frac{n}{۲}-۱\right)=n^۲+\frac{n}{۲}+۲$ علامت وجود دارد. (می خواهیم به نحوی با تکرار ایده استفاده از بیشترین ها حکم را ثابت کنیم.) حال زیرجدولی $n\times n$ در B انتخاب می کنیم که بیشترین تعداد علامت را داشته باشد. این زیرجدول را J بنامید. J حداکثر $\frac{n^۲+n}{۲}-۱$ علامت دارد. در هرکدام از سطرهای باقی مانده B حداکثر $\frac{n}{۲}$ علامت داریم. زیرا سطری در J وجود دارد که حداکثر $\frac{n}{۲}$ علامت دارد. پس می توان کران بالایی برای تعداد علایم B یافت.

$$|B|\leq\frac{n^۲+n}{۲}-۱+n\times\frac{n}{۲}=n^۲+\frac{n}{۲}-۱$$

حال با توجه به تخمین های به دست آمده برای علایم A و B، می توان کرانی برای تعداد کل علایم جدول پیدا کرد و آن را با فرض مسئله مقایسه نمود:

$$|A|+|B|\leq\left(n^۲-\frac{n}{۲}-۱\right)+\left(n^۲+\frac{n}{۲}-۱\right)=۲n^۲-۲$$

که این تعداد کمتر از عددی است که در مسئله داده شده بود. پس در نتیجه غیرممکن است که هر زیرجدول $n\times n$ این جدول حداکثر $\frac{n^۲+n}{۲}-۱$ علامت داشته باشد.

- ✓ ایده کلی که در حل این سوال استفاده شد، این بود که با توجه به ملاک هایی که در مسئله داده شده است، بهترین عضو مجموعه را پیدا کنیم و درستی حکم را برای آن بررسی کنیم. در اکثر اوقات نادرست بودن حکم را برای این بهترین عضو فرض می کنی و با انجام محاسباتی به نقض آن فرض دست می یابیم. در این جا هم ما بزرگترین زیرجدول را انتخاب کردیم و فرض (خلف) کردیم که حکم برای این زیرجدول نادرست است (با وجود این که به وضوح اگر زیرجدولی با خاصیتی که گفته شده بود، پیدا می شد، حتما این بهترین زیرجدول هم در شرط حکم مسئله صدق می کرد). سپس با انجام یک سری محاسبات به نقض آن رسیدیم. در واقع در این جا از اصلی معروف به نام **اکسترمال** استفاده کردیم که در آینده بیشتر در مورد آن توضیح داده خواهد شد.
- ✓ یکی از نکاتی که گاهی باعث اشتباه در حل مسائل می شود برعکس گذاشتن جهت نامساوی هاست. توجه به این مسئله می تواند در پیشگیری از طی کردن روندی اشتباه کارساز باشد. از روش های مقابله با جوب!
- ✓ آشنایی با ساختار جدول، با توجه به تنوع سوالاتی که در این قالب مطرح می شوند، یکی دیگر از اهداف این مقاله است. همان طور که مشاهده کردید در اکثر مواردی که موضوع مجاورت خانه ها مطرح نمی گردد، می توان با استفاده از جابجایی سطر ها و ستون ها شکلی ساده تر و ملموس تر

از حالت مورد نظر را درنظر گرفت که این سبب کاهش پیچیدگی کار می شود. اما همواره باید بررسی شود که این جابه جایی ها خللی در مفروضات مسئله ایجاد نمی کنند.

- ✓ در سوالاتی که دارای صورتی با اعدادی بزرگ و به ظاهر بی منطق هستند می توان با حل کردن مسئله برای حالات کلی تر آن را اثبات نمود. این کار سبب می شود شهود بهتری نسبت به رابطه ی بین اعدادی که در طول مسئله ظاهر می شوند داشته باشیم و روان تر پیش برویم. (علاوه بر این، گاهی پس از این حرکت می توان چنین سوالاتی را به صورت استقرایی حل نمود که در آینده بیشتر در این مورد بحث خواهد شد)