

شاخصهای پراکندگی

شاخصهای مرکزی که در صفحات قبل به اختصار توضیح داده شدند به ترتیب دارای مرکزیت داده یا مرکز نقل داده یا مرکز جرم بوده می شوند. در این تقاضا به تنوعی داده ها را توصیف کنند زیرا غیر از محاسبه داده ها به یک مرکزیت، گسترده گی داده ها و میزان انحراف داده ها نسبت به یک نقطه یا نسبت به نقطه مرکز، وجه دیگری از داده ها است که به وسیله شاخصهای پیام شاخصهای پراکندگی تعیین شوند. در واقع شاخصهای مرکزی و شاخصهای پراکندگی به عنوان دو شاخص مکمل یکدیگر برابر توصیف یک مجموعه آماری بکار برده می شوند.

دامنه Range ، نوار : R

دامنه ساده ترین روش را ضعیف ترین شاخص پراکندگی است که به عبارت دیگر با

$$R = \text{Max} - \text{Min}$$

این شاخص فقط محدوده داده را تعیین می کند و چون در خصوص وضعیت پراکندگی داده ها در حدی که گسترش و وسعت آن داده، اطلاعاتی داده نمی شود، شاخص ضعیفی محسوب می شود.

دامنه میان چارکی Inter-Quantile Range (IQR)

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

این دامنه عبارت است از دامنه تغییرات ۵۰ درصدی در داده ها. در این فرمول Q_1 چارک اول و Q_3 چارک سوم است.

دامنه میان چارکی نیمه انحراف چارکی (Semi Inter-Quantile Range) (SIQR)

$$SIQR = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

توجه: دامنه، دامنه میان چارکی و نیمه میان چارکی را به هم نریخته زیرا حساب کنند

۷۷، ۷۰، ۷۲، ۷۵، ۷۹، ۶۳، ۸۰، ۹۵، ۱۰۳، ۷۰، ۵۰، ۵۴، ۹۲، ۱۱۲

Average Deviation Mean

- انحراف متوسط از میانگین

نماد: $AD_{\bar{x}}$ و AD_{μ}

$$AD_{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \mu|}{n}$$

$$AD_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

- این شاخص درجه اول است

مجموع انحرافات از میانگین صاف است

می کند، آن گویا در راستای قرار بگیرد زیرا در صورتی که داده ای هم از انحراف آنکه از میانگین فاصله از آن است؛ تعداد کمی در مجموع داده درجه اول داشته باشد، این انحرافات خود را در آن داده می نمایند.

تمرین: بهر دو مجموعه A و B، انحراف متوسط از میانگین را حساب کنید

فرض کنید تقابل درجه اول سفارش یک کالا از دو تولید کننده A و B (زیرا سفارش را بهترین کالا) بشود و در هر یک از سفارش به ترتیب A و B به ترتیب؟
 A: ۳, ۳, ۴, ۵, ۵
 B: ۱, ۲, ۷, ۸, ۲

- بهر مجموعه زیر نیز انحراف متوسط از میانگین را حساب کنید

۹, ۶, ۳, ۱, ۱۲, ۱۶, ۹, ۳, ۲۸, ۷, ۶, ۲, ۵, ۴, ۴

- واریانس Variance نماد: σ^2 یا s^2

برای رفع ایراد مربوط به انحراف متوسط از میانگین می توانیم انحرافات از میانگین را مخرج در یک عدد و بدین ترتیب تا غیر انحرافات بزرگ از میانگین را بطور واقعی تر درج کنیم. حفر بر آنست که واریانس - هر از هر مجموعه - انحرافات از میانگین می توانیم میانگین آنرا حساب کنیم و حفر جدیدی نیز واریانس (بر اساس) را می توانیم

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}$$

واریانس مربوط به جامعه

تمرین: سود ماهانه یک شرکت در طی ۸ دوره گذشته به شرح زیر است (بر حسب میلیون تومان)
 ۱۴, ۲۶, ۲۷, ۲۰, ۱۳, ۲۵, ۲۰, ۵
 واریانس سود را حساب کنید.

- با قدری محبت جیره ساره من قلمی و جدول می سبب واریانس را هم صدقه صدقه در به تقسیم اظهارات

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - N\mu^2 \right] \quad \text{مدینه نوشت}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N} - \mu^2$$

- لذا همفکری که ما کرده می شود در می سبب واریانس از مربع انحرافات استفاده می شود
 یعنی واریانس غیرت از میانگین. بخیر در انحرافات داده ها از میانگین فراتر است، به عبارت
 دیگر آن غنی که از این طریق می سبب می شود یک ش غرض مربع سخته است. از سوی دیگر
 هر تغییر در ای تک واحد اندازه گیری است و به لطیف ش غنی از این تغییرها می سبب می شود
 دارای داده است. اما واحد واریانس مربع واحد اصلی است مثل تن به توان دو و یا
 توان به توان دو و یا تقریب توان دو، که در واقع یک واحد غیر واقعی است.
 به غایت به در مورد فوق من قلمی. با خیر گرفتن مسئله را حل کند و هم برآورد کند
 را با واحد واقعی بیان کرد و هم مربع بزرگ آن را حل کند. به این ش غرض جدید
 انحراف معیار می گویند که بجای است با خیر واریانس و با نماد "σ"
 ش هر چند σ = Standard Deviation "sd"

تمرین: در مثال فوق انحراف معیار سود شرکت چقدر است؟

- واریانس حاصل از یک نمونه n تایی

در پژوهش‌های علمی معمولاً با استفاده از یک نمونه n تایی، واریانس به عنوان یک شاخص پراکندگی می‌سازند و از آن برای تخمین واریانس جمعیت هدف استفاده می‌کنند. اما می‌سازند واریانس به قدری که در بعضی موارد گشته از آن شده یعنی میانگین مربع انحرافات هر کدام از داده‌ها از میانگین نمونه \bar{x} ، یک شاخص محدودش (اریب یا Bias) برای تقسیم به جمعیت هدف است. این موضوع بعداً با تعریف مفهوم امید ریاضی مورد بحث قرار خواهد گرفت. اما برای رفع این نقیصه یعنی تبدیل شاخص واریانس از یک شاخص خاص محدودش به یک شاخص غیر محدودش (نااریب یا Unbias) کافی در خروجی کسری تقسیم مجموع مربعات انحراف هر کدام از داده‌ها از میانگین نمونه \bar{x} به تعداد داده‌ها یعنی n ، به $n-1$ تقسیم کنیم. این موضوع با استفاده از قضایای آکامی قابل اثبات است که خارج از بحث ما می‌باشد. بنابراین هرگاه مستعد از می‌سازند واریانس، استفاده از نمونه n تایی و تقسیم آن به جمعیت N تایی، بجای

خارج از n به $n-1$ استفاده می‌شود و s^2 برابر است با

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

روش دیگری می‌باشد s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

و بالطبع انحراف در این حالت نیز برابر است؛ جذر s^2 و s نشان داده می‌شود. لازم به توضیح است که s نیز یک شاخص نااریب برای s یعنی واریانس جمعیت هدف است و واحد آن نیز همان واحد متغیر مورد نظر می‌باشد.

- محاسبه واریانس داده‌های طبقه‌بندی شده :
 وقتی داده‌ها بصورت سازه زیر طبقه‌بندی شوند اندازه واریانس عبارت است از :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i - 1}$$

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
f_i	f_1	f_2	f_3	...	f_k

k در این فرمول تعداد گروه‌ها می‌باشد

شماره طبقه	گروه بندی	f_i	m_i	$m_i - \bar{x}$
۱	$L_1 - U_1$	f_1	m_1	$m_1 - \bar{x}$
۲	$L_2 - U_2$	f_2	m_2	$m_2 - \bar{x}$
۳	$L_3 - U_3$	f_3	m_3	$m_3 - \bar{x}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$L_k - U_k$	f_k	m_k	$m_k - \bar{x}$

وقتی داده‌ها بصورت زیر گروه‌بندی شوند

ابتدا با استفاده از روش محاسبه میانگین
 برای داده‌های گروه‌بندی شده، میانگین
 را می‌سازیم (میانگین) و سپس با استفاده
 از رابطه زیر واریانس را می‌سازیم

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i (m_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^k f_i - 1}$$

- ضریب تغییرات Coefficient of Variations نام: C.V.

هائیکه که مقبول گفته شد، واحد فارسی بخاطر توان در یک واحد غیر واقعی است و برای
 رفع این مشکل از انحراف معیار یعنی جذر واریانس استفاده کرده‌ایم که دارای واحد واقعی
 یعنی واحدی معادل واحد متغیر مورد نظر می‌باشد. اما زمانی که هدف ما مقایسه
 پراکندگی دو متغیر با دو واحد مختلف باشد، استفاده از انحراف معیار به خاطر
 وجود واحدهای مختلف امکان پذیر نیست. در این حالت بهترین است از ضریب تغییر که
 فاقد واحد اندازه‌گیری باشد استفاده کنیم. یکی از ضرایب پراکندگی که فاقد واحد

واحد اندازه گیری است. با حذف ضریب تغییرات است که از تقسیم انحراف معیار متغیر و میانگین متغیر مورد نظر بدست می آید و چون معمولاً به صورت درصد بیان می شود این نسبت در عدد ۱۰۰ ضرب می شود یعنی:

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

ضریب تغییرات در واقع یک معیار استانداردگی نسبی است و چرا که نسبت میانگین به ضریب متغیر مورد نظر است. ضریب تغییرات فقط در دو حالت مورد استفاده قرار می گیرد:

- حالت اول زمانی که هدف مقایسه پراکندگی در متغیر با در واحد مختلف باشد. در این حالت چون ضریب تغییرات فاقد واحد اندازه گیری است، بهترین حالت مقایسه مقایسه پراکندگی در متغیر است. مثلاً مقایسه پراکندگی متغیری که با مقیاسی که با یکدیگر اندازه گیری شده است.
- حالت دوم زمانی که هدف مقایسه پراکندگی یک متغیر با در دو جمعیت نامشابه باشد. مثلاً زمانی که هدف مقایسه میزان صادرات آهن آلات و صادرات کالای دیگری مثل روغن است. ممکن است واحد اندازه گیری هر دو کالا بر حسب تن در حدود مورد مطالعه باشد. در این حالت ممکن است در این مقایسه انحراف معیار هر دو متغیر یک باشد اما میانگینهای آنها اختلاف بسیار زیادی دارند. واضح است که انحراف معیار بدون در نظر گرفتن میانگین نمی تواند بیان کننده پراکندگی باشد و چرا که این دو متغیر زمانی قابل مقایسه است که این مقایسه با در نظر گرفتن میانگینها باشد.

تمرین ۱ -

مقادیر درج شده می توان که توسط دو شرکت مختلف تولید شده است بر حسب پوند برای این نوع روغن در است.

نوع اول : ۲۶۰, ۲۷۰, ۲۱۰, ۲۴۰, ۳۶۵, ۲۴۰

نوع دوم: ۲۴۰، ۲۶۰، ۲۶۵، ۲۴۰، ۳۰۵، ۱۹۰، ۲۲۸، ۲۴۰، ۲۶۵

- پارامترهای مرکزی را تعیین کنید.
- انحراف چارگی هر دو جامعه را با یکدیگر مقایسه کنید. کدام از کیفیت بهتری برخوردار است؟
- انحراف متوسط از میانگین هر دو نوع بتوان را با هم مقایسه کنید. کدام بهتر است؟
- انحراف معیار مقاومت دو نوع متون را حساب کنید. کدام بهتر است؟
- ضریب تغییرات مقاومت دو نوع متون را محاسبه و نتیجه را با نتایج حاصل از قسمت‌های قبلی با هم مقایسه کنید.

تمرین ۲ -

ضریب تغییرات دو نمونه A و B را حساب کنید

A: ۱۹, ۱۲, ۱۷, ۱۲

B: ۶۰, ۵۵, ۸۰, ۸۵

تأثیر اضمحلال شدن یک مقدار ثابت بر هم مقادیر، کم شدن یک مقدار ثابت از هم مقادیر، ضرب یک مقدار ثابت در هم مقادیر و یا تقسیم کردن هم مقادیر بر یک مقدار ثابت در ظاهر اضمحلال شدن یک مقدار ثابت و یا کم شدن یک مقدار ثابت از هم مقادیر هیچ تأثیری بر ضریب تغییرات معیار ندارد.

اما اگر یک مقدار ثابت در هم مقادیر ضرب کنیم، و یا بر مخرج آن مقدار ثابت را انحراف معیار در همان مقدار ثابت ضرب شود و اگر هم مقادیر را بر یک مقدار ثابت تقسیم کنیم، و یا بر مخرج آن مقدار ثابت و انحراف معیار بر همان مقدار ثابت تقسیم می‌شود.