والری واسیلوویچ واویلف
ایوان ایوانوویچ ملنیکف
اسلو نیکلایه‌ویچ آلکس نیک
پتر ایوانوویچ پاسی‌چنکو

جبر

از آغاز تا پایان

ترجمهٔ پرویز شهریاری

فهرست

مقدمه

کم نیستند کسانی که، یا به‌خاطر نیازهای حرفه‌ای و یا به‌خاطر علاقه‌مندی شخصی، در جست‌وجوی کتاب‌هایی هستند که ریاضیات را، به‌صورتی منظم، پیش خود یاد بگیرند. مدت‌ها بود که در اندیشهٔ تهیهٔ چنین کتاب‌هایی بودم و حتی یادداشت‌هایی هم آماده کرده بودم. ولی وقتی به کتاب حاضر برخوردم، احساس کردم که بهتر است به‌جای تنظیم آن یادداشت‌ها، ترجمهٔ این کتاب را در اختیار علاقه‌مندان قرار دهم.

کتاب، بسیار هوشمندانه تهیه شده است و می‌تواند مورد استفاده گروه گسترده‌ای از علاقه‌مندان قرار گیرد.

۱. کتاب مملو از مثال‌ها و تمرین‌هاست، به‌نحوی که هر کسی، در هر درجه‌ای از کار، می‌تواند مساله‌های مورد علاقهٔ خود را پیدا کند و با حل آن‌ها، خود را بیازماید.

۲. کتاب کوشیده است با حل مثال‌ها در پایان هر بند، بهترین و مهم‌ترین روش‌های راه حل را مطرح کند و خوانندهٔ علاقه‌مند را، از سردرگمی درمیان روش‌های گوناگون نجات دهد.

۳. مؤلفان در سراسر کتاب، هرگز دقت استدلال‌ها را از دست نداده‌اند و، با ساده‌ترین بیان، خواننده را وا می‌دارد تا درحل مساله‌های، ریاضی، دقیق و هوشیار باشد.

۴. درمثال‌ها، تکلیف‌ها و تمرین‌ها، همه‌جا به‌روش‌های کلی توجه شده است، منظور ازمحاسبه‌ها (ومثلاً درفصل اول) تنها انجام عمل‌های طولانی نیست (مثلاً تمرین ۷ از ۲§) و اغلب، به‌منظور راهنمائی خواننده و رساندن او ازحالت‌های خاص به‌حالت کلی

بوده است (مثل تمرین‌های ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ از ۲§).

۵. کسی که به‌طور منظم فصل مورد علاقهٔ خود را دنبال کند، به‌تدریج از ساده‌ترین مساله‌ها به‌سمت مساله‌های دشوار و دشوارتر کشانده می‌شود، به‌نحوی که، بدون احساس خستگی، خود را قادر به‌حل دشوارترین مساله‌های آن فصل خواهیم دید.

□

دانش‌آموزان، از همان سال‌های دورهٔ راهنمائی، تا آخرین سال دبیرستان، می‌توانند فصل‌ها و تمرین‌های دلخواه خود را در کتاب پیدا کنند؛ حتی آن دسته از دانش‌آموزان ممتازی هم که خود را برای مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای ریاضی آماده می‌کنند، بسیاری از بحث‌ها و مساله‌های مورد نظر خود را در این کتاب پیدا می‌کنند. برای تکلیف‌ها و تمرین‌ها، در آخر هر بند، پاسخ‌ها و راهنمائی‌هایی برای حل داده شده است تا خواننده بتواند نتیجهٔ کار خود را، مورد بازبینی قرار دهد.

□

از آقای محمدحسن محمودی مدیر حروف‌چینی مهدی و آقایان محمد و رحیم اعیان‌منش که کار دشوار حروف‌چینی این کتاب را به‌عهده گرفتند و از آقای حسن نیك‌بخت که کار دشوارتر تصحیح نمونه‌های حروف‌چینی را قبول کردند و از آقای دوستی مدیر کتاب‌فروشی تهران که مخارج سنگین چاپ و نشر آن را تحمل کردند، سپاس‌گزارم.

مترجم

پیش گفتار

این کتاب، به‌روش‌های حل‌مساله‌های جبری اختصاص دارد. تنظیم این کتاب، نتیجه‌ای از تجربهٔ طولانی مولفان آن، ضمن تدریس ریاضیات، در دانشگاه دولتی مسکو، به‌نام م. و. لومونوسوف است.

کتاب، در کل‌خود، شامل چهارزمینه‌است: «عددهای حقیقی وعبارت‌های جبری»، «معادله‌ها، نامعادله‌ها ودستگاه‌ها»، «آنالیز ترکیبی» و«عددهای مختلط».

درآغاز هربند، آگاهی‌های نظری لازم، به‌صورتی‌کوتاه، داده‌شده و، سپس، ضمن مثال‌ها، روش‌های مختلف راه حل مساله‌های مربوط به‌آن بند، آمده است. برای این‌که بتوان باروش‌های مختلف آشنا شد وآن‌ها را باهم مقایسه کرد، همه‌جا کوتاه‌ترین راه حل را نداده‌ایم. در پایان هر بند، تکلیف‌هایی، برای درك بهتر مفهوم‌ها وآشنایی بیشتر با روش‌های حل، داده شده است.

مساله‌ها وتکلیف‌ها، چه ازنظر کیفی و چه ازنظر مقدار خود، به‌عنوان حداقل‌آگاهی‌ها، برای تسلط برریاضیات درنظر گرفته شده‌اند، ولی خواننده می‌تواند برحسب‌آگاهی‌های قبلی خود، ازآن‌ها که خود صلاح می‌داند، به‌صورتی‌گذرا عبور کند. هدف‌کتاب این‌است تابه‌دانش‌آموزان دبیرستان‌ها و علاقه‌مندان به‌ریاضیات،کمك کند تا کمبودهای خود را جبران‌کنند و، بنابراین، هرکسی می‌تواند، بسته به‌نیاز خود، ازیك یا چند بخش‌آن استفاده کند. کتاب، به‌صورت «خودآموز» درنظرگرفته شده است و، درآن، نه تنها اساسی‌ترین نظریه‌ها، بلکه اساسی‌ترین مثال‌ها و روش‌های راه‌حل هم آمده است و، بنابراین، اگر خواننده اندکی پی‌گیری وحوصله داشته باشد، درهر سطحی‌که باشد، می‌تواند بدون یاری معلم، ازآن استفاده‌کند.

برخی نمادها

$\mathbf{N}$: مجموعهٔ عددهای طبیعی
$\mathbf{Z}$: مجموعهٔ عددهای درست
$\mathbf{Q}$: مجموعهٔ عددهای گویا
$\mathbf{R}$: مجموعهٔ عددهای حقیقی
ϕ: مجموعهٔ تهی
$a \in M$: عضو a، متعلق به‌مجموعهٔ M است
$\{a، b، c، d\}$: مجموعه‌ای شامل عضوهای a، b، c و d
$\cup$: علامت اجتماع
$[a ، b]$: بازهٔ بسته، با آغاز a وانتهای b
$(a ، b)$: بازهٔ باز، با آغاز a وانتهای b
$A \Rightarrow B$: B نتیجه‌ای از A است
$A \Longleftrightarrow B$: B نتیجه‌ای از A و، برعکس، A نتیجه‌ای از B است
$a = b$: علامت برابری: a برابر است با b
$a > b$: علامت نابرابری: a از b بزرگتر است
$a < b$: علامت نابرابری: a از b کوچکتر است
$a \geqslant b$: a از b کوچکتر نیست (نابرابری غیراکید)
$a \leqslant b$: a از b بزرگتر نیست (نابرابری غیراکید)
$a \neq b$: a برابر b نیست
$A \equiv B$: A متحد است با B
$|a|$: قدرمطلق عدد a
$[a]$: بخش درست عدد a
$\min\limits_{i} a_i$: کوچکترین عدد، ازبین عددهای a_i
$\max\limits_{i} a_i$: بزرگترین عدد، ازبین عددهای a_i
$\overline{a_k a_{k-۱} \cdots a_۱ a_۰}$: عدد طبیعی با این رقم‌ها

$\sqrt[n]{a}$: ریشهٔ n ام عدد a

$\log_a b$: لگاریتم عدد b درمبنای عدد a

$\lg b$: لگاریتم عدد b درمبنای ۱۰

$\pi = ۳/۱۴۱۵\ldots$: نسبت محیط دایره به‌قطرآن

$e = ۲/۸۷\ldots$: مبنای لگاریتم طبیعی

i: واحد موهومی $(i^{۲} = -۱)$

$\operatorname{Re} z$: بخش حقیقی عدد مختلط z

$\operatorname{Im} z$: بخش موهومی عدد مختلط z

$\bar{z}$: مزدوج عدد z

$\operatorname{Arg} z$: آرگومان (یا آوند) عدد مختلط z

$\arg z$: مقداراصلی آرگومان، درعدد مختلط z

$n!$: فاکتوریل n، برابر $۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n$

$(۲n)!!$: $(۲n)!! = ۲ \times ۴ \times \cdots \times (۲n)$

$(۲n-۱)!!$: $(۲n-۱)!! = ۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲n-۱)$

A_n^m: تعداد ترتیب‌های n عدد m به m

C_n^m: تعداد ترکیب‌های m به m از n عدد

P_m: تعداد تبدیل‌های m عنصر

$\{$: علامت دستگاه

$[$: علامت مجموعه‌ای از معادله‌ها

$\sum_{i=۱}^{n} a_i$: $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$

$\prod_{i=۱}^{n} a_i$: $a_۱ \cdot a_۲ \cdots a_n$

$(a;b)$: بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعدد a و b

$[a;b]$: کوچکترین مضرب مشترك دوعدد a و b

فصل اول

عددهای حقیقی

§۱. عددهای طبیعی و عددهای درست

عددهای ۱، ۲، ۳،... را، کــه برای شمارش به‌کار می‌روند، عددهای طبیعی گویند، مجموعهٔ عددهای طبیعی را، با نماد **N** نشان می‌دهند.

اگر عدد n را بتوان به‌صورت ضرب دوعدد طبیعی m و k نشان‌داد، یعنی اگرداشته باشیم $n=m \cdot k$، آن‌وقت می‌گویند: عدد n بــر m و بر k بخش‌پذیر است، درضمن، هریك از عددهای m و k را، مقسوم‌علیهی از عدد n گویند.

عدد طبیعی بزرگتر ازواحد را، اول گویند، وقتی کــه به‌جز واحد و خودش، مقسوم‌علیه‌دیگری نداشته‌باشد. مثلاً، عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، عددهایی اول‌اند.

عدد طبیعی را مرکب گویند، وقتی که، دست‌کم دارای یك مقسوم‌علیه به‌جزواحد وخودش باشد. مثلاً، عددهای ۶، ۲۰، ۲۱، عددهایی مرکب‌اند.

عدد طبیعی را زوج گویند، وقتی‌که بر ۲ بخش‌پذیر باشد؛ درحالتی‌که عدد طبیعی بر ۲ بخش‌پذیر نباشد، فرد نامیده می‌شود.

هرعددمرکب را می‌توان به‌صورت ضرب عامل‌های اول تجزیه کرد، یعنی به‌صورت

$$n=p_{۱}^{m_{۱}}\, p_{۲}^{m_{۲}} \cdots p_{k}^{m_{k}} \qquad (۱)$$

که در آن، $p_{۱}$، $p_{۲}$، ...، p_{k} عددهایی اول و k، $m_{۱}$، $m_{۲}$، ...، m_{k} عددهایی طبیعی‌اند. این روش نمایش عدد را، تجزیهٔ متعارف عدد هم می‌گویند. اگر جابه‌جائی عامل‌ها، درسمت‌راست برابری (۱) را به‌معنای تغییر نمایش عدد نگیریم، این تجزیه، برای هرعدد، منحصر به‌فرد است. مثلاً

$۱۸۰=۲^۳\times۳^۲\times۵$ ، $۲۵۸=۲\times۳\times۴۳$ ، $۸=۲\times۲\times۲=۲^۳$

هرعدد n را، اگر در مبنای دهدهی عددنویسی باشد، می‌توان به این صورت نوشت:

$$n=a_k\cdot۱۰^k+a_{k-۱}\cdot۱۰^{k-۱}+\dots+a_۱\cdot۱۰+a_۰ \qquad (۲)$$

که در آن، عددهای $a_۰$، $a_۱$، ...، $a_{k-۱}$ می‌توانند یکی از مقدارهای ۰، ۱، ۲، ...، ۹، و عدد a_k یکی‌ازمقدارهای ۱، ۲، ...، ۹ باشند؛ عدد به‌صورت (۲) را، وقتی بخواهیم به‌شکل موضعی خود نشان دهیم، این‌طورمی‌نویسند:

$$n=a_ka_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۲a_۱a_۰$$

هریك ازعددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را، یك رقم گویند.

برخی معیارها، دربخش‌پذیری عددهای طبیعی. فرض کنید

$$n=a_ka_{k-۱}a_{k-۲}\cdots a_۲a_۱a_۰$$

دراین‌صورت

۱. عدد n تنها وقتی بر ۲ بخش‌پذیراست که $a_۰$ بر ۲ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً، عدد ۱۲۳۵۴۸۹۴ بر ۲ بخش‌پذیراست، زیرا ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است؛ عدد ۱۲۳۵۷۴۸۹ بر ۲ بخش‌پذیرنیست، زیرا ۹ بر ۲ بخش‌پذیرنیست.

۲. عدد n، تنهاوقتی بر ۴ بخش‌پذیراست که‌عدد $\overline{a_۱a_۰}$ بر ۴ بخش‌پذیرباشد.

مثلاً، عدد ۸۳۷۷۴۵۶۵۶ بر ۴ بخش‌پذیراست، زیرا ۵۶ بر ۴ بخش‌پذیر است؛عدد ۵۳۴۹۷۴۱۴۱۴ بر ۴ بخش‌پذیرنیست،زیرا ۱۴ بر ۴ بخش‌پذیرنیست.

۳. عدد n، تنها وقتی بر ۸ بخش‌پذیراست که‌عدد $a_۲a_۱a_۰$ بر ۸ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً، عدد ۴۳۷۷۲۵۱۱۲ بر ۸ بخش‌پذیر است، زیرا ۱۱۲ بر ۸ بخش‌پذیراست؛ عدد ۲۵۶۱۲۴ بر ۸ بخش‌پذیرنیست، زیرا ۱۲۴ بر ۸ بخش‌پذیرنیست.

۴. عدد n، تنها وقتی بر ۳ بخش‌پذیر است که، مجموع همهٔ رقم‌های آن، بر ۳ بخش‌پذیرباشد.

مثلاً،عدد ۱۲۳۵۴۷۸۱۲ بر ۳ بخش‌پذیراست، زیرامجموع رقم‌های آن

۱ + ۲ + ۳ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۱ + ۲ = ۳۳

بر ۳ بخش‌پذیر است؛ عدد ۵۷۳۱۲۴۲۷ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، زیرا

۵ + ۷ + ۳ + ۱ + ۲ + ۴ + ۲ + ۷ = ۳۱

بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۵. عدد n، تنها وقتی بر ۹ بخش‌پذیر است که، مجموع همهٔ رقم‌های آن، بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً، عدد ۲۳۷۵۲۸۲۷ بر ۹ بخش‌پذیر است، زیرا مجموع رقم‌های آن

۲ + ۳ + ۷ + ۵ + ۲ + ۸ + ۲ + ۷ = ۳۶

بر ۹ بخش‌پذیر است؛ عدد ۱۵۴۱۵۴۷۱۷۹ بر ۹ بخش‌پذیر نیست، زیرا

۱ + ۵ + ۴ + ۱ + ۵ + ۴ + ۷ + ۱ + ۷ + ۹ = ۴۴

بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

۶. عدد n، تنها وقتی بر ۵ بخش‌پذیر است که a_0 بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً، عدد ۲۷۸۳۲۴۱۷۰ بر ۵ بخش‌پذیر است، زیرا ۰ بر ۵ بخش‌پذیر است؛ عدد ۱۲۹۳۷۲۳۴ بر ۵ بخش‌پذیر نیست، زیرا ۴ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

۷. عدد n، تنها وقتی بر ۲۵ بخش‌پذیر است که عدد $\overline{a_1a_0}$ بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً، عدد ۴۳۸۱۹۹۷۸۵۰ بر ۲۵ بخش‌پذیر است، زیرا ۵۰ بر ۲۵ بخش‌پذیر است؛ عدد ۱۱۱۲۲۲۱۷۴۰ بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست، زیرا ۴۰ بر ۲۵ بخش‌پذیر نیست.

مثال ۱. کوچکترین عدد طبیعی به‌صورت ۱۲۳X۴۳Y را پیدا کنید که بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

حل. مجموع رقم‌های این عدد، برابر است با ۱۳ + X + Y. کوچکترین مقدار این مجموع، برای این که بر ۳ بخش‌پذیر باشد، برابر است با ۱۵؛ یعنی وقتی که $X + Y =$ ۲. اگر همهٔ حالت‌های ممکن، برای X و Y را در نظر بگیریم، این سه عدد به‌دست می‌آید:

۱۲۳۱۴۳۱ ، ۱۲۳۲۴۳۰ ، ۱۲۳۰۴۳۲

که از بین آن‌ها، $a=۱۲۳۰۴۳۲$، ازهمه کوچکتر است.

برای مجموع $X+Y$، به‌جز ۲، می‌توان یکی ازعددهای ۵، ۸، ۱۱، ۱۴ و ۱۷ را هم درنظر گرفت، تا عدد مفروض بر ۳ بخش‌پذیر باشد. به‌ازای $X+Y=۵$، کوچکترین عدد برابر ۱۲۳۰۴۳۵ و به‌ازای $X+Y=۸$، کوچکترین عدد برابر ۱۲۳۰۴۳۸ می‌شود که، هردوی آن‌ها، از a بزرگترند. درسه‌حالت دیگرهم (وقتی‌که $X+Y$ برابر ۱۱، ۱۴ یا ۱۷ باشد)، کوچکترین عدد، ازعدد a بزرگتر درمی‌آید.

به‌این‌ترتیب، پاسخ مساله، عدد ۱۲۳۰۴۳۲ است.

□

اگرعددهای $n_{۱}$ و $n_{۲}$، برعدد m بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت m را مقسوم علیه مشترك دوعدد $n_{۱}$ و $n_{۲}$ گویند.

بزرگترین عددی را که هردوعدد $n_{۱}$ و $n_{۲}$ برآن بخش‌پذیر باشند، بزرگترین مقسوم علیه‌مشترك $n_{۱}$ و $n_{۲}$ گویند و، اغلب، با نماد $(n_{۱} ; n_{۲})$ نشان می‌دهند. مثلاً

$$(۱۸ ; ۱۵)=۳،\ (۳۲ ; ۴۰)=۸،\ (۷۲ ; ۱۲۸)=۸$$

درحالتی‌که داشته باشیم: $(n_{۱} ; n_{۲})=۱$، دو عدد $n_{۱}$ و $n_{۲}$ را نسبت به‌هم اول گویند (گاهی هم می‌گویند: $n_{۱}$ و $n_{۲}$ متباین‌اند).

مثلاً، دوعدد ۳۳ و ۳۵ نسبت به‌هم اول‌اند، در حالی‌که دوعدد ۲۱ و ۱۴ نسبت به‌هم اول نیستند، زیرا $(۲۱ ; ۱۴)=۷$.

اگر عددهای طبیعی $n_{۱}$ و $n_{۲}$ نسبت به‌هم اول باشند و، درضمن، عدد طبیعی n بر $n_{۱}$ و $n_{۲}$ بخش‌پذیر باشد، آن وقت n بر حاصل‌ضرب $n_{۱} \cdot n_{۲}$ بخش‌پذیر است. مثلاً، عدد ۲۴، برعدد ۶ بخش‌پذیر است، زیرا ۶، برابر است با حاصل‌ضرب دو عدد ۲ و ۳ که نسبت به‌هم اول‌اند، ولی بر ۳۲ بخش‌پذیر نیست؛ زیرا ۴ و ۸ (که مقسوم‌علیه‌هایی از ۲۴ هستند)، نسبت به‌هم اول نیستند.

مثال ۲. همهٔ عددهای پنج رقمی به‌صورت $\overline{۳۴X۵Y}$ را پیدا کنید که، هر کدام از آن‌ها، بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد.

حل. عدد ۳۶ را می‌توان به‌صورت ضرب دوعدد ۴ و ۹ درنظر گرفت که، نسبت به‌هم اول‌اند؛ بنابراین، عدد مطلوب، باید بر ۴ و ۹ بخش‌پذیر باشد. ازمعیارهای بخش‌پذیری بر ۴ و ۹ استفاده می‌کنیم. عدد $\overline{۵Y}$ باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد، بنابراین Y برابر ۲ یا ۶ است. عدد

$$۳+۴+X+۵+Y=۱۲+X+Y$$

باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد درحالت $Y=۲$، باید X رقمی باشد که $۱۴+X$ بر ۹ بخش‌پذیر شود؛ یعنی $X=۴$. درحالت $Y=۶$، بایدخود X بر ۹ بخش‌پذیر باشد؛ یعنی $X=۰$ یا $X=۹$. به‌این ترتیب، برای عدد مطلوب، سه جواب به‌دست می‌آید: ۳۴۴۵۲، ۳۴۹۵۶، ۳۴۰۵۶.

قانون یافتن بزرگترین مقسوم علیه مشترك دوعدد n_1 و n_2.

الف) تجزیهٔ متعارف عددهای n_1 و n_2 را پیدا می‌کنیم؛

ب) همهٔ عامل‌های اول مشترك را، درتجزیهٔ n_1 و n_2، می‌نویسیم؛

ج) هریك‌از این‌عامل‌های اول را، به‌توان کوچکترین عددی می‌رسانیم که، دربین توان‌های این عدد، درتجزیهٔ n_1 و n_2 وجود دارد؛

د) حاصل‌ضرب این توان‌ها، بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد n_1 و n_2 خواهد بود واغلب، آن را به‌صورت $(n_1; n_2)$ می‌نویسند.

مثال ۳. بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك‌دوعدد ۳۶۰ و ۸۴۰۰ را پیدا کنید.

حل. الف) تجزیهٔ متعارف دوعدد را پیدا می‌کنیم:

$$۳۶۰=۲^۳\times۳^۲\times۵\ ;\ ۸۴۰۰=۲^۴\times۳\times۵^۲\times۷$$

ب) عامل‌های مشترك این دوتجزیه را می‌نویسیم: ۲، ۳، ۵؛

ج) کوچکترین توان ۲ درتجزیهٔ عدد ۳۶۰ وجود دارد وبرابراست با ۳، کوچکترین توان ۳، برابراست با ۱ وکوچکترین توان ۵، برابر است با ۱؛

د) بنابراین $(۳۶۰; ۸۴۰۰)=۲^۳\times۳^۱\times۵^۱=۱۲۰$.

□

کوچکترین عددطبیعی n که برعددهای طبیعی $p_۱$ و $p_۲$ بخش‌پذیر باشد، کوچکترین مضرب مشترک این عدد نامیده می‌شود که، اغلب، آن را به‌صورت $[p_۱; p_۲]$ نشان می‌دهند. مثلاً، کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۲۴ و ۵۰ برابر ۶۰۰ است وهمچنین

$$[۱۲; ۴۸] = ۴۸ \quad ، \quad [۷۲; ۴۰] = ۳۶۰$$

قانون پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک دوعدد $n_۱$ و $n_۲$.

الف) تجزیهٔ متعارف عددهای $n_۱$ و $n_۲$ را پیدا می‌کنیم؛

ب) همهٔ عامل‌های اول را که، دست‌کم، در تجزیهٔ یکی ازعددهای $n_۱$ و $n_۲$ ظاهرشده‌اند، می‌نویسیم؛

ج) هریک ازعامل‌های ب) را با بزرگترین توانی درنظر می‌گیریم که، درتجزیهٔ متعارف $n_۱$ و $n_۲$ وجود دارد؛

د) حاصل‌ضرب توان‌های عامل‌های اول حاصل، کوچکترین مضرب مشترک دوعدد $n_۱$ و $n_۲$ است واغلب، آن را به‌صورت $[n_۱; n_۲]$ می‌نویسند.

یادآوری می‌کنیم که، بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترک وکوچکترین مضرب مشترک دوعدد $n_۱$ و $n_۲$، با رابطهٔ زیر به‌هم مربوط‌اند:

$$(n_۱; n_۲) \times [n_۱; n_۲] = n_۱ n_۲$$

مثال ۴. مطلوب است کوچکترین مضرب‌مشترک دوعدد ۳۶۰ و ۸۴۰۰.

حل. الف) تجزیهٔ متعارف عددهای ۳۶۰ و ۸۴۰۰ را پیدا می‌کنیم:

$$۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \; ; \; ۸۴۰۰ = ۲^۴ \times ۳ \times ۵^۲ \times ۷$$

ب) عامل‌های اولی را که دست‌کم دریکی ازتجزیه‌ها ظاهرشده‌اند، می‌نویسیم: ۲، ۳، ۵، ۷؛

ج) دراین دوتجزیهٔ متعارف، بزرگترین توان ۲ برابر ۴، بزرگترین توان ۳ برابر ۲، بزرگترین توان ۵ برابر ۲ وبزرگترین توان ۷ برابر واحد است؛

د) در نتیجه $[۳۶۰ ; ۸۴۰۰] = ۲^۴ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times ۷ = ۲۵۲۰۰$.

ویژگی‌های عمل‌های اصلی حساب:

۱) $m+n=n+m$؛ $m\cdot n=n\cdot m$: جابه‌جائی؛

۲) $(m+n)+k=m+(n+k)$: شرکت‌پذیری درجمع؛

$m(nk)=(mn)k$: شرکت‌پذیری درضرب؛

۳) $m(n+k)=mn+mk$: توزیع‌پذیری.

مجموعهٔ شامل عددهای طبیعی، عددهای درست منفی وصفر را، مجموعهٔ عددهای درست، و خود این عددها را عددهای درست گویند. مجموعهٔ عددهای درست را با نماد $\mathbf{Z}$ نشان می‌دهند.

اگر دریك عبارت عددی، که شامل پرانتز نیست، بخواهیم عمل‌های حسابی را انجام دهیم، باید اول عمل‌های ضرب و تقسیم و، سپس، عمل‌های جمع وتفریق را انجام داد. در حالتی‌که عبارت عددی، شامل پرانتزهایی باشد، باید ابتدا، عمل‌های داخل پرانتزهارا (طبق قاعدهٔ بالا) انجام داد.

قانون‌های جمع، تفریق وضرب عددهای درست را یادآوری می‌کنیم.

m و n را دوعدد طبیعی فرض کنید. دراین‌صورت

$$(-m)+(-n)=-(m+n);$$

$$(-m)+0=-m;$$

$$(-m)+n=\begin{cases}-(m-n) & (m>n)\\ n-m & (m<n)\\ 0 & (m=n)\end{cases}$$

$$(-m)\cdot n=-mn\ ;$$

$$(-m)\cdot(-n)=mn;$$

$$(-m)\cdot 0=0;$$

$$-(-n)=n;$$

$$n-m=n+(-m)$$

مثلاً

$$(-۲)+(-۳)=-(۲+۳)=-۵; \qquad (-۲)(-۳)=۶;$$

$$(-۷)+۳=-(۷-۳)=-۴; \qquad (-۳)\cdot۴=-۱۲;$$

$$(-۵)+۸=۸-۵=۳; \qquad -(-۳)=۳;$$

$$(-۲)+۲=۰; \qquad ۵-(+۲)=۵+(-۲)=۳$$

مثال ۵. محاسبه کنید:

$$۲\cdot(-۳)+(-۲)-(-۳)(-۴)(-۲).$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۲\cdot(-۳)+(-۲)-(-۳)(-۴)(-۲)=$$
$$=-۶+(-۲)-(-۲۴)=$$
$$=-۶+(-۲)+۲۴=-(۶+۲)+۲۴=$$
$$=-۸+۲۴=۲۴-۸=۱۶$$

اگر عدد $k\neq۰$ به‌صورت ضرب دو عدد درست d و q نشان داده شود، می‌گویند عدد k بر عدد d و، همچنین، بر عدد q بخش‌پذیر است. هر یک از دو عدد d و q را، مقسوم‌علیه عدد k گویند. مثلاً، مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰، عبارت است از عددهای ±۱، ±۲، ±۵، ±۱۰.

عدد درست را زوج گویند، وقتی که ۲، یکی از مقسوم‌علیه‌های آن باشد؛ در غیر این‌صورت، عدد را فرد گویند. مثلاً، عددهای

$$\ldots, -۸, -۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶, ۸, \ldots$$

زوج، و عددهای

$$\ldots, -۷, -۵, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, ۷, \ldots$$

عددهایی فردند.

ویژگی‌های اصلی تقسیم بدون باقی‌مانده. n، d، m، p و q را، عدد-

هایی درست می‌گیریم.

۱. اگر n بر d بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت حاصل‌ضرب nm هم بر d بخش‌پذیر خواهد بود.

۲. اگر n و m بر d بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت مجموع $m+n$ و تفاضل $m-n$ هم بر d بخش‌پذیرند.

۳. اگر m بر p و n بر q بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت حاصل‌ضرب mn بر حاصل‌ضرب pq بخش‌پذیر است.

۴. اگر m بر n و n بر p بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت m بر p بخش‌پذیر است.

مثال ۶. X حداکثر چه رقمی باشد تا عدد $\overline{۲X۳}+۱۲$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

حل. چون ۱۲ بر ۳ بخش‌پذیر است و مجموع مفروض هم باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، بنابراین تفاضل آن‌ها، یعنی $\overline{۲X۳}$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است. بزرگترین رقمی که، به‌ازای آن، $X+۵$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، برابر ۷ است، یعنی $X=۷$.

برای هر عدد درست k و هر عدد طبیعی n، دو عدد منحصر به‌فرد p و q وجود دارد، به‌نحوی که داشته باشیم:

$$k=mp+q$$

که در آن، p عددی است درست و q عددی است طبیعی یا صفر، درضمن $۰\leqslant q<n$.

به‌ازای $q=۰$، k بر n بخش‌پذیر است.

درحالت $q\neq۰$، گویند عدد k در تقسیم بر n دارای باقی‌مانده است. p را خارج قسمت و q را باقی‌ماندهٔ تقسیم گویند. مثلاً، در تقسیم ۲۵ بر ۷ به‌دست می‌آید: $۲۵=۳\times۷+۴$ که، در آن، ۳ خارج قسمت و ۴ باقی‌مانده است. در تقسیم عدد (-۲۵) بر ۷، به‌دست می‌آید: $-۲۵=(-۴).۷+۳$

که، در آن، ۴ — خارج قسمت و ۳ باقی‌مانده است.

ضمن تقسیم عدد درست k بر عدد طبیعی n؛ یکی از این دو حالت پیش می‌آید:

الف) عدد k بر عدد n بخش‌پذیر است؛

ب) در تقسیم k بر n، به یکی از باقی‌مانده‌های ۱، ۲، ...، $n-۱$ می‌رسیم.

مثلاً در تقسیم k بر ۳، داریم یا $k=۳m$ یا $k=۳r+۱$ و یا $k=۳l+۲$.

مثال ۷. ثابت کنید، عدد $n^{۵}$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، به همان رقمی ختم می‌شود که عدد n ختم شده است.

حل. هر عدد طبیعی n را می‌توان به‌صورت $n=۱۰k+l$ نوشت که، در آن، k عددی طبیعی یا صفر، و l عددی درست، باشد $۰\leqslant l\leqslant ۹$ است. در این صورت داریم:

$$n^{۵}=(۱۰k+l)^{۵}=۱۰r+l^{۵}$$

که در آن، r عددی طبیعی یا صفر است. از این‌جا معلوم می‌شود که عددهای $n^{۵}$ و $l^{۵}$ به یک رقم ختم می‌شوند. با آزمایش مستقیم، روشن می‌شود که رقم‌های آخر دو عدد $l^{۵}$ و l، یکی است.

مثال ۸. ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی n، عدد $n^{۳}-n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

حل. $n^{۳}-n$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$n^{۳}-n=(n-۱)n(n+۱)$$

عدد n را می‌توان به‌صورت $n=۶k+l$ نوشت که، در آن، k عددی طبیعی یا صفر است، و l یکی از مقدارهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ را قبول می‌کند.

اگر $l=۰$، آن وقت $n=۶k$، بنابراین n بر ۶ بخش‌پذیر است که، در نتیجه، $(n-۱)n(n+۱)$ هم بر ۶ بخش‌پذیر خواهد بود.

اگر $l=۱$، آن وقت $n=۶k+۱$ و $n-۱=۶k$ بر ۶ بخش‌پذیر است و، بنابراین، $(n-۱)n(n+۱)$ بر ۶ بخش‌پذیر می‌شود.

اگر $l=۲$، آن‌وقت $n=۶k+۲$ و بنابراین عدد

$$n(n-۱)(n+۱)=(۶k+۲)(۶k+۱)(۶k+۳)=$$

$$=۲(۳k+۱)(۶k+۱)\cdot۳(۲k+۱)=$$
$$=۶(۳k+۱)(۶k+۱)(۲k+۱)$$

بر ۶ بخش‌پذیر است.

اگر $l=۳$، آن‌وقت $n=۶k+۳$ و بنابراین عدد

$$n(n-۱)(n+۱)=(۶k+۳)(۶k+۲)(۶k+۴)=$$
$$=۳(۲k+۱)\cdot۲(۳k+۱)(۶k+۴)=$$
$$=۶(۲k+۱)(۳k+۱)(۶k+۴)$$

بر ۶ بخش‌پذیر است.

اگر $l=۴$، آن‌وقت $n=۶k+۴$ و بنابراین عدد

$$n(n-۱)(n+۱)=(۶k+۴)(۶k+۳)(۶k+۵)=$$
$$=۲(۳k+۲)\cdot۳(۲k+۱)(۶k+۵)=$$
$$=۶(۳k+۲)(۲k+۱)(۶k+۵)$$

بر ۶ بخش‌پذیر است.

اگر $l=۵$، آن‌وقت $n=۶k+۵$ و بنابراین عدد

$$n(n-۱)(n+۱)=(۶k+۵)(۶k+۴)(۶k+۶)=$$
$$=۶(۶k+۵)(۶k+۴)(k+۱)$$

بر ۶ بخش‌پذیر است.

به‌این ترتیب، عدد $n^۳-n$، به‌ازای هرعدد طبیعی n، بر ۶ بخش‌پذیر است.

مثال ۹. همهٔ عددهایی را پیدا کنیدکه درتقسیم بر۱۷ باقی‌مانده‌ای برابر ۲، ودرتقسیم بر۵ باقی‌مانده‌ای برابر۳ داشته باشند.

حل. عددی راکه درتقسیم بر۱۷، به‌باقی‌ماندهٔ ۲ برسد، می‌توان این‌

طور نوشت:

$$n_k=۱۷k+۲ \text{ ، } k\in\mathbf{Z}$$

وهمهٔ عددهایی را که درتقسیم بر ۵، به باقی‌ماندهٔ ۳ برسند، به‌صورت

$$n_l=۵l+۳ \text{ ، } l\in\mathbf{Z}$$

فرض کنید $n_k=n_l$، یعنی $۱۷k+۲=۵l+۳$، دراین‌صورت

$$۵l=۱۷k-۱=۱۵k+(۲k-۱)$$

یعنی عدد $۲k-۱$ باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد. چون $۲k-۱=۵m$ $(m\in\mathbf{Z})$ و $۲k=۴m+m+۱$، پس عدد $m+۱$ باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد، یعنی

$$m+۱=۲d$$

به‌این ترتیب $m=۲d-۱$ و، بنابراین $k=۲m+d$ $(d\in\mathbf{Z})$.

k و l را برحسب d بیان می‌کنیم؛ داریم،

$$k=۵d-۲$$

$$l=۳(۵d-۲)+۲d-۱=۱۷d-۷$$

ودرنتیجه

$$n_k=۱۷k+۲=۱۷(۵d-۲)+۲=۸۵d-۳۲ \text{ ،}$$

$$n_l=۵l+۳=۵(۱۷d-۷)+۳=۸۵d-۳۲$$

بنابراین، همهٔ عددهای به‌صورت

$$۸۵d-۳۲=۸۵(d-۱)+۸۵-۳۲=۸۵(d-۱)+۵۳$$

$(d\in\mathbf{Z})$، عددهای مورد نظرند.

به‌این ترتیب، شرط مساله، باهمهٔ عددهایی‌که درتقسیم بر ۸۵ به‌باقی‌ماندهٔ ۵۳ می‌رسند، سازگاراست، یعنی عددهای به‌صورت $۸۵t+۵۳$ $(t\in\mathbf{Z})$.

تکلیف ۱.

۰۱ از ۱۵ عدد طبیعی نخستین، کدام اول و کدام مرکب‌اند؟

۰۲ عددهای ۱۳۷۵ و ۹۰۰۹ را به‌صورت ضرب عامل‌های اول بنویسید.

۰۳ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را پیدا کنید.

۱) $a=۱۲۰$ ، $b=۱۴۴$؛

۲) $a=۲۷۵$ ، $b=۱۸۰$؛

۳) $a=۳۷۲$ ، $b=۱۵۶$.

۰۴ مطلوب است کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b:

۱) $a=۷۰$ ، $b=۱۱۲$؛

۲) $a=۷۵$ ، $b=۱۱۴$؛

۳) $a=۵۴۴$ ، $b=۷۲۰$.

۰۵ کدام یک از عددهای زیر، بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۵ بخش‌پذیرند؟

۱) ۲۰۲۵؛ ۲) ۲۰۱۶۰؛ ۳) ۵۱۸۴؛ ۴) ۹۱۲۱۵؛

۵) ۷۳۳۴۲۲۴۸۸؛ ۶) ۹۷۱۴۸۳۲؛ ۷) ۸۷۵۶۴۴۲؛

۸) ۸۴۴۷۸۳۰۰.

۰۶ کوچکترین عدد سه‌رقمی را پیدا کنید که بر ۲ بخش‌پذیر، ولی بر ۴ بخش‌ناپذیر باشد.

۰۷ رقم X را طوری پیدا کنید که عدد X۷۹۳X۴ ۵ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

تکلیف ۲.

۰۱ عددهای ۱۱۲۴ و ۲۴۱۸۰ را به صورت ضرب عامل‌های اول بنویسید.

۰۲ مطلوب است بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b، به‌شرطی که

۱) $a=۱۰۸$ ، $b=۱۰۵$؛

۲) $a=۱۴۴$ ، $b=۱۷۴$؛

۳) $a=۱۹۲$ ، $b=۱۰۲$.

۳. مطلوب است کوچکترین مضرب مشترک دوعدد a و b، به‌شرطی که

۱) $a=۳۶$ ، $b=۵۴$؛

۲) $a=۱۱۱$ ، $b=۳۰$؛

۳) $a=۲۱۶$ ، $b=۲۷۰$.

۴. کدام یك از عددهای زیر، بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۵، ۲۵ بخش‌پذیرند؛

۱) ۱۰۸۰؛ ۲) ۱۲۹۶؛ ۳) ۱۰۸۰۰؛ ۴) ۱۱۲۲۳۳۴۴؛

۵) ۷۳۸۸۵۶۳۵؛ ۶) ۵۴۷۷۱۱۳۰۰؛

۷) ۴۶۷۸۷۶۴۱۲۰۰؛ ۸) ۳۸۹۳۴۳۵۵۹۴.

۵. ثابت کنید، اگر عدد طبیعی m از عدد طبیعی n بزرگتر و، هریک از این دوعدد بر p بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $m-n$ هم بر p بخش‌پذیر است.

۶. مثالی از یك عدد پنج رقمی پیدا کنید که بر ۸ و ۹ بخش‌پذیر باشد.

۷. رقم X را طوری پیدا کنید که عدد $\overline{۱۲X۳۴۷X}$ بر ۸ بخش‌پذیر باشد.

تکلیف ۳.

۱. ثابت کنید، حاصل‌ضرب دوعدد طبیعی متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

۲. ثابت کنید. عدد $\overline{ab}-\overline{ba}$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید، عدد $\overline{abcd}$ تنها وقتی بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است که داشته باشیم: $\overline{ab}-\overline{cd}=۰$.

۴. آیا این عددها نسبت به‌هم اولند:

۱) ۵۱ و ۷۶؛ ۲) ۱۰۸۱ و ۲۹۲۴؛

۳) ۸۰۶۰۰ و ۵۱۸۷؟

۵. همهٔ عددهای پنج‌رقمی $\overline{۶۴X۵Y}$ را پیدا کنید که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشند.

۶. ثابت کنید، این عددها مرکب‌اند:

۱) $\underbrace{۲۲ \ldots ۲\ ۳}_{\text{۱۹۸۶ رقم}}$؛ ۲) $۱۷^{۱۴}+۲۱^{۳۰}$؛

۳) $۲^{۱۵}+۴۲۴$؛ ۴) $۱۵۱۷^{۲}-۱۵۱۶^{۲}$؛ ۵) ۱۱۱۱۱۱۱۱؛

۶) $۴^{۱۵}-۱$؛ ۷) $۱۰۰^{۱۰۰}-۱$؛ ۸) $۱۰^{۶}-۵^{۷}$؛

۹) $۱۰^{۱۳}-۷$؛ ۱۰) $۱۰^{۲۴۰}-۴$؛ ۱۱) $۵۵^{۳۷}-۷۱^{۱۷}$؛

۱۲) $۱۲۶^{۱۹۸۵}-۵۱^{۱۹۸۶}$.

تکلیف ۴.

۱. ثابت کنید، حاصل‌ضرب چهار عدد طبیعی متوالی، بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۲. ثابت کنید، عدد $\overline{ab}+\overline{ba}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید، عدد $\overline{abcd}$ تنها وقتی بر ۹۹ بخش‌پذیر است که عدد $\overline{ab}+\overline{cd}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد.

۴. آیا این عددها نسبت به‌هم اول‌اند:

۱) ۲۷ و ۸۸؛ ۲) ۱۱۵۵ و ۳۳۸؛

۳) ۱۲۲۴ و ۲۴۸۷۶۵۱؟

۵. همهٔ عددهای پنج‌رقمی به‌صورت $\overline{۷۱X۱Y}$ را پیدا کنید که بر ۴۵ بخش‌پذیر باشند.

۶. مرکب بودن این عددها را ثابت کنید:

۱) ۱۲۳۱۲۳۱۲۳۱۲۳؛ ۲) $۶^{۵}-۹^{۲}$؛ ۳) $۲^{۳۰}-۱$؛

۴) $۱۳^{۱۵}+۱۷^{۳}$. ۵) $\underbrace{۴۴۴ \ldots ۴۱}_{\text{۱۹۸۵ رقم}}$ ۶) $۴^{۱۷}-۲۸۴$؛

۷) $۸^{۵}+۲^{۲۱}$؛ ۸) $۱۷۸۶۷^{۲}-۱۵۹۴۴^{۲}$

تکلیف ۵.

۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد

۱) ۷۸۳۴۶۷۹۱؛ ۲) ۱۲۳۱۲۳۴۱۵۵

را بر ۵، ۸، ۹، ۱۰، ۲۵ پیدا کنید.

۲. مثالی برای یك عدد چهاررقمی پیدا کنید که بر ۹ بخش‌پذیر باشد وضمن تقسیم بر ۴، به‌باقی‌ماندهٔ ۳ برسد.

۳. محاسبه کنید:

۱) $(-۲)+(-۳):(-۱)-(-۷)$؛

۲) $[۳\cdot(-۲)-(-۸)]\cdot(-۷)-(-۲)(-۵)+۳:(-۱)$؛

۳) $$\frac{(-۱)\cdot(-۲)+(-۳)\cdot(-۴)-(-۲)\cdot(-۳)}{(-۲)\cdot(-۳):(-۱)-(-۳)\cdot(-۲):(-۶)+(-۲)}$$

۴. عددهای درست x و y را طوری پیدا کنید که

۱) $(x+۲)(y-۱)=۴$؛ ۲) $(x-۳)(xy+۵)=۱$.

۵. ثابت کنید، مجموع مجذورهای دو عدد درست متوالی، در تقسیم بر ۴، به‌باقی‌ماندهٔ واحد می‌رسد.

۶. ثابت کنید، به‌ازای هر عدد درست m، عدد $m(m^۲+۵)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۷. حاصل‌ضرب چهار عدد درست مثبت از مجموع آن‌ها کوچکتر و مجموع سه تا از این عددها، برابر ۲۸ است. همهٔ این گونه عددها را پیدا کنید.

تکلیف ۶.

۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد

۱) ۲۷۸۴۵۶۷۸۹؛ ۲) ۳۲۱۷۹۲۴۱۳

را بر ۳، ۴، ۵، ۸، ۹، ۱۲۵ پیدا کنید.

۲. نمونه‌ای از یك عدد شش‌رقمی بیاورید که بر ۳ بخش‌پذیر باشد و در تقسیم بر ۵، به‌باقی‌ماندهٔ ۲ برسد.

۳. محاسبه کنید:

۱) $(-۲)\cdot ۳+(-۴)-۷\cdot ۰+۱$؛

۲) $(-۶):(-۲)+(-۸):۴-(-۲)$؛

۳) $(۵-۳)(۴-((-۳)-۷))$؛

۴) $$\frac{(-۱)\cdot(-۲)\cdot(-۳)\cdot(-۴)\cdot(-۵)}{(-۳)-(-۵)}؛$$

۵) $$\frac{(-۲)+(-۳)\cdot(-۱)\cdot ۰+(-۴)}{(-۱)\cdot(-۱)+۳}$$

۴. عددهای درست x و y را طوری پیدا کنید که

۱) $(x+۱)(y-۲)=۲$؛ ۲) $(y+۱)(xy-۱)=۳$.

۵. ثابت کنید، در تقسیم مجذور یك عدد فرد بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ به‌دست می‌آید.

۶. ثابت کنید، به‌ازای هرعدددرست m، عدد $m(m+۱)(۲m+۱)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۷. حاصل‌ضرب چهارعدددرست متوالی، از ریشهٔ دوم مجموع مجذورهای آن‌ها کوچکتر شده است؛ درضمن، مجموع این عددها برابراست با ۴۵. همهٔ این گونه عددها را پیدا کنید.

تمرین‌ها

۱. عددهای طبیعی m و n بر عدد طبیعی p بخش‌پذیرند. ثابت کنید، عدد $m+n$ بر p بخش‌پذیر است.

۲. عددطبیعی m برعدد طبیعی p وعدد n برعددطبیعی q بخش‌پذیرند. ثابت کنید، mn بر pq بخش‌پذیر است.

۳. عدد طبیعی m برعددطبیعی p بخش‌پذیر است؛ ثابت کنید، عدد m^k هم برعدد p^k بخش‌پذیر است $(k\in\mathbf{N})$.

۴. عددی به‌رقم ۵ ختم شده‌است. ثابت کنید، مجذور این عدد، بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۵. نمونه‌ای از یك عدد شش‌رقمی پیدا کنید که بر ۱۲۱ بخش‌پذیر باشد؛ چکترین این عددها، کدام است؟

۶. ثابت کنید یك‌عدد، تنها وقتی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که تفاضل بین موع رقم‌های ردیف زوج ومجموع رقم‌های ردیف‌فرد آن، بر ۱۱ بخش‌ ر باشد.

۷. مجموع دوعدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ و $\overline{efg}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است. ثابت د، عدد $\overline{abcefg}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

۸. همهٔ عددهای به‌صورت $\overline{۵۶X۳Y}$ را پیدا کنید که بر ۳۶ بخش‌پذیر ند.

۹. همهٔ عددهای به‌صورت $\overline{۷۱X۱Y}$ را پیدا کنید که بر ۴۵ بخش‌پذیر ند.

۱۰. همهٔ عددهای به‌صورت $\overline{۱۳۵XY}$ را پیدا کنید که بر ۴۵ بخش‌پذیر ند.

۱۱. همهٔ عددهای به‌صورت $\overline{۵۱۷XY}$ را پیدا کنید که بر ۶ و ۹ بخش‌ ر باشند.

۱۲. دریك عدد شش‌رقمی، رقم‌های اول وچهارم باهم، رقم‌های دوم حم با هم و رقم‌های سوم وششم باهم برابرند. ثابت کنید، این عدد
۱) بر ۷؛ ۲) بر ۱۱؛ ۳) بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۱۳. عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را کنارهم نوشته‌ایم:

$$۱۲۳\ldots ۹۱۰۱۱\ldots ۹۸۹۹۱۰۰$$

این عدد ۱) بر ۲؛ ۲) بر ۸؛ ۳) بر ۳؛ ۴) بر ۹ بخش‌پذیر است؟

۱۴. آیا عدد $\underbrace{۱۱\ldots۱۱}_{\text{۸۱ رقم}}$ بر ۸۱ بخش‌پذیر است؟

۱۵. آیا عدد $\underbrace{۷۷\ldots۷}_{\text{۲۷ رقم}}$ ۱) بر ۱۸۹؛ ۲) بر ۳۳۳؛ ۳) بر ۷۷۷؛
بر ۵۶۷ بخش‌پذیر است؟

۱۶. مرکب‌بودن این عددها را ثابت کنید:

۱) $۲^{۳۳}+۱;$

۲) $۲^{۵۰}-۱;$

۳) $۱۳^{۲۵}+۱۷^{۸۹}+۲^{۷۱};$

۴) $۲^{۳^{۱۹۷۹}}+۱;$

۵) $۲^{۳^{۱۹۷۹}}-۱;$

۶) $۴\times ۱۰^{۴۰۰}+۱;$

۷) $۴\times (۱۰۰۰۰)^{۴۰}+۱;$

۸) $۴۳^{۴۳}-۱۷^{۱۷};$

۹) $۱۰^{۳۳۳}+۸;$

۱۰) $(۳۹۹۹^{۵}+۶)^{۱۸}-۱;$

۱۱) $۳^{۱۰۵}+۴^{۱۰۵};$

۱۲) $۵\times ۲^{۲۹۸}+۳^{۲۹۹}$

۱۳) $۵^{۵۰۱}+۴^{۵۰۲}+۳^{۵۰۰};$

۱۴) $۱۱\times ۲۱\times ۳۱\times ۴۱\times \dots \times ۹۱-۱۱۱;$

۱۵) $\frac{۱۰^{۱۹۸}+۲}{۳}+\frac{۱۰^{۲۹۷}+۸}{۹};$

۱۶) $(۲\times ۵^{۷}-۵\times ۲^{۷})^{۸۳}-((۲\times ۵^{۷})^{۸۳}-(۵\times ۲^{۷})^{۸۳});$

۱۷) $۲۲۲۲^{۵۵۵۵}+۵۵۵۵^{۲۲۲۲};$ ۱۸) $۲۲۲^{۳۳۳}+۳۳۳^{۲۲۲}$

۱۷. مجموع سه عدد طبیعی از حاصل‌ضرب آن‌ها بیشتر و مجموع دو تا از آن‌ها برابر ۳۳ است. این عددها را پیدا کنید.

۱۸. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد $\frac{n}{۳}+\frac{n^{۲}}{۲}+\frac{n^{۳}}{۶}$ عددی طبیعی است.

۱۹. ثابت کنید، به‌ازای هر عدد فرد n، عدد $n^{۱۲}-n^{۸}-n^{۴}+۱$ بر ۵۱۲ بخش‌پذیر است.

۲۰. ثابت کنید، مجموع مجذورهای دو عدد فرد، نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد.

۲۱. ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه‌ای که، طول ضلع‌های آن با عددهای طبیعی بیان می‌شوند، دست‌کم طول یکی از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه، بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۲. ثابت کنید درمثلث قائم‌الزاویه‌ای که، طول ضلع‌های آن، با

عددهای طبیعی بیان می‌شوند، دست کم طول یکی از ضلع‌ها مضربی از ۵ است.

۲۳. همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید که، برای آن‌ها، مجموع

$$۱+۲+۳+\dots+n$$

در تقسیم بر ۵، به باقی‌ماندهٔ ۱ برسد.

۲۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، بخش‌پذیر است:

۱) عدد $۱۰^n+۱۸n-۱$ بر ۲۷؛

۲) عدد $۳^{۲n+۳}+۴۰n-۲۷$ بر ۶۴؛

۳) عدد $۵۰^n-۵^n(۲^n+۱)+۱$ بر ۳۶؛

۴) عدد $۴۲^{۴n}-۲۱^{۴n}+۸(n+۱۱)+۳۷n+۲$ بر ۴۵.

۲۵. آیا این حکم درست است که، هر عدد فرد را، می‌توان به‌صورت:

۱) $۲n-۱$؛ ۲) $۲n+۷$؛ ۳) $۴n+۱$ یا $۴n-۱$؛ ۴) $۲n^۲+۳$

$(n\in\mathbf{N})$ نوشت؟

۲۶. آیا این درست است که، هر عدد زوج را می‌توان به‌صورت:

۱) $۲n-۲$؛ ۲) $۴n+۲$؛ ۳) $n^۲+۲$ $(n\in\mathbf{N})$ نوشت؟

۲۷. بزرگترین عدد درستی را پیدا کنید که، در تقسیم با باقی‌مانده بر ۱۵، به خارج قسمت ۱۹ برسد.

۲۸. مجموع همهٔ عددهای دورقمی به چه رقمی ختم می‌شود؟

۲۹. مجموع همهٔ عددهای سه‌رقمی، به چه رقمی ختم می‌شود؟

۳۰. همهٔ عددهای درست k را پیدا کنید که، به ازای آن‌ها، عدد $k^۲+۳k+۵$ بر ۱۲۱ بخش‌پذیر باشد.

۳۱. دو عدد طبیعی، در تقسیم بر عدد طبیعی m، به باقی‌ماندهٔ ۱ رسیده‌اند؛ ثابت کنید، در تقسیم حاصل‌ضرب آن‌ها بر m، بازهم به باقی‌ماندهٔ ۱ می‌رسیم.

۳۲. ثابت کنید، هر عدد به‌صورت $۳m+۲$، نمی‌تواند مجذور یک عدد درست باشد.

۳۳. ثابت کنید، هر توانی از عدد ۱۵، در تقسیم بر ۷، باقی‌مانده‌ای برابر واحد پیدا می‌کند.

۳۴. ثابت کنید، هر عدد به‌صورت $۲^{۲^n}+۱$ $(n\geqslant ۲$ و $n\in\mathbf{N})$ به‌رقم ۷ ختم می‌شود.

۳۵. ثابت کنید، هر عدد به صورت $۲^{۴^n}-۵$ $(n\in\mathbf{N})$ به رقم ۱ ختم می‌شود.

۳۶. ثابت کنید، در تقسیم عدد اول $p(p\geqslant ۵)$ بر عدد ۶، باقی‌مانده‌ای برابر ۱ یا ۵ به‌دست می‌آید.

۳۷. ثابت کنید، در تقسیم مجذور عدد اول p $(p\geqslant ۵)$ بر عدد ۲۴، به‌باقی‌مانده‌ای برابر واحد می‌رسیم.

۳۸. عدد طبیعی $n>۱$، بر ۲ و بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید $n^۲-۱$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۳۹. $p>۳$ را عددی اول می‌گیریم. ثابت کنید $p^۲-۱$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

۴۰. همهٔ عددهای طبیعی p را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، عددهای $p+۱$، $p+۲$ و $p+۴$، اول باشند.

۴۱. همهٔ زوج عددهای اول p و q را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $p^۲-۲q^۲=۱$.

۴۲. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، عدد $۲p^۲+۱$ هم اول باشد.

۴۳. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، دو عدد $۴p^۲+۱$ و $۶p^۲+۱$ هم اول باشند.

۴۴. همهٔ عددهای اول p را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، عددهای $p+۱۰$ و $p+۱۴$ هم اول باشند.

۴۵. ثابت کنید، عدد اول p وجود ندارد، به‌نحوی که دو عدد $p+۵$ و $p+۱۰$ اول باشند.

۴۶. ثابت کنید، برای عدد اول p، ممکن نیست دو عدد $p+۲$ و $p+۵$، اول باشند.

۴۷. عددهای p و $۸p^۲+۱$ اول‌اند. ثابت کنید، عدد $۸p^۲+۲p+۱$ هم اول است.

۴۸. ثابت کنید، برای هر $n>۳$، دست‌کم یکی از سه عدد n و $n+۲$ و $n+۴$، اول نیست.

۴۹. مبلغ ۴ روبل و ۹۶ کوپك، به چند طریق ممکن است از سکه‌های ۲ و ۱۵ کوپکی تشکیل شده باشد (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپك است)؟

۵۰. ۲ روبل و ۳۱ کوپك، به‌چند طریق ممکن است از سکه‌های ۳ و ۲۰ کوپکی تشکیل شده باشد؟

۵۱. این برابری را ثابت کنید:

$$\sqrt{\underbrace{۱۱\dots۱}_{۲n\ \text{رقم}}-\underbrace{۲۲\dots۲}_{n\ \text{رقم}}}=\underbrace{۳۳\dots۳}_{n\ \text{رقم}}$$

۵۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد

$$\underbrace{۴۴\dots۴}_{n\ \text{رقم}}\underbrace{۸۸\dots۸}_{n-۱\ \text{رقم}}۹$$

مجذور یك عدد درست است.

۵۳. عددهای طبیعی x و y را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$۱)\ \ ۲x^۲\cdot۳^y=۱۲^x;\qquad ۲)\ \ ۲^{x^۲}\cdot۳^{y^۲}=۶^{x+y};$$

$$۳)\ \ ۱۸^{xy}=۲x^۲\cdot۳^{۴y};\qquad ۴)\ \ ۵^{-x}\cdot۱۰^y=۲۰x^۲$$

۵۴. آیا عددهای طبیعی m و n وجود دارند، به‌نحوی که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$n^۲-m^۲=۱۰۱۰۱۰$$

۵۵. ثابت کنید، عدد درست n، تنها وقتی بر ۷، ۱۱ یا ۱۳ بخش‌پذیر است که تفاضل بین عدد هزارگان آن و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر ۱۰۰۰، به‌ترتیب، بر ۷، ۱۱، یا ۱۳ بخش‌پذیر باشد. (مثلاً، عدد ۴۵۲۳۱۲ بر ۷ بخش‌پذیر است، زیرا عدد ۱۴۰ = ۳۱۲ − ۴۵۲ بر ۷ بخش‌پذیر است).

۵۶. ثابت کنید، هر تبدیلی در رقم‌های یك عدد به‌وجود آوریم، تفاضل عدد اصلی وعدد حاصل، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۵۷. ثابت کنید، اگر دوعدد درمجموع رقم‌ها برابر باشند، آن‌وقت تفاضل آن‌ها، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۵۸. ثابت کنید، مجموع $۲n+۱$ عدد متوالی، بر $۲n+۱$ بخش‌پذیر است.

۵۹. ثابت کنید، برای دوعدد طبیعی، که یکی از آن‌ها برابر تفاضل مجذورهای دوعدد طبیعی و دیگری برابرمجموع مجذورهای همان دوعدد باشد، عدد ۴ نمی‌تواند مقسوم‌علیه مشترکشان باشد.

۶۰. بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك وکوچکترین مضرب مشترك این‌عددها را پیدا کنید:

۱) ۳۰۸، ۲۶۴; ۲) ۱۱۲، ۴۹۰; ۳) ۱۴۴، ۴۲۰، ۲۵۲;
۴) ۱۵۱۲، ۱۱۸۸، ۱۲۶۰

۶۱. ثابت کنید، هرمضرب مشترك دوعدد، برکوچکترین مضرب مشترك آن‌ها، بخش‌پذیر است.

۶۲. ثابت کنید:

۱) کوچکترین‌مضرب‌مشترك سه‌عدد a، b و c، برابراست باکوچکترین مضرب مشترك بین c وکوچکترین مضرب مشترك a و b؛

۲) برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم‌علیهٔ مشترك بین سه عدد a، b و c، می‌توان ابتدا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك‌بین a و b را پیدا کرد و، سپس، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك بین عدد اخیر و c را به‌دست آورد؛

۳) $(a ; b) \cdot [a ; b]=ab$؛

۴) $(ab ; bc)=c \cdot (a ; b)$؛

۵) $[ac ; bc]=c \cdot [a ; b]$؛

۶) $[n ; n+۱ ; n+۲]=۱$؛

۷) کوچکترین مضرب مشترك بین سه عدد n، $n+۱$ و $n+۲$ برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}n(n+۱)(n+۲) \quad \text{یا} \quad n(n+۱)(n+۲)$$

۸) $(۲n ; ۲n+۲)=۲$.

[منظور از $(a;b)$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و منظور از $[a;b]$، کوچکترین مضرب مشترک دوعدد a و b است.]

۶۳. ثابت کنید، عددهای $\frac{a}{(a\,;\,b)}$ و $\frac{b}{(a\,;\,b)}$ نسبت به‌هم اول‌اند.

۶۴. ثابت کنید، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک سه عدد ab، bc، ca بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک سه‌عدد a، b، c بخش‌پذیر است.

۶۵. ثابت کنید، اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند. a و $a+b$ هم نسبت به‌هم اول‌اند.

۶۶. ثابت کنید، اگر $(a;b)=۱$، آن‌وقت $(ac;b)=(c,b)$.

۶۷. ثابت کنید، بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین دوعدد m و n $(m>n)$، از $m-n$ کوچکتر یا با آن برابر است.

۶۸. همهٔ زوج عددهای طبیعی m و n را پیدا کنید که در این دستگاه صدق کنند:

$$۱)\begin{cases} m+n=۲۰ \\ (m;n)=۵ \end{cases}; \qquad ۲)\begin{cases} mn=۶ \\ (m;n)=۱ \end{cases};$$

$$۳)\begin{cases} mn=۴۲۰ \\ (m\,;\,n)=۲۰ \end{cases}; \qquad ۴)\begin{cases} mn=۲۰ \\ [m;n]=۱۰ \end{cases}$$

۶۹. ثابت کنید، اگر $(n;m;k)=۱$، آن‌وقت

$$(pn;lm;k)=(p;l;k)$$

۷۰. زوج عددهای درست x و y را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

۱) $x+y=x\cdot y$;

۲) $x^۲-۳xy+۲y^۲=۳$;

۳) $x^۲+۲۳=y^۲$;

۴) $x^۲-۴۷=y^۲$;

۵) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{xy}=۱$;

۶) $x(y^۲+۱)=۴۸$;

۷) $y^۲-۵x^۲=۶$;

۸) $x^۲=۴y^۲$;

۹) $y=\frac{۲}{۳}x$;

۱۰) $۳^x-y^۳=۱$

۷۱. عددهای درست x و y و z را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

۱) $\begin{cases} x+۲y+۵z=۱ \\ ۳x+y+۵z=۳ \end{cases}$;   ۲) $\begin{cases} x-y-۳z=۱ \\ x+y-۲z=۱ \end{cases}$

۷۲. همهٔ عددهای درست z را پیدا کنید که، برای هر کدام از آن‌ها، داشته باشیم:

۱) $\sqrt{z+۲}<\sqrt[۴]{۱-z}$;

۲) $\sqrt[۶]{z+۱}<\sqrt[۸]{۶-z}$;

۴) $\sqrt{z+۲}>\sqrt[۴]{۱-z}$;

۴) $\sqrt[۶]{z+۱}>\sqrt[۸]{۶-z}$

۷۳. $x+\frac{۱}{x}$ عددی درست است. ثابت کنید $x^۸+\frac{۱}{x^۸}$ هم عددی درست است.

۷۴. عددهای درست x و y در معادلهٔ $x^۲-۴y^۲=۴xy$ صدق می‌کنند. ثابت کنید: $x=y=۰$.

۷۵. برای هریك از نا برابری‌های زیر، چند عدد درست n به دست می‌آید:

۱) $(n^۲-۲)(n^۲-۲۰)<۰$;

۲) $(n^۲-۱)(n^۲-۱۱)(n^۲-۱۰۱)(n^۲-۱۰۰۱)<۰$;

۳) $(n^۲-۳)(n^۲-۳۳)(n^۲-۱۰۳)(n^۲-۲۰۳)<۰$

۷۶. این دستگاه‌ها را، برای عددهای درست x و y حل کنید:

۱) $\begin{cases} x>y \\ ۲x+y<۳۲ \\ x+۲y>۲۸ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} ۲۰x<y \\ ۲۳(x-۱)\geqslant y \\ ۲۱x+y=۵۰۰ \end{cases}$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳.

۲. $۱۳۷۵=۵^{۳}\times ۱۱$، $۹۰۰۹=۳^{۲}\times ۷\times ۱۱\times ۱۳$.

۳. ۱) ۲۴؛ ۲) ۵؛ ۳) ۱۲.

۴. ۱) ۵۶۰؛ ۲) ۲۸۵۰؛ ۳) ۲۴۴۸۰.

۵. ۱) بر ۳، ۵، ۹ و ۱۵ بخش‌پذیر است؛ ۲) بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ و ۱۵ بخش‌پذیر است؛ ۳) بر ۲، ۳، ۴، ۶، ۸ و ۹ بخش‌پذیر است؛ ۴) بر ۳، ۵، ۹ و ۱۵ بخش‌پذیر است؛ ۵) بر ۲، ۳، ۴، ۶ و ۸ بخش‌پذیر است؛ ۶) بر ۲، ۴ و ۸ بخش‌پذیر است؛ ۷) بر ۲، ۳، ۶ و ۹ بخش‌پذیر است؛ ۸) بر ۲، ۴ و ۵ بخش‌پذیر است.

۶. ۱۰۲.

۷. $\{۱, ۴, ۷\}$.

تکلیف ۲.

۱. $۱۱۲۴=۲^{۲}\times ۲۸۱$، $۲۴۱۸۰=۲^{۲}\times ۳\times ۵\times ۴۰۳$.

۲. ۱) ۳؛ ۲) ۶؛ ۳) ۶.

۳. ۱) ۱۰۸؛ ۲) ۱۱۱۰؛ ۳) ۱۰۸۰.

۴. ۱) بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹ و ۱۵؛ ۲) بر ۲، ۳، ۴، ۶، ۸ و ۹؛ ۳) بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۵ و ۲۵؛ ۴) بر ۲، ۴ و ۸؛ ۵) بر ۳، ۵، ۹ و ۱۵؛ ۶) بر ۲، ۴، ۵ و ۲۵؛ ۷) بر ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۵ و ۲۵؛ ۸) بر ۲ بخش‌پذیر است.

۶. مثلاً ۷۲۱۴۴.

۷. ۲.

تکلیف ۳.

۴. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) نه.

۵. ۶۴۱۵۲، ۶۴۶۵۶.

تکلیف ۴.

۴. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) نه.

۵. ۷۱۰۱۰، ۷۱۹۱۰، ۷۱۴۱۵.

تکلیف ۵.

۱. ۱) ۱، ۷، ۰، ۱، ۱۶؛ ۲) ۰، ۳، ۰، ۵، ۵.

۲. مثلاً ۴۴۵۵.

۳. ۱) ۸؛ ۲) −۲۷؛ ۳) $-\frac{۸}{۷}$.

۴. ۱) (۵، −۱)، (−۳، −۳)، (۲، ۲)، (۰، −۶)، (−۱، −۴)، (۳، ۰)؛ ۲) (−۱، ۴)، (−۳، ۲).

۷. ۲۶، ۱، ۱، ۱.

تکلیف ۶.

۱. ۱) ۲، ۱، ۴، ۵، ۲، ۳۹؛ ۲) ۲، ۱، ۳، ۵، ۵، ۳۸.

۲. مثلاً ۱۷۶۱۲۷.

۳. ۱) −۹؛ ۲) ۳؛ ۳) ۲۸؛ ۴) −۶۰؛ ۵) $-\frac{۳}{۲}$.

۴. ۱) (۴، ۰)، (۰، −۲)، (۳، ۱)، (۱، −۳)؛ ۲) (−۲، ۱)، (۲، ۱)، (−۴، ۰).

۷. ۴۲، ۱، ۱، ۱.

تمرین‌ها

۵. مثلاً ۱۲۱۱۲۱، ۱۰۰۰۶۷.

۸. ۵۶۲۳۲، ۵۶۷۳۶.

۹. ۷۱۰۱۰، ۷۱۹۱۰، ۷۱۴۱۵.

۱۰. ۱۳۵۰۰، ۱۳۵۴۵، ۱۳۵۹۰.

۱۱. ۵۱۷۵۰، ۵۱۷۳۲، ۵۱۷۱۴، ۵۱۷۸۶، ۵۱۷۶۸.

۱۳. ۱) بله؛ ۲) نه؛ ۳) نه؛ ۴) نه.

۱۴. بله.

۱۵. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) بله؛ ۴) بله.

۱۶. ۶) راهنمائی: $۴k^{۴}+۱=(۲k^{۲}+۱)^{۲}-(۲k)^{۲}$.

۱۷. ۳۲، ۱، ۱.

۲۳. $۵k+۱$ $(k=۰,۱,۲,\ldots)$، $۵k+۳$ $(k=۰,۱,\ldots)$.

۲۵. ۱) بله؛ ۲) نه؛ ۳) نه؛ ۴) نه.

۲۶. ۱) بله؛ ۲) نه؛ ۳) نه.

۲۷. ۲۹۹. ۲۸. ۵. ۲۹. ۰.

۳۰. عددی برای k وجود ندارد که باشرط مساله سازگار باشد.

۴۰. ۱. ۴۱. $p=۳$، $q=۲$.

۴۲. $p=۳$. راهنمائی: $p=۳k+۱$ و $p=۳k+۲$ $(k\in\mathbf{N})$ بگیرید.

۴۳. $p=۵$. راهنمائی: $p=۵k+۱$، $p=۵k+۲$، $p=۵k+۳$ و $p=۵k+۴$ بگیرید $(k\in\mathbf{N})$.

۴۴. ۳. راهنمائی: فرض کنید $n=۳k-۱$، $n=۳k$، $n=۳k+۱$ $(n\in\mathbf{N})$.

۴۹. ۱۷. ۵۰. ۴.

۵۳. ۱) $x=y=۲$؛ ۲) $x=y=۲$؛ ۳) $x=y=۲$؛ ۴) $x=۱$، $y=۲$.

۵۴. نه. راهنمائی: برای m و n سه‌حالت درنظر بگیرید: الف) وقتی که هر دوزوج باشند؛ ب) وقتی که هردو فرد باشند؛ ج) وقتی که یکی زوج ودیگری فرد باشد.

۱.۶۰ (۱ $(۳۰۸;۲۶۴)=۴۴$، $[۳۰۸;۲۶۴]=۱۸۴۸$؛
(۲ $(۱۱۲;۴۹۰)=۱۴$، $[۱۱۲;۴۹۰]=۳۹۲۰$؛
(۳ $(۱۴۴;۴۲۰;۲۵۲)=۱۲$،
$[۱۴۴;۴۲۰;۲۵۲]=۵۰۴۰$؛
(۴ $(۱۵۱۲;۱۱۸۸;۱۲۶۰)=۳۶$،
$[۱۵۱۲;۱۱۸۸;۱۲۶۰]=۸۳۱۶۰$.

۱.۶۸ (۱ $(۱۵,۵)$، $(۵,۱۵)$؛ (۲ $(۲,۳)$، $(۳,۲)$، $(۱,۶)$، $(۶,۱)$؛ (۳ عددهایی که با شرط مساله سازگار باشند، وجود ندارند؛ (۴ $(۲,۱۰)$، $(۱۰,۲)$.

۱.۷۰ (۱ $(۰,۰)$، $(۲,۲)$ راهنمائی: $(x-۱)(y-۱)=۱$؛ (۲ $(۱,۲)$، $(۵,۲)$؛ $(-۱,-۲)$، $(-۵,-۲)$. راهنمائی: $(x-۲y)(x-y)=۳$؛ (۳ $(۱۱,۱۲)$، $(-۱۱,۱۲)$، $(-۱۱,-۱۲)$، $(۱۱,-۱۲)$. راهنمائی: $(x-y)(x+y)=-۲۳$؛ (۴ $(۲۴,۲۳)$، $(-۲۴,۲۳)$، $(۲۴,-۲۳)$، $(-۲۴,-۲۳)$؛ (۵ $(۲,۳)$، $(۳,۲)$. راهنمائی: $(x-۱)(y-۱)=۲$؛ (۶ $(۴۸,۰)$، $(۲۴,۱)$، $(۲۴,-۱)$؛ (۷ عددهای سازگار با شرط مساله وجود ندارند. راهنمائی: حالت‌های زوج یا فرد بودن y را درنظر بگیرید؛ (۸ $x=۲m$، $y=m$ $(m\in\mathbf{Z})$ و $x=۲m$، $y=-m$ $(m\in\mathbf{Z})$؛ (۹ $x=۳m$، $y=۲m$ $(m\in\mathbf{Z})$؛ (۱۰ $(۲,۲)$، $(۰,۰)$. راهنمائی؛ حالت‌های $y=۳k$، $y=۳k+۱$ و $y=۳k+۲$ $(k\in\mathbf{Z})$ و برابری زیر را درنظر بگیرید:

$$۳^x=۱+y^۳=(۱+y)(۱-y+y^۲)$$

۱.۷۱ (۱ $x=k+۵n$، $y=۲k-۲+۱۰n$، $z=۱-k-۵n$ که، درآن‌ها $k=۰,۱,۲,۳,۴$ و $n\in\mathbf{Z}$؛ (۲ $x=۶-۵k-۳۰m$، $y=k-۱+۶m$، $z=۲-۲k-۱۲m$ که درآن‌ها، k یکی ازعددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و $m\in\mathbf{Z}$.

۱.۷۲ (۱ $\{-۱,-۲\}$؛ (۲ $\{۰,۱\}$؛ (۳ $\{۰,۱\}$؛ (۴ $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$.

۱.۷۵ ۱) ۶؛ ۲) ۴۶؛ ۳) ۱۶.

۱.۷۶ ۱) (۱۱، ۹)؛ ۲) (۲۴۸، ۱۲).

§۲. عددهای گویا و عددهای گنگ

کسرمتعارفی (یا به‌طور ساده، کسر)، عددی است به‌صورت $\frac{p}{q}$ که، در آن، q مخرج کسر (عـدد طبیعی) و p صورت کسر (عـددی درست) است. وقتی p عددی طبیعی باشد، $\frac{p}{q}$ راکسرمثبت و وقتی p عدددرست ومنفی باشد، $\frac{p}{q}$ را کسرمنفی گویند. یادآوری می کنیم که، کسر $\frac{p}{q}$ را می‌توان به صورت $\frac{-p}{-q}$، $\frac{-p}{q}$ — یا $\frac{p}{-q}$ — وعدد $\frac{p}{q}$ — را به‌صورت $\frac{-p}{q}$ یا $\frac{p}{-q}$ نوشت.

هر عدد درست k را می‌توان به‌صورت کسر $\frac{k}{۱}$ نوشت.

دو کسر $\frac{p}{q}$ و $\frac{m}{n}$ وقتی برابرنـد کـه داشته باشیم: $pn=qm$. مثلاً، کسرهای $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۸}{۱۴}$ برابرند، زیرا $۸ \times ۷ = ۱۴ \times ۴$.

ویژگی اصلی کسرها. اگـر صورت ومخرج کسری را درعددی مخالف صفرضرب ویا برمقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم‌کنیم، مقدارکسر تغییرنمی‌کند، یعنی

$$\frac{p}{q}=\frac{p \cdot k}{q \cdot k}, \ k\in \mathbf{Z}, \ k\neq ۰$$

مثلاً، کسرهای $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۶}{۱۴}$ و $\frac{-۹}{-۲۱}$ برابرند.

اگر صورت و مخرج کسر مثبت را، برمقسوم‌علیه مشترك آن‌ها، تقسیم کنیم، گویند، کسر را ساده‌کرده‌ایم.

کسر مثبت $\frac{p}{q}$ را ساده نشدنی (یا تحویل‌ناپذیر) گویند، وقتی که p و q نسبت به هم اول باشند. مثلاً کسر $\frac{۱۳}{۷}$ ساده نشدنی است، زیرا $(۱۳;۷)=۱$.

کسر منفی $\frac{p}{q}$ وقتی ساده‌نشدنی است که کسر مثبت $\frac{-p}{q}$ ساده‌نشدنی باشد.

هر کسر را می‌توان به‌صورت کسری ساده‌نشدنی درآورد.

برای این که، یك کسر را، به‌صورت کسری ساده‌نشدنی درآوریم، باید صورت و مخرج آن را، بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك صورت و مخرج، تقسیم کنیم.

مثال ۱. کسرهای $\frac{۱۰۵}{۱۴۷}$ و $-\frac{۱۸}{۴۲}$ را به‌صورت کسرهایی ساده‌نشدنی بنویسید.

حل. چون $۱۰۵=۳\times۵\times۷$ و $۱۴۷=۳\times۷^۲$؛ بنابراین صورت و مخرج کسر، بر ۳ و ۷ (مقسوم‌علیه‌های مشترك صورت و مخرج) بخش‌پذیرند و به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱۰۵}{۱۴۷}=\frac{۳\times۵\times۷}{۳\times۷\times۷}=\frac{۵}{۷}$$

چون $۱۸=۳\times۳\times۲$ و $۴۲=۲\times۳\times۷$، بنابراین

$$\frac{۱۸}{۴۲}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow-\frac{۱۸}{۴۲}=-\frac{۳}{۷}$$

عمل‌های حسابی روی کسرها:

الف) $\frac{p_۱}{q_۱}+\frac{p_۲}{q_۲}=\frac{p_۱q_۲+p_۲q_۱}{q_۱q_۲}$ (مجموع کسرها)؛

ب) $\frac{p_{۱}}{q_{۱}}-\frac{p_{۲}}{q_{۲}}=\frac{p_{۱}q_{۲}-p_{۲}q_{۲}}{q_{۱}q_{۲}}$ (تفاضل کسرها)؛

ج) $\frac{p_{۱}}{q_{۱}}.\frac{p_{۲}}{q_{۲}}=\frac{p_{۱}\cdot p_{۲}}{q_{۱}\cdot q_{۲}}$ (ضرب کسرها)؛

د) $\frac{p_{۱}}{q_{۱}}:\frac{p_{۲}}{q_{۲}}=\frac{p_{۱}}{q_{۱}}.\frac{q_{۲}}{p_{۲}}=\frac{p_{۱}q_{۲}}{p_{۲}q_{۱}}$ (تقسیم کسرها)

در بعضی موردها، می‌توان مجموع (یا تفاضل) کسرها را ساده‌تر به‌دست آورد.

۱. برای به‌دست آوردن مجموع (یا تفاضل) دو کسر $\frac{p}{q}$ و $\frac{r}{q}$ (که مخرج‌هایی برابر دارند)، باید کسری را نوشت که مخرج آن، همان مخرج کسرهای مفروض، و صورت آن برابر مجموع (یا تفاضل) صورت‌های کسرهای مفروض باشد. مثلاً

$$\frac{۲}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱۰}{۳},\ \frac{۳}{۷}+\frac{۲}{۷}+\frac{۵}{۷}=\frac{۳+۲+۵}{۷}=\frac{۱۰}{۷}$$

۲. برای این‌که دو کسر $\frac{p}{q}$ و $\frac{r}{s}$، با دو مخرج مختلف را باهم جمع (یا ازهم کم) کنیم، باید عدد A، کوچکترین مضرب مشترك مخرج‌ها را پیدا کنیم و، کسرهای مفروض را بامخرج‌های برابر A بنویسیم و، سپس، عمل جمع (یا تفریق) را انجام دهیم.

مثال ۲. این کسرها را جمع کنید:

الف) $\frac{۵}{۲۱}$ و $\frac{۴}{۹}$؛ ب) $\frac{۷}{۹۰}$ و $\frac{۱۱}{۱۰۵}$؛ د) $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۵}{۶}$.

حل. الف) کوچکترین مضرب مشترك بین دوعدد ۹ و ۲۱، برابراست با ۶۳. دو کسر را با این مخرج مشترك می‌نویسیم:

$$\frac{۵}{۲۱}=\frac{۱۵}{۶۳};\ \frac{۴}{۹}=\frac{۲۸}{۶۳}$$

بنابراین

$$\frac{۵}{۲۱}+\frac{۴}{۹}=\frac{۱۵}{۶۳}+\frac{۲۸}{۶۳}=\frac{۱۵+۲۸}{۶۳}=\frac{۴۳}{۶۳};$$

ب) $۹۰=۲\times۳^{۲}\times۵$ و $۱۰۵=۳\times۵\times۷$، بنابراین

$$[۹۰;\ ۱۰۵]=۳\times۳^{۲}\times۵\times۷=۶۳۰$$

بنابراین

$$\frac{۷}{۹۰}+\frac{۱۱}{۱۰۵}=\frac{۷\times۷+۶\times۱۱}{۶۳۰}=\frac{۴۹+۶۶}{۶۳۰}=\frac{۱۱۵}{۶۳۰}=\frac{۲۳}{۱۲۶};$$

$$\text{ج)}\quad \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}+\frac{۵}{۶}=$$

$$=\frac{۳۰+۲\times۲۰+۳\times۱۵+۴\times۱۲+۵\times۱۰}{۶۰}=\frac{۲۱۳}{۶۰}=\frac{۷۱}{۲۰}$$

مثال ۳. این تفاضل‌ها را محاسبه کنید:

الف) $\frac{۲۳}{۳۶}-\frac{۱}{۲۴}$؛ ب) $\frac{۲}{۱۵}-\frac{۷}{۲۷}$.

حل. الف) چون $۳۶=۲^{۲}\times۳^{۲}$ و $۲۴=۲^{۳}\times۳$، بنابراین

$$[۳۶;\ ۲۴]=۲^{۳}\times۳^{۲}=۷۲$$

بنابراین

$$\frac{۲۳}{۳۶}-\frac{۱}{۲۴}=\frac{۲\times۲۳-۳\times۱}{۷۲}=\frac{۴۶-۳}{۷۲}=\frac{۴۳}{۷۲}$$

ب) چون $۱۳۵=[۱۵;\ ۲۷]$، بنابراین

$$\frac{۲}{۱۵}-\frac{۷}{۲۷}=\frac{۹\times۲-۵\times۷}{۱۳۵}=\frac{۱۸-۳۵}{۱۳۵}=\frac{-۱۷}{۱۳۵}=-\frac{۱۷}{۱۳۵}$$

کسر $\frac{p}{q}$ را بزرگتر (یا کوچکتر) از کسر $\frac{m}{n}$ گویند وقتی که کسر $\frac{p}{q}-\frac{m}{n}$

مثبت (یـا منفی) باشد و می‌نویسند $\frac{p}{q}>\frac{m}{n}$ (یا $\frac{p}{q}<\frac{m}{n}$).

بین دو کسر $\frac{p}{q}$ و $\frac{r}{q}$، که مخرجی برابر دارند، کسری بزرگتر است که صورتی بزرگتر دارد.

مثال ۴. این کسرها را باهم مقایسه کنید:

الف) $\frac{۱۱}{۱۲}$ و $\frac{۱۲}{۱۳}$؛ ب) $\frac{۱۱}{۱۸}$ و $\frac{۱۷}{۲۱}$.

حل. الف) صورت و مخرج کسر اول را ۱۳ برابر و صورت و مخرج کسر دوم را ۱۲ برابر می‌کنیم؛ در این صورت

$$\frac{۱۱}{۱۲}=\frac{۱۱\times۱۳}{۱۲\times۱۳}=\frac{۱۴۳}{۱۵۶} \text{ و } \frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۱۲\times۱۲}{۱۳\times۱۲}=\frac{۱۴۴}{۱۵۶}$$

چـون، در این دو کسر، مخرج‌ها برابرند، بنابرایـن کسر اول از کسر دوم کوچکتر است. $\frac{۱۱}{۱۲}<\frac{۱۲}{۱۳}$.

ب) از آن‌جا که

$$\frac{۱۱}{۱۸}-\frac{۱۷}{۲۱}=\frac{۷\times۱۱-۶\times۱۷}{۱۲۶}=\frac{۷۷-۱۰۲}{۱۲۶}=-\frac{۲۵}{۱۲۶}$$

عددی منفی است، بنابراین $\frac{۱۱}{۱۸}<\frac{۱۷}{۲۱}$.

کسر مثبت را کوچکتر از واحد گویند که صورتش کوچکتر از مخرجش باشد. مثلاً، کسرهای $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۵}{۸}$ و $\frac{۱۱}{۱۲۳}$ کوچکتر از واحد، کسر $\frac{۵}{۵}$ برابر واحد و کسرهای مثبت $\frac{۸}{۳}$ و $\frac{۱۷}{۱۱}$ بزرگتر از واحدند.

اگر کسر مثبت $\frac{p}{q}$ کوچکتر از واحـد نباشد، آن‌وقت، صورت آن را،

تنها به‌یك طریق می‌توان به‌صورت $p=nq+r$ نوشت که، در آن، n عددی طبیعی و r عددی درست است که در شرط $۰\leqslant r<q$ صدق می‌کند. در حالت $r\neq ۰$، چنین کسری را می‌توان به‌صورت $n+\frac{r}{q}$ یا $n\frac{r}{q}$ نوشت. عدد $n\frac{r}{q}$ را کسر مرکب گویند که، در آن، n بخش درست و $\frac{r}{q}$ بخش کسری عددی است. مثلاً، کسرهای بزرگتر از واحد $\frac{۳۱}{۳}$، $\frac{۸}{۷}$ و $\frac{۱۵}{۴}$ را می‌توان به‌صورت کسرهای مرکب $۱۰\frac{۱}{۳}$، $۱\frac{۱}{۷}$ و $۳\frac{۳}{۴}$ نوشت (عمل تبدیل کسر بزرگتر از واحد، به‌کسر مرکب را، رفع گویند).

هر کسر مرکب را می‌توان به‌کسری بزرگتر از واحد تبدیل کرد؛ مثلاً

$$۲\frac{۲}{۵}=۲+\frac{۲}{۵}=\frac{۲}{۱}+\frac{۲}{۵}=\frac{۲\times ۵+۲}{۵}=\frac{۱۲}{۵}$$

(این عمل را تجنیس گویند).

مثال ۵. کسر $-\frac{۱۷}{۳}$ را به‌صورت کسر مرکب بنویسید.

حل. چون $\frac{۱۷}{۳}=۵\frac{۲}{۳}$، بنابراین $-\frac{۱۷}{۳}=-۵\frac{۲}{۳}$.

مثال ۶. این عمل‌ها را انجام دهید:

الف) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}$؛ ب) $۳\frac{۴}{۵}\times ۲\frac{۲}{۳}$؛

ج) $\frac{۴}{۵}-۵\frac{۱}{۷}$؛ د) $۲\frac{۱}{۲}:\frac{۵}{۶}$.

حل. الف) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۲}{۴}+\frac{۱}{۴}=\frac{۲+۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$؛

ب) $۳\frac{۴}{۵}\times ۲\frac{۲}{۳}=\frac{۱۹}{۵}\times\frac{۸}{۳}=\frac{۱۵۲}{۱۵}=۱۰\frac{۲}{۱۵}$؛

ج) $\frac{۴}{۵}-۵\frac{۱}{۷}=\frac{۴}{۵}-\frac{۳۶}{۷}=\frac{۲۸-۱۸۰}{۳۵}=\frac{-۱۵۲}{۳۵}=-۴\frac{۱۲}{۳۵}$؛

د) $۲\frac{۱}{۲}:\frac{۵}{۶}=\frac{۵}{۲}:\frac{۵}{۶}=\frac{۵}{۲}\times\frac{۶}{۵}=۳$.

مثال ۷. محاسبه کنید:

الف) $۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۷}{۹}$؛

ب) $۵\frac{۱۱}{۲۴}-۳\frac{۵}{۱۸}$؛

ج) $۳\frac{۱}{۲}-۵\frac{۱}{۶}$؛

د) $۴\frac{۱}{۵}-۶\frac{۲}{۳}$

حل. الف) $۲\frac{۵}{۶}+۳\frac{۷}{۹}=(۲+۳)+\left(\frac{۵}{۶}+\frac{۷}{۹}\right)=$

$$=۵+\frac{۵\times۳+۷\times۲}{۱۸}=۵+\frac{۲۹}{۱۸}=۵+۱+\frac{۱۱}{۱۸}=۶\frac{۱۱}{۱۸};$$

ب) $۵\frac{۱۱}{۲۴}-۳\frac{۵}{۱۸}=(۵-۳)+\left(\frac{۱۱}{۲۴}-\frac{۵}{۱۸}\right)=۲+\frac{۱۳}{۷۲}=۲\frac{۱۳}{۷۲}$؛

ج) $۳\frac{۱}{۲}-۵\frac{۱}{۶}=(۳-۵)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}\right)=-۲+\frac{۱}{۳}=$

$$=-\frac{۲}{۱}+\frac{۱}{۳}=-\frac{۵}{۳}=-۱\frac{۲}{۳};$$

د) $۴\frac{۱}{۵}-۶\frac{۲}{۳}=(۴-۶)+\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۲}{۳}\right)=-۲+\frac{-۷}{۱۵}=$

$$=-۲-\frac{۷}{۱۵}=-\left(۲+\frac{۷}{۱۵}\right)=-۲\frac{۷}{۱۵}$$

ویژگی‌های عمل‌های حسابی روی کسرها. $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ را کسرهایی مثبت می‌گیریم؛ در این صورت

$$r_۱+r_۲=r_۲+r_۱;$$

$$(r_۱+r_۲)+r_۳=r_۱+(r_۲+r_۳)=r_۱+r_۲+r_۳;$$

$$r_۱\cdot r_۲=r_۲\cdot r_۱;$$

$$r_{۱}(r_{۲}\cdot r_{۳})=(r_{۱}\cdot r_{۲})r_{۳}=r_{۱}\cdot r_{۲}\cdot r_{۳};$$

$$r_{۱}-r_{۲}=-(r_{۲}-r_{۱})=r_{۱}+(-r_{۲});$$

$$-r_{۱}-r_{۲}=-(r_{۱}+r_{۲});$$

$$-(-r_{۱})=r_{۱};$$

$$r_{۱}(-r_{۲})=-(r_{۱}r_{۲})=(-r_{۱})\cdot r_{۲};$$

$$(-r_{۱})(-r_{۲})=r_{۱}r_{۲};$$

$$r_{۱}(r_{۲}-r_{۳})=r_{۱}r_{۲}-r_{۱}r_{۳};$$

$$r_{۱}(-r_{۲}-r_{۳})=-r_{۱}r_{۲}-r_{۱}r_{۳}=-(r_{۱}r_{۲}+r_{۱}r_{۳});$$

$$(-r_{۱})(r_{۲}+r_{۳})=-r_{۱}r_{۲}-r_{۱}r_{۳}=-(r_{۱}r_{۲}+r_{۱}r_{۳});$$

$$(-r_{۱})(-r_{۲}-r_{۳})=r_{۱}(r_{۲}+r_{۳})=r_{۱}r_{۲}+r_{۱}r_{۳};$$

$$(-r_{۱})(r_{۲}-r_{۳})=-r_{۱}r_{۲}+r_{۱}r_{۳}=-(r_{۱}r_{۲}-r_{۱}r_{۳});$$

$$r_{۱}:r_{۲}=r_{۱}\cdot\frac{۱}{r_{۲}}=\frac{r_{۱}}{r_{۲}};$$

$$r_{۱}:(-r_{۲})=(-r_{۱}):r_{۲}=-(r_{۱}:r_{۲})=-\frac{r_{۱}}{r_{۲}};$$

$$(-r_{۱}):(-r_{۲})=r_{۱}:r_{۲}=\frac{r_{۱}}{r_{۲}};$$

$$(r_{۱}+r_{۲}):r_{۳}=\frac{r_{۱}}{r_{۳}}+\frac{r_{۲}}{r_{۳}};$$

$$(r_{۱}-r_{۲}):r_{۳}=\frac{r_{۱}}{r_{۳}}-\frac{r_{۲}}{r_{۳}};$$

$$(-r_{۱}-r_{۲}):r_{۳}=-\frac{r_{۱}}{r_{۳}}-\frac{r_{۲}}{r_{۳}}=-\left(\frac{r_{۱}}{r_{۳}}+\frac{r_{۲}}{r_{۳}}\right);$$

$$(r_{۱}+r_{۲}):(-r_{۳})=-\frac{r_{۱}}{r_{۳}}-\frac{r_{۲}}{r_{۳}}=-\left(\frac{r_{۱}}{r_{۳}}+\frac{r_{۲}}{r_{۳}}\right);$$

$$(r_۱ - r_۲):(-r_۳) = -\frac{r_۱}{r_۳} + \frac{r_۲}{r_۳} = -\left(\frac{r_۱}{r_۳} - \frac{r_۲}{r_۳}\right);$$

$$(-r_۱ - r_۲):(-r_۳) = \frac{r_۱}{r_۳} + \frac{r_۲}{r_۳}$$

مثال ۸. محاسبه کنید:

الف) $\left(۱\frac{۳}{۷} - ۲\frac{۱}{۴}\right) \cdot ۳\frac{۱}{۳};$

ب) $\left(۲\frac{۱}{۳} + ۳\frac{۱}{۲}\right):\left(-۴\frac{۱}{۶} + ۳\frac{۱}{۷}\right) + ۷\frac{۱}{۲};$

ج) $\dfrac{\left(۱۳\frac{۱}{۴} - ۲\frac{۵}{۲۷} - ۱۰\frac{۵}{۶}\right) \cdot ۲۳۰\frac{۱}{۲۵} + ۴۶\frac{۳}{۴}}{\left(۱\frac{۳}{۷} + \frac{۱۰}{۳}\right):\left(۱۲\frac{۱}{۳} - ۱۴\frac{۲}{۷}\right)}$

حل. الف) از آن‌جا که داریم:

$$۱\frac{۳}{۷} - ۲\frac{۱}{۴} = \frac{۱۰}{۷} - \frac{۹}{۴} = -\frac{۲۳}{۲۸};$$

$$\left(-\frac{۲۳}{۲۸}\right) \cdot ۳\frac{۱}{۳} = \left(-\frac{۲۳}{۲۸}\right) \cdot \frac{۱۰}{۳} = -\left(\frac{۲۳}{۲۸} \cdot \frac{۱۰}{۳}\right) = -\frac{۱۱۵}{۴۲}$$

بنابراین، حاصل عبارت عددی مفروض برابر $-\frac{۱۱۵}{۴۲} = -۲\frac{۳۱}{۴۲}$ می‌شود.

ب) فرض می‌کنیم: $A = \left(۲\frac{۱}{۳} + ۳\frac{۱}{۲}\right)$، $B = \left(-۴\frac{۱}{۶} + ۳\frac{۱}{۷}\right)$، پس

$$A = ۲ + ۳ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} = ۵ + \frac{۵}{۶} = ۵\frac{۵}{۶} = \frac{۳۵}{۶};$$

$$B = -۴ + ۳ - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} = -۱ - \frac{۱}{۴۲} = -۱\frac{۱}{۴۲} = \frac{۴۳}{۴۲};$$

$$A:B = ۵\frac{۵}{۶}:\left(-۱\frac{۱}{۴۲}\right) = \frac{۳۵}{۶}:\left(-\frac{۴۳}{۴۲}\right) = \frac{۳۵}{۶} \cdot \left(-\frac{۴۲}{۴۳}\right) =$$

$$=-\frac{۲۴۵}{۴۳}=-۵\frac{۳۰}{۴۳};$$

$$A:B+۷\frac{۱}{۲}=-۵+۷-\frac{۳۰}{۴۳}+\frac{۱}{۲}=۲-\frac{۱۷}{۸۶}=۱\frac{۶۹}{۸۶}$$

ج) فرض می‌کنیم:

$$A=۱۳\frac{۱}{۴}-۲\frac{۵}{۲۷}-۱۰\frac{۵}{۶}\ ،\ B=۱\frac{۳}{۷}+\frac{۱۰}{۳}, C=۱۲\frac{۱}{۳}-۱۴\frac{۲}{۷}$$

در این صورت، داریم:

$$A=۱۳-۲-۱۰+\frac{۱}{۴}-\frac{۵}{۲۷}-\frac{۵}{۶}=۱-\frac{۸۳}{۱۰۸}=\frac{۲۵}{۱۰۸};$$

$$A\cdot ۲۳۰\frac{۱}{۲۵}=\frac{۲۵}{۱۰۸}\cdot\frac{۵۷۵۱}{۲۵}=\frac{۵۷۵۱}{۱۰۸}=\frac{۲۱۳}{۴};$$

$$A\cdot ۲۳۰\frac{۱}{۲۵}+۴۶\frac{۳}{۴}=\frac{۲۱۳}{۴}+\frac{۱۸۷}{۴}=۱۰۰;$$

$$B=۱+\frac{۳}{۷}+۳+\frac{۱}{۳}=۴+\frac{۱۶}{۲۱}=\frac{۱۰۰}{۲۱};$$

$$C=۱۲\frac{۱}{۳}-۱۴\frac{۲}{۷}=۱۲-۱۴+\frac{۱}{۳}-\frac{۲}{۷}=-\frac{۴۱}{۲۱};$$

$$B:C=\frac{۱۰۰}{۲۱}:\left(-\frac{۴۱}{۲۱}\right)=-\frac{۱۰۰}{۴۱};$$

$$\text{مقدار کسر اصلی}=۱۰۰:\left(-\frac{۱۰۰}{۴۱}\right)=-۴۱$$

کسر $\frac{p}{q}$ را که، مخرج آن برابر ۱۰^k باشد (k، عددی طبیعی است)، می‌توان به‌صورتی خاص نوشت. اگر $p>۰$، صورت کسر، یعنی عدد p را می‌نویسیم و، k رقم سمت راست را با نماد ممیز جدا می‌کنیم. درضمن، اگر تعداد رقم‌های صورت کسر، از k کمتر باشد و، مثلاً، دارای n

رقم $(n<k)$ باشد، آن‌وقت درسمت چپ عدد p، به‌تعداد $k-n$ صفرقرار می‌دهیم؛ سمت چپ این صفرها، نماد ممیز را مــی گذاریم و، در سمت‌چپ آن، یك‌صفردیگرقرارمی‌دهیم. چنین نمایشی ازعدد را، کسر دهدهی متناهی ومثبت گویند.

اگر $p<۰$، آن‌وقت کسر را به‌صورت $-\left(\frac{-p}{q}\right)$ درنظرمی گیریم، $\frac{-p}{q}$ را به‌صورت کسر دهدهی متناهی نشان می‌دهیم و، سپس، علامت منفی را جلو آن‌می گذاریم؛ واین، یك کسر دهدهی متناهی ومنفی خواهدبود. مثلاً

$$\frac{۱۷}{۱۰}=۱/۷\,;\ \frac{۱۷}{۱۰۰}=۰/۱۷\,;\ \frac{۱۷}{۱۰۰۰}=۰/۰۱۷;$$

$$-\frac{۳}{۱۰۰}=-۰/۰۳\,;\ -\frac{۱}{۱۰۰۰}=-۰/۰۰۱$$

هر کسر دهــدهی متناهی را، می‌توان به‌سادگی، به‌کسرمتعارفی تبدیل کرد. برای این منظور، ممیز وصفرهای سمت چپ را حذف می کنیم و، عدد حاصل‌را، درصورت کسر قرارمی‌دهیم، و درمخرج کسر، واحد را می‌نویسیم و به تعداد رقم‌های بعد از ممیز عدد دهدهی، جلو آن صفر قرار می‌دهیم و، سرانجام، کسر را به‌بزرگترین‌مقسوم‌علیه‌مشترك صورت ومخرج ــ اگر وجود داشته باشد ــ ساده می کنیم. مثلاً

$$۱/۱۵=\frac{۱۱۵}{۱۰۰}=\frac{۲۳}{۲۰};\ -۲/۷۵۵=-\frac{۲۷۵۵}{۱۰۰۰}=-\frac{۵۵۱}{۲۰۰};$$

$$۰/۰۵=\frac{۵}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲۰}$$

برای این که کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ را بتوان بــه‌صورت کسر دهــدهی متناهی نوشت، لازم وکافی است که، مخرج آن، شامل هیچ عامل اول‌دیگری، به‌جز ۲ و۵، نباشد. مثلاً، کسر $\frac{۱۷}{۲۰}$ را می‌توان به‌صورت کسر دهدهی متناهی

درآورد:

$$\frac{۱۷}{۲۰}=\frac{۱۷}{۴\times ۵}=\frac{۱۷\times ۵}{۲\times ۵\times ۲\times ۵}=\frac{۸۵}{۱۰۰}=۰/۸۵$$

کسر $\frac{۵}{۲۱}$ را نمی‌توان به‌صورت کسردهدهی متناهی نشان داد، زیرا درمخرج کسر، عامل‌های اولی، به‌جز ۲ و ۵، وجود دارد.

کسردهدهی نامتناهی‌متناوب، به‌کسری دهدهی گفته می‌شود که، در آن، بعد ازممیز، بی‌نهایت رقم وجود داشته باشد و، درضمن، یکی ازرقم‌ها ویا گروه مرتبی ازرقم‌ها، با آغاز ازمرتبه‌ای بعد ازممیز، مرتباً تکرارشود. این رقم یا این گروه مرتب رقم‌ها، که تکرارمی‌شود، دورهٔ تناوب نامیده می‌شود.

مثلاً کسردهدهی ۱۳/۷۴۳۳۱۳۳۱...، یک کسردهدهی نامتناهی ومتناوب است که دورهٔ تناوبی برابر۳۳۱ دارد. معمولاً، تنها یک دورهٔ‌تناوب را می‌نویسند و دور آن را پرانتزقرارمی‌دهند:

$$۱۳/۷۴۳۳۱۳۳۱...=۱۳/۷۴(۳۳۱);\ -۰/۸۸۸...=-۰/(۸)$$

هرکسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ را که، مخرج آن، دست‌کم یک عامل اول غیر از ۲ و ۵ داشته باشد، می‌توان به‌صورت کسردهدهی نامتناهی متناوب نشان داد. برعکس، هر کسردهدهی نامتناهی‌متناوب را می‌توان تنها به‌یک صورت، با کسر ساده نشدنی $\frac{p}{q}$ بیان کرد.

برای این که کسر دهدهی نامتناهی متناوب را به‌کسر متعارفی تبدیل کنیم، عدد را تا آغازدومین دورهٔ تناوب (وبدون ممیز) می‌نویسیم وعدد قبل ازنخستین دورهٔ تناوب را ازآن کم می‌کنیم، تفاضل حاصل را درصورت کسر می‌نویسیم؛ در مخرج کسر به‌تعداد رقم‌های دورهٔ تناوب ۹ قرارمی‌دهیم ودر سمت راست آن، به‌تعداد رقم‌های بین ممیز ونخستین دورهٔ تناوب صفر می‌گذاریم. مثلاً

$$۰/۱۱(۷)=\frac{۱۱۷-۱۱}{۹۰۰}=\frac{۱۰۶}{۹۰۰}=\frac{۵۳}{۴۵۰};\ ۰/(۳۷)=\frac{۳۷}{۹۹};$$

$$-۲/۱۵(۱۶)=-\frac{۲۱۵۱۶-۲۱۵}{۹۹۰۰}=-\frac{۲۱۳۰۱}{۹۹۰۰};$$

$$۰/۱۸(۰)=\frac{۱۸۰-۱۸}{۹۰۰}=\frac{۱۶۲}{۹۰۰}=\frac{۹}{۵۰}$$

با توجه به قانون تبدیل کسر دهدهی نامتناهی متناوب به کسر متعارفی، می‌توان روشن کرد که هر کسر دهدهی متناهی را می‌توان به صورت کسر دهدهی نامتناهی متناوب نشان داد و، درضمن، به دو طریق؛ مثلاً

$$۰/۱۵(۰)=\frac{۱۵۰-۱۵}{۹۰۰}=\frac{۱۳۵}{۹۰۰}=\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۱۵;$$

$$۰/۱۴(۹)=\frac{۱۴۹-۱۴}{۹۰۰}=\frac{۱۳۵}{۹۰۰}=۰/۱۵$$

برای این که، در این مورد، با دو نمایش مختلف سروکار نداشته باشیم، بهتر است حالت مربوط به دورهٔ تناوب ۹ را کنار بگذاریم. در این صورت، هر کسر دهدهی متناهی، تنها به یك طریق، به صورت کسر دهدهی نامتناهی متناوب (با تناوب ۰) نشان داده می‌شود و، برعکس، هر کسری با دورهٔ تناوب صفر، برابر با یك کسر دهدهی متناهی می‌شود.

به این ترتیب، هر کسر متعارفی $\frac{p}{q}$، تنها به یك طریق به صورت کسر دهدهی نامتناهی متناوب تبدیل می‌شود و، برعکس، هر کسر دهدهی نامتناهی متناوب، متناظر با تنها یك کسر متعارفی $\frac{p}{q}$ است. بنابراین می‌توان گفت که: کسر دهدهی نامتناهی متناوب، شکل و بیان دیگری از همان کسر متعارفی است. مثلاً

$$\frac{۱}{۳}=۰/(۳);\quad ۰=۰/(۰);\quad ۲=۲/(۰);$$

$$-۱۷=-۱۷/(۰);\ \frac{۱۷}{۷}=۲/(۴۲۸۵۷۱);\ \frac{۱}{۵}=۰/۲(۰)$$

هر کسر دهدهی نامتناهی متناوب (یعنی، هر کسر متعارفی)، یك عدد گویا است.

کسرهای دهدهی نامتناهی متناوب، مجموعهٔ همهٔ کسرهای دهدهی نامتناهی را پر نمی‌کنند. مثلاً، ثابت می‌کنیم، کسر ...۰/۱۲۳۴۵۶ (که در آن، بعد از ممیز، همهٔ عددهای طبیعی را نوشته‌ایم)، یك کسر دهدهی متناوب، یعنی یك عدد گویا نیست.

فرض می‌کنیم، این کسر، متناوب باشد. دورهٔ تناوب آن را شامل n رقم می‌گیریم که، در بین آن‌ها، دست کم یك رقم مخالف صفر وجود داشته باشد و، این دورهٔ تناوب، از k امین رقم بعد از ممیز آغاز شده باشد (۰ دورهٔ تناوب کسر نیست). در این کسر، درجایی مثل l $(l>k)$، رقم‌های عدد طبیعی $۱۰^{۲n+k}$، یعنی ۱ و $۲n+k$ صفر قرار دارد. چون طول دروهٔ تناوب را n گرفته بودیم، بنابراین، یکی از دوره‌های تناوب درطول همین $۲n+k$ صفر واقع می‌شود، یعنی همهٔ رقم‌های دورهٔ تناوب برابر صفر است که فرض ما را نقض می‌کند.

هر کسر دهدهی نامتناهی و نامتناوب را، عدد گنگ گویند.

عدد گنگ را نمی‌توان به‌صورت کسر $\frac{p}{q}$ نوشت و، برعکس، هرعددی که نتواند به‌صورت $\frac{p}{q}$ نوشته شود، یك عدد گنگ است.

مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا را با نماد $\mathbf{Q}$ ومجموعهٔ همهٔ عددهای گویا و گنگ را با نماد $\mathbf{R}$ نشان می‌دهند. مجموعهٔ $\mathbf{R}$ را مجموعهٔ عددهای حقیقی می‌نامند.

دوعدد حقیقی a و b وقتی برابرند $(a=b)$ که، نمایش آن‌ها با کسر دهدهی نامتناهی، یکی باشد. درغیر این صورت، عددهای a و b برابر نیستند $(a\neq b)$.

مثال ۹. گنگ بودن هریك ازعددهای مثبت زیر را ثابت کنید:

الف) $\sqrt{۳}$؛ ب) $\frac{\sqrt{۳}}{m}$، m عدد طبیعی است؛

ج) $log_{۷}۶$؛ د) $tg۵^{\circ}$.

حل. الف) از برهان خلف استفاده و فرض می‌کنیم $\sqrt{۳}$ عددی گویا باشد. یعنی بتوان آن را به‌صورت کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ نوشت. دراین‌صورت $p^{۲}=۳q$. چون سمت راست این برابری بر ۳ بخش‌پذیر است، باید سمت چپ آن هم، بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین عدد $p^{۲}$ بر ۳ بخش‌پذیر است. ثابت می‌کنیم که، دراین صورت، p بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. در واقع، اگر p بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت یا $p=۳k+۱$ و یا $p=۳k+۲$ $(k\in\mathbf{Z})$.

اگر $p=۳k+۱$، آن وقت $p^{۲}=۹k^{۲}+۶k+۱$. چون $p^{۲}$ بر ۳ بخش‌پذیر است، تفاضل $p^{۲}-(۹k^{۲}+۶k)$ هم باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد؛ ولی این تفاضل برابر واحد است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست. بنابراین $p\neq۳k+۱$.

به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که $p\neq۳k+۲$.

چون p بر ۳ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد درست m وجود دارد که، برای آن، داشته باشیم: $p=۳m$. اگر این مقدار p را در برابری $p^{۲}=۳q^{۲}$ قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $q^{۲}=۳m^{۲}$. با استدلالی شبیه استدلال بالا، به این نتیجه می‌رسیم که q باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد: $q=۳l$.

به‌این ترتیب، p و q مقسوم‌علیه مشترکی برابر ۳ دارند، درحالی‌که، درفرض، p و q را نسبت به‌هم، اول گرفته بودیم. این تناقض ثابت می‌کند که فرض ما، مبتنی بر گویا بودن $\sqrt{۳}$، درست نیست. $\sqrt{۳}$، عددی گنگ است.

ب) فرض می‌کنیم، این عدد گویا باشد: $\frac{\sqrt{۳}}{m}=\frac{p}{q}$؛ در این صورت باید داشته باشیم: $\sqrt{۳}=\frac{pm}{q}$، یعنی $\sqrt{۳}$ باید عددی گویا باشد که حکم مسالهٔ الف) را نقض می‌کند. عدد $\frac{\sqrt{۳}}{m}$، عددی گنگ است.

ج) فرض می‌کنیم $log_{۷}۶$، عددی گویا باشد، یعنی $log_{۷}۶=\frac{p}{q}$ که،

در آن، p و q، عددهایی طبیعی‌اند. بنا بر تعریف لگاریتم داریم:

$$۷^{\frac{p}{q}}=۶ \quad \text{یا} \quad ۷^{p}=۶^{q}$$

و این برابری ممکن نیست، زیرا ۶^{q} عددی زوج و ۷^{p} عددی فرد است. بنا براین، $\log_{۷}۶$، عددی گنگ است.

د) فرض می‌کنیم $tg۵^{\circ}$، عددی گویا باشد، یعنی $tg۵^{\circ}=\frac{p}{q}$. در این صورت، $tg۱۰^{\circ}$، $tg۲۰^{\circ}$ و $tg۳۰^{\circ}$ هم، عددهایی گویا می‌شوند، زیرا

$$tg۱۰^{\circ}=\frac{۲tg۵^{\circ}}{۱-tg^{۲}۵^{\circ}}=\frac{۲\times\frac{p}{q}}{۱-\frac{p^{۲}}{q^{۲}}}=\frac{l}{m},\ l\in\mathbf{Z},\ m\in\mathbf{N}$$

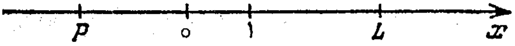
$$tg۲۰^{\circ}=\frac{۲tg۱۰^{\circ}}{۱-tg^{۲}۱۰^{\circ}}=\frac{۲\times\frac{l}{m}}{۱-\frac{l^{۲}}{m^{۲}}}=\frac{r}{s},\ r\in\mathbf{Z},\ s\in\mathbf{N}$$

$$tg۳۰^{\circ}=tg(۱۰^{\circ}+۲۰^{\circ})=\frac{tg۱۰^{\circ}+tg۲۰^{\circ}}{۱-tg۱۰^{\circ}tg۲۰^{\circ}}=\frac{\frac{l}{m}+\frac{r}{s}}{۱-\frac{lr}{ms}}=\frac{d}{t}$$

($d\in\mathbf{Z}$، $t\in\mathbf{N}$). ولی $tg۳۰^{\circ}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ عددی گنگ است (مسالهٔ ب) را ببینید). تناقض حاصل، به‌معنای گنگ‌بودن عدد $tg۵^{\circ}$ است.

خط راستی که، روی آن، نقطهٔ مبداء (نقطهٔ O)، جهت مثبت و واحد طول مشخص شده باشد، محور عددی نام دارد.

نقطهٔ O، خط راست را به دو نیم خط راست تقسیم می‌کند (شکل ۱):



شکل ۱

نیم خط راست OL، کـه درجهت راست امتداد دارد، نیم محور مثبت، ونیم خط راست OP، که درجهت چپ امتداد دارد، نیم محور منفی نامیده‌می‌شود.

هر نقطه ازمحورعددی را می‌توان، باتوجه به قاعدهٔ زیر، متناظر با یك عدد حقیقی دانست:

۱) نقطهٔ O، متناظر با عدد ۰؛

۲) هر نقطهٔ A از نیم محور مثبت، متناظر بـا عدد مثبت a که، در آن، a عبارت است ازطول پاره‌خط راست OA؛

۳) هر نقطهٔ B از نیم‌محور منفی، متناظر با عدد $|b|-$ که، در آن، $|b|$ طول پاره‌خط‌راست OB است.

درضمن، دونقطهٔ مختلف ازمحورعددی، متناظربا دوعدد مختلف حقیقی است و، نمی‌توان عددی حقیقی پیدا کرد که متناظر با نقطه‌ای ازمحور عددی نباشد. به‌این‌ترتیب، بین مجموعهٔ عددهای حقیقی با مجموعهٔ نقطه‌های محور عددی، تناظر یك به‌یك برقرار است.

مقایسهٔ عددهای حقیقی

۱. دو عدد حقیقی a و b، وقتی بـرابـرند که تفاضل آن‌ها، $a-b$، برابرصفر باشد.

۲. عدد a وقتی ازعدد b بزرگتر است که تفاضل آن‌ها، $a-b$، مثبت باشد.

۳. عدد a ازعدد b کوچکتر است، وقتی که تفاضل $a-b$ منفی باشد.

ویژگی‌های برابری

۱. اگر $a=b$ و $b=c$، آن‌گاه $a=c$.

۲. اگر $a=b$ و $c=d$، آن‌گاه $a+c=b+d$ و $a-c=b-d$.

۳. اگر $a=b$ و $c=d$ $(c\neq 0)$، آن‌گاه $ac=bd$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. در

حالت خاص، اگر $a=b$، آن‌گاه $a^n=b^n$ $(n\in\mathbf{N})$ و، برعکس، اگر $a^n=b^n$ $(n\in\mathbf{N})$ و $ab>0$، آن‌گاه $a=b$.

۴. اگر $a=b$، آن‌گاه $a+c=b+c$ و $a-c=b-c$.

۵. اگر $a=b$ و $c\neq 0$، آن‌گاه $ac=bc$ و $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$.

ویژگی‌های نابرابری

۱. اگر $a>b$ و $b>c$، آن‌گاه $a>c$.

۲. اگر $a>b$ و $c>d$، آن‌گاه $a+c>b+d$.

۳. اگر $a>b$ و $c<d$، آن‌گاه $a-c>b-d$.

۴. اگر $a>b>0$ و $c>d>0$، آن‌گاه $ac>bd$ و $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

در حالت خاص، اگر $a>b>0$، آن‌گاه $a^n>b^n$ $(n\in\mathbf{N})$ و، برعکس، اگر $a>0$ و $b>0$ و $a^n>b^n$ $(n\in\mathbf{N})$، آن‌گاه $a>b$.

۵. اگر $a>b$، آن‌گاه $a+c>b+c$ و $a-c>b-c$.

۶. اگر $a>b$ و $c>0$، آن‌گاه $ac>bc$ و $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

۷. اگر $a>b$ و $c<0$، آن‌گاه $ac<bc$ و $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

علاوه بر نابرابری‌های $a>b$ و $a<b$، نابرابری‌های $a\geqslant b$ و $a\leqslant b$ هم، مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

نابرابری عددی $a\geqslant b$ به‌ازای $a>b$ و به‌ازای $a=b$ درست است و به‌ازای $a<b$ نادرست. مثلاً، نابرابری $۲\geqslant ۲$ درست است، زیرا $۲=۲$؛ نابرابری $۲\geqslant ۳$ درست است، زیرا $۲>۳$. ویژگی‌های بالا، برای نابرابری‌های غیر اکید $a\geqslant b$ و $a\leqslant b$ هم برقرارند.

نابرابری دوگانهٔ $a<b<c$ وقتی برقرار است که، به‌طور هم‌زمان، داشته باشیم: $a<b$ و $b<c$.

مثال ۱۰. این برابری‌ها را ثابت کنید:

الف) $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}=۰/۸;$ ب) $۲^{۲۰۰}=۴^{۱۰۰};$

ج) $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}\cdot\sqrt[۶]{۳-۲\sqrt{۲}}=۱;$

د) $\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲};$ ه) $۰/(۳)+۳\frac{۱}{۳}+۰/۴(۲)=۴\frac{۴}{۴۵}$

حل. الف) کسرهای سمت‌چپ برابری را به‌یك مخرج تبدیل می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۰}=\frac{۳۰+۱۰+۵+۳}{۶۰}=\frac{۴۸}{۶۰}=\frac{۸}{۱۰}=۰/۸$$

ب) داریم: $۴^{۱۰۰}=(۲^{۲})^{۱۰۰}=۲^{۲\times ۱۰۰}=۲^{۲۰۰}$.

ج) داریم:

$$\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{(۱+\sqrt{۲})^{۲}}=\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$\sqrt[۳]{۱+\sqrt{۲}}\cdot\sqrt[۶]{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۶]{۳+۲\sqrt{۲}}\cdot\sqrt[۶]{۳-۲\sqrt{۲}}=$$

$$=\sqrt[۶]{(۳+۲\sqrt{۲})(۳-۲\sqrt{۲})}=\sqrt[۶]{۹-۸}=۱$$

د) صورت ومخرج را در $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}=\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$$

ه) چون $۰/(۳)=\frac{۱}{۳}$ و $۰/۴(۲)=\frac{۴۲-۴}{۹۰}=\frac{۱۹}{۴۵}$، بنابراین

$$۰/(۳)+۳\frac{۱}{۳}+۰/۴(۲)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱۰}{۳}+\frac{۱۹}{۴۵}=\frac{۱۸۴}{۴۵}=۴\frac{۴}{۴۵}$$

مثال ۱۱. کدام‌یك از دوعدد بزرگترند:

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۶}}-۱$ یا $-\frac{۴}{۵}$؛ ب) $\frac{۱۳۱}{۲۷۳}$ یا $\frac{۱۷۹}{۲۳۵}$؛

ج) ۲ یا $۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$؛ د) $۳^{۲۱}$ یا $۲^{۳۱}$؛

ه) $\frac{۳-\sqrt{۱۲۳}}{۴}$ یا $\frac{۲-\sqrt{۳۷}}{۳}$؛ و) $\frac{۳\sqrt{۷}+۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}$ یا ۶/۹؛

ز) $۲\log_{۱۲}۱۴۵$ یا $\sqrt{۱۵}$؛ ح) $\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۱}$ یا $\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰}$؟

حل. الف) تفاضل $\left(\frac{۱}{\sqrt{۶}}-۱\right)-\left(-\frac{۴}{۵}\right)$ را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۱}{\sqrt{۶}}-۱+\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{\sqrt{۶}}-\frac{۱}{۵}=\frac{۵-\sqrt{۶}}{۵\sqrt{۶}}>۰$$

بنابراین عدد $\frac{۱}{\sqrt{۶}}-۱$ ازعدد $-\frac{۴}{۵}$ بزرگتراست.

ب) نسبت دوعدد را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۱۳۱}{۲۷۳}:\frac{۱۷۹}{۲۳۵}=\frac{۱۳۱}{۲۷۳}\cdot\frac{۲۳۵}{۱۷۹}=\frac{۱۳۱}{۱۷۹}\cdot\frac{۲۳۵}{۲۷۳}$$

چون هریك ازعامل‌های ضرب، ازواحد کوچکتراست، بنابراین عدد $\frac{۱۷۹}{۲۳۵}$ ازعدد $\frac{۱۳۱}{۲۷۳}$ بزرگتراست.

ج) چون $(۳\sqrt{۳})^{۲}=۲۷>۵^{۲}$، بنابراین $۳\sqrt{۳}>۵$. چون $(۲\sqrt{۲})^{۲}=۸<۳^{۲}$، پس $۲\sqrt{۲}<۳$. نابرابری $۲\sqrt{۲}<۳$ را ازنابرابری $۳\sqrt{۳}>۵$ کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}>۵-۳=۲$$

یعنی عدد $۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$ ازعدد ۲ بزرگتراست.

د) عددها را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$۳^{۲۱}=۳^{۲۰}\times۳=(۳^{۲})^{۱۰}\times۳=۹^{۱۰}\times۳،$$

$$۲^{۳۱}=۲^{۳۰}\times۲=(۲^{۳})^{۱۰}\times۲=۸^{۱۰}\times۲$$

چون $۹^{۱۰}>۸^{۱۰}$ و $۳>۲$، پس $۳\times۹^{۱۰}>۲\times۸^{۱۰}$؛ یعنی $۳^{۲۱}$ از $۲^{۳۱}$ بزرگتراست.

ه) چون $۱۱<\sqrt{۱۲۳}<۱۲$ و $۶<\sqrt{۳۷}<۷$، پس

$$-۱۲<-\sqrt{۱۲۳}<-۱۱ \quad\text{و}\quad -۷<-\sqrt{۳۷}<-۶$$

بنابراین

$$-\frac{۹}{۴}<\frac{۳-\sqrt{۱۲۳}}{۴}<-۲ \quad\text{و}\quad -\frac{۵}{۳}<\frac{۲-\sqrt{۳۷}}{۳}<-\frac{۴}{۳}$$

وچون $-۲<-\frac{۵}{۳}$، بنابراین‌عدد $\frac{۲-\sqrt{۳۷}}{۳}$ ازعدد $\frac{۳-\sqrt{۱۲۳}}{۴}$ بزرگتر است.

و) چون $\frac{۳\sqrt{۷}+۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۵}}=\frac{۳}{۵}\sqrt{۳۵}+\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۳۵}<۶$ و $\sqrt{۱۰}<۳/۲$، بنابراین

$$\frac{۳}{۵}\sqrt{۳۵}+\sqrt{۱۰}<\frac{۳\times۶}{۵}+۳/۲=۶/۸<۶/۹$$

ز) چون $\log_{۱۲}۱۴۵>\log_{۱۲}۱۴۴=۲$، پس $۲\log_{۱۲}۱۴۵>۴$. به‌این ترتیب $۲\log_{۱۲}۱۴۵>۴>\sqrt{۱۵}$.

ح) داریم:

$$\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۱}=\frac{۱}{\sqrt{۱۲}+\sqrt{۱۱}} \quad\text{و}\quad \sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰}=\frac{۱}{\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۰}}$$

وچون

$$\frac{۱}{\sqrt{۱۲}+\sqrt{۱۱}}<\frac{۱}{\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۰}}$$

پس $\sqrt{۱۲}-\sqrt{۱۱}<\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰}$.

بخش درست عدد a، به بزرگترین عدد درستی گفته می‌شود که از a تجاوز نکند. مثلاً بخش درست عدد ۲/۵ برابر ۲؛ بخش درست عدد ۳ برابر ۳؛ بخش درست عدد $(-۳/۷)$ برابر -۴ و بخش درست عدد (-۲) برابر -۲ است.

بخش درست عدد a را، با نماد $[a]$ نشان می‌دهند، مثلاً

$$[۵/۷]=۵;\ [-۵/۱]=-۶;\ [-\sqrt{۲}]=-۲$$

بخش کسری عدد a، به عدد $a-[a]$ گفته می‌شود. مثلاً بخش کسری عدد ۲/۱، برابر $۲/۱-۲=۰/۱$؛ بخش کسری عدد $(-۳/۷)$ برابر $(-۳/۷)-(-۴)=۰/۳$ و بخش کسری $(-\sqrt{۲})$ برابر $(-\sqrt{۲})-(-۲)=۲-\sqrt{۲}$ است.

بخش کسری عدد a را با نماد $\{a\}$ نشان می‌دهند، یعنی $\{a\}=a-[a]$.
مثلاً $\{۱/۱\}=۰/۱$ و $\{-۲/۳\}=۰/۷$.

مثال ۱۲. اگر $\varepsilon>\frac{۱}{۲}$، آن‌وقت، بخش درست عدد $\frac{۱}{\varepsilon}$ را پیدا کنید.

حل. اگر $\varepsilon>۱$، آن‌وقت $۰<\frac{۱}{\varepsilon}<۱$ و $\left[\frac{۱}{\varepsilon}\right]=۰$. اگر $\varepsilon=۱$، آن‌وقت $\frac{۱}{\varepsilon}=۱$ و $\left[\frac{۱}{\varepsilon}\right]=۱$. اگر $\frac{۱}{۲}<\varepsilon<۱$، آن‌وقت $۱<\frac{۱}{\varepsilon}<۲$ و $\left[\frac{۱}{\varepsilon}\right]=۱$.

برابری دو نسبت $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(bd\neq ۰)$ را تناسب و عددهای a، b، c و d را جمله‌های تناسب گویند؛ درضمن، جمله‌های a و d را طرفین و جمله‌های b و c را وسطین می‌نامند.

اصلی‌ترین ویژگی تناسب در این است که، در آن، حاصل‌ضرب جمله-

های طرفین بـا حاصل‌ضرب جمله‌هـای وسطین بـرابـرمی‌شود؛ یعنی اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(bd\neq ۰)$ آن‌گاه $ad=bc$.

از ویژگی اصلی تناسب می‌تـوان نتیجه‌گرفت که، اگر $abcd\neq ۰$، آن‌وقت، برابری $ad=bc$ را می‌توان به‌صورت یکی از تناسب‌های زیر نوشت:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\frac{d}{b}=\frac{c}{a},\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

اگـر تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(bd\neq ۰)$ مفروض باشد، به ازای هر m و n و هر α و β، باشرط $nb+ma\neq ۰$ و $nd+mc\neq ۰$، برابری

$$\frac{\alpha a+\beta b}{ma+nb}=\frac{\alpha c+\beta d}{mc+nd}$$

برقرار است کـه به‌آن تناسب مشتق گـویند. درحالت‌های خاص، از تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، این تناسب‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\quad(\alpha=۱، \beta=۱، m=۰، n=۱);$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\quad(\alpha=۱، \beta=-۱، m=۰، n=۱);$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\quad(\alpha=۱، \beta=۰، m=۱، n=۱);$$

$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}\quad(\alpha=۱، \beta=۰، m=۱، n=-۱);$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\quad(\alpha=۱، \beta=۱، m=۱، n=-۱)$$

نسبت کمیت‌ها وتناسب، به‌طور گسترده درحل مساله‌ها به‌کارمی‌روند.

مثال ۱۳. آلیاژی ازدوفلز به‌نسبت ۱:۲ وآلیاژدیگری ازهمان دوفلز به‌نسبت ۲:۳ تشکیل شده‌اند. ازاین دو آلیاژ به چه نسبتی انتخاب کنیم تا آلیاژی ازهمان دوفلز و به‌نسبت ۱۷:۲۷ به‌دست آید.

حل. فرض کنید ازآلیاژ اول به‌مقدار x وازآلیاژ دوم به‌مقدار y انتخاب کرده باشیم؛ دراین صورت، درآلیاژ جدید به‌اندازهٔ $\frac{x}{۳}+\frac{۲y}{۵}$ ازفلز اول و $\frac{۲x}{۳}+\frac{۳y}{۵}$ ازفلز دوم وجود خواهد داشت. بنابراین

$$\frac{\frac{x}{۳}+\frac{۲y}{۵}}{\frac{۲x}{۳}+\frac{۳y}{۵}}=\frac{۱۷}{۲۷}$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{۵x+۶y}{۱۰x+۹y}=\frac{۱۷}{۲۷} \text{ یا } \frac{x}{y}=\frac{۹}{۳۵}$$

به‌این‌ترتیب، آلیاژجدید راباید به‌نسبت ۹:۳۵ ازدو آلیاژ به‌دست آورد.

مثال ۱۴. درمثلث ABC، طول ضلع AB برابر ۱۰ ومقدار زاویهٔ روبه‌روی آن برابر $\frac{\pi}{۶}$ است. شعاع دایره محیطی مثلث را پیدا کنید.

حل. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث را R می‌گیریم. بنابرقضیهٔ سینوس‌ها، نسبت هرضلع مثلث برسینوس زاویهٔ روبه‌روی آن، برابراست باقطر دایرهٔ محیطی مثلث. بنابراین

$$۲R=\frac{۱۰}{sin\frac{\pi}{۶}}\Rightarrow R=۱۰$$

مثال ۱۵. مطلوب است‌مساحت مثلث‌محیط بردایرهٔ به‌شعاع ۴، به‌شرطی

که مقدارهای زاویه‌های مثلث بر نسبت ۳:۴:۵ باشند.

حل. چون مجموع زاویه‌های مثلث برابر π ومجموع بخش‌های زاویه‌ها برابر ۱۲ است، بنابراین هر بخش برابر $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان و، زاویه‌های مثلث، برابر $\frac{۵\pi}{۱۲}$، $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ می‌شوند.

اگر ضلع‌های روبه‌رو به‌زاویه‌های $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ را، به‌ترتیب، a و c بگیریم، بنابر قضیهٔ سینوس‌ها

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{۳}}=۸,\ \frac{b}{\sin\frac{\pi}{۴}}=۸$$

از آن‌جا $a=۴\sqrt{۳}$ و $b=۴\sqrt{۲}$.

مساحت مثلث، برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع مثلث در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها؛ بنابراین

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin\frac{۵\pi}{۱۲}$$

چون $۰<\frac{۵\pi}{۱۲}<\frac{\pi}{۲}$، پس $\sin\frac{۵\pi}{۱۲}=\sqrt{\frac{۱-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{۲}}$، یعنی

$$\sin\frac{۵\pi}{۱۲}=\sqrt{\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

وبنابراین

$$S=۴\sqrt{۶}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۱۲+۶\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۹+۲\times۳\sqrt{۳}+۳}=$$

$$=۴\sqrt{(۳+\sqrt{۳})^{۲}}=۴(۳+\sqrt{۳})$$

مثال ۱۶. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x^۲-۲x+۴}{x-۲}=\frac{x^۲+۵x+۵}{x+۵}$$

حل. بـا آزمایش روشن می‌شود کـه $x=۰$، درمعادلهٔ مفروض صدق نمی‌کند. $x=x_۰$ را یکی ازجواب‌های این معادله‌می‌گیریم؛ دراین صورت، برابری

$$\frac{x_۰^۲-۲x_۰+۴}{x_۰-۲}=\frac{x_۰^۲+۵x_۰+۵}{x_۰+۵}$$

یک تناسب است؛ به‌ازای $x_۰\neq ۰$، تناسب مشتق آن را می‌نویسیم:

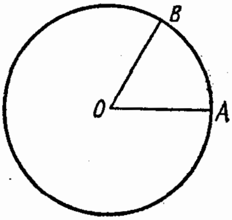
$$\frac{x_۰^۲-۲x_۰+۴-(x_۰-۲)x_۰}{x_۰-۲}=\frac{x_۰^۲+۵x_۰+۵-(x_۰+۵)x_۰}{x_۰+۵}$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{۴}{x_۰-۲}=\frac{۵}{x_۰+۵}\Rightarrow x_۰=۳۰$$

به‌این ترتیب، جواب معادله، تنها $x=۳۰$ می‌تواند باشد و آزمایش هم ثابت می‌کند که، درواقع، $x=۳۰$ درمعادله صدق می‌کند.

مثال ۱۷. مطلوب است طول کمان AB ومساحت قطاع AOB، به‌شرطی که زاویهٔ محاط دردایرهٔ به‌مرکز O وشعاع R، که‌رو به‌روی کمان AB باشد، برابر $\frac{\pi}{۶}$ شود (شکل ۲).



شکل ۲

حل. زاویهٔ مرکزی AOB، دو برابر زاویهٔ محاطی روبه‌رو به کمان AB است و، بنا بر این، $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{۳}$. چون محیط دایره، متناظر با زاویهٔ ۲π وطول کمان AB، متناظر با زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ است، بنا بر این داریم:

$$\frac{۲\pi R}{\widehat{AB}}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}\Rightarrow\widehat{AB}=\frac{\pi R}{۳}$$

به‌همین‌ترتیب، چون مساحت دایره متناظر با زاویهٔ ۲π ومساحت قطاع AOB متناظر با زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ است، بنا بر این باید داشته باشیم:

$$\frac{\pi R^۲}{S_{AOB}}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳}}\Rightarrow S_{AOB}=\frac{\pi R^۲}{۶}$$

مثال ۱۸. هرم $SABC$ داده شده است. نقطه‌های K، M و N، یال‌های AB، AC و SA را، به‌ترتیب، به‌پاره‌خط‌های راستی چنان تقسیم کرده‌اند که

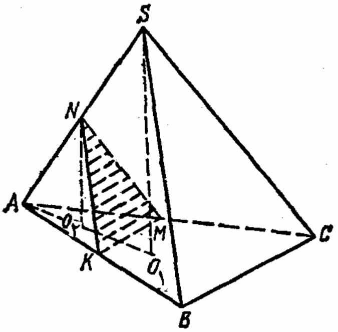
$$\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{۳}{۴}, \frac{|AM|}{|MC|}=\frac{۵}{۶}, \frac{|AN|}{|NS|}=\frac{۵}{۹}$$

نسبت حجم‌های دوجسمی را پیدا کنید که، به‌وسیلهٔ صفحهٔ KMN، از هرم جدا شده‌اند (شکل ۳).

حل. از نقطه‌های S و N، عمودهایی بر صفحهٔ ABC رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن‌ها را باصفحهٔ ABC، به‌ترتیب، $O_۱$ و $O_۲$ می‌نامیم.

مثلث‌های $ANO_۲$ و $ASO_۱$ قائم‌الزاویه و در زاویهٔ $SAO_۱$ مشترک‌اند؛ در نتیجه، این دومثلث متشابه و، ضلع‌های متناظر آن‌ها، متناسب می‌شوند، یعنی

$$\frac{|AN|}{|AS|}=\frac{|NO_۲|}{|SO_۱|}\Rightarrow\frac{۵}{۱۴}=\frac{|NO_۲|}{|SO_۱|}$$



شکل ۳

برای حجم هرم‌های $SABC$ و $NAKM$، به‌ترتیب داریم:

$$V_{SABC}=\frac{۱}{۳}|SO_۱|\cdot S_{ABC}،\ V_{NAKM}=\frac{۱}{۳}|NO_۲|\cdot S_{AKM}$$

و مساحت قاعدهٔ آن‌ها

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\widehat{BAC}،\ \ S_{AKM}=\frac{۱}{۲}|AK|\cdot|AM|\cdot\sin\widehat{BAC}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{NAKM}}=\frac{|SO_۱|\cdot|AB|\cdot|AC|}{|NO_۲|\cdot|AK|\cdot|AM|}=\frac{۱۴}{۵}\cdot\frac{|AB|\cdot|AC|}{|AK|\cdot|AM|},$$

چون $\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{۳}{۴}$، پس

$$\frac{|AK|}{|AB|}=\frac{|AK|}{|AK|+|KB|}=\frac{۳}{۴+۳}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow\frac{|AB|}{|AK|}=\frac{۷}{۳}$$

چون $|AM|:|MC|=۵:۶$، پس

$$\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{|AM|}{|MC|+|AM|}=\frac{۵}{۱۱}\Rightarrow\frac{|AC|}{|AM|}=\frac{۱۱}{۵}$$

به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$\frac{V_{SABC}}{V_{NAKM}}=\frac{۱۴}{۵}\cdot\frac{۷}{۳}\cdot\frac{۱۱}{۵}=\frac{۱۰۷۸}{۷۵} \text{ و } \frac{V_{SBCMKN}}{V_{NAKM}}=\frac{۱۰۰۳}{۷۵}$$

درصد عددمفروض a، به یك صدم آن گفته می‌شود. بنا براین خود عدد، از ۱۰۰ برابر درصد آن تشکیل شده است. یك درصد را با نماد ۱٪ نشان می‌دهند. مثلاً ۴۵٪ عدد ۱۰۰، برابر ۴۵؛ ۳۰٪ از عدد ۱۲۰ برابر $۳۰\times\frac{۱۲۰}{۱۰۰}$، یعنی ۳۶ است.

برای حل مساله‌های مربوط به درصد، مقداری مثل b را به‌عنوان ۱۰۰٪ قبول می‌کنیم وبخشی ازآن را ــ مقدار a ــ به‌عنوان α٪ درنظر می‌گیریم و این تناسب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{b}{a}=\frac{۱۰۰}{\alpha}$$

ازاین تناسب، با معلوم بودن دومقدار، مقدارسوم، با استفاده ازویژگی اصلی تناسب، به‌دست می‌آید: $b\alpha=۱۰۰a$.

مثال ۱۹. کارخانه‌ای، درسال، ۳۰۰ واحد محصول تولید می‌کند. اگر تولیدکارخانه ۲۰٪ اضافه‌شود، سالی چندواحدمحصول بیشتر تولید خواهد کرد؟

حل. تعداد محصول‌هایی که به تولید سالیانه اضافه‌می‌شود، x می‌گیریم؛ دراین صورت

۳۰۰ محصول، متناظراست با ۱۰۰٪،
x محصول، متناظراست با ۲۰٪

تناسب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{۳۰۰}{x}=\frac{۱۰۰}{۲۰}\Rightarrow x=\frac{۳۰۰\times ۲۰}{۱۰۰}=۶۰$$

مثال ۲۰. با افزایش تولیدکار به‌میزان ۱۵٪، کارخانه توانست ماهیانه ۹۲۰ واحد ازمحصول خود را تولیدکند. قبل ازافزایش تولید، محصول ماهیانهٔ کارخانه چقدر بوده است؟

حل. میزان تولید قبلی کارخانه را x می‌گیریم؛ دراین صورت

x محصول، متناظر است با ۱۰۰٪،

۹۲۰ محصول، متناظر است با ۱۱۵٪

تناسب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x}{۹۲۰}=\frac{۱۰۰}{۱۱۵}=x=\frac{۹۲۰\times ۱۰۰}{۱۱۵}=۸۰۰$$

مثال ۲۱. کارخانه‌ای درماه ۸۵۲ واحد از محصول خود را تولید می‌کند. با مدرن‌کردن کارخانه، تولید آن به ۱۱۳۶ واحد درماه رسید. تولید کارخانه، چند درصد اضافه شده‌است؟

حل. تولید ماهیانهٔ کارخانه، به‌اندازهٔ $۱۱۳۶-۸۵۲=۲۸۴$ واحد اضافه شده است. درصد افزایش تولید را x می‌گیریم؛ دراین صورت

۸۵۲ واحد تولید، متناظراست با ۱۰۰٪،

۲۸۴ واحد تولید، متناظراست با x٪

تناسب را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{۸۵۲}{۲۸۴}=\frac{۱۰۰}{x}\Rightarrow x=۳۳\frac{۱}{۳}$$

تولیدکارخانه، به‌اندازه $۳۳\frac{۱}{۳}$٪ افزایش پیدا کرده است.

تکلیف ۱.

۱. ازاین کسرها، کدام را می‌توان به‌صورت کسر مرکب نوشت:

۱) $\frac{۵}{۴}$؛ ۲) $-\frac{۱۱}{۷}$؛ ۳) $\frac{-۱۱۹}{۲۳}$؛ ۴) $\frac{۱۲۴}{۷۲۱}$؟

۲. این کسرهای مرکب را به کسرمتعارفی تبدیل کنید (تجنیس کنید):

۱) $۲\frac{۳}{۷}$؛ ۲) $-۴\frac{۳}{۸}$؛ ۳) $۱\frac{۱۱}{۱۲}$؛ ۴) $-۲\frac{۳}{۳۵}$.

۳. این کسرها را مقایسه کنید:

۱) $\frac{۳}{۷}$ و $\frac{۴}{۷}$؛ ۲) $-\frac{۵}{۱۱}$ و $-\frac{۶}{۱۱}$؛ ۳) $\frac{۸}{۹}$ و $-\frac{۷}{۹}$؛

۴) $-\frac{۱۳}{۱۲۳}$ و $-\frac{۱۳}{۱۲۹}$؛ ۵) $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۴}{۵}$؛ ۶) $\frac{۶}{۷}$ و $\frac{۲۴}{۲۸}$؛

۷) $-\frac{۱۳}{۱۴}$ و $-\frac{۱۴}{۱۵}$؛ ۸) $\frac{۱۲۴}{۱۱۹}$ و $\frac{۱۳۷}{۱۲۹}$.

۴. هر یك از این کسرها را، به کسری ساده‌نشدنی تبدیل کنید:

۱) $\frac{۸۱}{۵۰۴}$؛ ۲) $\frac{۱۰۷۵}{۶۰۰}$؛ ۳) $\frac{۱۱۱۱۱۱}{۱۰۰۱}$؛ ۴) $\frac{۱۰۱۰۱۰۱۰}{۱۰۱۰}$.

۵. به‌صورت کسر دهدهی متناهی بنویسید:

۱) $\frac{۱۵}{۱۰۰}$؛ ۲) $-\frac{۳۷}{۱۰}$؛ ۳) $\frac{۱۱۲}{۱۰۰۰}$؛

۴) $-\frac{۲۷۲۸}{۲۰۰}$؛ ۵) $\frac{۶۹۳}{۶۱۶}$؛ ۶) $-\frac{۴۲}{۱۳۴۴}$.

۶. این کسرهای دهدهی را، به‌صورت کسر متعارفی بنویسید:

۱) ۱/۷۵؛ ۲) −۲۳/۰۴ ۳) ۰/۱۷۴؛ ۴) −۱/۱۵۲۵.

۷. محاسبه کنید:

$$۱)\quad \frac{۱}{۵}+\frac{۳}{۵};\ ۲\frac{۱}{۷}+\frac{۳}{۷};\ ۱\frac{۵}{۸}+۳\frac{۳}{۸};\ ۳\frac{۳}{۴}+۴\frac{۳}{۴};$$

$$۲)\quad \frac{۷}{۱۳}-\frac{۵}{۱۳};\ ۲-\frac{۴}{۷};\ ۴\frac{۲}{۳}-۳\frac{۱}{۳};\ ۵\frac{۷}{۱۱}-۳\frac{۵}{۶};$$

$$۳)\quad \frac{۲}{۵}\cdot\frac{۴}{۷};\ ۱\frac{۳}{۴}\cdot ۵\frac{۲}{۳};\ ۲\frac{۱}{۳}\cdot\left(-۱\frac{۱}{۴}\right);\left(-۳\frac{۱}{۳}\right)\cdot\left(-۲\frac{۷}{۱۰}\right);$$

$$۴)\quad ۱\frac{۳}{۴}:۵;\ ۲\frac{۲}{۵}:۴\frac{۱}{۳};\ ۲:\left(-۲\frac{۲}{۳}\right);\ \left(-۲\frac{۱}{۲}\right):\left(-۳\frac{۴}{۵}\right);$$

۵) $۰/۲۳+۱/۶۴;۲/۷۳+۴/۶۹;۴/۷۲-۲/۳۴;۵/۲۱-۳/۸۹$

۶) $۰/۳۷\cdot۳/۲;\ (-۲/۱)\cdot۱/۱;\ (-۰/۱۹)\cdot۲/۴;\ ۲\frac{۱}{۳}\cdot۰/۳۳\cdot$

۷) $۱/۱۲۵:۲/۵;\ (-۲/۳۵):۰/۵;\ (-۵/۲):((-۱/۳)\cdot۰/۱);$

۸) $$\left(\frac{۱}{۴}-\frac{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۹}}\right):\left(\frac{۲}{۳}+\frac{\frac{۷}{۱۵}}{\frac{۲}{۵}-\frac{۱}{۶}}\right);$$

۹) $(۰/۸\cdot۷+۰/۶۴)\cdot\left(۱/۲۵\cdot۷-\frac{۴}{۵}\cdot۱/۲۵\right)+۳۱/۶۴;$

۱۰) $(۹\cdot۰/۰۸+۰/۷\cdot۰/۰۸)\cdot\left(۹\cdot۱۲/۵-۰/۷\cdot۱۲\frac{۱}{۲}\right)+۹/۴۹;$

۱۱) $\dfrac{(۱۱/۸۱+۸/۱۹)\cdot۰/۰۲}{\frac{۹}{۱۱/۲۵}};$ ۱۲) $\dfrac{(۱/۰۹-۰/۲۹)\cdot۱\frac{۱}{۴}}{\left(۱۸/۹-۱۶\frac{۱۳}{۲۰}\right)\cdot۸/۹}$

۱۳) $۵۳\cdot۳۹+۴۷\cdot۳۹-۵۳\cdot۲۱-۴۷\cdot۲۱;$

۱۴) $۱۹/۹\cdot۱۸-۱۹/۹\cdot۱۶+۳۰/۱\cdot۱۸-۳۰/۱\cdot۱۶;$

۱۵) $۱۵/۵\cdot۲۰/۸-۳/۵\cdot۹/۲+۱۵/۵\cdot۹/۲-۳/۵\cdot۲۰/۸;$

۱۶) $\left(\frac{۸۱۰}{۱۶۲}+\frac{۶۷۵}{۲۲۵}\right)\cdot\left(\frac{۸۱۰}{۱۶۲}-\frac{۶۷۵}{۲۲۵}\right)+\frac{۱/۱۱+۰/۱۹-۱/۳\cdot۲}{۲/۰۶+۰/۵۴};$

۱۷) $$\left[\left(\frac{۲}{۱۹۳}-\frac{۳}{۳۸۶}\right)\cdot\frac{۱۹۳}{۱۷}+\frac{۳۳}{۳۴}\right]:$$
$$:\left[\left(\frac{۷}{۱۹۳۱}+\frac{۱۱}{۳۸۶۲}\right)\cdot\frac{۱۹۳۱}{۲۵}+\frac{۹}{۲}\right]$$

تکلیف ۲.

۱. این کسرها را مقایسه کنید:

۱) $\frac{۹}{۴۱}$ و $\frac{۹}{۴۰}$؛ ۲) $-\frac{۷}{۹}$ و $-\frac{۱۱}{۱۳}$؛ ۳) $\frac{۲۱}{۳۲}$ و $\frac{۲۴}{۳۵}$؛

۴) $-\frac{۲۵}{۲۸}$ و $-\frac{۲۶}{۲۹}$؛ ۵) ۱/۳۲ و $\frac{۳۴}{۲۵}$؛ ۶) $-\frac{۱۱۷}{۱۵۶}$ و $-\frac{۱۱۳}{۱۵۷}$؛

۷) $-۳\frac{۴}{۵}$ و $-۳\frac{۳}{۵}$؛ ۸) $-۲\frac{۶}{۱۱}$ و $-۲\frac{۲۳}{۴۵}$.

۲• به‌صورت کسر دهدهی متناهی بنویسید:

۱) $\frac{۲۳}{۱۱۵}$؛ ۲) $-\frac{۲۱}{۱۲۰}$؛ ۳) $\frac{۵}{۱۶}$؛ ۴) $\frac{۱۳}{۱۲۵}$؛

۵) $\frac{۱۱۷۳}{۱۹۵۵}$؛ ۶) $-\frac{۲۷۳}{۷۲۸}$.

۳• به‌صورت کسر متعارفی ساده‌نشدنی درآورید:

۱) $\frac{۱۱۰}{۲۴۲}$؛ ۲) $-\frac{۴۲۰۵}{۹۸۰۵}$؛ ۳) $\frac{۱۱۸۳}{۱۸۲۰}$؛ ۴) $-\frac{۵۹۴}{۲۳۱۰}$؛

۵) $\frac{۱۰۱۰۱}{۱۰۱۰۱۰}$؛ ۶) $\frac{۱۱۱۱۱۰}{۲۳۳۳۳۱}$.

۴• به‌صورت کسر متعارفی بنویسید:

۱) ۲/۱۵؛ ۲) ۷/۱۲−؛ ۳) ۰/۱۲۱۲؛ ۴) ۳/۰۸۲−.

۵• محاسبه کنید:

۱) $\frac{۳}{۸}+\frac{۴}{۸}$; $۳\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}$; $۲\frac{۳}{۷}+\frac{۴}{۷}$; $۲\frac{۳}{۴}+۳\frac{۱}{۴}$;

۲) $\frac{۹}{۱۰}-\frac{۷}{۱۰}$; $۵-\frac{۸}{۱۱}$; $۵\frac{۳}{۷}-۴\frac{۲}{۷}$; $۳\frac{۸}{۱۷}-۲\frac{۴}{۷}$;

۳) $\frac{۳}{۵}\cdot\frac{۲}{۷}$; $۲\frac{۳}{۵}\cdot ۳\frac{۱}{۴}$; $۱\frac{۱}{۴}\cdot\left(-۲\frac{۱}{۳}\right)$; $\left(-۲\frac{۱}{۴}\right)\cdot\left(-۳\frac{۲}{۵}\right)$;

۴) $\frac{۳}{۵}:\frac{۹}{۲۵};\ ۲\frac{۲}{۳}:\frac{۵}{۴};\ ۳\frac{۱}{۲}:\ ۲\frac{۱}{۳};\ ۳:\left(-۱\frac{۱}{۲}\right);\ \left(-۲\frac{۳}{۴}\right):\left(-۱\frac{۱}{۷}\right);$

۵) $۰/۳۷+۱/۷۳;\ ۳/۵۴+۷/۴۲۱;\ ۴/۱۲-۳/۶۵۹;$

$\left(-۲\frac{۳}{۵}\right)-۳/۵۶;$

۶) $۱/۲\cdot۳/۵۲;\ (-۷/۱۲)\cdot۳/۱۱;\ (-۰/۱۲۳).(-۵/۴۱);$

۷) $۲/۵۵:۰/۵;\ (-۱/۱۲):۰/۴;\ (-۲/۵)\cdot(۴/۴:۰/۱);$

۸) $۱\frac{۵}{۷}\cdot ۱\frac{۳}{۴}+۳\frac{۲}{۱۱}:\ ۲\frac{۳}{۱۲۱};$

۹) $\left(۱\frac{۱}{۳}+۲\frac{۲}{۳}\right)\cdot\left(۱\frac{۱}{۳}-\frac{۶}{۴}\right):\left(۱\frac{۱}{۵}+۲\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۵}\right);$

۱۰) $\frac{۱/۱۱+۰/۱۹-۱/۳\cdot۲}{۲/۰۶+۰/۵۴}-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right):۲;$

۱۱) $۵۰/۹\cdot۴۹/۱-۵۰/۸\cdot۴۹/۲;$

۱۲) $۷۸\cdot۳۱+۷۸\cdot۲۴+۷۸\cdot۱۷+۲۲\cdot۷۲;$

۱۳) $۷/۳\cdot۱۰/۵+۷/۳\cdot۱۵+۲/۷\cdot۱۰/۵+۱۵\cdot۲/۷;$

۱۴) $$\frac{۳/۰۵^{۲}-۲/۵۵^{۲}}{۰/۳۵\cdot۳۸۸-۲۸/۸\left(۲۰/۵۶-\frac{۱۴/۵۰۱}{۰/۸۵}\right)};$$

۱۵) $$\frac{\left(\frac{۹/۱۲۶}{۰/۵۶}+۰/۴۶\right)\cdot۷/۱۸+۱/۴۵\cdot۲۸/۲}{۳/۴۵^{۲}-۰/۵۵^{۲}}$$

تکلیف ۳.

۱. نمونه‌هائی از کسر دهدهی نامتناهی متناوب و کسردهدهی نامتناهی نامتناوب بیاورید.

۲. عددهای گویای زیر را، به‌صورت کسر متناوب بنویسید:

۱) $-\frac{۱}{۳}$؛ ۲) $\frac{۴}{۷}$؛ ۳) $۲\frac{۲۴}{۳۳}$؛ ۴) $-۱\frac{۱۹}{۱۳۲}$.

۳. عددها را باهم مقایسه کنید:

۱) ۰/(۳) و $\frac{۱}{۳}$؛ ۲) $-۰/۳۳۳۳$ و $-\frac{۱}{۳}$؛

۳) ۰/(۲۶) و ۰/۲۶۱؛ ۴) $-۳/۷۷۶$ و $-۳/(۷۶۶)$.

۴. بزرگترین عدد حقیقی را پیدا کنید که از عدد ۲/۸ کوچکتر باشد و در نمایش آن به‌صورت کسر دهدهی نامتناهی، رقم ۹ وجود نداشته باشد.

۵. به کسر متعارفی تبدیل کنید:

۱) ۰/۲(۳)؛ ۲) ۱/۴(۵۱)، ۳) $-۲/۳۷(۱)$.

۴) $-۳/۲۴(۴۱)$، ۵) ۰/۴۱۳(۱۵۶۱)، ۶) $-۰/۴۱(۳۵۶)$.

۶. محاسبه کنید:

$$۱)\quad ۲\frac{۱}{۲}-۳/۴(۱۲)-\frac{۴}{۳}+\frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{۲}+۰/۵-۳\frac{۱}{۲}\right);$$

$$۲)\quad \left(۰/(۵)\cdot ۰/(۲)\right):\left(۳\frac{۱}{۳}:\frac{۳۲}{۲۵}\right)-\left(\frac{۲}{۵}\cdot ۱\frac{۱}{۳}\right):\frac{۴}{۳}$$

تکلیف ۴.

۱. عدد گویا را به‌صورت کسر متناوب درآورید:

۱) $\frac{۲}{۹}$؛ ۲) $-۱\frac{۳}{۱۳}$؛ ۳) $\frac{۸}{۱۲۳}$؛ ۴) $-۲\frac{۱}{۳}$.

۲. مقایسه کنید:

۱) ۰/۲۲(۲۳) و ۰/۲۲۲۳؛ ۲) $\frac{۱}{۷}$ و ۰/۱۴۲۸(۵۷)؛

۳) $-۲\frac{۲}{۳}$ و $-۲/۶۷$؛ ۴) $-\frac{۷}{۶}$ و $-۱/۱۶۶۶۷$.

۳. کدام عدد حقیقی از عدد ۵/۷ بزرگتر است و در نمایش دهدهی نامتناهی آن، رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳ وجود ندارد؟

۴. به کسر متعارفی تبدیل کنید:

۱) $۰/(۳۱)$؛ ۲) $-۲(۴۱۲)$؛ ۳) $۰/۴۱۲(۵)$؛

۴) $۳/۱(۴۵)$؛ ۵) $-۳/۲(۳۴۵)$؛ ۶) $۰/۵(۳۴۲)$.

۵. محاسبه کنید:

$$۱)\quad ۰/۴(۳)+۰/۶(۲)\cdot ۲\frac{۱}{۲}-\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{۰/۵(۸)}:\frac{۵۰}{۵۳};$$

$$۲)\quad ۳\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۴}{۴۹}-\left(۲/(۴)\cdot ۲\frac{۵}{۱۱}\right):\left(-\frac{۴۲}{۵}\right)$$

تکلیف ۵.

۱. ثابت کنید، مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد گویا، عددهایی گویا هستند.

۲. نمونه‌ای از دو عدد گنگ بدهید، به‌نحوی که

الف) مجموع آن‌ها، عدد گنگ باشد؛

ب) مجموع آن‌ها، عددی گویا باشد؛

ج) حاصل‌ضرب آن‌ها، عددی گنگ باشد؛

د) حاصل‌ضرب آن‌ها، عددی گویا باشد.

۳. نمونه‌ای از یک عدد گویا بدهید که بین دو عدد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ باشد.

۴. نمونه‌ای از دو عدد گنگ بیاورید که بین عددهای $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۵}$ باشند.

۵. گنگ بودن این عددها را ثابت کنید:

۱) $\sqrt{۲}+۱$؛ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$؛ ۳) $\log_{۲}۳$؛ ۴) $\mathrm{cotg}\,۱۰^{\circ}$.

تکلیف ۶.

۱. ثابت کنید، تفاضل و خارج‌قسمت دو عدد گویای مخالف‌صفر، عددی گویاست.

۲. دو عدد گنگ مثال بزنید، به‌نحوی که
الف) تفاضل آن‌ها، عددی گویا باشد،
ب) تفاضل آن‌ها، عددی گنگ باشد،
ج) خارج قسمت آن‌ها، عددی گویا باشد،
د) خارج قسمت آن‌ها، عددی گنگ باشد.

۳. سه عدد گویا بنویسید که بین عددهای ۱ و $\sqrt{۲}$ باشند.

۴. دو عدد گنگ بنویسید که بین این عددها باشند:

۱) $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$؛ ۲) ۱ و ۱/۱.

۵. گنگ‌بودن این عددها را ثابت کنید:

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$؛ ۲) $\sqrt{۷}+\sqrt{۵}$؛ ۳) $\log_۴ ۵$؛ ۴) $\mathrm{cotg}\, ۲۰^\circ$.

تکلیف ۷.

۱. درستی این برابری‌ها را تحقیق کنید:

۱) $۳^۳+۴^۳+۵^۳=۶^۳;$ ۲) $۱۲^۸ \cdot ۹^{۱۲}=۱۸^{۱۶};$

۳) $۱۴/۲\times ۱۱+۱۴/۲\times ۴۱+۵/۸\times ۱۱+۵/۸\cdot ۴۱=۱۰۴۰;$

۴) $\left(\frac{۳}{۲}\sqrt{۶}+۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}-۴\sqrt{\frac{۳}{۲}}\right)\cdot\left(۳\sqrt{\frac{۲}{۳}}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۶}\right)=-\sqrt{۲};$

۵) $\sqrt[۴]{۲۷\sqrt[۳]{۹}}:\sqrt[۶]{۹\times ۳^۲\sqrt{۳}}=۱;$

۶) $\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\dots+\frac{۱}{۹۹\times ۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰};$

۷) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰}+\sqrt{۹۹}}=۹;$

۸) $۷۷۷۸^{۲}-۲۲۲۳^{۲}=۵۵۵۵۵۵۵۵$

۲. درستی این نابرابری‌ها را تحقیق کنید:

۱) $۲\times ۵^{۳}>۵\times ۲^{۳};$ ۲) $\sqrt{۷}+\sqrt{۱۵}<۷;$

۳) $\sqrt{۲۱}-\sqrt{۵}>\sqrt{۲۰}-\sqrt{۶};$ ۴) $(۱/۲+\sqrt{۵})^{۱۰۰}>۳^{۱۰۰};$

۵) $\sqrt{۲}+\sqrt{۱۱}<\sqrt{۳}+۳;$ ۶) $\frac{۱}{۵۱}+\frac{۱}{۵۲}+\dots+\frac{۱}{۱۰۰}>\frac{۱}{۲}$

۳. این عددها را به‌ترتیب صعودی بنویسید:

۱) $\frac{۲۸}{۲۳}, \frac{۴۱}{۵۲}, \frac{۴}{۵};$ ۲) $\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{۳}, \frac{۱}{۲}, \left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}, \left(-۱\frac{۱}{۳}\right)^{۳};$

۳) $\left(\frac{۴}{۷}\right)^{-\frac{۲}{۳}}, \left(\frac{۴۹}{۱۶}\right)^{\frac{۴}{۳}}, \left(\frac{۱۶}{۴۹}\right)^{-\frac{۱}{۴}};$

۴) $۸،\ \sqrt{۳۵}،\ (۳\sqrt{۷}+۵\sqrt{۲}):\sqrt{۶}$

۴. مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت عددهای a و b در چه محدوده‌ای قراردارند، به‌شرطی که

۱) $۰<a<۲،\ ۲<b<۳;$

۲) $-۲<a<-۱،\ -۳<b<-۲/۵;$

۳) $۰<a<۱،\ -۲<b<-۱$

۵. بخش درست و بخش کسری این عددها را پیدا کنید:

۱) $-۵/۱;$ ۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳};$ ۳) $۷/۳+۰/(۲۱);$

۴) $-۲۱/۶+۴/(۲);$ ۵) $\frac{۳\pi}{۲};$ ۶) $\sqrt{\pi}+۰/(۴)$

تکلیف ۸.

۱. درستی این برابری‌ها را تحقیق کنید:

۱) $(۱+۲+۳+۴)^۲=۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳;$

۲) $۷۵^{۲۰}=۴۵^{۱۰}\cdot۵^{۳۰};$ ۳) $\sqrt[۳]{۲^۲\sqrt{۲}}\cdot\sqrt[۴]{۲^۳\sqrt[۳]{۲}}=۱;$

۴) $۳۱\times۸۲+۱۵۲\times۴۸+۳۱\times۴۳-۱۲۵\times۶۷=۱۵۰۰;$

۵) $(\sqrt[۳]{۴}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲۵})(\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۵})=۷;$

۶) $\frac{۱}{۵\times۷}+\frac{۱}{۷\times۹}+\dots+\frac{۱}{۶۳\times۶۵}=\frac{۶}{۶۵}$

۲. درستی این نابرابری‌ها را تحقیق کنید:

۱) $۸\frac{۲}{۳}:۴\frac{۱}{۳}-۵۰<-۴۷;$ ۲) $۲\times۵^۳>۵\times۲^۳;$

۳) $\sqrt{۵}+\sqrt{۱۰}>۵/۳;$ ۴) $\sqrt{۳۷}-\sqrt{۱۴}>۶-\sqrt{۱۵};$

۵) $(\sqrt{۷}+\sqrt{۲})^۹>۴^۹;$ ۶) $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۶۸}>۴$

۳. این عددها را به‌ردیف صعودی بنویسید:

۱) $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{\frac{۱}{۵}}, \left(\frac{۱۲۵}{۲۷}\right)^{-\frac{۱}{۱۵}}, \left(\frac{۹}{۲۵}\right)^{-۴}, \frac{۵}{۳};$

۲) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲, \frac{۲}{۳}, \left(-\frac{۱}{۳}\right)^۳, \frac{۵}{۹};$

۳) $-۲/(۲), -۲\frac{۴}{۱۷}, -۱-\sqrt{۲}, -\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$

۴. مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت عددهای a و b، در چه محدوده‌ای قراردارند، اگر داشته باشیم:

۱) $۲<a<۳،\ ۴<b<۵;$

۲) $۱/۱<a<۲/۱،\ -۳<b<-۲/۵;$

۳) $۱<a<۲، \qquad -۵<b<-۴$

۵. بخش درست و بخش کسری این عددها را پیدا کنید:

۱) $\left(\frac{۵}{۴}\right)^{۵}$; ۲) $۳\frac{۱}{۲}:۰/۲$; ۳) $\frac{۵\pi}{۳}$; ۴) $\frac{۷\sqrt{۲}}{۴}$

تکلیف ۹.

۱. عدد a، ۵۰٪ از عدد b بزرگتر است. عدد b چند درصد از عدد a کوچکتر است؟

۲. حجم تولید محصولی را ۱۰ برابر کرده‌ایم. تولید، چند درصد اضافه شده است؟

۳. کارخانه‌ای ۲۰۰ واحد محصول در سال تولید می‌کند. اگر ۴۵٪ به تولید کارخانه اضافه شود، درسال چند واحد محصول اضافی تولید خواهد کرد؟

۴. تولید کارخانه‌ای، درنتیجهٔ ۳۵٪ افزایش، به ۴۰۵ واحد محصول در روز رسیده است. تولید روزانهٔ کارخانه، قبل از افزایش تولید، چقدر بوده است؟

۵. کارخانه‌ای روزانه ۱۲۶ واحد محصول تولید می‌کند. با مدرن کردن کارخانه، می‌توان تولید روزانه را به ۱۸۹ واحد رسانید. دراین‌صورت، چند درصد به‌تولید اضافه می‌شود؟

۶. درآلیاژی ازنقره ومس، وزن نقره $۱۴\frac{۲}{۷}$٪ وزن‌مس‌است. درآلیاژ، چند درصد مس وجود دارد؟

۷. کارخانه‌ای درهفته اول ۲۵٪ تولید ماهانهٔ خود را آماده کرد؛ در هفتهٔ دوم، ۱۱۰٪ هفتهٔ اول، درهفتهٔ سوم ۶۰٪ هفتهٔ دوم ودرهفتهٔ چهارم ۳۲۰ واحد محصول خود را تولیدکرد. تولید ماهانهٔ این کارخانه چقدراست؟

تکلیف ۱۰.

۱. مطلوب است ۱۲٪ از $\frac{۱۰۰a}{۵۳}+\frac{b}{۳}$ به‌شرطی که

$$a=\frac{۱۴-\left(۴۹\frac{۱}{۳}:۱۶-۱۴:۸\frac{۱}{۶}\right)\cdot ۷}{۱\frac{۱۷}{۱۸}\cdot\left(۱\frac{۵۹}{۷۰}+\frac{۳۷}{۴۲}+۲\frac{۱۹}{۳۰}\right)-۱۰};$$

$$b=\frac{\left[\left(\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۲۲۵}\right)\cdot ۹+۰/۱۶\right]:\left(\frac{۱}{۳}-۰/۳\right)}{(۵-۱/۱۴۰۹:۰/۳):\left(۴/۲:۱۲-۰/۲۱\cdot\frac{۲}{۳}\right)}:\frac{۱}{۱۱۴}$$

۲. شعاع دایره‌ای را ۲۵٪ بزرگ کرده‌ایم. مساحت دایره چند درصد اضافه می‌شود؟

۳. عدد A را چند درصد باید کوچک کرد تا عدد $\frac{۴A}{۵}$ به‌دست آید؟

۴. قارچ، در اثر خشک کردن، ۸۰٪ وزن خود را از دست می‌دهد. چقدر قارچ تازه لازم است تا یک کیلوگرم قارچ خشک به‌دست آید؟

۵. حجم کارهای ساختمانی را ۶۰٪ زیاد کرده‌ایم، در ضمن، محصول کار ۲۵٪ اضافه‌شده است. تعداد کارگران را باید چند درصد اضافه کرد؟

تمرین‌ها

۱. آیا این کسرها را می‌توان به‌صورت کسر دهدهی محدود نوشت:

۱) $\frac{۱}{۴۰}$; ۲) $\frac{۱}{۶۲۵}$; ۳) $\frac{۸}{۲۰۵۰}$; ۴) $\frac{۱}{۳۴۰}$; ۵) $\frac{۳}{۲۵۰}$; ۶) $\frac{۱۱۷}{۲۵۶}$?

۲. به‌صورت کسر دهدهی در آورید:

۱) $\frac{۳}{۷}$; ۲) $-\frac{۱۵}{۱۱}$; ۳) $\frac{۲۵۲}{۱۸۰}$;

۴) $\frac{۱۱۲۵}{۲۵۲۵}$; ۵) $-\frac{۱۹۸}{۲۴۲}$; ۶) $\frac{۸۶۰}{۴۴۱}$

۳. به‌صورت کسر متعارفی بنویسید:

۱) $۰/۱۵$; ۲) -۱۲۸۲; ۳) $۲/(۲۵۱۹)$; ۴) $۰/۱(۲)+۰/۱۱$;

۵) $-۱/(۲۵)-۲/۱$; ۶) $۱۰/(۳)+۰/(۴)-۸/(۶)$;

۷) $۱/(۳)\cdot ۲(۵)$; ۸) $۳/(۷):۲/۱۴$

۴. عددها را باهم مقایسه کنید:

۱) $\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۷}{۸}$; ۲) $۱/۳۲$ و $\frac{۳۲}{۲۵}$;

۳) $۰/۵^{۱۰}$ و $۰/۵^{۲۰}$; ۴) $۴۵^{۲}-۳۱^{۲}$ و $۴۴^{۲}-۳۰^{۲}$;

۵) $۲۶^{۲}-۲۴^{۲}$ و $۲۷^{۲}-۲۵^{۲}$; ۶) $۳۴۵^{۲}$ و ۳۴۲×۳۴۸;

۷) $۸۷۴^{۲}$ و ۸۷۰×۸۷۸; ۸) $۱۹^{۴}$ و $۱۶\times ۱۸\times ۲۰\times ۲۲$;

۹) $۹۹^{۲۰}$ و $۹۹۹۹^{۱۰}$; ۱۰) $۹^{۲۰}$ و $۲۷^{۱۳}$;

۱۱) $۲^{۳۰۰}$ و $۳^{۲۰۰}$; ۱۲) $۴^{۲۰}$ و $۲^{۴۰}$;

۱۳) $۱۰^{۲۰}$ و $۹۰^{۱۰}$; ۱۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۰}$ و $\frac{۱}{۳}\sqrt{۹۹}$;

۱۵) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}$ و $\frac{۲}{۲-\sqrt{۲}}$; ۱۶) $\sqrt{۳+\sqrt{۳+\sqrt{۳}}}$ و ۳;

۱۷) $\sqrt[۲۰۰]{۲}$ و $۱/۰۱$; ۱۸) $\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹}$;

۱۹) $\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$; ۲۰) $۲^{۱۸}+۳^{۲۰}$ و $۶^{۱۰}$;

۲۱) $\frac{۲^{۲۳}+۱}{۲^{۲۵}+۱}$ و $\frac{۲^{۲۵}+۱}{۲^{۲۷}+۱}$; ۲۲) $\frac{۱۳^{۱۵}+۱}{۱۳^{۱۶}+۱}$ و $\frac{۱۳^{۱۶}+۱}{۱۳^{۱۷}+۱}$;

۲۳) $\sqrt[۳]{۳۸+۱۷\sqrt{۵}}$ و $\sqrt{۹+۴\sqrt{۵}}+\frac{۱}{۱۰۰۰}$;

۲۴) $۲^{۳۰}+۳^{۳۰}+۴^{۳۰}$ و ۳×۲۴^{۱۰}

۵. محاسبه کنید:

۱) $$\frac{(۸۱/۶۲۴:۴/۸-۴/۵۰۵)^۲+۱۲۵\times ۰/۷۵}{[(۰/۴۴^۲:۰/۸۸+۳/۵۳)^۲-۲/۷۵^۲]:۰/۵۲};$$

۲) $$\frac{[(۵/۲^۲:۲/۶+۸/۱)^۲-۶/۵^۲]:۰/۰۲۵}{(۶۰/۱۹۲:۲/۴-۱/۰۸)^۲-۰/۲۴\times ۱۴۰۰};$$

۳) $$۳\frac{۱}{۵}:\Big[\Big(۱\frac{۱}{۴}+۲/۵\Big)\cdot ۳/۲+$$
$$+\Big\{۴/۲۵:\Big[۴\frac{۱}{۴}\cdot\Big(۵/۲۵-۱\frac{۱}{۲}\Big)\Big]\Big\}\times ۲;$$

۴) $$\Big\{۲/۸:\Big[۲\frac{۴}{۵}\cdot\Big(۸/۷۵-۲\frac{۱}{۲}\Big)\Big]\Big\}\cdot ۷/۲۵-$$
$$-۳\frac{۳}{۴}:\Big[\Big(۱/۲+۵\frac{۱}{۲۰}\Big)\cdot ۳/۷۵\Big];$$

۵) $$\frac{\Big(۱۳\frac{۱}{۴}-۲\frac{۵}{۲۷}-۱۰\frac{۵}{۶}\Big)\cdot ۲۳۰\frac{۱}{۲۵}+۴۶\frac{۳}{۴}}{\Big(۱\frac{۳}{۷}+\frac{۱۰}{۳}\Big):\Big(۱۲\frac{۱}{۳}-۱۴\frac{۲}{۷}\Big)};$$

۶) $$\Big(\frac{۸/۸۰۷۷}{۲۰-(۲۸/۲:(۱۳/۳۳۳\times ۰/۳+۰/۰۰۰۱))\cdot ۲/۰۰۴}+$$
$$+۴/۹\Big)\cdot\frac{۵}{۳۲};$$

۷) $$\frac{۴/۵:\Big(۴۷/۳۷۵-\Big(۲۶\frac{۱}{۳}-۱۸\times ۰/۷۵\Big)\cdot ۲/۴:۰/۸۸\Big)}{۱۷/۸۱:۱/۳۷-۲۳\frac{۲}{۳}:۱\frac{۵}{۶}};$$

$$۸)\ \left[\frac{۳\frac{۱}{۳}+۴\frac{۱}{۹}-۶\frac{۵}{۶}}{۵\frac{۷}{۸}-۲\frac{۱}{۴}-۰/۵}:\left(۱۳\frac{۸}{۱۱}-۸\frac{۵۰}{۹۹}\right)\right]\cdot\left(۲\frac{۳}{۸}-۱\frac{۵}{۸}\right)+$$

$$+\frac{\left(۳\frac{۶}{۷}-۲\frac{۲}{۳}-\frac{۴}{۲۱}\right):۴۷}{\frac{۲۵}{۱۴}\cdot\left(۹\frac{۵}{۵۱}-۳\frac{۲}{۹}+۵\frac{۷}{۱۸}-۱۰\frac{۹}{۳۴}\right)};$$

$$۹)\ \left\{\frac{۴\frac{۱}{۳}+۵/۴+۰/۲(۶)}{\frac{۱۳}{۱۵}+۰/۰(۳)+۰/۱}:\left[\left(۴-۰/۸(۳)-۲\frac{۷}{۸}\right):\right.\right.$$

$$\left.\left.:\left(۸\frac{۷}{۲۴}-۷/۹۱(۶)\right)\right]\right\}:\left(\frac{۳}{۱۴}+\frac{۹}{۴۲}\right);$$

$$۱۰)\ \left[\left(\frac{۳/۲۵}{۵/۵}\cdot\frac{۳/۱۲۵}{۳۴۱}\right):\frac{۰/۳۴۱}{۶/۸۷۵}\right]:\left(\frac{۱/۲}{۳/۴+۰/۱۲۵}:\frac{۸}{۱۳۰}\right)+$$

$$+\frac{۱/۰۱-\frac{۱}{۵}}{۳\frac{۱}{۲}-۰/۸}\cdot\frac{۳-۰/۲۴}{۱-۰/۳۱};$$

$$۱۱)\ \frac{\left(۱۷\frac{۳}{۱۰۰}-۱۱/۲۷\right):۲\times ۱۰\frac{۱}{۳}}{۱۲:[۲/۲۸:(۲۸/۵۷-۵/۰۱)}+۴\frac{۱}{۲}\left\{\left[۳:\left(۰/۲-\frac{۱}{۱۰}\right)\right]:\right.$$

$$\left.:\left[۲\frac{۱}{۲}\left(۰/۸+\frac{۶}{۵}\right)\right]\right\};$$

$$۱۲)\ \left[\frac{(۴/۶+۵:۶/۲۵)\cdot۱۴}{۴\times۰/۱۲۵+۲/۳}:\frac{۷}{۶}\right]:\frac{۲۷\times۹\frac{۳}{۵}}{۱۲/۴+۴\frac{۲}{۵}}+$$

$$+\left(۴\frac{۵}{۸}-\frac{۱۳}{۶}:۸\frac{۲}{۳}\right):\left(۳/۲۵-۲\frac{۱}{۴}\right);$$

۱۳) $$\frac{۲/(۳)-\left(۲\frac{۳}{۱۶}-\frac{۲}{۳}\right):\frac{۳}{۸}}{\left[۱/۹-۰/۲۱:\left(۴/۲-۳\frac{۴}{۵}\right)\right]:\left(۱/۳:۱\frac{۲۰}{۲۴}\right)}+$$

$$+\frac{\left(\left[\left(۰/۳-\frac{۳}{۲۰}\right)\cdot ۳\frac{۱}{۲}\right]:۰/۰۵\right):۱۲\frac{۳}{۵}}{\left(۱\frac{۲۲}{۲۵}+۲/۱۲\right)\cdot\left(۰/۱+\frac{۱}{۴۰}\right)};$$

۱۴)

$$\frac{۲\frac{۲}{۳}:\left(۲/۸(۴):۲\frac{۲}{۱۵}\right)+\left[۲\frac{۱۴}{۷۷}+\left(۱۵\frac{۱۳}{۱۳۷}-\frac{۲۰۶۸}{۱۳۷}\right):۸/۰۱\right]\cdot ۵\frac{۲}{۳}}{\left[\left(۱/۰۸-\frac{۲}{۲۵}\right):۰/(۵۷۱۴۲۸)\right]:\left[(۶/(۵)-۳\frac{۱}{۴})\cdot ۲\frac{۲}{۱۷}\right]};$$

۱۵) $$\frac{(۹/۱۲۶:۰/۶۵+۰/۴۶)\cdot ۷/۱۸+۱/۴۵\times ۲۸/۲}{۳/۴۵^{۲}-۰/۵۵^{۲}}\times$$

$$\times\left(\frac{(۱۶/۸:۰/۳۵)\cdot ۱\frac{۳}{۴}-۲۵/۶\times ۱/۲۹}{۹۲/۰۴-۱۴/۴۹۶:۰/۱۶}+۳/۶:۱\frac{۱}{۳}\right)$$

۶. ۱۵۰٪ این عدد را پیدا کنید:

$$\frac{۶/۶۲^{۲}+۵/۴\times ۳/۳۸+۱/۲۲\times ۳/۳۸}{۲۰/۱^{۲}-۱۳^{۲}+۳۳/۱\times ۱۲/۹}$$

۷. عددی را پیدا کنید که ۴۰٪ آن برابر است با

$$\frac{۰/۵۳۶^{۲}-۰/۴۶۴^{۲}}{۳/۶^{۲}-۷/۲\times ۲/۴+۲/۴^{۲}}$$

۸. مطلوب است عددی که ۲/۵٪ آن برابر است با

$$\frac{\left(۹\frac{۳}{۴}:۵/۲+۳/۴\times ۲\frac{۷}{۳۴}\right):۱\frac{۹}{۱۶}}{۰/۳۱\times ۸\frac{۲}{۵}-۵/۶۱:۲۷\frac{۱}{۲}}$$

۹. عددی را پیدا کنید که ۵٪ آن‌چنین است:

$$\frac{۲\frac{۱۱}{۲۵}-۰/۸۴\cdot\left(۶\frac{۸}{۹}:۲\frac{۷}{۱۲}-\frac{۵}{۱۲}\cdot ۴\frac{۴}{۳۵}\right)}{۷/۶۰۵:۷\frac{۱}{۲}+۳/۰۸۶}$$

۱۰. A بزرگتراست یا B؛ عدد بزرگتر چند برابرعدد کوچکتراست:

$$A=(۰/۸\times ۷+۰/۸^{۲})\cdot\left(۱/۲۵\times ۷-\frac{۴}{۵}\times ۱/۲۵\right)+۳۱/۶۴،$$

$$B=\frac{(۱۱/۸۱+۸/۱۹)\times ۰/۰۲}{۹:۱۱/۲۵}$$

۱۱. A بزرگتراست یا B؛ عدد بزرگتر چند برابرعدد کوچکتراست:

$$A=(۹\times ۰/۰۸+۰/۷\times ۰/۰۸):\left(۹\times ۱۲۵-۰/۷\times ۱۲\frac{۱}{۲}\right)+۹/۴۹$$

$$B=\frac{(۱/۰۹-۰/۲۹)\cdot ۱\frac{۱}{۴}}{\left(۱۸/۹-۱۶\frac{۱۳}{۲۰}\right)\cdot\frac{۸}{۹}}$$

۱۲. این برابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $۲۷^{۳}=۹\times ۳^{۵}\times ۳^{۲};\ ۸^{۲}\times ۴^{۳}=۲^{۱۲};\ (۲^{۲})^{۱۰}=۲^{۱۸}\times ۴;$

۲) $\frac{(۵^{۴}-۵^{۳})^{۴}}{۱۲۵^{۵}}=\frac{۶۴}{۲۵^{۳}};\ \frac{۹^{۳}}{(۳^{۴}-۳^{۳})^{۲}}=\frac{۱}{۴};$

۳) $\sqrt[۵]{۳۲}+\sqrt[۶]{۲۷^{۲}}=۵;\ \sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}=\sqrt[۶]{۶۴};\ \frac{\sqrt[۴]{۲۷\sqrt[۳]{۹}}}{\sqrt[۶]{۹\times ۳^{۳}\sqrt{۳}}}=۱;$

۴) $(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴})(\sqrt[۳]{۳}-\sqrt[۳]{۲})=۱;$

۵) $(۱۲\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۱۶}-۲\sqrt[۳]{۲})\left(۵\sqrt[۳]{۴}-۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}\right)=۸۴;$

۶) $۱+۲+۳+\ldots+۱۰۰۰=۵۰۰۵۰۰;$

۷) $\sqrt{۸-\sqrt{۱۵}}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳۰}-\sqrt{۲});$

۸) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}+\ldots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰}+\sqrt{۹۹}}=۹;$

۹) $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+۱۰۰^۲=\frac{۱۰۰\times۱۰۱\times۲۰۱}{۶};$

۱۰) $۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+۱۰۰^۳=\left(\frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲}\right)^۲,$

۱۱) $\frac{۱}{۱۰!}+\frac{۱}{۹!۱!}+\frac{۱}{۸!۲!}+\frac{۱}{۷!۳!}+\frac{۱}{۶!۴!}=\frac{۱}{۲\times۵!۵!};$

۱۳. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $۲۹۷\times۲۹۹<۲۸۸^۲;$ ۲) $۴۵^۲-۳۱^۲>۴۴^۲-۳۰^۲;$

۳) $۲۶^۳-۲۴^۳<(۲۶-۲۴)^۳;$ ۴) $(۱۷+۱۳)^۳>۱۷^۳+۱۳^۳$

۵) $\frac{۶^۶\times۲^۳-۴^۶}{۶^۶+۶^۳\times۳^۳+۴^۶}<\frac{۵^۴+۵\times۳^۶}{۵^۳+۵^۲\times۳^۲};$

۶) $۳۱^{۱۱}<۱۷^{۱۴};$ ۷) $۱^۱\times۲^۲\times۳^۳\times\ldots\times۱۰^{۱۰}<۱۰^{۵۵};$

۸) $۳۰۰!>۱۰۰^{۲۰۰};$ ۹) $\frac{۱۰^{۱۹۷۴}+۱}{۱۰^{۱۹۷۵}+۱}<\frac{۱۰^{۱۹۷۵}+۱}{۱۰^{۱۹۷۶}+۱};$

۱۰) $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\ldots+\frac{۱}{۱۰۲۳}>۱۰;$

۱۱) $\frac{۹۸}{۹۹}>\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\ldots+\frac{۱}{۹۹^۲}>\frac{۹۹}{۱۰۰};$

۱۲) $\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdot\frac{۷}{۸}\cdots\frac{۹۹}{۱۰۰}<\frac{۱}{۱۰}$; ۱۳) $\frac{۳}{۵}\cdot\frac{۷}{۹}\cdot\frac{۱۱}{۱۳}\cdots\frac{۱۱۹}{۱۲۱}<\frac{۱}{\sqrt{۴۱}}$

۱۴) $\frac{۱}{\sqrt{۱}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰}}>۱۰$

۱۴. می‌دانیم $۱<a<۲$ و $۲<b<۳$. مقدار این عبارت‌ها را ارزیابی کنید:

۱) $a+b$; ۲) ab; ۳) $a-b$; ۴) $\frac{a}{b}$;

۵) $\frac{a}{۳}$ ۶) $-۳b$; ۷) $a-۳$; ۸) $۲a-b$;

۹) $b-۲a$; ۱۰) $۳a+b-۲$

۱۵. می‌دانیم $-۳<a<-۲$ و $۵<b<۶$. مقدار این عبارت‌ها را ارزیابی کنید:

۱) $a+b$; ۲) ab; ۳) $a-b$; ۴) $\frac{a}{b}$;

۵) $\frac{۲a}{۳}$ ۶) $-\frac{۲b}{۵}$; ۷) $۲a-۳$; ۸) $۳a-۲b$

۱۶. می‌دانیم $-۱<a<-\frac{۱}{۲}$ و $-۳<b<۲/۵$. این عبارت‌ها را ارزیابی کنید:

۱) $a+b$; ۲) ab; ۳) $a-b$; ۴) $\frac{a}{۵+b}$;

۵) $-۲b$; ۶) $a-۳b$; ۷) $۲a+۳b$; ۸) $\frac{a}{۲}-b$

۱۷. می‌دانیم، مجموع و تفاضل دو عدد حقیقی a و b، عددهایی گویا هستند. ثابت کنید، a و b هم، عددهایی گویا هستند.

۱۸. می‌دانیم، عددهای x و y و $\sqrt{x}+\sqrt{y}$، گویا هستند. ثابت

کنید، $\sqrt{x}$ و $\sqrt{y}$ هم، عددهایی گویا هستند.

۱۹. عدد درست x را طوری پیدا کنید که، به ازای آن، عدد $\sqrt{x^۲+x+۱}$ گویا باشد.

۲۰. گنگ بودن این عددها را ثابت کنید:

۱) $\sqrt{۵}$؛ ۲) $\sqrt[۵]{۲}$؛ ۳) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$؛ ۴) $\sqrt{۲}+\sqrt[۴]{۲}$؛
۵) $\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}$؛ ۶) $\log_{۲}۱۲$؛ ۷) $\log_{۳}۸$؛ ۸) $tg۵^\circ$؛
۹) $cotg۴۰^\circ$؛ ۱۰) $\sin ۲۰$؛ ۱۱) $\cos ۱۰^\circ$؛ ۱۲) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}$؛
۱۳) $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$؛ ۱۴) $\cos\frac{\pi}{۲^n}$ $(n>۱، n\in\mathbf{N})$

۲۱. گویا بودن این عددها را ثابت کنید:

۱) $\dfrac{۴+۲\sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۱۰+۶\sqrt{۳}}}-\sqrt{۳}$؛ ۲) $\dfrac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}-۲\sqrt{۶}$؛
۳) $\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}$؛ ۴) $\sqrt[۳]{۲۰+۱۴\sqrt{۲}}+\sqrt[۳]{۲۰-۱۴\sqrt{۲}}$؛
۵) $\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt{۶-۴\sqrt{۲}}$؛ ۶) $\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}+۷}-\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}-۷}$

۲۲. مثالی برای یك عدد گویا و یك عدد گنگ پیدا کنید که بین این عددها باشند:

۱) ۱/۴ و $\sqrt{۲}$؛ ۲) $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$؛
۳) ۳ و ۳/۰۱؛ ۴) $\sqrt[۳]{۵}$ و $\log_{۲}۷$

۲۳. آیا می‌توان مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کرد که، راس‌های آن، روی گره‌های یك صفحه شطرنجی کاغذ باشد؟ (همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی، باهم برابرند.)

پاسخ‌ها وراهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) $۱\frac{۱}{۴}$؛ ۲) $-۱\frac{۴}{۷}$؛ ۳) $-۵\frac{۴}{۲۳}$؛ ۴) کسر مثبت کوچکتر از واحد.

۲. ۱) $\frac{۱۷}{۷}$؛ ۲) $-\frac{۳۵}{۸}$؛ ۳) $\frac{۲۳}{۱۲}$؛ ۴) $-\frac{۷۳}{۳۵}$.

۳. ۱) $\frac{۳}{۷}<\frac{۴}{۷}$؛ ۲) $-\frac{۵}{۱۱}>-\frac{۶}{۱۱}$؛ ۳) $\frac{۸}{۹}>-\frac{۷}{۹}$؛
۴) $-\frac{۱۳}{۱۲۳}<-\frac{۱۳}{۱۲۹}$؛ ۵) $\frac{۲}{۳}<\frac{۴}{۵}$؛ ۶) $\frac{۶}{۷}=\frac{۲۴}{۲۸}$؛ ۷) $-\frac{۱۳}{۱۴}>-\frac{۱۴}{۱۵}$؛
۸) $\frac{۱۲۴}{۱۱۹}<\frac{۱۳۷}{۱۲۹}$.

۴. ۱) $\frac{۹}{۵۶}$؛ ۲) $\frac{۴۳}{۲۴}$؛ ۳) ۱۱۱؛ ۴) ۱۰۰۰۰.

۵. ۱) ۰/۱۵؛ ۲) ۳/۷−؛ ۳) ۰/۱۱۲؛ ۴) ۱/۸۶۴−؛
۵) ۱/۱۲۵؛ ۶) ۰/۰۳۱۲۵−.

۶. ۱) $\frac{۷}{۴}$؛ ۲) $-\frac{۵۷۶}{۲۵}$؛ ۳) $\frac{۸۷}{۵۰۰}$؛ ۴) $-\frac{۴۶۱}{۴۰۰}$.

۷. ۱) $\frac{۴}{۵}$، $۲\frac{۴}{۷}$، ۵، $۸\frac{۱}{۲}$؛ ۲) $\frac{۲}{۱۳}$، $۱\frac{۳}{۷}$، $۱\frac{۱}{۳}$، $۱\frac{۵۳}{۶۶}$؛
۳) $\frac{۸}{۳۵}$، $۹\frac{۱۱}{۱۲}$، $-۲\frac{۱۱}{۱۲}$، ۹؛ ۴) $\frac{۷}{۲۰}$، $\frac{۳۶}{۶۵}$، $-\frac{۳}{۴}$، $\frac{۲۵}{۳۸}$؛
۵) ۱/۸۷، ۷/۴۲، ۲/۳۸، ۱/۳۲؛ ۶) ۱/۱۸۴، ۲/۳۱−،
۰/۴۵۶، ۰/۷۷؛ ۷) ۰/۴۵، ۴/۷−، ۴۰؛ ۸) $-\frac{۹}{۸}$؛ ۹) ۸۰؛
۱۰) ۹۰؛ ۱۱) ۰/۵؛ ۱۲) ۰/۵؛ ۱۳) ۱۸۰۰؛ ۱۴) ۱۰۰؛
۱۵) ۳۶۰؛ ۱۶) ۱۵/۵؛ ۱۷) ۰/۲.

تکلیف ۳.

۱. ۱) $\frac{۹}{۴۱}<\frac{۹}{۴۰}$؛ ۲) $-\frac{۷}{۹}>-\frac{۱۱}{۱۳}$؛ ۳) $\frac{۲۱}{۳۲}<\frac{۲۴}{۳۵}$؛
۴) $-\frac{۲۵}{۲۸}>\frac{۲۶}{۲۹}$؛ ۵) $۱/۳۲<\frac{۳۴}{۲۵}$؛ ۶) $-\frac{۱۱۷}{۱۵۶}<-\frac{۱۱۳}{۱۵۷}$؛
۷) $-۳\frac{۴}{۵}<-۳\frac{۳}{۵}$؛ ۸) $-۲\frac{۶}{۱۱}<-۲\frac{۲۳}{۴۵}$.

۲. ۱) ۰/۲؛ ۲) −۰/۱۷۵؛ ۳) ۰/۳۱۲۵؛ ۴) ۰/۱۰۴؛
۵) ۰/۶؛ ۶) −۰/۳۷۵.

۳. ۱) $\frac{۵}{۱۱}$؛ ۲) $\frac{۸۴۱}{۱۹۶۱}$؛ ۳) $\frac{۱۳}{۲۰}$؛ ۴) $-\frac{۹}{۳۵}$؛ ۵) $\frac{۱}{۱۰}$؛ ۶) $\frac{۱۰}{۲۱}$.

۴. ۱) $\frac{۴۳}{۲۰}$؛ ۲) $-\frac{۴۲۸}{۲۵}$؛ ۳) $\frac{۳۰۳}{۲۵۰۰}$، $-\frac{۱۵۴۱}{۵۰۰}$.

۵. ۱) $\frac{۷}{۸}$، $۳\frac{۳}{۵}$، ۳، ۶؛ ۲) $\frac{۱}{۵}$، $۴\frac{۳}{۱۱}$، $۱\frac{۱}{۷}$، $\frac{۱۰۷}{۱۱۹}$؛ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$، $۸\frac{۹}{۲۰}$،
$-۲\frac{۱۱}{۱۲}$، $۷\frac{۱۳}{۲۰}$؛ ۴) $۱\frac{۲}{۳}$، $۲\frac{۲}{۱۵}$، $۱\frac{۱}{۲}$، −۲، $۲\frac{۱۳}{۳۲}$؛ ۵) ۲/۱، ۱۰/۹۶۱،
۰/۴۶۱، −۶/۱۶؛ ۶) ۴/۲۲۴، −۲۲/۱۴۳۲، ۰/۶۶۵۴۳؛
۷) ۵/۱، −۲/۸، −۱۱۰؛ ۸) $۴\frac{۴}{۷}$، ۹) $\frac{۵}{۱۹}$، ۱۰) $-\frac{۱۱}{۱۲}$؛
۱۱) ۰/۱۷؛ ۱۲) ۷۲۰۰؛ ۱۳) ۲۵۵؛ ۱۴) ۰/۰۸؛ ۱۵) ۱۲/۵.

تکلیف ۳.

۱. مثلاً ۰/۱(۲۳) و ۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱... .

۲. ۱) −۰/(۳)؛ ۲) ۰/(۵۷۱۴۲۸)؛ ۳) ۲/(۷۲)؛
۴) −۱/۱۴(۳۹).

۳. ۱) $۰/(۳)=\frac{۱}{۳}$؛ ۲) $-۰/۰۳۳۳۳>-\frac{۱}{۳}$؛
۳) $۰/(۲۶)>۰/۲۶۱$؛ ۴) $-۳/۷۷۶>-۳(۷۷۶)$.

۴. ۲/۷(۸).   ۵. ۱) $\frac{۷}{۳۰}$؛ ۲) $\frac{۴۷۹}{۳۳۰}$؛ ۳) $-\frac{۱۰۶۷}{۴۵۰}$؛
۴) $-\frac{۳۲۱۱۷}{۹۹۰۰}$؛ ۵) $\frac{۱۰۳۲۷۸۷}{۲۴۹۹۷۵۰}$؛ ۶) $-\frac{۸۲۶۳}{۱۹۹۸۰}$.

۶. ۱) $-۳\frac{۱۳}{۱۶۵}$؛ ۲) $-\frac{۷۹}{۲۲۵}$.

تکلیف ۴.

۱. ۱) $۰/(۲)$؛ ۲) $-۱/(۲۳۰۷۶۹)$؛ ۳) $۰/(۰۶۵۰۴)$؛
۴) $-۲/(۳)$.

۲. ۱) $۰/۲۲(۲۳)>۰/۲۲۲۳$؛ ۲) $\frac{۱}{۷}<۰/۱۴۲۸(۵۷)$؛

۳) $-۲\frac{۲}{۳}>-۲/۶۷$؛ ۴) $-\frac{۷}{۶}>-۱/۱۶۶۶۷$. ۳. $۵/۷۴$.

۴. ۱) $\frac{۳۱}{۹۹}$؛ ۲) $-\frac{۲۴۱۰}{۹۹۹}$؛ ۳) $\frac{۳۷۱۳}{۹۰۰۰}$؛ ۴) $\frac{۱۷۳}{۵۵}$؛

۵) $\frac{-۱۰۷۷۱}{۳۳۳۰}$؛ ۶) $\frac{۵۹۳}{۱۱۱۰}$. ۵. ۱) $\frac{۲۲}{۴۵}$؛ ۲) ۱.

تکلیف ۵.

۱. راهنمائی: $\alpha=\frac{p}{q}$ و $\beta=\frac{k}{m}$ بگیرید؛ دراین‌صورت

$$\alpha+\beta=\frac{pm+kq}{qm} \quad \text{و} \quad \alpha\cdot\beta=\frac{p\cdot k}{q\cdot m}$$

۲. ۱) مثلاً اگر $\alpha=\sqrt{۲}$ و $\beta=\sqrt{۳}$، آن‌وقت $\alpha+\beta=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$؛ ۲) مثلاً اگر $a=\sqrt{۲}$ و $b=۳-\sqrt{۲}$، آن‌وقت $a+b=۳$؛ ۳) مثلاً اگر $a=\sqrt{۲}$ و $b=\sqrt{۳}$، آن وقت $ab=\sqrt{۶}$؛ ۴) مثلاً اگر $a=۱-\sqrt{۲}$ و $b=۱+\sqrt{۲}$ آن‌وقت $ab=-۱$.

۳. مثلاً عدد $\frac{۳}{۲}$.

۴. مثلاً عدد $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲۰۰۰}$ وعدد $\frac{۳}{۵}-\frac{\sqrt{۲}}{۱۰۰۰}$.

تکلیف ۶.

۱. راهنمائی: $\alpha=\frac{p}{q}$ و $\beta=\frac{k}{m}$ بگیرید؛ آن‌وقت

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{pm}{qk} \quad \text{و} \quad \alpha-\beta=\frac{pm-qk}{qm}$$

۲. ۱) مثلاً اگر $a=۱-\sqrt{۲}$ و $b=-۱-\sqrt{۲}$، آن وقت $a-b=۲$؛ ۲) مثلاً اگر $a=۱+\sqrt{۳}$ و $b=-\sqrt{۳}$، آن وقت $a-b=۱+۲\sqrt{۳}$؛ ۳) مثلاً اگـر $a=\sqrt{۳}$ و $b=۴\sqrt{۳}$، آن وقت $\frac{a}{b}=\frac{۱}{۴}$؛ ۴) مثلاً اگر $a=\sqrt{۶}$ و $b=\sqrt{۲}$؛ آن‌وقت $\frac{a}{b}=\sqrt{۳}$

۳. مثلاً ۱/۱، ۱/۰۱، ۱/۰۰۱.

۴. ۱) مثلاً $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sqrt{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۱۰}$؛ ۲) مثلاً $۱+\frac{\sqrt{۲}}{۱۰۰}$ و $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۱۰۰۰}$.

تکلیف ۷.

۱. ۱) $۲۷+۶۴+۱۲۵=۲۱۶$؛

۲) $(۱۲^{۲}\times ۹^{۳})^{۴}=(۲^{۴}\times ۳^{۸})^{۴}=(۲^{۴}\times ۹^{۴})^{۴}=(۱۸^{۴})^{۴}=۱۸^{۱۶}$؛

۳)
$$۱۴/۲(۱۱+۴۱)+۵/۸(۱۱+۴۱)=$$
$$=۵۲(۱۴/۲+۵/۸)=۱۰۴۰;$$

۴)
$$\left(\frac{۳\sqrt{۶}}{۲}+\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}-۲\sqrt{۶}\right)(\sqrt{۶}-\sqrt{۱۲}-\sqrt{۶})=$$
$$=\frac{\sqrt{۶}(-\sqrt{۱۲})}{۶}=-\sqrt{۲};$$

۵)
$$\frac{\sqrt[۴]{۳^{۳}\times ۳^{\frac{۲}{۳}}}}{\sqrt[۶]{۳^{۲}\times ۳^{۳}\times ۳^{\frac{۱}{۲}}}}=\frac{\sqrt[۴]{۳^{\frac{۱۱}{۳}}}}{\sqrt[۶]{۳^{\frac{۱۱}{۲}}}}=\frac{۳^{\frac{۱۱}{۱۲}}}{۳^{\frac{۱۱}{۱۲}}}=۱؛$$

۶)
$$\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\dots+\left(\frac{۱}{۹۸}-\frac{۱}{۹۹}\right)+$$
$$+\left(\frac{۱}{۹۹}-\frac{۱}{۱۰۰}\right)=۱-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰};$$

۷) $$(\sqrt{۲}-۱)+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+\dots+(\sqrt{۹۹}-\sqrt{۹۸})+$$
$$+(\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹})=۱۰-۱=۹;$$

۸)

$(۷۷۷۸-۲۲۲۳)(۷۷۷۸+۲۲۲۳)=۵۵۵۵\times ۱۰۰۰۱=۵۵۵۵۵۵۵۵$.

۱۰۲. ۱) چون $۲\times ۱۲۵>۵\times ۸$؛ ۲) چون $\sqrt{۷}<۳$ و $\sqrt{۱۵}<۴$؛

۳) چون $\sqrt{۲۱}>\sqrt{۲۰}$ و $-\sqrt{۵}>-\sqrt{۶}$؛ ۴) چون $۱/۲+\sqrt{۵}>۳$؛

۵) چون $\sqrt{۲}+\sqrt{۱۱}<۱/۵+۳/۲=۱/۷+۳<\sqrt{۳}+۳$

۶) چون $\frac{۱}{۵۱}>\frac{۱}{۱۰۰}$، $\frac{۱}{۵۲}>\frac{۱}{۱۰۰}$، ...، $\frac{۱}{۹۹}>\frac{۱}{۱۰۰}$.

۱۰۳. ۱) $\frac{۴۱}{۵۳}<\frac{۴}{۵}<\frac{۲۸}{۲۳}$؛ ۲) $\left(-۱\frac{۱}{۳}\right)^{۳}<\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{۳}<\frac{۱}{۲}<\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}$؛

۳) $\left(\frac{۱۶}{۴۹}\right)^{-\frac{۱}{۴}}<\left(\frac{۴}{۷}\right)^{-\frac{۲}{۳}}<\left(\frac{۴۹}{۱۶}\right)^{\frac{۴}{۳}}$، ۴) $\frac{۳\sqrt{۷}+۵\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}}<\sqrt{۳۵}<۸$.

۱۰۴. ۱) $-۲<a-b<۰$، $۳<a+b<۵$، $۲<ab<۶$،

$\frac{۱}{۳}<\frac{a}{b}<۱$، ۲) $-۵<a+b<-۳/۵$، $۰/۵<a-b<۲$،

$۲/۵<ab<۶$، $\frac{۱}{۳}<\frac{a}{b}<\frac{۴}{۵}$؛ ۳) $-۲<a+b<۰$، $۱<a-b<۳$،

$-۲<ab<۰$، $-۱<\frac{a}{b}<۰$.

۱۰۵. ۱) $[-۵/۱]=-۶$؛ $\{-۵/۱\}=۰/۹$؛

۲) $[\sqrt{۲}+\sqrt{۳}]=۳$، $\{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}\}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-۳$؛

۳) $\left[\frac{۷}{۳}+۰/(۲۱)\right]=۲$، $\left\{\frac{۷}{۳}+۰/(۲۱)\right\}=\frac{۶}{۱۱}$

۴) $\left[-\frac{۲۱}{۶}+۴/(۲)\right]=۰$، $\left\{-\frac{۲۱}{۶}+۴/(۲)\right\}=\frac{۱۳}{۱۸}$؛

۵) $\left[\frac{۳\pi}{۲}\right]=۴$، $\left\{\frac{۳\pi}{۲}\right\}=\frac{۳\pi-۸}{۲}$؛

۶) $[\sqrt{\pi}+۰/(۴)]=۲$، $\{\sqrt{\pi}+۰/(۴)\}=\sqrt{\pi}-\frac{۱۴}{۹}$.

تکلیف ۸.

۱.۱) $۱۰^۲=۱+۸+۲۷+۶۴$؛

۲) $۲۵^{۲۰}\cdot۳^{۲۰}=۵^{۴۰}\cdot۹^{۱۰}=(۵\times۹)^{۱۰}\cdot۵^{۳۰}=۴۵^{۱۰}\cdot۵^{۳۰}$؛

۳) $\frac{\sqrt[۳]{۲^۲\cdot۲^{\frac{۱}{۲}}}}{\sqrt[۴]{۲^۳\cdot۲^{\frac{۱}{۳}}}}=\frac{\sqrt[۳]{۲^{\frac{۵}{۲}}}}{\sqrt[۴]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}}}=\frac{۲^{\frac{۵}{۶}}}{۲^{\frac{۵}{۶}}}=۱$؛

۴) $۳۱(۸۲+۴۳)+۱۲۵(۴۸-۶۷)=۱۲۵(۳۱-۱۹)=۱۵۰۰$؛

۵) $(\sqrt[۳]{۲})^۳+(\sqrt[۳]{۵})^۳=۷$؛

۶) $$\frac{۱}{۲}\Big[\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}\right)+\left(\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۹}\right)+\dots+\left(\frac{۱}{۶۱}-\frac{۱}{۶۳}\right)+$$
$$+\left(\frac{۱}{۶۳}-\frac{۱}{۶۵}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶۵}\right)=\frac{۶}{۶۵}$$

۱.۲) $۲-۵۰<-۴۷$؛ ۲) $۲۵۰>۴۰$؛ ۳) $\sqrt{۵}>۲/۳$ و $\sqrt{۱۰}>۳$؛ ۴) $\sqrt{۳۷}>۶$ و $-\sqrt{۱۴}>-\sqrt{۱۵}$؛ ۵) $\sqrt{۷}>۲/۶$ و $\sqrt{۲}>۱/۴$؛ ۶) $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}>\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}>\frac{۱}{۲}$،

$$\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\dots+\frac{۱}{۱۶}>\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۱۷}+\dots+\frac{۱}{۳۲}>\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳۲}+\dots+\frac{۱}{۶۴}>\frac{۱}{۲}$$

۱.۳) $\left(\frac{۱۲۵}{۲۷}\right)^{-\frac{۱}{۱۵}}=\left(\frac{۳}{۵}\right)^{\frac{۱}{۵}}<\frac{۵}{۳}<\left(\frac{۹}{۲۵}\right)^{-۴}$؛

۲) $\left(-\frac{۱}{۳}\right)^۳<\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲<\frac{۵}{۹}<\frac{۲}{۳}$؛

۳) $-۱-\sqrt{۲}<-۲\frac{۴}{۱۷}<-۲/(۲)<-\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$.

۱.۴) $۶<a+b<۸$، $-۳<a-b<-۱$، $۸<ab<۱۵$،

$\frac{۲}{۵}<\frac{a}{b}<\frac{۳}{۴}$؛ ۲) $-۱/۹<a+b<-۰/۴$، $۳/۶<a-b<۵/۱$،
$-۶/۳<ab<-۲/۷۵$، $-۰/۸۴<\frac{a}{b}<-۰/۳(۶)$؛
۳) $-۴<a+b<-۲$، $۵<a-b<۷$، $-۱۰<ab<-۴$،
$-۰/۵<\frac{a}{b}<-۰/۲$.

۵. ۱) $\left[\left(\frac{۵}{۴}\right)^{۵}\right]=۳$، $\left\{\left(\frac{۵}{۴}\right)^{۵}\right\}=\frac{۵۳}{۱۰۲۴}$؛ ۲) $\left[\frac{۳۵}{۲}\right]=۱۷$،
$\left\{\frac{۳۵}{۲}\right\}=\frac{۱}{۲}$؛ ۳) $\left[\frac{۵\pi}{۳}\right]=۵$، $\left\{\frac{۵\pi}{۳}\right\}=\frac{۵\pi-۱۵}{۳}$؛ ۴) $\left[\frac{۷\sqrt{۲}}{۴}\right]=۲$؛
$\left\{\frac{۷\sqrt{۲}}{۴}\right\}=\frac{۷\sqrt{۲}-۸}{۴}$.

تکلیف ۹.

۱. $۳۳\frac{۱}{۳}$٪. ۲. ۹۰۰٪. ۳. ۹۰ واحد محصول. ۴. ۳۰۰ واحد. ۵. ۵۰٪. ۶. ۸۷/۵٪. ۷. ۲۰۰۰.

تکلیف ۱۰.

۱. $۱۴\frac{۲}{۵}$. ۲. ۵۶/۲۵٪. ۳. ۲۰٪. ۴. ۵ کیلوگرم. ۵. ۸٪.

تمرین‌ها

۱. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) نه(درمخرج، عامل اول ۴۱ وجود دارد)؛
۴) نه (درمخرج، عامل اول ۱۷ وجود دارد)؛ ۵) بله؛ ۶) بله.

۲. ۱) ۰/(۴۲۸۵۷۱)؛ ۲) −۱/(۳۶)؛ ۳) ۱/۴؛
۴) ۰/(۴۴۵۵)؛ ۵) ۰/(۸۱)؛ ۶) ۱/(۹۵۲۳۸۰).

۳. ۱) $\frac{۳}{۲۰}$؛ ۲) $-\frac{۶۴۱}{۵۰۰}$؛ ۳) $\frac{۲۰۷۴}{۹۰۹}$؛ ۴) $\frac{۲۰۹}{۹۰۰}$؛ ۵) $-\frac{۳۳۱۹}{۹۰۰}$؛

۶) $\frac{۱۹}{۹}$؛ ۷) $\frac{۹۲}{۲۷}$؛ ۸) $\frac{۱۷۰۰}{۹۶۳}$.

۴. ۱) $\frac{۴}{۵}<\frac{۷}{۸}$؛ ۲) $۱/۳۲>\frac{۳۲}{۲۵}$؛ ۳) $(۰/۵)^{۱۰}>(۰/۵)^{۲۰}$؛

۴) $۵۴^۲-۳۱^۲>۴۴^۲-۳۰^۲$، زیرا $۱۴\times ۷۶>۱۴\times ۷۴$؛

۵) $۲۶^۲-۲۴^۲<۲۷^۲-۲۵^۲$، زیرا $۲\times ۵۰<۲\times ۵۲$؛

۶) $۳۴۵^۲>۳۴۲\times ۳۴۸$، زیرا $۳۴۵^۲>۳۴۵^۲-۳^۲$؛

۷) $۸۷۴^۲>۸۷۰\times ۸۷۸$، زیرا $۸۷۴^۲>۸۷۴^۲-۴^۲$؛

۸) $۱۹^۴>۱۶\times ۱۸\times ۲۰\times ۲۲$، زیرا $۱۹^۴>(۱۹^۲-۱)(۱۹^۲-۳^۲)$؛

۹) $۹۹^{۲۰}<۹۹۹۹^{۱۰}$، زیرا $۹۹^{۱۰}.۹۹^{۱۰}<۹۹^{۱۰}.۱۰۱^{۱۰}$؛

۱۰) $۹^{۲۰}>۲۷^{۱۳}$، زیرا $۳^{۴۰}>۳^{۳۹}$؛ ۱۱) $۲^{۳۰۰}<۳^{۲۰۰}$، زیرا

$۸^{۱۰۰}<۹^{۱۰۰}$؛ ۱۲) $۲^{۴۰}=۴^{۲۰}$، ۱۳) $۱۰^{۲۰}>۹۰^{۱۰}$، زیرا

$۱۰^{۲۰}>۹^{۱۰}.۱۰^{۱۰}$؛ ۱۴) $\frac{\sqrt{۴۰}}{۲}<\frac{\sqrt{۹۹}}{۳}$، زیرا $\sqrt{۹\times ۴۰}<\sqrt{۴\times ۹۹}$؛

۱۵) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۱-\sqrt{۳}}>\frac{۲}{۱-\sqrt{۲}}$، زیرا $-۲-\sqrt{۳}>-۲-۲\sqrt{۲}$؛

۱۶) $\sqrt{۳+\sqrt{۳+\sqrt{۳}}}<۳$، زیرا $\sqrt{۳+\sqrt{۳}}<۶$؛

۱۷) $\sqrt[۲۰۰]{۲}<۱/۰۱$، زیرا $۲<(۱/۰۱)^{۲۰۰}$؛

۱۸) $\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}<\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹}$، زیرا

$$\sqrt{۷}+\sqrt{۱۰}<۲/۷+۳/۳۴=۱/۷+۴/۳۴<\sqrt{۳}+\sqrt{۱۹};$$

۱۹) $\sqrt{۱۱}-\sqrt{۱۰}<\sqrt{۶}-\sqrt{۵}$، زیرا $\frac{۱}{\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۰}}<\frac{۱}{\sqrt{۶}+\sqrt{۵}}$؛

۲۰) $۲^{۱۸}+۳^{۲۰}>۶^{۱۰}$، زیرا $۹^{۱۰}>۶^{۱۰}$؛

۲۱) $\frac{۲^{۲۳}+۱}{۲^{۲۵}+۱}>\frac{۲^{۲۵}+۱}{۲^{۲۷}+۱}$، زیرا

$$۲^{۵۰}+۲^{۲۵}\left(\frac{۱}{۴}+۴\right)+۱>۲^{۵۰}+۲^{۲۵}(۱+۱)+۱;$$

۲۲) $\frac{۱۳^{۱۵}+۱}{۱۳^{۱۶}+۱}>\frac{۱۳^{۱۶}+۱}{۱۳^{۱۷}+۱}$، زیرا

$$۱۳^{۳۲}+۱۳^{۱۶}\left(\frac{۱}{۱۳}+۱۳\right)+۱>۱۳^{۳۲}+۱۳^{۱۶}(۱+۱)+۱;$$

۲۳) $\sqrt[3]{۳۸+۱۷\sqrt{۵}}<\sqrt{۹+۴\sqrt{۵}}+\frac{۱۱}{۱۰۰۰}$، زیرا

$$\sqrt[3]{۳۸+۱۷\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}+۲=\sqrt{۹+۴\sqrt{۵}};$$

۲۴) $۲^{۳۰}+۳^{۳۰}+۴^{۳۰}>۳\times ۲۴^{۱۰}$، زیرا

$$۴^{۳۰}=۲^{۳۰}.۲^{۳۰}=۲^{۳۰}.۴^{۱۵}>۸^{۱۰}.۳^{۱۵}>۲\times ۲۴^{۱۰}$$

۵. ۱) ۲۰؛ ۲) ۵۰؛ ۳) $\frac{۴}{۵}$؛ ۴) ۱؛ ۵) -۴۱؛ ۶) ۱؛ ۷) ۴؛

۸) ۰/۰۴؛ ۹) ۳۰؛ ۱۰) ۲/۶؛ ۱۱) ۲۷/۲۴؛ ۱۲) $۴\frac{۷}{۸}$؛ ۱۳) $۲\frac{۲}{۹}$؛

۱۴) ۷۲؛ ۱۵) ۵۰۲/۵.

۶. ۰/۱۵. **۷.** ۰/۱۲۵ **۸.** ۱۰۰. **۹.** ۸.

۱۰. A، ۱۶۰ برابر B است. **۱۱.** B، ۱۸۰ برابر A است.

۱۴. ۱) $۳<a+b<۵$؛ ۲) $۲<ab<۶$؛

۳) $-۲<a-b<۰$؛ ۴) $\frac{۱}{۳}<\frac{a}{b}<۱$؛ ۵) $\frac{۱}{۳}<\frac{a}{۳}<\frac{۲}{۳}$؛

۶) $-۹<-۳b<-۶$؛ ۷) $-۲<a-۳<-۱$؛

۸) $-۱<۲a-b<۲$؛ ۹) $-۲<b-۲a<۱$؛

۱۰) $۳<۳a+b-۲<۷$.

۱۵. ۱) $۲<a+b<۴$؛ ۲) $-۱۲<ab<-۱۰$؛

۳) $-۸<a-b<-۷$؛ ۴) $-\frac{۳}{۵}<\frac{a}{b}<-\frac{۱}{۳}$؛

۵) $-۲<\frac{۲a}{۳}<-\frac{۴}{۳}$؛ ۶) $-\frac{۱۲}{۵}<\frac{-۲b}{۵}<-۲$؛

۷) $-۹<۲a-۳<-۷$؛ ۸) $-۲۱<۳a-۲b<-۱۶$.

۱۶. ۱) $-۴<a+b<۲$؛ ۲) $-۳/۵<a-b<۲/۵$؛
۳) $-۲/۵<ab$؛ ۴) $-\frac{۱}{۲}<\frac{a}{b+۵}<\frac{-۱}{۱۵}$؛ ۵) $-۵<-۲b<۶$؛
۶) $-۸/۵<a-۳b<۸/۵$؛ ۷) $-۱۱<۲a+۳b<۶/۵$؛
۸) $-۳<\frac{a}{۲}-b<-۳/۲۵$.

۱۹. -۱ و ۰.

۲۲. ۱) مثلاً $۱/۴۰(۱۳)$ و ...۱/۴۰۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰۰۰۲؛ ۲) مثلاً ۱/۴۲ و $\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۲}$؛ ۳) مثلاً ۳/۰۰۰۱ و ...۱۳/۰۰۰۱۲۳۴۵۶؛ ۴) مثلاً ۱/۹ و $\sqrt[۳]{۶}$. ۲۳. نه.

§۳. توان عددها

a^n ($a\in\mathbf{R}$، $n\in\mathbf{N}$)، یعنی حاصل‌ضرب n عامل که، هر کدام از آن‌ها، برابر a باشد، یعنی

$$a^n=\underbrace{a\times a\times\ \cdots\ \times a}_{n\ \text{عامل}}$$

از این تعریف، ویژگی مهم زیر نتیجه می‌شود:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}$$

مثال ۱. ۱) $۲^۵=۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۳۲$، $۰^۳=۰$، $(-۱)^۴=۱$، $(-۵)^۱=-۵$.

۱. توان با نمای درست

$a\in\mathbf{R}$ و $\alpha\in\mathbf{Z}$ می‌گیریم. توان a^α با نمای درست α، به‌عددی گفته می‌شود که به‌صورت زیر قابل تعیین است:

۱) $a^۰=۱$ ، $a\neq ۰$،

$$۲)\ a^m=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{m\text{عامل}}\ ،\ \alpha=m\ ،\ m\in\mathbf{N}،$$

$$۳)\ a^{-n}=\frac{۱}{a^n}\ ،\ a\neq ۰\ \text{و}\ \alpha=-n\ ،\ n\in\mathbf{N}$$

درضمن، a را پایه و α را نمای توان a^α گویند.

یادآوری می‌کنیم که، توان a^α، با نمای درست، به‌ازای $a=۰$، برای $\alpha=۰$ و $\alpha<۰$ معین نیست.

مثال ۲. $۲^۱=۲$؛ $(۴/۳۷)^۰=۱$؛ $(-۲)^۲=۴$؛ $۳^۵=۲۴۳$؛ $(-۴)^{-۳}=\frac{۱}{(-۴)^۳}=-\frac{۱}{۶۴}$.

مثال ۳. محاسبه کنید:

$$A=(۰/۲۵)^{-۱}\cdot\left(۱\frac{۱}{۴}\right)^۲+۲۵\left[\left(\frac{۴}{۳}\right)^{-۲}:\left(\frac{۵}{۴}\right)^۳\right]:\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{-۳}$$

حل. داریم:

$$(۰/۲۵)^{-۱}=\frac{۱}{۰/۲۵}=\frac{۱۰۰}{۲۵}=۴;\ \left(۱\frac{۱}{۴}\right)^۲=\left(\frac{۵}{۴}\right)^۲=\frac{۲۵}{۱۶};$$

$$\left(\frac{۴}{۳}\right)^{-۲}=\frac{۱}{\left(\frac{۴}{۳}\right)^۲}=\frac{۱}{\frac{۱۶}{۹}}=\frac{۹}{۱۶};\ \left(\frac{۵}{۳}\right)^۳=\frac{۱۲۵}{۶۴};$$

$$\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{-۳}=\frac{۱}{\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۳}=\frac{۱}{-\frac{۸}{۲۷}}=-\frac{۲۷}{۸};$$

$$A=۴\times\frac{۲۵}{۱۶}+۲۵\left[\frac{۹}{۱۶}:\frac{۱۲۵}{۶۴}\right]:\left(-\frac{۲۷}{۸}\right)=$$

$$=\frac{۲۵}{۴}-۲۵\cdot\frac{۹}{۱۶}\cdot\frac{۶۴}{۱۲۵}\cdot\frac{۸}{۲۷}=\frac{۲۵}{۴}-\frac{۳۲}{۱۵}=\frac{۲۴۷}{۶۰}=۴\frac{۷}{۶۰}$$

ویژگی‌های اصلی توان‌های با نمای درست. a و b را عددهایی حقیقی مخالف صفر، $n\in\mathbf{Z}$ و $m\in\mathbf{Z}$ می‌گیریم. دراین‌صورت

۱. $a^n\, a^m=a^{n+m}$;

۲. $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$;

۳. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$; ۴. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$; ۵. $(a^n)^m=a^{n.m}$;

۶. اگر $a>۰$، آن‌وقت $a^n>۰$؛

۷. فرض کنید $a>۱$، آن‌وقت اگر $n>m$، داریم $a^n>a^m$ و، برعکس، اگر $a^n>a^m$، آن‌وقت $n>m$. ویژگی ۷ را می‌توان این‌طور نوشت:

۷′. اگر $a>۱$، آن‌وقت $a^n>a^m \Leftrightarrow n>m$؛

۸. $۰<a<۱$ فرض می‌کنیم، دراین صورت اگر $n>m$، آن‌وقت $a^n<a^m$ و، برعکس، اگر $a^n<a^m$ آن‌وقت $n>m$. ویژگی ۸ را می‌توان این‌طور نوشت:

۸′. اگر $۰<a<۱$، آن‌وقت $a^n<a^m \Leftrightarrow n>m$؛

ازویژگی‌های ۷ و ۸، ویژگی دیگری نتیجه می‌شود:

۹. اگر $a>۰$ و $a\neq۱$، آن‌وقت برابری $a^n=a^m$ تنها وقتی برقرار است که $n=m$ (یعنی باشرط $a>۰$ و $a\neq۱$: $a^n=a^m \Leftrightarrow n=m$).

درحالت خاص، با شرط $a>۰$ و $a\neq۱$: $a^n=۱ \Leftrightarrow n=۰$.

مثال ۴. ویژگی ۵ را ثابت کنید.

حل. سه‌حالت درنظرمی‌گیریم:

الف) $m=۰$، دراین‌صورت

$$(a^n)^m=(a^n)^۰=۱=a^۰=a^{n.۰}=a^{n.m};$$

ب) $m>۰$، دراین صورت

$$(a^n)^m=\underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n}_{m\ \text{مرتبه}}=a^{n+n+\cdots+n}=a^{nm};$$

ج) $m<۰$، دراین صورت $-m>۰$ و بنابراین

$$(a^n)^m=(a^n)^{-(-m)}=\frac{۱}{(a^n)^{-m}}=\frac{۱}{\underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n}_{(-m)\text{مرتبه}}}=\frac{۱}{a^{(-m)n}}=a^{nm}$$

مثال ۵. همهٔ عددهای درست n را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۹}۲۷^n=۳^n$$

حل. اگر از ویژگی‌های توان‌های با نمای درست استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۹}\cdot ۲۷^n=\frac{۱}{۳^۲}(۳^۳)^n=\frac{۳^{۳n}}{۳^۲}=۳^{۳n-۲}$$

بنابراین، برابری صورت مساله را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۳^{۳n-۲}=۳^n$$

که بنابر ویژگی ۹ به‌دست می‌آید: $۳n-۲=n$، یعنی $n=۱$.

مثال ۶. ثابت کنید: $۲^{۳۰}>۴^{۱۴}$.

حل. چون $۲^{۲۸}=(۲^۲)^{۱۴}=۴^{۱۴}$ و $۳۰>۲۸$، پس بنابر ویژگی ۷: $۲^{۳۰}>۲^{۲۸}$.

تکلیف ۱.

۱. این عددها را با نمای درست و پایهٔ ۴ بنویسید:

۱) ۱، ۴، ۱۶، ۶۴، ۲۵۶؛

۲) $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۶۴}$، $\frac{۱}{۲۵۶}$، $\frac{۱}{۱۶}$، $\frac{۱}{۱۰۲۴}$.

۲. محاسبه کنید:

۱) $\frac{۳^۳}{۳^۶}, \frac{۵^۷}{۵^۵}, \frac{۱۴^۴}{۲^۵\cdot۷^۴}, \frac{۲^۳+۲^{-۳}}{۴^۳+۱}, \frac{(۳^۴+۳^۳)^۲}{۹^۳};$

۲) $۲^۳+۳\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^۰-۲^{-۲}\times۴+\left[(-۲)^۲:\frac{۱}{۲}\right]\cdot۸;$

۳) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۱}-\left(-\frac{۶}{۷}\right)^۰+\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲:۲;$

۴) $[(۰/۱)^۲]^۰+\left[\left(\frac{۱}{۷}\right)^{-۱}\right]^۲\cdot\frac{۱}{۴۹}\cdot[(۲^۲)^۴:۲^۵]$

۳. عبارت عددی را به‌صورت a^n بنویسید ($a\in\mathbf{R}$، $n\in\mathbf{Z}$):

$۱)\ ۲\times۴\times۱۶\times\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\times۲^{۳};$ $\qquad ۲)\ ۹\times۳^{۳}\times\frac{۱}{۸۱}\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^{-۲};$

$۳)\ ۲^{۲}\times۲^{۳}\times\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-۲};$ $\qquad ۴)\ ۲\times۹\times\frac{۱}{۵۴}\times\left(\frac{۴}{۹}\right)^{۲};$

$۵)\ ۲^{۳}\times۱۵^{۲};$ $\qquad ۶)\ (-۳۲)\times\frac{۱}{۲۴۳};$

$۷)\ (۴\times۲^{۵}):\left(۲^{۳}\times\frac{۱}{۱۶}\right);$ $\qquad ۸)\ \frac{۲^{۲}\times۴\times(۲^{۲})^{۴}}{۲^{۲}\times۲^{۵}};$

$۹)\ \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\times۲^{-۲}\times۸}{(-۲^{۳})^{۲}\times۱۶}\cdot(۲^{۲})^{۳};$ $\qquad ۱۰)\ ۴^{-۶}\times۴^{۴}\times(۲^{۳}\times۲^{-۴})^{-۱}$

تکلیف ۲.

۱. به‌صورت توانی ازنمای درست با پایهٔ ۳ بنویسید:

$.۱، ۹، \frac{۱}{۸۱}، ۲۴۳، ۲۷، \frac{۱}{۳}، ۸۱، ۳، \frac{۱}{۷۲۹}، \frac{۱}{۹}، ۷۲۹، \frac{۱}{۲۷}$

۲. محاسبه کنید:

$۱)\ (-۳)^{۲}+۳^{۳}-(-۳)^{0};$ $\qquad ۲)\ ۳^{۲}\times۹^{-۱};$

$۳)\ ۲^{-۴}\cdot(۲^{-۲})^{-۳};$ $\qquad ۴)\ \frac{۳^{-۵}}{۳^{۴}}:۳^{-۷};$

$۵)\ \frac{۷^{۵}\cdot۵^{۴}}{۵^{۵}\cdot۴۹^{۳}};$ $\qquad ۶)\ ۲۵\cdot\left(\frac{۵}{۲}\right)^{-۲}\cdot(-۲^{-۳})^{-۱};$

$۷)\ \frac{((-۲)^{۲})^{۳}\ \cdot(-۴)^{-۲}}{(-۲)^{۳}(-۲)^{۲}};$ $\qquad ۸)\ (۵^{-۵})^{-۱}\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\cdot۱0^{-۵};$

$۹)\ \left[\left(\frac{۴}{۳}\right)^{-۲}\cdot\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}\right]:\left(-\frac{۲}{۳}\right)^{-۳};$

$۱0)\ (۲^{-۱}+۳^{-۱})(۲^{-۱}-۳^{-۱})+(۲^{-۱}\cdot۲^{0})^{-۴}:۲^{۳};$

$۱۱)\ \frac{۴^{۶}\cdot۹^{۵}+۶^{۹}\cdot۱۲0}{۸^{۴}\cdot۳^{۱۲}-۶^{۱۱}};$ $\qquad ۱۲)\ \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۱-۲^{-۱}}}+\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+۲^{-۱}}}$

۳. به‌صورت a^m بنویسید ($a\in\mathbf{R}$، $m\in\mathbf{Z}$):

۱) $۲۵\cdot۵^{-۱}\cdot۵^{۳};$

۲) $(-۱۶)\cdot(۱:۲^{۵})\cdot۲^{۳};$

۳) $۲^{۵}:(۲^{۴}:۲^{۳});$

۴) $۳^{۲}\cdot۳^{۵}\cdot\left(\frac{۳}{۲}\right)^{-۲};$

۵) $۳^{۲}\cdot\frac{۱}{۲۴۳}\cdot(۸۱)^{۲}\cdot۳^{-۳};$

۶) $(۳^{-۳})^{-۲}\cdot۳^{-۵}\cdot۲۷;$

۷) $۴^{-۶}\cdot۲۵۶^{۲}\cdot۲^{۴};$

۸) $\left[\left(\frac{۱}{۹}:\frac{۸}{۲۷}\right):\frac{۱۶}{۴۸}\right]:\frac{۸۱}{۱۲۸}$

تکلیف ۳.

۱. به‌صورت توانی از a بنویسید:

۱) $a^{۲}\cdot a^{۴};$ ۲) $a\cdot a^{۴};$ ۳) $a^{۶}\cdot a^{۳}\cdot a;$ ۴) $a^{۳}:a^{۲};$

۵) $a^{۵}:a^{۲};$ ۶) $\frac{۱}{a^{۲}}\cdot\frac{۱}{a^{۳}};$ ۷) $a\cdot\frac{۱}{a^{۲}}\cdot a^{۵};$ ۸) $a^{۳}:a^{۵};$

۹) $\left(\frac{۱}{a}\right)^{۳};$ ۱۰) $(a^{۳})^{-۲};$ ۱۱) $(a^{-۱}\cdot a^{-۲})^{-۳};$ ۱۲) $\frac{a^{۲}\cdot a^{-۲}}{a^{۱۰}}$

۲. ۱) $a^{۶}$ را به‌صورت توانی از $a^{۲}$ بنویسید؛ ۲) $d^{۱۲}$ را به‌صورت توانی از $d^{۴}$ بنویسید؛ ۳) $a^{۶}\cdot a^{۵}:a^{۲}$ را به صورت توانی از $a^{۳}$ بنویسید؛ ۴) $(a^{۲})^{۲}\cdot(a^{۳})^{۲}$ را به‌صورت توانی از $a^{۲}$ بنویسید.

۳. به صورت Ax^my^n بنویسید (A، عددی حقیقی و m و n عددهایی درست):

۱) $۲x^{۲}y\cdot۳yx^{۲};$

۲) $xy\cdot xy\cdot xy\cdot xy;$

۳) $(x^{۲}y):(۲yx^{-۲});$

۴) $(۲xy^{۲}\cdot۳x^{۲}y^{۲}):(-x^{۳}y^{۳});$

۵) $\frac{۱}{۴}\ \frac{(x^{۲})^{۳}\cdot(yx)^{۲}}{x^{۲}y^{۲}}:(-x^{۴}y^{۵});$

۶) $۳(x:y)^{۲}\cdot(y:x)^{۳};$

۷) $\left(\frac{۲x^{۲}y}{x^{۳}y}\right):\left(\frac{۱}{y}\cdot\frac{yx^{۳}}{xy}\right);$

۸) $۱۶x^{۲}y^{-۴}\cdot۲^{-۴}x^{-۱}y^{۴}$

۴. همهٔ عددهای درست n را پیدا کنید که برای آن‌ها، داشته باشیم:

۱) $۳^{۲}\cdot۳^{n}=۳^{۵};$ ۲) $(۲^{۲}\cdot۴)\cdot۲^{n}=۴$

۵. عدد طبیعی n را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $۳۲<۲^n<۱۲۸$; ۲) $۲\times۱۶\geqslant۲^n>۴$;
۳) $۹\times۲۷\leqslant۳^n\leqslant۲۴۳$

تکلیف ۴.

۱. به صورت توانی از b بنویسید:

۱) $b^۲.b^۳$; ۲) $(b.b^۲)^۳$; ۳) $b^۴:b^۳$; ۴) $b^۵:(b^۲:b)$;
۵) $۱:b^۵$; ۶) $b^{-۲}b^۳:b^۴$; ۷) $(b^۲.b^۴.b^۶)(b^{-۳}:b)$;
۸) $(b^{-۱}.b^{-۳})^{-۱}$; ۹) $[(b^۲)^{-۱}]^۲$; ۱۰) $b^۶.b^۶$;
۱۱) $(b^۲:b)^۲:(b^۲:b^۳)^۳$; ۱۲) $[(b^{-۲})^{-۲}]^{-۲}:(b:b^{-۱})^۲$

۲. به‌صورت Ax^my^n بنویسید (A عددی حقیقی، m و n عددهایی درست):

۱) $\left(\frac{۱}{۳}y^۲:y^۳\right).y^{-۲}$; ۲) $\frac{(۲y^۲)^{-۲}.y^۵}{y^۳.y^{-۲}}$;

۳) $(۸x^۴y^{-۱}:[(۲x^۲y^۲).x^۰]$; ۴) $۳\left(\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}\right)^۲.\frac{xy}{x^۳y^۳}$;

۵) $۲x^۲y^{-۳}.\frac{۱}{۶}(x^{-۱}y^۴)^۲$; ۶) $(x:y)^{-۲}.\left[\left(\frac{۱}{۲}y\right):x\right]^۳$;

۷) $\left(\frac{xy^۲}{۳}\right)^{-۲}.\left(\frac{x^۲y}{۳}\right)^۲$; ۸) $(x^{-۱}y^۳)^{-۲}.\left(\frac{x^۲}{۲y}\right)^{-۲}.\left(\frac{-۲x^۲}{y^۳}\right)^{-۴}$

۳. عدد درست n را طوری پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

۱) $۳^{-۲}.۳^۴.۳^n=۳^۷$; ۲) $۲^{-۱}.۲^n=۹\times۲^۵-۴\times۲^n$

۴. همه عددهای طبیعی n را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $۹<۳^n<۸۱$; ۲) $۳<۳^n\leqslant۲۴۳$; ۳) $۱۲۵\geqslant۵^n\geqslant۲۵$

۲. توان با نمای گویا

پیش از آن که به توان با نمای گویا بپردازیم، دربارهٔ ریشهٔ n ام یک عدد غیرمنفی a صحبت می کنیم ($n\geqslant۲$، $n\in\mathbf{N}$).

برای هر عدد مفروض a ($a\geqslant۰$) و عدد طبیعی n، عدد غیرمنفی و منحصر به فرد b وجود دارد. به‌نحوی که داشته باشیم: $b^n=a$. عدد b را،

ریشهٔ حسابی n ام عدد a گویند و به‌صورت $\sqrt[n]{a}$ نشان می‌دهند. از این‌جا نتیجه می‌شود:

$\sqrt[n]{a}=۰$، تنها وقتی که $a=۰$؛

$\sqrt[n]{a}=۱$، تنها وقتی که $a=۱$.

مثال ۷. الف) $\sqrt{۲۵}=۵$، زیرا $۵>۰$ و $۵^۲=۲۵$؛

ب) $\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}}=\frac{۵}{۶}$، زیرا $\frac{۵}{۶}>۰$ و $\left(\frac{۵}{۶}\right)^۲=\frac{۲۵}{۳۶}$؛

ج) $\sqrt[۳]{۲۷}=۳$، زیرا $۳>۰$ و $۳^۳=۲۷$؛

د) $\sqrt{۹}\neq -۳$، زیرا $(-۳)<۰$، که تعریف ریشهٔ حسابی را نقض می‌کند؛

ه) $\sqrt{۲}\neq ۱/۴۱$، زیرا $(۱/۴۱)^۲=۱/۹۸۸۱\neq ۲$.

برای هر عدد حقیقی a، این برابری برقرار است.

$$\sqrt{a^۲}=|a|$$

مثال ۸. این عبارت را ساده کنید:

$$\sqrt{(c-۱)^۲}-\sqrt{(۱+c)^۲}\ ,\ -۱\leqslant c\leqslant ۱،\ c\in\mathbf{R}$$

حل. داریم: $\sqrt{(c-۱)^۲}-\sqrt{(۱+c)^۲}=|c-۱|-|۱+c|$. از شرط $-۱\leqslant c\leqslant ۱$ نتیجه می‌شود: $c-۱\leqslant ۰$ و $۱+c\geqslant ۰$؛ بنابراین

$$|c-۱|=-(c-۱)=۱-c،\quad |۱+c|=۱+c;$$

$$\sqrt{(c-۱)^۲}-\sqrt{(۱+c)^۲}=(۱-c)-(۱+c)=-۲c،\ -۱\leqslant c\leqslant ۱$$

ویژگی‌های ریشهٔ حسابی

$a>۰$، $b>۰$، $n\geqslant ۲$، $m\geqslant ۲$، $k\geqslant ۲$ و n و m و k را عددهایی طبیعی فرض می‌کنیم. در این‌صورت

۱. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

۲. $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$;

۳. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

۴. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$;

۵. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{k-n}}$;

۶. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$;

۷. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

اثبات این ویژگی‌ها، براساس تعریف ریشهٔ حسابی و ویژگی‌های توان بانمای درست به‌دست می‌آید.

مثال ۹. ویژگی ۲ را ثابت کنید.

حل. $b=\sqrt[n]{a}$ می‌گیریم، در این‌صورت با توجه به تعریف ریشهٔ حسابی: $b^n=a$. از این‌جا و از ویژگی ۵ توان‌های با نمای درست، نتیجه می‌شود: $a^k=(b^n)^k=b^{nk}$. طبق تعریف ریشهٔ n ام از عدد a^k به‌دست می‌آید: $b=\sqrt[nk]{a^k}$، و به‌این ترتیب: $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$.

مثال ۱۰.

الف) $\sqrt{۲^۳}\cdot\sqrt[۳]{۲^۲}=\sqrt[۶]{۲^۹}\cdot\sqrt[۶]{۲^۴}=\sqrt[۶]{۲^{۱۳}}$;

ب) $\sqrt[۳]{۲^۵\sqrt{۸}}:\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۲^۵\cdot\sqrt{۸}:۲}=\sqrt[۳]{۲^۴\sqrt{۸}}=\sqrt[۶]{۲^{۱۱}}$

مثال ۱۱. این عبارت را ساده کنید:

$$A=(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲})(\sqrt{۱۸}-\sqrt{۲۰}+۲\sqrt{۲})$$

حل. چون $\sqrt{۱۸}=\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۳^۲}=۳\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$، بنابراین

$$A=(۲\sqrt{۲}-\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲})(۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}+۲\sqrt{۲})=$$
$$=(۵\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵})=$$
$$=۲۵\sqrt{۴}-۱۰\sqrt{۱۰}-۵\sqrt{۱۰}+۲\sqrt{۲۵}=۶۰-۱۵\sqrt{۱۰}$$

مثال ۱۲. مخرج کسر $\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}$ را گویا کنید.

حل. صورت و مخرج کسر را در $۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}\neq ۰$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۵})}=$$
$$=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{(۱+\sqrt{۲})^{۲}-۵}=\frac{۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵}}{۲(\sqrt{۲}-۱)}$$

اکنون، اگر صورت و مخرج کسر حاصل را در $\sqrt{۲}+۱\neq ۰$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}=\frac{(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۵})(\sqrt{۲}+۱)}{۲(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}+۱)}=$$
$$=\frac{۳+۲\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال ۱۳. ثابت کنید: $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\left(\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\right)^{۲}=۲+\sqrt{۳};\quad \left(\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}=۲+\sqrt{۳}$$

چون هم $\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$ و هم $\frac{\sqrt{۶}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ مثبت‌اند، بنابراین هر دوی آن‌ها، برابر ریشهٔ دوم $۲+\sqrt{۳}$ هستند؛ و چون بنا به‌تعریف، ریشهٔ دوم منحصر به‌فرد است، بنابراین، درستی برابری ثابت می‌شود.

a را عددی مثبت و α را عددی گویا فرض کنید. توان a^{α} (با پایهٔ a و نمای گویای α)، به‌عددی گفته می‌شود که به‌ترتیب زیر معین می‌شود:

۱. اگر $a\in\mathbf{Z}$، آن وقت a^{α} مثل قبل به دست می‌آید (صفحهٔ ۱۰۰ را ببینید)؛

۲. اگر α عددی گویا باشد: $\alpha=\frac{p}{q}$ (p عددی درست و $q\geqslant ۲$ عددی طبیعی)، آن‌وقت

$$a^{\alpha}=a^{\frac{p}{q}}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^{p}$$

اگر $a=۰$ و $\alpha>۰$ عددی طبیعی باشد، آن‌وقت $a^{\alpha}=۰$.

اگر $\alpha=\frac{۱}{n}$ $(n\geqslant ۲،\ n\in\mathbf{N})$، آن‌وقت $a^{\frac{۱}{n}}=\sqrt[n]{a}$.

در این‌جا باید ثابت کنیم که، نتیجهٔ محاسبه، بستگی به‌نوع نمایش عدد α ندارد، یعنی باید ثابت کنیم، اگر $\alpha=\frac{p}{q}=\frac{kp}{kq}$ $(k\in\mathbf{N})$، آن‌وقت

$$(\sqrt[kq]{a})^{kp}=(\sqrt[q]{a})^{p}$$

(اثبات را می‌توان باتوجه به‌ویژگی‌های با نمای درست وویژگی‌های ریشه به‌دست آورد). با توجه به‌همهٔ این‌ها، داریم:

$$\sqrt[kq]{a}=\sqrt[k]{\sqrt[q]{a}};$$

$$a^{\frac{kp}{kq}}=(\sqrt[kq]{a})^{kp}=\left[(\sqrt[kq]{a})^{k}\right]^{p}=\left[\left(\sqrt[k]{\sqrt[q]{a}}\right)^{k}\right]^{p}=$$

$$=(\sqrt[q]{a})^{p}=a^{\frac{p}{q}}$$

مثال ۱۴.

$$۲^{\frac{۲}{۳}}=\sqrt[۳]{۲^{۲}}=\sqrt[۳]{۴};\quad ۳^{-\frac{۱}{۷}}=\sqrt[۷]{۳^{-۱}}=\sqrt[۷]{\frac{۱}{۳}}=$$

$$=\frac{\sqrt[۷]{۷۲۹}}{۳};\ (۵/۱)^{۰}=۱;\ (\sqrt{۳})^{-۲}=\frac{۱}{(\sqrt{۳})^{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

توان a^{α} بـا نمای گویا، دارای همهٔ ویژگی‌های توان بانمای درست است. به‌عنوان نمونه، ثابت می‌کنیم (به‌ازای $a>۰$):

$$a^{\alpha_۱}\cdot a^{\alpha_۲}=a^{\alpha_۱+\alpha_۲}$$

برای این منظور، عددهای گویای $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ را به صورت کسرهایی با مخرج‌های مشترك نشان می‌دهیم؛ فرض کنید $\alpha_۱=\frac{p_۱}{q}$ و $\alpha_۲=\frac{p_۲}{q}$ $(q\geqslant ۲)$.

در این‌صورت

$$a^{\alpha_۱}.a^{\alpha_۲}=(\sqrt[q]{a})^{p_۱}.(\sqrt[q]{a})^{p_۲}=(\sqrt[q]{a})^{p_۱+p_۲}=$$

$$=a^{\frac{p_۱+p_۲}{q}}=a^{\frac{p_۱}{q}+\frac{p_۲}{q}}=a^{\alpha_۱+\alpha_۲}$$

مثال ۱۵. ثابت کنید، ویژگی ۷ برای توان‌های با نمای درست، برای توان‌های با نمای گویا هم برقرار است، یعنی اگر $\alpha_۱<\alpha_۲$ و $a>۱$، آن وقت از نابرابری $\alpha_۱<\alpha_۲$ نابرابری $a^{\alpha_۱}<a^{\alpha_۲}$ نتیجه می‌شود.

حل. $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ را به‌صورت کسرهای بامخرج‌های برابر نمایش می‌دهیم: $\alpha_۱=\frac{p_۱}{q}$ و $\alpha_۲=\frac{p_۲}{q}$ $(q\geqslant ۲)$. چون q عددی طبیعی است، بنابراین، از نابرابری $\alpha_۱<\alpha_۲$ نتیجه‌می‌شود: $p_۱<p_۲$. ولی در این‌صورت، بنابر ویژگی یکنوائی در توان‌های با نمای درست (ویژگی ۶)،

$$a^{\alpha_۱}=(\sqrt[q]{a})^{p_۱}<(\sqrt[q]{a})^{p_۲}=a^{\alpha_۲}$$

مثال ۱۶. محاسبه کنید:

$$A=\{[(۳^{\frac{۳}{۲}}.۵^{\frac{۵}{۳}}):۲^{-\frac{۷}{۴}}]:[۱۶:(۵^{\frac{۱}{۳}}.۲^{\frac{۱}{۴}}.۳^{\frac{۱}{۲}})]\}^{\frac{۱}{۲}}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A=\{[۳^{\frac{۳}{۲}}.۵^{\frac{۵}{۳}}.۲^{\frac{۷}{۴}}]:[۲^{۴}.۵^{-\frac{۱}{۳}}.۲^{-\frac{۱}{۴}}.۳^{-\frac{۱}{۲}}]\}^{\frac{۱}{۲}}=$$

$$=\{۳^{\frac{۳}{۲}}.۵^{\frac{۵}{۳}}.۲^{\frac{۷}{۴}}.۲^{-۴}.۵^{\frac{۱}{۳}}.۲^{\frac{۱}{۴}}.۳^{\frac{۱}{۲}}\}^{\frac{۱}{۲}}=$$

$$=\{۳^{۲}.۵^{۲}.۲^{-۲}\}^{\frac{۱}{۲}}=۳.۵.۲^{-۱}=\frac{۱۵}{۲}$$

مثال ۱۷. این عبارت را تبدیل کنید:

$$A=\left[\frac{۲۴x^{۲}y^{۲}}{z^{۲}}\left(\frac{x^{۲}y^{۷}}{t^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۵}}\right]:\left[\frac{۴x^{۲}}{y}\left(\frac{x^{۲}y^{۷}}{tz^{۲}}\right)^{\frac{۱}{۳}}\right]$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A=\frac{۲۴x^{۲}y^{۲}z^{-۲}.x^{\frac{۲}{۵}}.y^{\frac{۷}{۵}}.t^{-\frac{۲}{۵}}}{۴x^{۲}y^{-۱}.x^{\frac{۲}{۳}}.y^{\frac{۷}{۳}}.t^{-\frac{۱}{۳}}.z^{-\frac{۲}{۳}}}=$$

$$=\frac{۲۴}{۴}x^{-\frac{۴}{۱۵}}\cdot y^{\frac{۳۱}{۱۵}}\cdot z^{-\frac{۴}{۳}}\cdot t^{-\frac{۱}{۱۵}}=۶\sqrt[۱۵]{\frac{y^{۳۱}}{x^{۴}z^{۲۰}t}}=\frac{۶y^{۲}\sqrt[۱۵]{x^{۱۱}z^{۱۰}t^{۱۴}y}}{xz^{۲}t}$$

مثال ۱۸. ثابت کنید: $\sqrt[۲۰]{۲}+\sqrt[۳۰]{۳}>۲$.

حل. چون $\frac{۱}{۲۰}>۰$ و $\frac{۱}{۳۰}>۰$، بنابراین از ویژگی یکنوا بودن توان‌ها به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[۲۰]{۲}=۲^{\frac{۱}{۲۰}}>۲^{۰}=۱،\ \sqrt[۳۰]{۳}=۳^{\frac{۱}{۳۰}}>۳^{۰}=۱$$

که از آن‌جا به‌نابرابری مطلوب می‌رسیم.

مثال ۱۹. همهٔ عددهای گویای α را پیدا کنید، به‌نحوی که

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲\alpha-۳}=۴\times ۱۶^{\alpha}$$

حل. داریم:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲\alpha-۳}=(۲^{-۱})^{۲\alpha-۳}+۲^{۳-۲\alpha},\ ۴\times ۱۶^{\alpha}=۲^{۲}\cdot ۲^{۴\alpha}=۲^{۲+۴\alpha}$$

بنابراین، برابری مفروض، به‌صورت $۲^{۲+۴\alpha}=۲^{۳-۲\alpha}$ در می‌آید. از آن‌جا $۳-۲\alpha=۲+۴\alpha$ و $\alpha=\frac{۱}{۶}$ (ویژگی ۷).

یادآوری می‌کنیم، اگر $a>۰$ و $n\in\mathbf{N}$، آن وقت بنا به تعریف فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[۲n+۱]{-a}=-\sqrt[۲n+۱]{a}=-a^{\frac{۱}{۲n+۱}}$$

مثلاً $\sqrt[۳]{-۸}=-۲$ و $\sqrt[۵]{-۲۴۳}=-۳$.

تکلیف ۵.

۱. به‌صورت توانی با پایهٔ ۴ بنویسید:

$$۲،\ ۸،\ \frac{۱}{۱۲۸}،\ ۳۲،\ \frac{۱}{۸}،\ ۱۲۸،\ \frac{۱}{۲}،\ ۶۴،\ \frac{۱}{۳۲}،\ \frac{۱}{۲۵۶}$$

۲. محاسبه کنید:

۱) $\sqrt{۴}$، $\sqrt[۳]{۰/۱۲۵}$، $\sqrt[۴]{۱۶}$، $\sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}}$، $\sqrt[۳]{۲\frac{۱۰}{۲۷}}$، $(\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}})^{۲}$;

۲) $\sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}}$، $\sqrt[۳]{۲}\cdot\sqrt[۳]{۴}$، $\sqrt[۵]{۶^{۵}\cdot۳^{۵}}$، $\sqrt{۲۰}\times\sqrt{۵}$،

$\sqrt[۴]{۷۲\times۱۸}$، $\sqrt{۲۷}\cdot\sqrt{۱۲}$;

۳) $\sqrt[۵]{۷^{۳}\cdot۲^{۲}}\cdot\sqrt[۵]{۷^{۲}\cdot۲^{۳}}$، $\sqrt[۳]{۷+\sqrt{۲۲}}$، $\sqrt[۳]{۷-\sqrt{۲۲}}$، $\sqrt{۸\sqrt{۴}\cdot\sqrt[۳]{۶۴}}$;

۴) $\sqrt[۳]{۵۴}:\sqrt[۳]{۲}$، $\sqrt{۳۲}:\sqrt{۸}$، $\sqrt[۴]{۳}:\sqrt[۴]{۴۸}$، $\sqrt{۵^{۴}\cdot۳^{۶}}$، $\sqrt{۴^{۲}\cdot۳^{۶}:۷^{۴}}$،

$\sqrt[۷]{۶۴\sqrt[۳]{۸}}$;

۵) $\sqrt{\sqrt{۱۶}}$، $\sqrt[۳]{\sqrt{۶۴}}$، $(۲\sqrt{۲})^{۲}$، $(\sqrt[۴]{۳})^{۸}$، $(۲\sqrt[۳]{۳})^{۶}$،

$\sqrt{۳^{۴}}:\sqrt{۵^{۴}}$، $\sqrt[۴]{۶۲۵}:\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲۵۶}}$

۳. عامل عددی مثبت را، زیر علامت رادیکال ببرید:

۱) $۳\sqrt{۲}$; ۲) $۲\sqrt[۳]{۴}$; ۳) $-۳\sqrt[۴]{\frac{۱}{۹}}$;

۴) $۲\sqrt[۵]{\frac{۱}{۱۶}}$; ۵) $-۱\frac{۱}{۲}\sqrt[۴]{۲}$

۴. ساده کنید:

۱) $\sqrt{۱۵۰}$; ۲) $\sqrt{۴۸۶}$; ۳) $\sqrt[۳]{۲۴}$; ۴) $\sqrt[۳]{۱۰۸۰}$;

۵) $\sqrt[۵]{۸۰۰}$; ۶) $\sqrt{۳(۱-\sqrt{۲})^{۲}}$; ۷) $\sqrt{۵(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}$

۵. به‌صورت $b\sqrt[n]{a}$ بنویسید (n ، $a\in\mathbf{N}$):

۱) $(\sqrt{۵})^{۳}$; ۲) $\sqrt[۳]{۲۴\times۷۲۹}$; ۳) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$; ۴) $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}$;

۵) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۲\frac{۱}{۲}}$; ۶) $\sqrt[۳]{۳\frac{۱}{۳}}$; ۷) $۳۲\sqrt[۵]{۱\frac{۳}{۸}}$; ۸) $۲\frac{۲}{۳}\sqrt[۴]{۲\frac{۱}{۲}}$

۶. فرجهٔ رادیکال‌ها را برابر کنید (فرجهٔ مشترك بگیرید):

۱) $\sqrt[۶]{۲}$، $\sqrt[۳]{۲}$، $\sqrt[۴]{۲}$; ۲) $\sqrt[۱۰]{۳}$، $\sqrt[۴]{۲}$، $\sqrt[۵]{۵}$;

۳) $\sqrt{\frac{۱}{۲}}$، $\sqrt[۴]{۳}$، $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}$

۷. ساده کنید:

۱) $(\sqrt[۴]{۳})^۴$، $\sqrt[۳]{۲۵\times ۶۲۵}$، $(\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}})^۶$، $\sqrt[۴]{۸\times ۳}\cdot\sqrt[۴]{۵۴}$، $\sqrt[۵]{۱۲۵\sqrt{۶۲۵}}$;

۲) $\frac{\sqrt[۴]{۲}\cdot\sqrt[۳]{۶۴}}{\sqrt{۸}}$، $\sqrt[۴]{۳^۲}\cdot\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}$، $\sqrt[۶]{۸\times ۲۷}$، $\sqrt[۴]{۷^۲}\cdot\sqrt{۲۸}$، $\sqrt[۳]{۶\sqrt{۳۲۴}}$;

۳) $\frac{\sqrt[۹]{۲^۶}}{\sqrt[۲۱]{۱۲۸}}$، $\sqrt[۱۸]{۳^{۱۲}}\cdot\sqrt[۹]{۳^۶}$، $\sqrt[۱۰]{۳۲}\cdot\sqrt[۱۲]{۲^۶}$، $\sqrt[۲۱]{۸^۴}\cdot\sqrt[۷]{۲۴}$

تکلیف ۶.

۱. به‌صورت توانی با پایهٔ ۹ بنویسید:

$$\frac{۱}{۳}،\ ۲۷،\ ۳،\ \frac{۱}{۲۴۳}،\ ۱،\ \frac{۱}{۲۷}،\ ۲۴۳،\ \frac{۱}{۸۱}،\ \frac{۱}{۷۲۹}،\ ۲۱۸۷$$

۲. محاسبه کنید:

۱) $\sqrt[۴]{۹\sqrt{۸۱}}$; ۲) $\sqrt[۳]{۰/۰۲۷}$; ۳) $\sqrt[۳]{۳\frac{۳}{۸}}$;

۴) $\sqrt[۴]{۴\times ۶۴}$; ۵) $\sqrt[۳]{\frac{۳}{۴}}\cdot\sqrt[۳]{\frac{۹}{۱۶}}$; ۶) $\frac{\sqrt[۷]{۱۲۸}\cdot\sqrt[۵]{۳۲}}{\sqrt{۸۱}\cdot\sqrt[۳]{۶۴}}$;

۷) $\sqrt[۵]{۷^۵\cdot ۳^۵}:\sqrt{\sqrt{۶۲۵}}$; ۸) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-۱)^۶}$;

۹) $\sqrt[۳]{۸-\sqrt{۳۷}}\cdot\sqrt[۳]{۸+\sqrt{۳۷}}$; ۱۰) $\sqrt[۳]{\frac{۸^۲\cdot ۳^۳}{۱۲۵}}\cdot\sqrt{\frac{۶۲۵}{۳۶}}$;

۱۱) $\sqrt[3]{۰/۵}\cdot\sqrt[3]{۱/۲۵}\cdot\sqrt[3]{\frac{۱۶}{۱۰}}$; ۱۲) $\sqrt[4]{۰/۰۰۰۱}\cdot\sqrt[3]{۱۲۵}\cdot\sqrt[5]{۱۰۲۴}$

۳. عامل عددی مثبت را، زیر علامت رادیکال ببرید:

۱) $۲\sqrt[3]{۳}$; ۲) $-۳\sqrt{۱\frac{۱}{۳}}$; ۳) $۵\sqrt[5]{\frac{۲}{۶۲۵}}$;

۴) $(۲-\sqrt{۳})\sqrt{۳}$; ۵) $(۱-\sqrt{۷})\sqrt{۷}$; ۶) $۲\sqrt[4]{۰/۱۲۵}$

۴. ساده کنید:

۱) $\sqrt{۹۸}$; ۲) $\sqrt{۲۸۰}$; ۳) $\sqrt[3]{۲۵۰}$; ۴) $\sqrt[4]{۲۴۳}$; ۵) $\sqrt[5]{۱۲۱۵}$;

۶) $\sqrt[4]{۲(۱-\sqrt{۳})^{۴}}$; ۷) $\sqrt[4]{۳(\sqrt{۲}-۱)^{۴}}$; ۸) $\sqrt{\frac{۲}{(۳-\sqrt{۱۰})^{۲}}}$

۵. به‌صورت $b\sqrt[n]{a}$ بنویسید $(n، a\in\mathbf{N})$:

۱) $\sqrt{\frac{۱}{۵}}$; ۲) $\sqrt{۲\frac{۱}{۲}}$; ۳) $\sqrt[3]{\frac{۱}{۴}}$; ۴) $\sqrt[3]{\frac{۲}{۹}}$;

۵) $۴\sqrt[3]{\frac{۳}{۸}}$; ۶) $\sqrt[3]{۳\frac{۲}{۳}}$

۶. ساده کنید:

۱) $(\sqrt{۲})^{۲}، \sqrt[3]{۲۷\times۸}، \sqrt{۲\sqrt{۴}}، \sqrt{۹۶}$;

۲) $\frac{\sqrt[3]{۲}}{\sqrt[3]{۴}}، \sqrt{۱۴۵۲}، \sqrt[6]{۷^{۳}}، \sqrt[15]{۲^{۵}}$;

۳) $\sqrt[14]{۲^{۳}\cdot۲^{۴}}، \sqrt[18]{۲۷\times۷۲۹}، \sqrt[24]{۸^{۶}}، \sqrt[21]{۱۲۸\times۳^{۱۴}}$;

۴) $\sqrt[3]{۱۲۵\times۶۲۵\times۳۱۲۵}، \sqrt[7]{۲۴۳\times۸۱^{۲}\times۹^{۴}}، \sqrt[5]{\frac{۴۹^{۲}\cdot۷^{۳}\cdot۳۴۳^{۲}}{۱۲۸^{۴}\cdot۳۲}}$

۷. رادیکال‌ها را به‌یك فرجه درآورید:

۱) $\sqrt{۳}، \sqrt[3]{۳}، \sqrt[4]{۳}$; ۲) $\sqrt{۲}، \sqrt[4]{۲}، \sqrt[5]{۲}$;

۳) $\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}};\ \sqrt[۱۵]{\frac{۱}{۳}},\ \sqrt[۱۲]{۴}$

تکلیف ۷.

۱. ساده کنید:

۱) $\sqrt{۱۲}+\sqrt{۴۵}+\sqrt{۱۸};$ ۲) $۵\sqrt{\frac{۱}{۵}}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰}-\frac{۵}{۴}\sqrt{۲۰};$

۳) $(۳\sqrt{۵}-۲)(۳\sqrt{۵}-۱);$

۴) $\left(۲\sqrt{۶}-۴\sqrt{۳}+۵\sqrt{۲}-\frac{۱}{۴}\sqrt{۸}\right)\cdot ۳\sqrt{۶};$

۵) $(۲\sqrt{۶}-۳\sqrt{۵}+۱):۳-(\sqrt{۶}+۲\sqrt{۵}-۳):۵-$
$-(۳\sqrt{۶}+۴\sqrt{۵}-۱):۱۵;$

۶) $\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۸}-۳\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}\right)\sqrt{۲}+۳\sqrt{۱/۶}+۵\sqrt{۰/۴});$

۷) $(۱۲\sqrt{۵۰}-۸\sqrt{۲۰۰}+۷\sqrt{۴۵۰}):\sqrt{۱۰};$

۸) $\left(\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}}-\frac{۲}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۳}}+\frac{۲}{۷}\sqrt{\frac{۴}{۵}}\right):\left(\frac{۲}{۷}\sqrt{\frac{۱}{۸}}\right);$

۹) $(\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}}-\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}})(\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}+\sqrt{۴+۲\sqrt{۳}});$

۱۰) $(\sqrt{۸}-۲\sqrt{۶}-\sqrt{۳})(\sqrt{۸}-۲\sqrt{۶}-\sqrt{۳})$

۲. مخرج کسر را گویا کنید:

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}};$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۳}};$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}};$

۴) $\frac{۴}{۳\sqrt{۲}+۱};$ ۵) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}-۳\sqrt{۳}};$ ۶) $\frac{۱}{۱+\sqrt{۵}-\sqrt{۱۰}}$

تکلیف ۸.

۱. ساده کنید:

۱) $\sqrt[۳]{۴۸}+\sqrt[۳]{۱۳۵}-\sqrt[۳]{۳۸۴}-\sqrt[۳]{۴۰};$

۲) $۲\sqrt{۱۸}+۳\sqrt{۸}+۳\sqrt{۳۲}-\sqrt{۵۰};$

$$۳)\ (۲\sqrt{۸}+۳\sqrt{۵}-۷\sqrt{۲})(\sqrt{۷۲}+\sqrt{۲۰}-۴\sqrt{۲});$$

$$۴)\ (۴+\sqrt{۶})(۳\sqrt{۲}-۵\sqrt{۳});$$

$$۵)\ \frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۵}}{۳}-\frac{\sqrt{۵}-۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۴}-$$
$$-\frac{۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}+۴\sqrt{۵}}{۱۲}$$

$$۶)\ (۷\sqrt{۴۸}+۳\sqrt{۲۷}-۲\sqrt{۱۲}):\sqrt{۳};$$

$$۷)\ \left(\frac{۱}{۵}\sqrt[۳]{۹}-۳\sqrt[۳]{۳}+۴\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}\right):\left(۲\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}\right);$$

$$۸)\ (\sqrt{۴+\sqrt{۷}}-\sqrt{۴-\sqrt{۷}})(\sqrt{۴+\sqrt{۷}}-\sqrt{۴-\sqrt{۷}});$$

$$۹)\ (\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۶})(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۶});$$

$$۱۰)\ \sqrt[۴]{\sqrt{۲۳}-\sqrt{۷}}\cdot\sqrt[۴]{\sqrt{۲۳}+\sqrt{۷}}+\sqrt{۹+\sqrt{۱۷}}\cdot\sqrt{۹-\sqrt{۱۷}};$$

$$۱۱)\ \frac{\sqrt{۱۸۰}+\frac{۱}{۱۴}\sqrt{۲۴۵}-\sqrt{۱/۲۵}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲۰}}{\sqrt[۵]{۵\sqrt{۲}+۷}\cdot\sqrt[۵]{۵\sqrt{۲}-۷}}$$

۴. مخرج کسر را گویا کنید:

$$۱)\ \frac{۱}{\sqrt{۳}};\qquad ۲)\ \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt[۳]{۲}};\qquad ۳)\ \frac{۲}{\sqrt[۴]{۴۹}};\qquad ۴)\ \frac{۱}{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}};$$

$$۵)\ \frac{۲}{۲\sqrt{۲}-۱};\qquad ۶)\ \frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}};\qquad ۷)\ \frac{۳\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۵}};$$

$$۸)\ \frac{۴\sqrt{۳۰}}{\sqrt{۵}-\sqrt{۶}+\sqrt{۷}}$$

تکلیف ۹.

۱. به‌صورت توانی با نمای گویا بنویسید:

$$۱)\ \sqrt{۲};\quad ۲)\ \sqrt[۵]{۶^{۲}};\quad ۳)\ \sqrt[۷]{۲^{۴}};\quad ۴)\ \sqrt{۳^{-۳}};\quad ۵)\ \sqrt[۷]{۴^{-۵}};$$

۶) $۲\sqrt{۸}$; ۷) $۳\sqrt[۵]{۲۷}$; ۸) $۳\sqrt[۵]{۲۷^{۴}}$; ۹) $۹\sqrt[۸]{۳^{۲۳}}$; ۱۰) $\sqrt[۴]{۳^{-۲}}$

۲. عدد را باعلامت رادیکال بنویسید:

۱) $۲^{\frac{۱}{۳}}, ۴^{\frac{۱}{۵}}, ۵^{\frac{۲}{۳}}, ۷^{\frac{۳}{۷}};$ ۲) $۳^{۰/۵}, ۲^{۰/۲۵}, \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰/۷۵} ۵^{۲\frac{۱}{۳}};$

۳) $۳^{-\frac{۱}{۳}}, ۲^{-۰/۵}, ۲^{-۲\frac{۱}{۲}}, ۵^{-۰/۸}$

۳. محاسبه کنید:

۱) $۲۵^{\frac{۱}{۲}}, ۲۷^{\frac{۱}{۳}}, ۸^{\frac{۴}{۳}}, ۰^{\frac{۲}{۳}}, ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}, (۰/۲۵)^{-\frac{۳}{۲}}, \left(\frac{۱}{۴}\right)^{-\frac{۱}{۲}};$

۲) $۲^{\frac{۱}{۲}}\cdot ۲^{\frac{۱}{۳}}\cdot ۲^{\frac{۱}{۶}}, ۳^{\frac{۱}{۳}}\cdot ۳^{-\frac{۱}{۲}}\cdot ۳^{\frac{۷}{۶}}, \left(۸^{\frac{۲}{۳}}\cdot ۳۲^{\frac{۲}{۵}}\right)^{\frac{۱}{۴}},$

۳) $۲۵^{۰/۳}\cdot ۵^{۱/۱}, \left(\frac{۱}{۶۴}\cdot ۸^{-۱}\right)^{-\frac{۱}{۳}}, ۲^{\frac{۱}{۳}}\cdot\left(۲^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۴}\cdot\left(۴\cdot ۲^{\frac{۱}{۲}}\right)^{\frac{۲}{۳}};$

۴) $\left(\sqrt{۸}\cdot ۲^{\frac{۱}{۴}}\right)^{۴}, ۳\sqrt{\frac{۲}{۳}:\left(\frac{۳}{۲}\sqrt{۲\frac{۲}{۳}}\right)}, \left(۲۵^{\frac{۱}{۳}}:۵^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۳}\cdot\left(۳^{\frac{۲}{۵}}:\sqrt[۵]{۳^{-۳}}\right)$

۴. به‌صورت توانی ازعدد ۲ بنویسید:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}, \frac{\sqrt[۳]{۲}}{۸}, \frac{۱۶}{\sqrt[۶]{۸}};$

۲) $\sqrt{۲}\times\sqrt[۳]{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۲}}, \left(۲^{\frac{۱}{۲}}\cdot\sqrt{۲}\right):\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}};$

۳) $\left(\sqrt[۵]{۴}\right)^{۲}, \left(\sqrt[۴]{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}, \left(\frac{۱}{۲}\sqrt[۴]{۸}\right)^{۴};$

۴) $\sqrt{\sqrt{۲}}, \sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۴}}, \sqrt[۳]{\sqrt{۲}}, \sqrt{\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲}}}}, \sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۲}}}$

تکلیف ۱۰.

۱. به‌صورت توان بانمای گویا بنویسید:

۱) $\sqrt[۳]{۲^۲}$; ۲) $\sqrt{۳}$; ۳) $\sqrt[۶]{۳^۵}$; ۴) $\sqrt{۲^{-۴}}$; ۵) $\sqrt[۵]{۳^{-۳}}$;

۶) $\frac{۱}{\sqrt[۵]{۲^{-۳}}}$; ۷) $۷\sqrt[۷]{۷}$; ۸) $۲\sqrt[۵]{۱۶}$; ۹) $\sqrt[۷]{۲۷^۵}$; ۱۰) $\frac{۱}{۱۰}\sqrt[۳]{۴}$

۲. به‌صورت رادیکال بنویسید:

۱) $۳^{\frac{۱}{۲}}, ۹^{\frac{۲}{۳}}, ۶^{\frac{۱}{۴}}$; ۲) $۲^{۰/۵}, ۲^{۰/۷۵}, \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰/۲۵}, ۵^{۱\frac{۱}{۳}}$;

۳) $۳^{-\frac{۱}{۴}}, ۵^{-۰/۴}, ۷^{-\frac{۲}{۳}}$

۳. محاسبه کنید:

۱) $۱۶^{\frac{۱}{۲}}, ۶۴^{\frac{۱}{۳}}, ۶۴^{\frac{۱}{۶}}, ۰^{\frac{۲}{۵}}, ۲۷^{-\frac{۱}{۳}}, (۰/۱۶)^{-\frac{۲}{۳}}, \left(۳\frac{۳}{۸}\right)^{-\frac{۲}{۳}}$;

۲) $۳^{\frac{۱}{۲}}\cdot ۹\cdot ۳^{-\frac{۵}{۲}}, ۲^{\frac{۱۷}{۱۲}}\cdot ۲^{\frac{۱}{۳}}\cdot ۲^{\frac{۱}{۴}}, \frac{۱}{۲}\cdot\left(۲^{-\frac{۱}{۱۲}}\right)^{-۲۴}$;

۳) $۳۶^{۰/۴}\cdot ۲^{\frac{۱}{۵}}\cdot ۳^{\frac{۱}{۵}}, (۱۲۵\cdot ۵^{-۲})^{-۳}, \sqrt[۳]{۱\frac{۱}{۸}}:\sqrt[۳]{۲\frac{۲}{۳}}$;

۴) $\left(۳\cdot\frac{۱}{۳}\right)^۶, \left(۹\cdot ۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{\frac{۳}{۷}}, (\sqrt{۳}\cdot\sqrt[۳]{۳})^۶$

۴. به‌صورت توانی از عدد ۳ بنویسید:

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}, \frac{\sqrt[۳]{۹}}{۲۷}, \frac{۳}{\sqrt[۴]{۸۱}}$;

۲) $(\sqrt[۳]{۹})^۲, (\sqrt[۴]{۳})^{-\frac{۱}{۳}}, \left(\frac{۱}{۳}\cdot\sqrt{۲۷}\right)^۴$;

۳) $\sqrt[۳]{۳}\cdot\sqrt{۳}, \sqrt[۳]{۳}:\sqrt{۳}, ۳^{\frac{۱}{۳}}:\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\cdot\sqrt[۳]{۳}\right)$;

۴) $\sqrt{\sqrt[۳]{۳}}\cdot\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۳}}, \sqrt{\sqrt[۳]{۳}}, \sqrt{\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۳}}}}\sqrt[۳]{۳\sqrt[۳]{۳\sqrt[۳]{۳}}}$

تکلیف ۱۱.

۱. ساده کنید:

۱) $\sqrt{4a^2}, \sqrt[3]{8b^3a^3}, \sqrt[4]{1:(16a^4y^8)};$

۲) $\sqrt{\frac{a^4b^2}{d^2}}, \sqrt[5]{\frac{x^{10}d^5}{y^5}}, \sqrt[6]{\frac{64a^{12}}{279b^6}};$

۳) $\sqrt[3]{x^{-3}}, (\sqrt[4]{y^{-4}})^2, \sqrt[3]{d^3x^3:(x^{-6}y^3)} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^6}}$

۲. به‌صورت ضرب توان‌های با نمای گویا بنویسید (x، y، a، b، c و d، عددهایی مثبت‌اند):

۱) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}, \sqrt{y}\cdot d, \sqrt[3]{y\sqrt{x}}, \frac{x}{y}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}};$

۲) $c^3\sqrt{2bc}, x\sqrt[3]{x^{-2}y^4}, \sqrt{a\sqrt{b\sqrt{x}}}, \sqrt{a^2x}:x;$

۳) $(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y^{-1}})^{-2}\cdot xy^2;$ ۴) $\left(\frac{3ab}{5ad^{-1}}\right)^4\cdot\left(\frac{ac^{-4}}{b^2d^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a^{-2}b^2}{ad^{-3}}\right)^4;$

۵) $\frac{3a^3b}{2c}\cdot\sqrt{\frac{4c^3}{9a^5b}}\cdot\frac{2ab}{3xy}\cdot\sqrt{\frac{x^3y^4}{ab^3}};$

۶) $a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{2}{3}}:(b^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}), ((a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}\cdot(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}};$

۷) $(y^{-\frac{4}{3}})^{0.3}\cdot y^{\frac{1}{4}}\cdot((a^{\frac{2}{3}})^{1.5}:(c^{-\frac{1}{3}})^{-\frac{2}{3}});$

۸) $(a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}})\cdot(a^{-\frac{1}{3}}:b^{-\frac{1}{3}})^4$

تکلیف ۱۲.

۱. ساده کنید:

۱) $\sqrt{9a^2}, \sqrt[3]{27b^3}, \sqrt{\frac{1}{16}a^2b^4}, \sqrt[3]{a^3y^3};$

۲) $\sqrt{a^4b^8y^{12}}, \sqrt[5]{m^5y^{10}}, \sqrt{\sqrt{x^4y^4}};$

۳) $\sqrt[۳]{m^{-۶}},\ \sqrt{a^{-۴}},\ \sqrt[۵]{\dfrac{d^{۱۰}}{m^{-۵}}},\ \sqrt[۳]{\dfrac{۱۲۵}{۲۷}\cdot\dfrac{a^{-۶}b^{-۹}}{c^{-۳}d^{-۶}}}$

۲. به‌صورت ضرب توان‌هـای بانمای گویا بنویسید (a، b، c، d، x و y، عددهایی گویا هستند):

۱) $۲\sqrt{a},\ c\sqrt{c},\ ۴d:\sqrt{d},\ \frac{۱}{۲}\sqrt{\sqrt{x}},\ ۳\sqrt[۳]{y\sqrt{y}},\ \dfrac{x}{y^{۲}}\sqrt{\dfrac{x}{y}};$

۲) $ab\sqrt{ab},\ c^{۲}\sqrt{۵bc},\ x^{۲}\sqrt[۳]{۲axy},\ \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{a}}},\ (\sqrt{x}:\sqrt{y})\sqrt{x\sqrt{y}};$

۳) $\sqrt[۴]{\dfrac{۶a^{۲}}{۵b^{۴}}},\ \sqrt[۶]{x^{۳}y^{۳}d^{۳}},\ \dfrac{۲xy^{۲}}{۳ab}\sqrt{\dfrac{۹a^{۳}b^{۴}}{۸xy^{۳}}},\ \dfrac{x^{۲}}{y}\sqrt[۳]{\dfrac{۳y}{۲x^{۲}}};$

۴) $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt[۳]{\dfrac{b^{۴}}{a^{۲}}}\right):\left(\dfrac{a^{۲}}{b}\sqrt[۳]{\dfrac{a^{۷}}{b^{۲}}}\cdot\dfrac{b}{a^{۲}}\sqrt[۳]{\dfrac{a^{۱۰}}{b^{۵}}}\right);$

۵) $\left(\sqrt[۳]{\dfrac{x}{y}}\right)^{۲}\cdot\sqrt{\dfrac{۱}{xy}}\cdot\left(\sqrt[۳]{\dfrac{y^{۲}}{x^{۲}}}\right)^{-۱};$

۶) $(a^{\frac{۱}{۲}}\cdot a^{-\frac{۱}{۳}}\cdot a^{\frac{۱}{۴}})\cdot(b^{\frac{۱}{۳}})^{۲}:[b^{\frac{۲}{۳}}\cdot(b^{-۱})^{-۲}];$

۷) $(a^{\frac{۵}{۷}})^{۰/۷}:(d^{-\frac{۱}{۳}})^{-\frac{۳}{۲}};$ ۸) $(a^{\frac{۱}{۴}}y^{-\frac{۲}{۳}})^{\frac{۶}{۵}}\cdot a^{\frac{۱۰}{۳}}\cdot y^{\frac{۴}{۵}}$

تکلیف ۱۳.

۱. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $\sqrt{۱/۱}+\sqrt[۵]{۱/۲}>۲;$ ۲) $\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۵}}>\sqrt[۱۳]{۵};$

۳) $\dfrac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{\pi}>۱;$ ۴) $\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt{۳}}}>\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{\sqrt[۱۰]{۹}}};$

۵) $\sqrt[۳۰]{۱}+\sqrt[۴]{۲}>۱;$ ۶) $(۲\sqrt{۲})^{۱۰۰}>۸^{۴۹};$

$$۷)\ \sqrt[۳]{\sqrt{\sqrt[۴]{۳۲}}}>\sqrt[۷]{\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲^{۸}}}};\qquad ۸)\ \sqrt[۳]{\sqrt[۵]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۴}}}}<\sqrt{\sqrt[۳]{\sqrt[۱۵]{\frac{۱}{۸}}}}$$

۲. عدد گویای a را پیدا کنید، به شرطی که

$$۱)\ ۴^{a}=۲;\quad ۲)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲a+۱}=۲^{a};\quad ۳)\ (\sqrt{۲})^{۱-۳a}=۲;$$

$$۴)\ ۲۷(\sqrt{۳})^{a+۲}=۳^{a};\quad ۵)\ (\sqrt{۳})^{۵a}=۲۴۳;\quad ۶)\ ۳^{۱-۴a}=۱;$$

$$۷)\ \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲a-۱}=۱;\quad ۸)\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{a}\cdot ۴^{a}\cdot(\sqrt{۲^{۳}})^{a}=۴$$

۳. مفهوم کلی توان

تا این‌جا با تعریف مفهوم توان عدد، با نمادی درست یا نمای گویا، آشنا شدیم. اکنون تعریف توان عدد با نمای گنگ را می‌آوریم که، در این صورت، توان عدد بـا هر نمای حقیقی برای ما معنا پیدا می‌کند. این تعریف، نیازمند ساختمانی تازه است.

مثلاً، عددی را در نظر می‌گیریم کـه با نماد $۳^{\sqrt{۲}}$ نشان داده شده باشد. $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است و آن را می‌توان، به‌صورت کسر دهدهی نامتناهی نشان داد:

$$\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲۱۳\cdots=a_{۰}/a_{۱}a_{۲}a_{۳}\cdots a_{n}\cdots$$

تقریب گویای نقصانی عدد $\sqrt{۲}$ را، r_n و تقریب گویای اضافی آن را، r'_n می‌نامیم:

$$r_{n}=a_{۰}/a_{۱}a_{۲}\cdots a_{n-۱}a_{n};$$

$$r'_{n}=a_{۰}/a_{۱}a_{۲}\cdots a_{n-۱}a_{n}+\frac{۱}{۱۰^{n}}$$

نخستین جمله‌های این دنباله‌ها را می‌نویسیم:

$$r_{n}:۱,۱/۴، ۱/۴۱، ۱/۴۱۴، ۱/۴۱۴۲، ۱/۴۱۴۲۱ ،\ldots$$

$$r'_{n}=۲، ۱/۵، ۱۴۲، ۱/۴۱۵، ۱/۴۱۴۳، ۱/۴۱۴۲۲ ،\ldots$$

دو دنبالهٔ عددی جدید تشکیل می‌دهیم:

$$۳^{۱}, ۳^{۱/۴}, ۳^{۱/۴۱}, ۳^{۱/۴۱۴}, \ldots، ۳^{r_{n}} ،\ldots$$

$$۳^۲, ۳^{۱/۵}, ۳^{۱/۴۲}, ۳^{۱/۴۱۵}, \ldots, ۳^{r'_n}, \ldots$$

با توجه به‌ویژگی یکنوائی توان‌های بانمای گویا، نتیجه می‌شود که:

الف) دنبالهٔ ۳^{r_n} غیرنزولی است، یعنی

$$۳^{r_n} \leqslant ۳^{r_{n+۱}}, n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

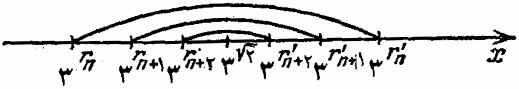
ب) دنبالهٔ $۳^{r'_n}$ غیرصعودی است، یعنی

$$۳^{r'_n} \geqslant ۳^{r'_{n+۱}}, n = ۰, ۱, ۳, \ldots$$

ج) برای جمله‌های متناظر این دنباله‌ها، این نابرابری برقراراست:

$$۳^{r_n} < ۳^{r'_n}, n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

می‌توان ثابت کرد: عدد منحصر به‌فردی وجود دارد که به‌ازای هرمقدار n، از ۳^{r_n} بزرگتر واز $۳^{r'_n}$ کوچکتر است؛ همین عدد را به‌عنوان عدد $۳^{\sqrt{۲}}$ درنظرمی گیریم. وجودچنین‌عددی‌رامی‌توان‌با تصور هندسی‌زیر «مشاهده کرد». روی‌محورعددی (شکل۴)، بازه‌های $\Delta_n = [۳^{r_n}, ۳^{r'_n}]$ $(n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ را درنظرمی‌گیریم. ازویژگی‌های الف) وب) نتیجه‌می‌شود که، این بازه‌ها،



شکل ۴

دردرون یکدیگر قراردارند، یعنی برای هرمقدار n، بازهٔ $\Delta_{n+۱}$ دردرون بازهٔ Δ_n واقع است. از تعریف عددهای r_n و r'_n معلوم می‌شود که، طول پاره‌خط راست Δ_n برابراست با $\frac{۱}{۱۰^n}$، یعنی

$$|\Delta_n| = \frac{۱}{۱۰^n}, (n = ۰, ۱, ۲, \ldots)$$

وبنابراین، بـا بزرگ شدن n، به‌سمت صفرمیل می‌کند. به‌این ترتیب، قابل درك است که، مجموعهٔ این بازه‌هـای تودرتو، اولاً باید دست‌کم یك نقطهٔ مشترك داشته‌باشند و، ثانیاً، ازآن‌جاکه طول این بازه‌ها مرتباً کاهش می‌یابد وبا بزرگ شدن n به‌سمت‌صفرمیل می‌کند، چنین نقطهٔ مشترکی، منحصر به‌فرد است.

به همین ترتیب، می‌توان عدد $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{\sqrt{۲}}$ را هم تعریف کرد. در این حالت (با توجه به ویژگی‌های توان a^{α} با نمای گویا برای $۰<a<۱$)، باید توجه داشت که، عدد $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{\sqrt{۲}}$، با این شرط تعریف می‌شود که برای هر n، از $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{r'_n}$ بزرگتر واز $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{r_n}$ کوچکتر است، زیرا $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{r_n}>\left(\frac{۱}{۳}\right)^{r'_n}$. در این حالت هم، می‌توان ثابت کرد: چنین عددی وجود دارد ومنحصر به‌فرد است.

عدد مثبت a وعدد حقیقی α را مفروض می‌گیریم. در این صورت، عدد α^{α} را، به‌عنوان عدد مثبتی تعریف می‌کنیم که، به این ترتیب تعریف شده باشد:

۱) اگر α، عددی درست باشد، آن‌وقت عدد a^{α} به صورتی تعریف می‌شود که در بند **۱** (توان با نمای درست) آورده‌ایم؛

۲) اگر α عددی گویا باشد، تعریف عدد a^{α} همان است که در بند **۲** آوردیم (توان با نمای گویا)؛

۳) اگر α، عددی مثبت و گنگ باشد، یعنی

$$\alpha=a_۰/a_۱a_۲\cdots a_n\cdots;\ r_n=a_۰/a_۱\cdots a_n ,\ r'_n=r_n+\frac{۱}{۱۰^n}$$

$(n=۰، ۱، ۲،\ldots)$، آن وقت

الف) برای $a>۱$، عدد a^{α} به‌معنای عددی است بزرگتر از a^{r_n} و کوچکتر از $a^{r'_n}$ $(n=۰، ۱، ۲،\ldots)$؛

ب) برای $۰<a<۱$، عدد a^{α} به‌معنای عددی است بزرگتر از $a^{r'_n}$ و کوچکتر از a^{r_n} $(n=۰، ۱، ۲،\ldots)$؛

ج) برای $a=۱$، قبول می‌شود: $a^{\alpha}=۱$.

۴) اگر α عددی منفی باشد، آن وقت a^{α} به‌معنای $\frac{۱}{a^{|\alpha|}}$ است، یعنی

$$a^{\alpha}=\frac{۱}{a^{|\alpha|}}.$$

وجود عدد a^{α} ومنحصر به‌فرد بودن آن، در آنالیز ریاضی ثابت می‌شود.

ویژگی‌های توان‌های یک عدد مثبت. a و b را عـددهایی مثبت و α و β را عددهایی حقیقی می‌گیریم. دراین‌صورت

۱. $a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$ ۲. $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha}$،

۳. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$، ۴. $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$،

۵. $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$

به‌این نکته توجه کنید کـه، ویژگی‌های ۲ تا ۵، نتیجه‌ای از ویژگی ۱ و خود تعریف توان است؛ به‌همین‌مناسبت، ویژگی ۱ را، گاهی ویژگی اصلی توان گویند:

ویژگی‌های مربوط به یکنوا بودن توان‌های با نمای دلخواه:

۶. اگر $a > ۰$، آن‌وقت $a^{\alpha} > ۰$ (برای هر عدد حقیقی α).

۷. اگر $a > ۱$، آن‌وقت

الف) از نابرابری $\alpha > \beta$ نتیجه می‌شود $a^{\alpha} > a^{\beta}$، یعنی

$$\alpha > \beta \Rightarrow a^{\alpha} > a^{\beta}$$

ب) از نابرابری $a^{\alpha} > a^{\beta}$ نتیجه می‌شود $\alpha > \beta$، یعنی

$$a^{\alpha} > a^{\beta} \Rightarrow \alpha > \beta$$

به‌این ترتیب، برای $a > ۱$: $\alpha > \beta \Longleftrightarrow a^{\alpha} > a^{\beta}$.

۸. اگر $۰ < a < ۱$، آن‌وقت

الف) از نابرابری $\alpha > \beta$ نتیجه می‌شود $a^{\alpha} < a^{\beta}$:

$$\alpha > \beta \Rightarrow a^{\alpha} < a^{\beta}$$

ب) از نابرابری $a^{\alpha} < a^{\beta}$ نتیجه می‌شود $\alpha > \beta$:

$$a^{\alpha} < a^{\beta} \Rightarrow \alpha > \beta$$

به‌این ترتیب، با شرط $۰ < a < ۱$: $a^{\alpha} < a^{\beta} \Longleftrightarrow \alpha > \beta$.

از ویژگی‌های ۷ و ۸، ویژگی دیگری نتیجه می‌شود:

۹. اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$، آن‌وقت بـرابـری $a^{\alpha} = a^{\beta}$ تنها به‌ازای $\alpha = \beta$ ممکن است، یعنی $a^{\alpha} = a^{\beta} \Longleftrightarrow \alpha = \beta$. در حالت خاص، به‌ازای $a > ۰$ و $a \neq ۱$: $a^{\alpha} = ۱ \Longleftrightarrow \alpha = ۰$.

مثال ۲۰. فرض کنید، برای عدد α داشته باشیم: $۲\alpha=۲^{\alpha}$. ثابت کنید، عدد $\beta=-\alpha$ در این برابری‌ها صدق می‌کند:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\beta}=-۲\beta،\quad ۲^{\beta}=-\frac{۱}{۲\beta}$$

حل. از ویژگی‌های توان به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\beta}=(۲^{-۱})^{\beta}=۲^{-\beta}=۲^{\alpha}=۲\alpha=-۲\beta;$$

$$۲^{\beta}=۲^{-\alpha}=(۲^{\alpha})^{-۱}=(۲\alpha)^{-۱}=\frac{۱}{۲\alpha}=-\frac{۱}{۲\beta}$$

مثال ۲۱. عدد α را پیدا کنید که، برای آن، داشته باشیم:

$$۵^{\sqrt{۱-\alpha^{۲}}}>۰$$

حل. $\sqrt{۱-\alpha^{۲}}$ برای $-۱\leqslant\alpha\leqslant۱$ وجود دارد. بنابر ویژگی ۴ توان‌ها، نابرابری به‌ازای همهٔ این مقدارهای α برقرار است؛ بنابراین، شرط مساله، با همهٔ مقدارهای α از بازهٔ $[-۱،۱]$ سازگار است.

مثال ۲۲. $a>۰$ می‌گیریم. همهٔ مقدارهای α را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$\frac{۱}{۲}(a^{\alpha}+a^{-\alpha})=۱$$

حل. چون a^{α} به‌ازای هر مقدار α، مثبت است، اگر دو طرف برابری را در a^{α} ضرب کنیم، به‌برابری عددی زیر که هم‌ارز با برابری مفروض است، می‌رسیم:

$$a^{۲\alpha}-۲a^{\alpha}+۱=۰\Longleftrightarrow(a^{\alpha}-۱)^{۲}=۰$$

بنابراین $a^{\alpha}=۱$، یعنی $\alpha=۰$.

مثال ۲۳. همهٔ مقدارها α را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$۳^{|\alpha|}<۲۷$$

حل. چون $۳^{۳}=۲۷$، بنابراین نابرابری مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۳^{|\alpha|}<۳^{۳}$$

و با توجه به‌ویژگی ۸، این نابرابری تنها وقتی برقرار است که داشته‌باشیم:

$$|\alpha|<۳$$

بنا براین، شرط مساله، برای همهٔ مقدارهای α از بازهٔ $(-۳, ۳)$ برقرار است.

تمرین‌ها

۱. محاسبه کنید:

۱) $۲^۲\cdot۲^۳, ۳^۳\cdot۳^۶, ۸\times۲^{-۴}, (-۴)^{-۲}:۴^{-۴};$

۲) $(۲^۲)^۲\cdot۴, (-۴)\cdot۲^۴, (۸\times۲^{-۴})^{-۱};$

۳) $(۵^{-۴})\cdot(۵^{-۴})^{-۲}, (-۱)^۴\cdot(-۳)^{-۳}\cdot۹^۲, ۱۶\left(\frac{۴}{۷}\right)^{-۲};$

۴) $(-۱۶)^۳:(۴^{-۲})^{-۳}, ۲^{-۵}:(۲^۳:۲^۶), (۲^{-۴}:۲^۴):۲^{-۵};$

۵) $\frac{(-۳^۲)^۳\cdot۹}{۳^۲\cdot۳^۳}, \frac{(-۲)^۸\cdot۵^۳}{۵^۴\cdot۲^{۱۰}\cdot۱۰}, \frac{(-۵)^۲\cdot۲۵^۳}{۵^{۱۰}};$

۶) $\frac{۲^۳+۲^{-۳}}{۴^۳+۱}, \frac{(-۱)^۵\cdot(۳^۴+۳^۲)^۲}{(-۹)^۳};$

۷) $\frac{۲\cdot۳^{۲۰}-۵\cdot۳^{۱۹}}{(-۹)^۹}, \frac{۳^{۱۵}+۳^{۱۴}}{۳^{۱۴}+۳^{۱۲}}\cdot\frac{(-۲)^۹}{۱۰۲۴};$

۸) $\frac{(۳\cdot۲^{۲۰}+۷\cdot۲^{۱۹})\cdot۵۲}{(-۱)^۷\cdot(۱۳\cdot۸^۴)^۲};$

۹) $(۲۰\times۲^۴-۱۲\times۲^۳-۴۸\times۲^۲)^۲:(-۸)^۳;$

۱۰) $(۷۵\cdot۵^۲+۳۵\cdot۵^۳):(۲۰\cdot۲۵\cdot۱۲۵-۶۲۵\cdot۷۵);$

۱۱) $\frac{۳۲\cdot۵۱۲\cdot۱۲۸:(۱۰۲۴\cdot۳۲)}{۱۶\cdot۶۴\cdot۸^۲:(۴^۳\cdot۲^۶\cdot۱۶)};$

۱۲) $\frac{۲۱۸۱\cdot۷۲۹+۲۴۳\cdot۸۱\cdot۲۷}{۳^۲\cdot۹^۲\cdot۲۴۳+۱۸\cdot۵۴\cdot۱۶۲\cdot۹}$

۲. محاسبه کنید:

۱) $(-۲)^۳+۲^۲+(-۱)^{۱۰};$ ۲) $(۳^۲)^۲-((-۳)^۳)^۲-(-۵^۲)^۲;$

۳) $۴^{-۲}-۲^{-۳}+((-۲)^۳)^{-۱};$

۴) $(۴^{-۱})^۴\cdot۲^۵\cdot\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^۳\cdot(۸^{-۲})^۵\cdot(۶۴^۲)^۳;$

۵) $\left(-۲\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\cdot(۰/۲۵)^{۲}\cdot((-۵)^{-۳})^{۲}\cdot((۰/۱)^{۲})^{-۲};$

۶) $۱۲\left(۳^{-۴}:\left(۲^{۴}:۳^{۲}-۲^{۲}:۱\frac{۱}{۸}\right)\right)+\left(۲\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\cdot(۰/۳۷۱)^{۰};$

۷) $((۱۰^{-۶})^{-۲}+۵\cdot۲۵^{۴}\cdot۲^{۳}\cdot(۲^{۳})^{۲}-۵^{۱۳}\cdot(۴^{۲})^{۲}):$

$$:\left((۵^{-۵})^{-۱}\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\cdot۱۰^{۵}\right);$$

۸) $\left(\left(\frac{۲}{۳}\cdot۲^{-۳}\cdot۸^{-۴}\right)^{-۳}:\frac{۳^{۲}\cdot۴^{۳۱}}{(۲^{۵})^{۴}}\right)+\frac{(۱۰۰^{۵})^{۳}\cdot۵^{۴}}{(۶۲۵^{۲}\cdot۱۲۵)^{۳}\cdot۳۲^{۲}\cdot۲^{۲۰}};$

۹) $(۸۱^{۲}\cdot۷۲۹^{۳}):۲۱۸۷^{۷}+(۲۵۶^{-۲})^{۳}\cdot۲۰۴۸^{۴}\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۵};$

۱۰) $(۵۱۲^{-۲}\cdot۱۲۸^{۳}:۳۱۲۵^{۴}\cdot۶۲۵^{-۵}):(۶۲۵^{-۸}\cdot۶۴^{۱۱});$

۱۱) $((۳^{۳}:۷۲۹)^{۳}\cdot۲۱۸۷^{۵}\cdot۲۴۳^{-۱۰})^{۲}:۶۵۶۱^{-۶}-۸۱^{۴}\cdot۹^{-۷};$

۱۲) $(۳۱۲۵^{۷}\cdot۱۲۵^{۴})^{-۱}\cdot۱۵۶۲۵^{۸}+(۶۴^{۵}\cdot۳۲^{۷})^{-۳}\cdot۱۶^{۴۸};$

۱۳) $۲^{۱۳}\cdot(۳۶^{۲}\cdot۱۶۲^{۵}\cdot۴۸^{۴})^{۵}\cdot(۱۰۸\cdot۷۲)^{-۲۸}-\frac{(۲۵\cdot۱۲۸)^{۴}\cdot۵^{۷}}{۱۲۵^{۳}\cdot۱۶۰^{۶}};$

۱۴) $۲۰۴۸^{۳}\cdot۱۰۲۴^{۲}\cdot۱۶^{۵}\cdot۲۵۶^{-۹}+۶۵۶۱^{-۳}\cdot۲۱۸۷^{-۲}\cdot۲۴۳^{۸}$

۳. به‌صورت a^n بنویسید (a، عددی حقیقی و n، عددی درست):

۱) $۲^{۲}\cdot\frac{۱}{۴}\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳}\cdot۴:\frac{۱}{۲^{۳}};$ ۲) $۹\cdot(۲۷)^{-۱}\cdot(۳^{۲})^{۳}:\left(\frac{۱}{۳^{-۲}}:\frac{۱}{۸۱}\right);$

۳) $\left(\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}\cdot\frac{۴}{۲۷}\cdot۹:۱۶\right)۶^{-۳};$ ۴) $۴\frac{۱۷}{۲۷}$، $۵\frac{۴}{۹}$، $۹\frac{۴۹}{۶۴};$

۵) $\frac{۳۲}{۲۴۳}$، $\frac{۷۲۹}{۱۵۶۲۵}$، $\frac{۶۵۶۱}{۲۵۶};$

۶) $۱۰۸\cdot۷۲$، $۱۲۸\cdot۲۱۸۷$، $۵۱۲\cdot۶۲۵\cdot۳۱۲۵;$

۷) $\frac{۲۷}{۱۰۰۰}$، $\frac{۲۵۶}{۶۲۵\cdot۸۱}$، $\frac{۱۲۵}{۶۴\cdot۲۷};$ ۸) $\frac{۱}{۱۰۲۴\cdot۲۴۳}$، $\frac{۱}{۵۱۲\cdot۱۵۶۲۵}$، $\frac{۶۵۶۱}{۶۲۵}$

۹) $\frac{۱۶^{-۳}\cdot۸۱^{-۶}}{۷۲۹^{-۲}}$، $\frac{۳۲^{۲}}{۳۱۲۵}$، $\frac{۲۴۳}{۱۰۲۴};$

۱۰) $-\frac{۳۱۲۵}{۳۲}, \frac{۲}{۱۶\cdot۱۲۵}, \frac{۱۲۸}{۲۱۸۷}$;

۱۱) $۳۲\cdot۲۴۳\cdot۳۱۲۵$، $(۱۲۵\cdot۲۷):۸$

۴. این بخش‌پذیری‌ها را ثابت کنید:

۱) $۸^{۱۰}-۸^{۹}-۸^{۸}$ بر ۵۵؛ ۲) $۸۱^{۷}-۲۷^{۹}-۹^{۱۳}$ بر ۴۵؛

۳) $۱۰^{۹}+۱۰^{۸}+۱۰^{۷}$ بر ۵۵۵؛ ۴) $۴۵^{۴۵}\cdot۱۵^{۱۵}$ بر $۷۵^{۳۰}$؛

۵) $۲۴^{۵۴}\cdot۵۴^{۲۴}\cdot۲^{۱۰}$ بر $۷۲^{۶۳}$؛ ۶) $۴۵^{۱۰}\cdot۵^{۴۰}$ بر $۲۵^{۲۰}$؛

۷) $۱۲^{۸}\cdot۹^{۱۲}$ بر $۶^{۱۶}$؛ ۸) $۵^{۲۳}-۵^{۲۱}$ بر ۲۴؛

۹) $۷^{۶}+۷^{۵}-۷^{۴}$ بر ۱۱؛ ۱۰) $۵^{۵}-۵^{۴}+۵^{۳}$ بر ۷؛

۱۱) $۵۱^{۷}-۵۱^{۶}$ بر ۲۵؛ ۱۲) $۲۵^{۷}+۵^{۱۳}$ بر ۳۰؛

۱۳) $۱۶^{۵}+۲^{۱۵}$ بر ۳۳.

۵. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، بخش‌پذیر است:

۱) $۳^{n+۲}-۲^{n+۲}+۳^{n}-۲^{n}$ بر ۱۰؛

۲) $۳^{n+۳}+۲^{n+۳}+۳^{n+۱}+۲^{n+۲}$ بر ۶؛

۳) $۷^{n+۴}-۷^{n}$ بر ۳۰؛ ۴) $۶^{۲n}+۳^{n+۲}+۳^{n}$ بر ۱۱؛

۵) $۷^{n+۲}+۸^{۲n+۱}$ بر ۵۷.

۶. به‌صورت توانی از a بنویسید $(a\neq۰)$:

۱) $(a^{۳})^{-۲}, (a^{-۱}\cdot a^{-۲})^{-۳}, ((a^{۲})^{-۲})^{۲}$;

۲) $(a\cdot a)^{۲}, (a:a^{۲})^{-۲}, (a^{۲}\cdot a^{۲}\cdot a^{۲})^{۳}, a^{۲}\cdot a^{۳}\cdot(a^{-۱})^{۲}$;

۳) $(a^{۲}\cdot a)^{۳}:a^{۲}, (a^{۳}\cdot a:a^{۲})^{-۱}, (a^{۵}:a)^{۳}:(a^{۳}:a^{۲})^{۴}$;

۴) $(a^{-۱}\cdot a^{-۲})^{-۱}, ((a^{۲})^{-۱})^{-۲}, ((a^{-۲})^{-۱})^{-۱}:(a:a^{-۱})^{۲}$;

۵) $(a\cdot a^{۲}\cdot a^{۳}):(a:a^{۲})^{-۱}, a^{۲}\cdot(a^{۴})^{۳}:a^{۱۳}$;

۶) $(a^{۲}\cdot a^{-۵})^{-۳}\cdot(a\cdot a^{۳})^{۴}, ((a^{۲})^{-۲})^{۵}:(a^{۴}\cdot a)^{۳}$;

۷) $(a^{۲}a^{۳})^{۲}\cdot a^{۴}:((a^{-۱})^{-۲})^{۳}, \frac{(a^{۲}a^{۴}):a^{-۳}}{a:(a^{۲}a^{۳})^{۴}}$;

۸) $(a(a^{۳}a^{-۲})^{۰}\cdot a^{-۴})^{۲}, (a^{۲}:a^{۳})^{۲}\cdot(a^{۳}\cdot a^{۴})^{-۲}$;

۹) $((a^{۲}\cdot a^{۳})^{۳}\cdot a):(a^{۱۲}\cdot a^{۴}), (a^{۵}\cdot a^{۲}):a^{۷}, (a^{۴}\cdot a^{۵}):a^{۹}$;

۱۰) $(۱:(a^۲\cdot a^۴\cdot a^۳))^۲,\ ((a^۲\cdot a):(a^۴\cdot a^۵))^۳,\ ((a^۳a^۴):(a^۸a^{۱۰}))^{-۳}$

۷. به‌صورت $Ax^m y^n$ بنویسید که، در آن، A عددی حقیقی و m و n عددهایی درست‌اند $(xy\neq ۰)$:

۱) $\left(\frac{x^۳\cdot x^۲}{x^۴}\right)^۲\cdot\frac{x^۳\cdot x^۲}{x};$ ۲) $(۰/۲x^{-۳}y^{-۲})^۲\cdot\left(\frac{x^{-۲}}{۲y^۳}\right)^{-۲}$

۳) $\left(-\frac{۷x^۲}{۳y^۴}\right)^{-۳}\cdot\left(\frac{۹y^۲}{۴۹x^۴}\right)^{-۲};$ ۴) $\left(\frac{x^۳y^{-۲}}{۹y^۲}\right)^{-۲}\cdot\left(\frac{x^۲y^{-۳}}{۶y^۳}\right)^۲;$

۵) $\left(\frac{۸x^۲y}{۱۲y^۲x}:\frac{xy}{x^۳y^۲}\right):\frac{۱۵x^۲y^{-۲}}{۳xy^{-۱}};$ ۶) $\left(\frac{x^۵}{y^۲}\right)^{-۲}\cdot\left(\frac{-۲y^۲}{x^۴}\right)^{-۳};$

۷) $\left(\frac{-x^۳}{y^۵}\right)^{-۵}\cdot\left(\frac{۳y^۷}{x^۳}\right)^{-۲};$

۸) $\left(\frac{۱}{۶}x^{-۱}y^۳\right)^{-۲}\cdot\left(\frac{x^۲}{y^۲}\right)^{-۲}\cdot\left(\frac{-۲x^۲}{y^۳}\right)^{-۴};$

۹) $\left(\frac{۱}{۲}x^{-۱}y^۳\right)^{-۳}:(x^{-۲}:y^{-۸});$

۱۰) $\frac{(x^۴y^۳)^{-۸}}{(x^۲y^۶)^۲}\cdot\frac{(x^۴y^۶)^۶}{(x^{-۱}y^{-۲})^۳}\cdot\left(\frac{(x^۲y)^{-۴}:(x^۵y^۳)^۲}{(x^۳)^{-۵}y^۷}\right):\left(\frac{۱}{y}\right)^{۱۱};$

۱۱) $(x^۴y^۵)^{-۲}\cdot(x^{۱۰}y^۵)^۰\cdot(x^۲y)^۴\cdot(x^۳)^۲\cdot(y^۲)^۴\cdot(x^{-۳})^۲\cdot(y^{-۲})^{-۱};$

۱۲) $\frac{((x^۳)^{-۵}\cdot(y^{-۳})^۴\cdot(x:y)^۵)^۳}{((y^{-۲})^۳(x^{-۴})^۲\cdot(y:x)^۳)^۲}:\frac{y^۲}{(x^۲y^{۱۰})^۵};$

۱۳) $\left(\left(\frac{x^۲}{y^۳}\right)^{-۴}\cdot\left(\frac{x^{-۴}}{y^{-۵}}\right)^۳\cdot(xy^{-۳})^{-۵}\right)^{-۱}:\left(\left(\frac{x}{y^۲}\right)^۴\cdot\left(\frac{y}{x^۳}\right)^۳\right)^۵$

۸. همهٔ عددهای درست p را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $۴^{-۲}\left(\frac{۱}{۱۶}\right)\cdot۲^۵\cdot۲^p=۱;$ ۲) $۳^{-۱}\cdot۳^p+۵\cdot۳^{p-۱}=۲\cdot۳^۴;$

۳) $۵۱۲\cdot۸^p=۱;$ ۴) $۷۲۹^p=۱;$

۵) $۳۲^{-p}\cdot۱۶^p=۲۰۴۸;$ ۶) $۱<۳^p<۲۵;$

۷) $۰/۰۱۱<\left(\frac{۱}{۳}\right)^p<۰/۱۱;$ ۸) $۱۲۵\leqslant\left(\frac{۱}{۵}\right)^p\leqslant۳۱۲۵$

$۹)\ ۱۶<\left(\frac{۱}{۲}\right)^p<۳۲;\qquad ۱۰)\ ۶۴<۲^p\leqslant ۱۲۸$

۹. این عددها را باهم مقایسه کنید:

$۱)\ ۹۱^۲ \text{ و } ۹۱^۳;\qquad ۲)\ ۱۰^{۲۰} \text{ و } ۲۰^{۱۰};\qquad ۳)\ ۳^{۳۴} \text{ و } ۲^{۵۱};$

$۴)\ ۲۰۲^{۳۰۳} \text{و} ۳۰۳^{۲۰۲};\ ۵)\ (۶^{۱۰۱})^۳ \text{ و } (۶^۳)^{۱۰۱};\ ۶)\ (۳^{-۲})^{-۳} \text{و} (۳^۳)^۲;$

$۷)\ ۶۵۶۱^۸ \text{ و } ۳^{۶۴};\ ۸)\ ۲۰۲۴^۳ \text{ و } ۲^{۳۳};\ ۹)\ -۲۷^۳ \text{ و } ۳^۶;$

$۱۰)\ ۱۵۶۲۵^۴ \text{ و } ۵^{۲۵};\ ۱۱)\ (۲^۲)^۳ \text{ و } ۲^{(۲^۳)};\ ۱۲)\ ۲^{۳^۲} \text{ و } ۲^{۲^۳}$

۱۰. محاسبه کنید:

$$۱)\ \sqrt{۱۰۰},\ \sqrt[۳]{۶۴},\ \sqrt[۵]{۱۰۲۴},\ \sqrt{\frac{۱}{۹}},\ \sqrt{۰/۸۱},\ \sqrt{۰/۰۹};$$

$$۲)\ \sqrt{۲}\cdot\sqrt{۲},\ \sqrt{۲}\cdot\sqrt{۱۸},\ \sqrt{\frac{۲}{۳}}\cdot\sqrt{\frac{۳}{۸}},\ \sqrt{۱۴۴}\cdot\sqrt{\frac{۴۹}{۶۴}}\cdot\sqrt{۰/۰۱};$$

$$۳)\ \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۸}},\ \frac{\sqrt{۴۰}}{\sqrt{۱۰}},\ \frac{\sqrt{۷۵}}{\sqrt{۱۵}}\cdot\sqrt{۳},\ \frac{\sqrt{۳۲}}{\sqrt{۸}}\cdot\frac{\sqrt[۴]{۳}}{\sqrt[۴]{۴۸}},\ \sqrt{۰/۲}\cdot\sqrt{۰/۴}\cdot\sqrt{۲};$$

$$۴)\ \sqrt{۲^۴}\cdot\sqrt{۵^۴},\ \frac{\sqrt[۴]{۱۶\cdot ۸۱}}{\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۱۲},\ \frac{\sqrt{۱۸۰}:\sqrt{۵}}{\sqrt{۲۰۰}:\sqrt{۸}};$$

$$۵)\ \sqrt{۴۹\cdot ۳۶\cdot ۱۰۰},\ \sqrt[۵]{۳۲\cdot ۲۴۳},\ \sqrt[۳]{۶۴\cdot ۲۷\cdot ۱۲۵};$$

$$۶)\ (\sqrt{۴})^۲,\ \left(\sqrt{\frac{۹}{۱۱}}\right)^۲,\ \sqrt{۳^۴\cdot ۵^۲},\ \sqrt{۱۱^۲\cdot ۲^۴};$$

$$۷)\ \sqrt[۳]{۲}\cdot\sqrt[۶]{۲}\cdot\sqrt[۶]{۸},\ (\sqrt[۳]{۳}\cdot\sqrt[۳]{۲}):(\sqrt[۶]{۶})^۲;$$

$$۸)\ \sqrt[۳]{۱\frac{۱}{۸}}:\sqrt[۳]{۲\frac{۲}{۳}},\ \sqrt[۳]{۰/۲}\cdot\sqrt[۳]{۲۵},\ (۰/۷۵\sqrt[۳]{۹}):\left(۰/۲۵\sqrt[۳]{۲\frac{۲}{۳}}\right);$$

$$۹)\ (\sqrt[۵]{۷})^{۱۰}\cdot(\sqrt[۵]{۳})^۷\cdot\sqrt[۵]{۲۷},\ ((\sqrt{۲})^۳:\sqrt{۲})\cdot(\sqrt[۴]{۵})^۸;$$

$$۱۰)\ (\sqrt{۸}\cdot\sqrt{۳\sqrt[۳]{۲}}):(\sqrt{۲\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{\sqrt[۶]{۱۰۸}});$$

۱۱) $\left(\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{۵۱۲\cdot\sqrt{۷۲۹}}}\right)^{۲}\cdot\left(\sqrt[۵]{\sqrt{۱۰۲۴\cdot\sqrt[۳]{۸۱.۶۵۶۱.۲۷}}}\right)^{-۳};$

۱۲) $\sqrt[۴]{۲۵۶\sqrt{۲۵۶}}\cdot\sqrt[۳]{۷۲۹\sqrt{۷۲۹}}\cdot\sqrt[۸]{۱۵۶۲۵\sqrt[۳]{۱۵۶۲۵}};$

۱۳) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{۸۱}\cdot\sqrt[۳]{۵۱۲}\cdot\sqrt[۳]{۳۲}\cdot\sqrt{۱۶۲}}{\sqrt[۴]{۶۵۶۱}\cdot\sqrt[۳]{۷۲۹}\cdot\sqrt{۳۱۲۵۰}}}\cdot\sqrt[۳]{۵۴.۵۰۰\sqrt{۲}}.\sqrt{\dfrac{۵}{۲}};$

۱۴) $\sqrt[۵]{۲۴۳\sqrt{۱۰۲۴}}\cdot\sqrt[۴]{۲۵۶\sqrt{۶۵۶۱}}\cdot\sqrt[۳]{\dfrac{۲۷}{۵۱۲}\sqrt{\dfrac{۴}{۷۲۹}}};$

۱۵) $\dfrac{\sqrt[۵]{۳۱۲۵}\cdot\sqrt[۴]{۶۵۶۱}\cdot\sqrt{۷۲۹}}{\sqrt[۳]{۱۲۵\sqrt{۱۵۶۲۵}}\cdot\sqrt{۳۲۴}}\cdot\sqrt[۳]{\dfrac{۱۰۰۰}{۷۲۹}}\cdot\sqrt{۴۸\times ۲۴۳}$

۱۱. ساده کنید:

۱) $\sqrt{۳}\cdot\sqrt{\dfrac{۲}{۳}}$، $\dfrac{۲۱}{\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۳\frac{۱}{۳}}$، $۱\frac{۱}{۲}\cdot\sqrt[۴]{۷\frac{۱}{۹}}$، $۱۶\sqrt[۵]{۳\frac{۳}{۸}}\cdot\sqrt[۵]{\dfrac{۹}{۴}};$

۲) $\sqrt[۴]{۸۰}:\sqrt{۵}$، $(۷+\sqrt{۷}):(\sqrt{۷}+۱)$، $\dfrac{\sqrt{۱۲}+\sqrt{۷۵}+\sqrt{۲۷}}{\sqrt{۱۵}};$

۳) $(\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۷۵})\sqrt{۳}$،
$۲(\sqrt{۲۵۲}-\sqrt{۱۷۵})-(\sqrt{۱۱۲}-\sqrt{۶۳}-\sqrt{۲۸});$

۴) $\left(\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۳}+۵\sqrt{۲}-\frac{۳}{۴}\sqrt{۸}\right)\cdot۲\sqrt{۶}$،
$\sqrt{۲۵۲}-\sqrt{۷۰۰}+\sqrt{۱۰۰۸}-\sqrt{۴۴۸};$

۵) $۳۰\sqrt[۳]{\dfrac{۱}{۱۲}}+۳\frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{\dfrac{۲}{۳}}+۵\sqrt[۳]{۱۴۴};$

۶) $\sqrt{\sqrt{۵}}\cdot\left(\sqrt[۳]{\sqrt{۵}}:\sqrt{\sqrt[۴]{۵}}\right)^{۲}$، $\sqrt[۸]{(\pi^{۲}-۱۰)^{۴}};$

۷) $۴\sqrt{۵\sqrt{۴۸}}+۳\sqrt{۴۰\sqrt{۱۲}}-۲\sqrt{۱۵\sqrt{۲۷}};$

۸) $\sqrt{۱۷۶}-۲\sqrt{۲۷۵}+\sqrt{۱۵۸۴}-\sqrt{۸۹۱};$

۹) $۵\sqrt{۱/۲۸}-\frac{۲}{۵}\sqrt{۵\frac{۵}{۹}}+۶\sqrt{\frac{۱}{۱۸}}-(۵\sqrt{۰/۰۲}-\sqrt{۳۰۰});$

۱۰) $\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^{۲}},\ \sqrt[۴]{(۲-\sqrt{۳})^{۴}},\ \sqrt[۶]{(\sqrt{۳}-۲)^{۶}};$

۱۱) $\sqrt[۶]{(۱-\sqrt{۳})^{۲}},\ \sqrt[۴]{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}},\ \sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۲})^{۲}};$

۱۲) $\left(\frac{۱}{۴}\sqrt[۳]{۹}-۳\sqrt[۳]{۳}+۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}\right):\left(۴\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}\right);$

۱۳) $\left(-\frac{۳}{۲}+۳\sqrt{۶}-\sqrt{۳۳}\right)\cdot(۲\sqrt{۲۲}-\sqrt{۶}-۴)-$

$-۱۶\sqrt{۳۳}+۳۴\sqrt{۶}+۱۲;$

۱۴) $\left(\frac{۱}{۲}\sqrt{۸}-۳\sqrt{۲}-\sqrt{۱۰}\right)\cdot(\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱/۶}-۳\sqrt{۰/۴});$

۱۵) $\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{۹}}+۴\sqrt[۳]{\frac{۱}{۷۲}}-\sqrt[۳]{۴}\right)\cdot(\sqrt[۳]{۷۲}+\sqrt[۳]{۹۶}+\sqrt[۳]{۱۲۸});$

۱۶) $(۲\sqrt{۶}-\sqrt{۵}+۴\sqrt{۲})\cdot(۳\sqrt{۲۰}+\sqrt{۲۴}-۲\sqrt{۸});$

۱۷) $\sqrt[۳]{(۱+\sqrt{۲})}\cdot\sqrt[۶]{۳-۲\sqrt{۲}},\ \sqrt{۴-۲\sqrt{۲}}\cdot\sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}};$

۱۸) $\sqrt[۴]{۷-۴\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۳}},\ \sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}};$

۱۹) $\sqrt[۴]{\sqrt{۲۳}-\sqrt{۷}}\cdot\sqrt[۴]{\sqrt{۲۳}+\sqrt{۷}}+\sqrt[۶]{۵\sqrt{۲}+۷}\times$

$\times\sqrt[۶]{۵\sqrt{۲}-۷};$

۲۰) $\sqrt{\sqrt{۵}-\sqrt{۳-\sqrt{۲۹-۶\sqrt{۲۰}}}};$

۲۱) $۲\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}};$

۲۲) $(\sqrt[۴]{۷+\sqrt{۴۸}}-\sqrt[۴]{۲۸-۱۶\sqrt{۳}})\cdot\sqrt[۴]{۷+\sqrt{۴۸}}$

۱۲. مخرج کسر را گویا کنید:

۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}, \frac{۲}{\sqrt{۳}}, \frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۴]{۵}}, \frac{۱}{۲\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}\cdot\sqrt[۳]{۲}};$

۲) $\frac{۱}{\sqrt[۵]{۲۷}}, \frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}, \frac{۴}{۳-\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}, \frac{۵}{۳\sqrt{۲}+۴}, \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-۱};$

۳) $\frac{\sqrt{۱۵}-\sqrt{۶}}{\sqrt{۳۵}-\sqrt{۱۴}}, \frac{۱۱}{۳\sqrt{۵}-۲\sqrt{۷}}, \frac{\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}-۴\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}+\sqrt[۳]{۴}};$

۴) $\frac{\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۵}}{\sqrt{۸}+\sqrt{۱۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}+\sqrt{۵}}, \frac{۲}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}, \frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}-۱};$

۵) $\frac{۴}{۲-۳\sqrt[۳]{۲}}, \frac{\sqrt{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}}, \frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۶}+\sqrt[۳]{۴}},$

$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}+\sqrt[۴]{۹}+\sqrt[۴]{۲۷}};$

۶) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}}, \frac{۱}{\sqrt{۲}-\sqrt[۴]{۳}}, \frac{۷}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۶}+۲};$

۷) $\frac{۳}{۲-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۶}}, \frac{۱}{\sqrt[۵]{۲}-۱}, \frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}-\sqrt{۲}}, \frac{۱}{۳\sqrt{۲}-\sqrt{۳}+۱};$

۸) $\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}, \frac{۲\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۵}+\sqrt{۶}-\sqrt{۳}};$

۹) $\frac{۱۲}{۳-\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}, \frac{۱}{\sqrt[۴]{۳}+\sqrt[۴]{۹}-\sqrt[۴]{۲۷}-۱};$

۱۰) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{۷}-\sqrt[۴]{۶}}, \frac{۱}{\sqrt[۸]{۳}+\sqrt[۸]{۲}};$

۱۱) $\frac{۱۵}{\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲۰}+\sqrt{۴۰}-\sqrt{۵}+\sqrt{۸۰}};$

۱۲) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{۹}-\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲۴}-\sqrt[۳]{۲۴۳}+\sqrt[۳]{۳۷۵}}.$

۱۳. عددها را مقایسه کنید:

$۱)\ ۲\sqrt{۵}\ \text{و}\ \sqrt{۱۹}،\ ۳\sqrt[۳]{۳}\ \text{و}\ \sqrt[۳]{۸۱};\quad ۲)\ \sqrt[۸]{۱۰}\ \text{و}\ \sqrt[۴]{۳}،\ \sqrt[۶]{۲۴}\ \text{و}\ \sqrt[۳]{۵};$

$۳)\ \sqrt[۱۲]{۶۲۳}\ \text{و}\ \sqrt[۳]{۵}،\ (۲\sqrt[۳]{۲})^{-۶}\ \text{و}\ ۲^{-۱۱};$

$۴)\ \dfrac{۲\sqrt{۳۰}}{\sqrt{۵}+\sqrt{۶}+\sqrt{۷}}\ \text{و}\ \dfrac{(۳۰-۲\sqrt{۳۰})(\sqrt{۵}+\sqrt{۶}-\sqrt{۷})}{۲۶};$

$۵)\ \sqrt[۴]{۶+\sqrt{۲۰}}\ \text{و}\ \sqrt{۱+\sqrt{۵}};$

$۶)\ ۲\sqrt[۶]{۲}\ \text{و}\ \sqrt[۳]{۴\sqrt{۲\sqrt{۲}}-۲\sqrt{۶\sqrt{۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}};$

$۷)\ \sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}\ \text{و}\ \sqrt{۲}+۱;\quad ۸)\ \sqrt[۴]{۲۸-۱۶\sqrt{۳}}\ \text{و}\ \sqrt{۳}-۱;$

$۹)\ (۴+۲\sqrt{۳}):\sqrt[۳]{۱۰+۶\sqrt{۳}}\ \text{و}\ \sqrt{۳}+۱;$

$۱۰)\ \sqrt{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}:\sqrt{۳\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}}\ \text{و}\ \sqrt[۴]{۵}+\sqrt{۵};$

$۱۱)\ \dfrac{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\ \text{و}\ \dfrac{(۱+\sqrt{۵})}{۲};$

$۱۲)\ \sqrt[۵]{\sqrt{۱۱}-۳}\ \text{و}\ \sqrt[۱۰]{۱۱}-\sqrt[۵]{۳};\quad ۱۳)\ \sqrt{۳۷}+۲-۲\sqrt[۳]{۶۳}\ \text{و}\ ۰;$

$۱۴)\ \dfrac{۱}{۲\sqrt[۳]{۲}+۳\sqrt[۳]{۳}}\ \text{و}\ \dfrac{۳}{۲۰};$

$۱۵)\ \sqrt{۲\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}:\sqrt{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}\ \text{و}\ \dfrac{\sqrt{۵}(\sqrt{۶}+۱)}{۵};$

$۱۶)\ ۳۰\sqrt[۳]{\frac{۱}{۱۲}}-\frac{۹۷}{۶}\sqrt[۳]{۱۸}+۵\sqrt[۳]{۱۴۴}\ \text{و}\ -۳\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}.$

۱۴. به‌صورت توان با نمای گویا بنویسید:

$۱)\ \sqrt{۳}،\ \sqrt[۳]{۹^{۲}}،\ \sqrt[۴]{۷^{۳}}،\ \sqrt[۵]{۱۹^{۴}};$

$۲)\ \sqrt{۳^{-۲}};\ ۱۰\sqrt[۵]{۱۰^{-۳}}،\ \sqrt[۶]{۷^{-۴}}،\ \left(\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۳]{۴}}\right)^{-۱};$

۳) $۲\sqrt{۱۵}, \frac{\sqrt{۲\sqrt{۲}}}{۴}, (\sqrt{۳}:\sqrt[۵]{۳})^{۲}, \sqrt{۳^{۲}\sqrt{۳}};$

۴) $\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}\cdot\sqrt[۴]{۳}}, \frac{\sqrt[۳]{۳\sqrt[۹]{۹}}}{\sqrt{۳}}, \left(\sqrt[۶]{۵\sqrt{۵\sqrt{۵}}}\right)^{۲};$

۵) $\sqrt{۵\sqrt{۵}:\sqrt[۳]{۲۵}}; \sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}:\sqrt[۴]{۲\sqrt{۲}};$

۶) $\sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۱۶\sqrt[۴]{\sqrt{۲}}}}, \left(\sqrt[۵]{۳\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}}}\right)^{\frac{۱}{۲}};$

۷) $\left(\sqrt[۳]{۴\sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۲}}}\right)^{\frac{۱}{۶}}, \left(\sqrt[۴]{۸\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲}}}\right)^{-۲};$

۸) $\sqrt[۳]{\sqrt[۳]{\sqrt{۳\sqrt{۳}}}}:\sqrt[۳]{۳\sqrt{۳}\cdot\sqrt{۲۷}}, \quad \sqrt[۴]{۱۲۵\sqrt[۳]{۶۲۵\sqrt{۵}}}:\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۵}}$

۱۵. عمل‌ها را انجام دهید و نتیجه را به‌صورت توانی گویا بنویسید:

۱) $\sqrt{\sqrt{۳}}\left(\sqrt[۳]{\sqrt{۳}}:\sqrt{\sqrt[۴]{۳}}\right)^{۲};$ ۲) $\sqrt{۵\sqrt[۳]{۵}}:\left(\sqrt[۳]{۵\sqrt{۵}}\cdot\sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}\right)^{\frac{۱}{۲}};$

۳) $\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۳\sqrt{۳}}}:\left(\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۳}}}:\sqrt[۴]{\sqrt{۳\sqrt[۳]{۳}}}\right)^{\frac{۳}{۲}};$

۴) $\left(\sqrt[۳]{۱۶\sqrt[۴]{۸\sqrt{۲}}}\right)^{۲}\cdot\sqrt[۳]{۳۲\sqrt[۴]{۲}}\cdot\sqrt{۲\sqrt[۴]{۴\sqrt[۳]{۴}}};$

۵) $\sqrt{۳\sqrt[۳]{۹\sqrt{۲۷\sqrt{۳}}}}:\left(\sqrt[۱۶]{۳^{۱۵}}\cdot\sqrt[۸]{۳\sqrt{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}};$

۶) $\left(\sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۴\sqrt[۴]{۸\sqrt[۳]{۲}}}}:\sqrt[۹]{۴\sqrt[۳]{۲\sqrt[۳]{۴}}}\right)^{\frac{۱۶۲}{۱۱}}\cdot\sqrt[۳]{۳\sqrt[۹]{۹}};$

۷) $\frac{\sqrt[۶]{۵\sqrt{۵}}\cdot\left(\sqrt[۶]{۲۵\sqrt[۳]{۲۵}}\right)^{۴}}{\left(\sqrt[۳]{۵\sqrt[۴]{۱۲۵}}\right)^{\frac{۲}{۳}}}\cdot\left(\sqrt[۳]{۵\sqrt{۵\sqrt{۵}}}\right)^{\frac{۲}{۳}};$

۸) $\left(\sqrt[۳]{۳۲\sqrt[۴]{۱۶\sqrt[۵]{۱۲۸}}}:\sqrt[۴]{۱۰۲۴\sqrt[۵]{۲۵۶\sqrt[۳]{۶۴}}}\right)^{-\frac{۳۰}{۵۳}};$

۹) $\sqrt[۴]{۷۲۹:\sqrt[۳]{۲۴۳:\sqrt{۲۷:\sqrt{۲:\sqrt[۳]{۴:\sqrt{۸}}}}}};$

۱۰) $\sqrt[۵]{۵\sqrt[۵]{۲۵\sqrt[۵]{۱۲۵\sqrt[۵]{۶۲۵}}}}\cdot\sqrt[۵]{۵\sqrt[۵]{۵\sqrt[۵]{۵\sqrt[۵]{۵}}}};$

۱۱) $\left(\sqrt[۳]{۳\sqrt[۳]{۳}}\cdot\sqrt[۴]{۲۷\sqrt[۴]{۲۷}}\right)^{۶}\cdot\left(\sqrt[۱۲]{۲۴۳\sqrt{۲۴۳}}\right)^{-۳};$

۱۲) $\sqrt{۲\sqrt[۴]{۲\sqrt[۸]{۲}}}\cdot\sqrt[۸]{۲\sqrt{۲\sqrt[۴]{۲}}}:\sqrt[۴]{۲\sqrt[۸]{۲\sqrt{۲}}};$

۱۳) $\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۴\sqrt[۵]{۵}}}\cdot\sqrt[۴]{۴\sqrt[۵]{۵\sqrt[۳]{۳}}}:\sqrt[۵]{۵\sqrt[۳]{۳\sqrt[۴]{۴}}}$

۱۶. محاسبه کنید:

۱) $۰/۰۲۷^{-\frac{۱}{۳}}-\left(-\frac{۱}{۶}\right)^{-۲}+۲۵۶^{۰/۷۵}-۳^{-۱}+۵/۵^{۰};$

۲) $\left(\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۰}\right)^{-۰/۵}-۷/۵\cdot۴^{-\frac{۶}{۴}}-(-۲)^{-۴}+۸۱^{۰/۲۵};$

۳) $\left(۴^{\frac{۱}{۴}}+\left(\frac{۱}{۲}^{-\frac{۳}{۲}}\right)^{-\frac{۴}{۳}}\right)\left(۴^{۰/۲۵}-(۲\sqrt{۲})^{-\frac{۴}{۳}}\right);$

۴) $$\frac{\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۸۱}}{\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۳}{۴}}+\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}\cdot\left(\frac{۱}{۸۱}\right)^{\frac{۱}{۴}}}-\frac{\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۲}}-\left(\frac{۱}{۸۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}}{\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{\frac{۱}{۴}}+\left(\frac{۱}{۸۱}\right)^{\frac{۱}{۴}}};$$

۵) $\left(۲۷^{\frac{۱}{۳}}\cdot۸^{\frac{۲}{۳}}\cdot۳۲^{\frac{۲}{۵}}\cdot۸۱^{\frac{۳}{۴}}\right)^{\frac{۱}{۲}};$

۶) $\left(۱۰۰^{-۰/۵}\cdot ۶۴^{\frac{۴}{۳}}\cdot ۰/۲^{-\frac{۱}{۲}}\cdot ۴^{-\frac{۳}{۴}}\cdot ۴^{-۰/۷۵}\right)^{۴};$

۷) $\left(\left(\left(۳^{-\frac{۱}{۲}}\cdot ۲^{-\frac{۱}{۳}}\right):\left(۳^{-\frac{۳}{۴}}\cdot ۲^{-\frac{۵}{۶}}\right)\right):\left(\frac{۱}{۸۶۴}\right)^{\frac{۱}{۴}}\right)^{۲};$

۸) $$\frac{۳۹\left(-\frac{۱}{۳۲}\right)^{-۱}}{\left((-۲)^{۳}\right)^{۵}\cdot\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۶}\cdot ۶۴^{-۲}+۱۲\cdot ۰/۱۲۵^{-۱}};$$

۹) $\left(-۳\frac{۳}{۸}\right)^{-\frac{۲}{۳}}+۲۷^{\frac{۲}{۳}}\cdot ۹^{۰/۵}\cdot ۳^{-۲}+\left(\left(\frac{۷}{۹}\right)^{۳}\right)^{۰}-\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{-۲};$

۱۰) $\left(\left(\left(۲\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}\cdot\left(۶۲۵^{۰/۲۵}\cdot ۲۵\right)^{۲}\right):\left(\frac{۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}\cdot ۱۶^{\frac{۱۳}{۴}}}{۶۲۵^{-\frac{۱}{۲}}\cdot ۳۲^{۲}}\right)\right)^{\frac{۱}{۳}}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}$

۱۷. برابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $(۴+\sqrt{۱۵})(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۶})\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}}=۲,$

$\sqrt{۴\sqrt{۲}+۲\sqrt{۶}}=\sqrt[۴]{۲}(\sqrt{۳}+۱);$

۲) $\sqrt{۳-\sqrt{۵}}(۳+\sqrt{۵})(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۲})=۸,$

$\sqrt[۴]{۷+\sqrt{۴۸}}=\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۳}+۱)}{۲};$

۳) $\sqrt{۱۷-۴\sqrt{۹+۴\sqrt{۵}}}=\sqrt{۵}-۲,\ \sqrt[۴]{۲۸-۱۶\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}-۱;$

۴) $\sqrt{۶+۲\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}}=\sqrt{۳}+۱,$

$\sqrt{\sqrt{۵}-\sqrt{۳-\sqrt{۲۹-۱۲\sqrt{۵}}}}=۱;$

۵) $\left(\left(\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}+۲۷}{\sqrt{۲}+۳}+۳\sqrt[۱۰]{۳۲}-۲\right)\cdot\frac{۱}{۹}\right)^{۵}=۱;$

$$۶)\ \sqrt{۱-\frac{۲}{\sqrt{۲}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}}}=\frac{\sqrt{۳}(\sqrt{۲}-۱)}{۳},$$

$$\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}(۱۹+۶\sqrt{۱۰})}\cdot\sqrt[۵]{۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}}=-۱;$$

$$۷)\ \frac{a+\sqrt{۲+\sqrt{۵}}\cdot\sqrt[۱۲]{(۹-۴\sqrt{۵})^{۳}}}{\sqrt[۳]{۲-\sqrt{۵}}\cdot\sqrt[۶]{۹+۴\sqrt{۵}}-\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{a}}=-\sqrt[۳]{a}-۱;$$

$$۸)\ \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{\sqrt{۳}+۱}-۱}-\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{\sqrt{۳}+۱}+۱}=۲;$$

$$۹)\ (۱-(\sqrt{۳}-۱):۲)((\sqrt{۳}-۱):۲+۲)=\frac{۳}{۲}$$

$$۱۰)\ ((\sqrt{۲}+\sqrt{۳}):\sqrt{۵}-\sqrt{۵}:(\sqrt{۲}+\sqrt{۳}))^{-۲}-\frac{۵}{(۲\sqrt{۶})}=\frac{۲۵}{۲۴};$$

$$۱۱)\ \frac{۲^{\frac{۴}{۳}}-۸\cdot۲^{\frac{۱}{۳}}\cdot\sqrt{۳}}{۲^{\frac{۲}{۳}}+۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۳}}+۴(\sqrt{۳})^{\frac{۲}{۳}}}:\left(۱-۲\sqrt[۳]{\sqrt{\frac{۳}{۲}}}\right)-۲^{\frac{۲}{۳}}=۰,$$

$$۱۲)\ \frac{\sqrt{۱+۲\frac{\sqrt{۲}}{۳}}+\sqrt{۱-۲\frac{\sqrt{۲}}{۳}}}{\sqrt{۱+۲\frac{\sqrt{۲}}{۳}}-\sqrt{۱-۲\frac{\sqrt{۲}}{۳}}}=\sqrt{۲};$$

$$۱۳)\ \sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}+۷}-\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}-۷}=۲;$$

$$۱۴)\ \sqrt[۳]{۲۰+۱۴\sqrt{۲}}+\sqrt[۳]{۲۰-۱۴\sqrt{۲}}=۴;$$

$$۱۵)\ \Big(۲^{\frac{۳}{۲}}+۳^{\frac{۳}{۲}}:(-۱)-۲:(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})-$$

$$-\frac{۳}{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})}\Big):(\sqrt{۶}(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{-۱})=۱;$$

۱۶) $$\sqrt{۸+۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}+\sqrt{۸-۲\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}= =\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰};$$

۱۷) $$\frac{۲\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۶\sqrt{۲}}\right)^{-۱}+۳\left(\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{۴\sqrt{۳}}\right)^{-۱}}{\left(۲+\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}\right)^{-۱}+\left(۳+\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}\right)^{-۱}}=\sqrt{۶};$$

۱۸) $$۲\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۳+\sqrt{۴۸}}}}=\sqrt{۶}+\sqrt{۲};$$

۱۹) $$\sqrt{۸+\sqrt{۸}+\sqrt{۲۰}+\sqrt{۴۰}}=۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۵};$$

۲۰) $$\frac{۲}{\sqrt[۴]{۷}}-\sqrt[۴]{۷}-\frac{\sqrt{۷}-\frac{۱}{\sqrt{۷}}}{\sqrt[۴]{۷}-\sqrt{\frac{۱}{\sqrt{۷}}}}+ +\frac{۶}{\sqrt{۷}\left(\sqrt[۴]{۷}+\sqrt{\frac{۱}{۷}}\right)}+\frac{۷}{\sqrt[۴]{۳۴۳}}=۰;$$

۲۱) $$\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}})=\frac{۲۶}{۱۵};$$

۲۲) $$\frac{\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}-\frac{۲}{\sqrt{۶}}+\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{(\sqrt{۳}\cdot۲)}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲};$$

۲۳) $$\sqrt[۳]{۲۶+۱۵\sqrt{۳}}(۲-\sqrt{۳})+\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۸۰}}+\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۸۰}}=۴;$$

۰۱۸ تفاضل $\sqrt{۴۰\sqrt{۲}+۵۷}-\sqrt{|۴۰\sqrt{۲}-۵۷|}$ را، که عددی درست است، پیدا کنید.

۰۱۹ تفاضل $\sqrt{۱۲\sqrt{۵}+۲۹}-\sqrt{|۱۲\sqrt{۵}-۲۹|}$ را پیدا کنید.

۲۰. مجموع دو عدد برابر $\sqrt{۱۸}$ و تفاضل آن‌ها برابر $\sqrt{۱۴}$ است. ثابت کنید، حاصل‌ضرب این دو عدد برابر واحد است.

۲۱. این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱)\ \sqrt{۲۷}+\sqrt{۶}+۱>\sqrt{۴۸};$$

$$۲)\ \frac{۵+\sqrt{۵}}{۵-\sqrt{۵}}+\frac{۵-\sqrt{۵}}{۵+\sqrt{۵}}-\sqrt{۱۰}<۰;$$

$$۳)\ \frac{۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۱+\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}+\frac{\sqrt{۵}-۱}{۱+\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}\right)\times$$
$$\times\left(\sqrt{۳}-۴\sqrt{\frac{۱}{۳}}+۲\right)\cdot\sqrt{۰/۲}-\sqrt{۱/۰۱}<۰;$$

$$۴)\ \sqrt{\sqrt{۲}+۲\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}+\sqrt{\sqrt{۲}-۲\sqrt{\sqrt{۲}-۱}}>۱/۹;$$

$$۵)\ \frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt[۴]{۳}}\left(\frac{\sqrt[۴]{۶}}{\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۴]{۳}}\right)-۲\sqrt{۲}\frac{\sqrt[۴]{۶}}{\sqrt[۴]{۲}-\sqrt[۴]{۳}}+$$
$$+\sqrt{۲}\cdot\sqrt[۴]{۳}+۰/۰۱>۰;$$

$$۶)\ \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-۱}{۲+\sqrt{۶}}+\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۶}}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲-\sqrt{۶}}+\frac{\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۶}}\right)-$$
$$-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\sqrt{۳-\sqrt{۲}}>۰;$$

$$۷)\ \sqrt{۸+\sqrt{۴۰}+\sqrt{۲۰}+\sqrt{۸}}-\sqrt{۵}-\sqrt{۲}-\frac{۱۰۰}{۹۹}<۰;$$

$$۸)\ \frac{\sqrt{\sqrt{۲}-۱}\cdot\sqrt[۴]{۳+۲\sqrt{۲}}+\sqrt{-۱۴\sqrt{۲}+۲۰}}{\frac{۲-\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}-۱}-\sqrt{\sqrt{۲}+۱}\cdot\sqrt[۴]{۳-۲\sqrt{۲}}}-\frac{۹}{۱۰}>۰;$$

$$۹)\ (\sqrt[۶]{۹+۴\sqrt{۵}}+\sqrt[۳]{۲+\sqrt{۵}}\cdot\sqrt[۳]{\sqrt{۵}-۲}-۲/۱<۰;$$

$$۱۰)\ \sqrt[۴]{۱۷+۱۲\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}>\sqrt{۳}-۱;$$

۱۱) $۲(\sqrt[۴]{۳}+\sqrt[۴]{۵}+\sqrt[۴]{۷})-(\sqrt{۳}+\sqrt{۵}+\sqrt{۷})<۳;$

۱۲) $۳\sqrt{۲}+\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})>۲\sqrt[۴]{۶}(۱+\sqrt[۴]{۲}+\sqrt[۴]{۳});$

۱۳) $۶\sqrt{۲}+۸\sqrt{۳}+۵\sqrt{۵}>۵\sqrt[۴]{۶}+۷\sqrt[۴]{۱۰}+۳\sqrt[۴]{۱۵};$

۱۴) $\dfrac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}+\sqrt{۳}\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۴}<۰/۸.$

۲۴. ساده کنید:

۱) $\sqrt{a^۴},\ \sqrt{a^۴b^۴},\ \sqrt{a^۲b^۲},\ \sqrt[۳]{a^۳},\ \sqrt[۳]{x^۳y^۳},\ \sqrt[۳]{x^۶};$

۲) $\sqrt{\dfrac{a^۲}{۲}},\ \sqrt{\dfrac{(xy)^۲}{۳}},\ \sqrt{۴(x-۱)^۲},\ \sqrt{۹(۲-y)^۲};$

۳) $\sqrt{\dfrac{a^۲}{b^۲}},\ \sqrt{\sqrt{x^۲}:x},\ \ \sqrt{x^۲}:\sqrt{y^۲},\ \sqrt[۳]{x^۲}\sqrt[۳]{x},\ \sqrt{y^۶};$

۴) $b\sqrt{a}:\sqrt{ab^۲},\ b^۲\sqrt{b}:\sqrt{b^۵},\ c\sqrt{a^۲}:\sqrt{c^۲a^۲},$

$\sqrt{a}\sqrt{b}:\sqrt{a^۲b^۲},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\sqrt{\dfrac{b}{a}};$

۵) $x\sqrt{\dfrac{۲}{x^۲}},\ \sqrt[۴]{(x-۳)^۴},\ \sqrt{(x-y)^۲},\ \sqrt{(a-b)^۲}:(a-b);$

۶) $x\dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{x^۲}},\ \sqrt[۴]{x^۲},\ \sqrt[۳]{a^۶},\ \sqrt[۳]{x^۶y^۶},\ \sqrt[۶]{a^۴b^۴};$

۷) $\sqrt{a^۲}:\sqrt{ab},\ \sqrt[۴]{x^۴y^۴}:(\sqrt{xy}.\sqrt{x^۲}),\ \sqrt{a^۲}.\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}};$

۸) $\dfrac{\sqrt[۴]{x^۴}}{\sqrt{\dfrac{x}{y}}},\ \sqrt{ab}:\sqrt[۴]{\dfrac{a^۲}{b^۲}},\ \dfrac{\sqrt[۶]{(xy)^۳}}{x}.\sqrt{\dfrac{x}{y}};$

۹) $۲\sqrt{x}+۵\sqrt{۲۵x}-۳\sqrt{۳۶x}-۴\sqrt{۹x};$

۱۰) $\sqrt{۱۶x}+\sqrt[۳]{۸a}-(۲\sqrt[۳]{۲۷a}-\sqrt{۹x})$;

۱۱) $۸b\sqrt[۳]{\frac{a^۲}{b^۲}}+\frac{۴}{a}\sqrt{a^۵b}-۷a\sqrt[۳]{\frac{b}{a}}-۲\sqrt[۳]{a^۲b^۴}$;

۱۲) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x}{y}}-\frac{ab}{x}\sqrt{xy}+\frac{a^۲}{b^۲}\sqrt{\frac{y}{x}}\right)\cdot a^۲b^۲\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}$;

۱۳) $\sqrt{x^۲}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{xy}{\sqrt{xy}}-x^۲+\frac{x^۲\sqrt{xy}}{y}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$

۲۳. عمل‌ها را انجام دهید:

۱) $\frac{۱}{۳}\sqrt[۴]{x}$، $\sqrt{x}x$، $\sqrt{x^۲}x^۲y\cdot\sqrt{y\sqrt{y}}$;

۲) $x^۳\sqrt{۴xy}$، $xy\sqrt[۴]{x^۲y^۲}$، $\left(\frac{-۴}{x}\sqrt[۴]{x^۲y}\right)^۳$;

۳) $(xy)^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{x^۲}$، $(x^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۱}{۲}}xy$، $(x^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}\frac{x^{-۱}y}{y^۲x}$;

۴) $\left(-\frac{x}{۲y}\sqrt[۳]{\frac{y}{x}}\right)^۵$، $\frac{xy}{\sqrt[۳]{xy}}:\left(\frac{y}{x}\right)^{-۱}$، $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}}}$;

۵) $((\sqrt{x})^۲)^۳:((xy)^{-۱}\cdot\sqrt{xy})$، $\sqrt[۳]{\frac{a}{x}\sqrt{\frac{۱}{ax}\sqrt{\frac{a}{x^۳}}}}$;

۶) $\left(-\frac{۳}{۵}\sqrt[۴]{x^۳y}\right)^۲\left(\frac{-۲}{۳}\sqrt[۵]{x^۲y^۳}\right)^۵$;

۷) $\left(\frac{y}{x}\sqrt[۴]{x^۲y^۴}\right)^۳:\left(\frac{x}{y}\sqrt[۶]{\frac{y}{x}}\right)^۲$; ۸) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\cdot\sqrt[۳]{a^۲\sqrt[۴]{a\sqrt{a}}}$;

۹) $\sqrt[۳]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[۳]{\frac{y}{x}}}$;

۱۰) $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{a^{۲}\sqrt{b^{۴}}}}, \frac{\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x}{y}}}}}{\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[۳]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}}};$

۱۱) $\frac{(a^{\frac{۳}{۴}}b^{\frac{۳}{۲}}c^{۴/۵})^{\frac{۲}{۳}}}{(۸b)^{\frac{۱}{۲}}c}\cdot\left(\frac{a^{-\frac{۵}{۳}}b^{۱/۲۵}}{a^{-\frac{۵}{۶}}b^{\frac{۱}{۶}}}\right)^{-\frac{۶}{۵}};$

۱۲) $(a^{\frac{۱}{۲}}+b^{\frac{۱}{۳}}-a^{\frac{۱}{۲}})\cdot(۲\sqrt{b}+۳b^{\frac{۲}{۳}}-۲b^{\frac{۱}{۲}});$

۱۳) $\frac{\sqrt{a^{۲}b^{۲}-۴ab}}{a^{۲}b^{۲}}\cdot\frac{\sqrt{a^{۲}b}}{۲}\cdot\frac{\sqrt{b^{۲}}}{a};$

۱۴) $\left(\left(\frac{ab\sqrt{a^{۲}}}{\sqrt{b^{۲}}}-\frac{b}{a^{۲}}\right):\frac{۱}{\sqrt{b^{۲}}}\right):\frac{b}{a};$

۱۵) $\left(\sqrt[۴]{a^{۲}b^{۲}\sqrt{\frac{a^{۲}}{b^{۲}}}}\cdot\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a^{۲}}:\sqrt{b^{۲}}\right):\left(\frac{a}{۸}\sqrt{\frac{b^{۲}}{ab}}\right);$

۱۶) $\left(\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{a^{۵}}}}\cdot\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\right):\left(\sqrt[۶]{\sqrt[۳]{\sqrt{a^{۲}}}}\cdot\sqrt[۹]{a^{۲}}\right);$

۱۷) $\frac{((\sqrt[۴]{x^{۳}\sqrt[۳]{x}}\cdot\sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt[۴]{x}}):(\sqrt{x\sqrt[۶]{x}}):\sqrt[۶]{x\sqrt{x}}}{\sqrt[۸]{x\sqrt[۳]{x}}\cdot\sqrt[۶]{x}};$

۱۸) $\sqrt[۳]{\sqrt{x^{۳}}\cdot\sqrt[۳]{x^{۴}}:\sqrt[۶]{x^{۵}}}\cdot\sqrt[۴]{x^{۲}:\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

۲۴. همهٔ عددهای گویای p را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $۲\times۲^{p}=\frac{۸^{p}}{۲};$ ۲) $۳^{\frac{p}{۲}-۱}-۹=۰;$ ۳) $۴^{p+۲}=۱۲۸;$

$۴)\ ۲^{۴p-۹}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{p-۴};\qquad ۵)\ (\sqrt[۳]{۲})^{p+۱۳}=\frac{۱}{۳۲};$

$۶)\ \left(\frac{۱}{۶۴^۲}\right)^{-p}=\sqrt{\frac{۱}{۸}};\quad ۷)\ \left(\frac{۲}{۳}\right)^{p}\cdot\left(\frac{۹}{۸}\right)^{p}=\frac{۸۱}{۲۵۶};$

$۸)\ ۳^p\left(\frac{۱}{۳}\right)^{p-۳}=\left(\frac{۱}{۹}\right)^{p};\qquad ۹)\ ۲^p.۳^p=۶\sqrt{۳۶\sqrt{۶}};$

$۱۰)\ ۶^{۳-p}.۶^{۴+p}=\sqrt[۳]{۲۱۶^p}$

۲۵. عددهای درست p را پیدا کنید، به‌نحوی که

$۱)\ ۶^p>\sqrt[۳]{۳۶};\quad ۲)\ \sqrt[۵]{۱۰۲۴}\leqslant ۴^p;\quad ۳)\ ۷^{p+۲}\sqrt{۴۹}\geqslant ۳۴۳;$

$۴)\ ۲^{۳p}\sqrt{۵۱۲}<\sqrt{۲\sqrt{۲}};\qquad ۵)\ ۲۵.۵^{۲p}\leqslant\sqrt[۳]{۷۵}\cdot\sqrt[۳]{\frac{۵}{۳}};$

$۶)\ \sqrt{\frac{۲}{۵}}\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۳p+۱}>\frac{۱۲۵}{۸};\quad ۷)\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳p-۱}\leqslant ۴\sqrt{\frac{۱}{۳۲}};$

$۸)\ \left(\frac{۱}{۳}\right)^{p+۲}\sqrt{\frac{۱}{۲۷}}\geqslant ۹$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) $۴^۰$، $۴^۱$، $۴^۲$، $۴^۳$، $۴^۴$؛ ۲) $۴^{-۱}$، $۴^{-۳}$، $۴^{-۴}$، $۴^{-۲}$، $۴^{-۵}$.

۲. ۱) $\frac{۱}{۲۷}$، ۲۵، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۸}$، ۱۶؛ ۲) ۷۴؛ ۳) $\frac{۱۷}{۸}$؛ ۴) ۳.

۳. ۱) $۲^{۱۲}$؛ ۲) $۳^۳$؛ ۳) $(۲\sqrt[۳]{۹})^۳$؛ ۴) $\left(\frac{۱}{۳}\sqrt[۵]{۱۶}\right)^۵$؛ ۵) $(۳۰\sqrt{۲})^۲$؛ ۶) $\left(-\frac{۲}{۳}\right)^۵$؛ ۷) $۲^۸$؛ ۸) $۲^۴$؛ ۹) $\left(-\frac{۱}{۴}\right)^۳$؛ ۱۰) $۲^{-۳}$.

تکلیف ۲.

۱. $۳^{۰}$، $۳^{۲}$، $۳^{-۴}$، $۳^{۵}$، $۳^{۳}$، $۳^{-۱}$، $۳^{۴}$، $۳^{۱}$، $۳^{-۶}$، $۳^{-۳}$.

۲. ۱) ۳۵؛ ۲) ۱؛ ۳) ۴؛ ۴) $\frac{۱}{۹}$؛ ۵) $\frac{۱}{۳۵}$؛ ۶) -۳۲؛
۷) $-\frac{۱}{۸}$؛ ۸) $\frac{۱}{۸}$؛ ۹) $-\frac{۱۲۵}{۳۸۴}$؛ ۱۰) $\frac{۷۷}{۳۶}$؛ ۱۱) $\frac{۴}{۵}$؛ ۱۲) $-\frac{۲}{۵}$.

۳. ۱) $۵^{۴}$؛ ۲) $(-۴)^{۱}$؛ ۳) $۲^{۴}$؛ ۴) $۲^{۷}$؛ ۵) $۳^{۲}$؛ ۶) $۳^{۲}$؛
۷) $۲^{۸}$؛ ۸) $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۲}$.

تکلیف ۳.

۱. ۱) $a^{۶}$؛ ۲) $a^{۵}$؛ ۳) $a^{۱۰}$؛ ۴) $a^{۱}$؛ ۵) $a^{۳}$؛ ۶) $a^{-۵}$؛
۷) $a^{۴}$؛ ۸) $a^{-۲}$؛ ۹) $a^{-۳}$؛ ۱۰) $a^{-۶}$؛ ۱۱ ($a^{۹}$؛ ۱۲) $a^{-۱۰}$.

۲. ۱) $(a^{۲})^{۳}$؛ ۲) $(d^{۴})^{۳}$؛ ۳) $(a^{۳})^{۳}$؛ ۴) $(a^{۲})^{۶}$.

۳. ۱) $۶x^{۴}y^{۲}$؛ ۲) $x^{۴}y^{۴}$؛ ۳) $\frac{۱}{۲}x^{۴}$؛ ۴) $-۶y$؛

۵) $-\frac{۱}{۴}x^{۱۰}y^{۵}$؛ ۶) $۳x^{-۱}y$؛ ۷) $۲x^{-۳}y$؛ ۸) x.

۴. ۱) $n=۳$؛ ۲) $n=۲$.

۵. ۱) $\{۶\}$؛ ۲) $\{۳، ۴، ۵\}$؛ ۳) $\{۵\}$.

تکلیف ۴.

۱. ۱) $b^{۵}$؛ ۲) $b^{۹}$؛ ۳) b؛ ۴) $b^{۴}$؛ ۵) $b^{-۵}$؛ ۶) $b^{-۳}$؛
۷) $b^{۸}$؛ ۸) $b^{۴}$؛ ۹) $b^{-۴}$؛ ۱۰) $b^{۱۲}$؛ ۱۱) $b^{۷}$؛ ۱۲) $b^{-۱۲}$.

۲. ۱) $\frac{۱}{۳}y^{-۳}$؛ ۲) $\frac{۱}{۴}$؛ ۳) $۴xy^{-۳}$؛ ۴) $۳x^{-۲}y^{-۲}$؛

۵) $\frac{۱}{۳}y^{۵}$؛ ۶) $\frac{۱}{۸}x^{-۵}y^{۵}$؛ ۷) $x^{۲}y^{-۲}$؛ $\frac{۱}{۴}x^{-۱۰}y^{۸}$.

۳. ۱) $n=۵$؛ ۲) $n=۶$.

۴. ۱) $\{۳\}$؛ ۲) $\{۲، ۳، ۴، ۵\}$؛ ۳) $\{۲، ۳\}$.

تکلیف ۵.

۱. $۴^{\frac{۱}{۲}}$، $۴^{\frac{۳}{۲}}$، $۴^{-\frac{۷}{۲}}$، $۴^{\frac{۵}{۲}}$، $۴^{-\frac{۳}{۲}}$، $۴^{\frac{۷}{۲}}$، $۴^{-\frac{۱}{۲}}$، $۴^{۳}$، $۴^{-\frac{۳}{۲}}$، $۴^{-۴}$.

۲. ۱) ۲، ۰/۵، ۲، $\frac{۶}{۵}$، $\frac{۴}{۳}$، ۲؛ ۲) ۶، ۲، ۱۸، ۱۰، ۶، ۱۸؛

۳) ۱۴، ۳، ۸؛ ۴) ۳، ۲، $\frac{۱}{۲}$، ۶۷۵، $\frac{۱۰۸}{۴۹}$، ۲؛

۵) ۲، ۲، ۷۲، ۵۷۶، $\frac{۹}{۲۵}$، $\frac{۵}{۴}$.

۳. ۱) $\sqrt{۱۸}$؛ ۲) $\sqrt[۳]{۳۲}$؛ ۳) $-\sqrt[۴]{۹}$؛ ۴) $\sqrt[۵]{۲}$؛

۵) $-\sqrt[۴]{\frac{۸۱}{۸}}$.

۴. ۱) $۵\sqrt{۶}$؛ ۲) $۹\sqrt{۶}$؛ ۳) $۲\sqrt[۳]{۳}$؛ ۴) $۶\sqrt[۳]{۵}$؛ ۵) $۲\sqrt[۵]{۲۵}$؛
۶) $\sqrt{۳}(\sqrt{۲}-۱)$؛ ۷) $\sqrt{۵}(\sqrt{۲}-۱)$.

۵. ۱) $۵\sqrt{۵}$؛ ۲) $۱۸\sqrt[۳]{۳}$؛ ۳) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۶}$؛ ۴) $\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۴}$؛

۵) $\frac{۱}{۶}\sqrt{۱۰}$؛ ۶) $\frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{۹۰}$؛ ۷) $۱۶\sqrt[۵]{۴۴}$؛ ۸) $\frac{۴}{۳}\sqrt[۴]{۴۰}$.

۶. ۱) $\sqrt[۱۲]{۴}$، $\sqrt[۱۲]{۱۶}$، $\sqrt[۱۲]{۸}$؛ ۲) $\sqrt[۲۰]{۹}$، $\sqrt[۲۰]{۳۲}$، $\sqrt[۲۰]{۶۲۵}$؛

۳) $\sqrt[۱۲]{\frac{۱}{۶۴}}$، $\sqrt[۱۲]{۲۷}$، $\sqrt[۱۲]{\frac{۱}{۸۱}}$.

۷. ۱) ۳، ۲۵، ۸، ۶، ۵؛ ۲) $\sqrt[۴]{۸}$، ۳، $\sqrt{۶}$، ۱۴، $۳\sqrt[۳]{۴}$؛ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$،
$۳\sqrt[۳]{۳}$، ۲، $۲\sqrt[۷]{۳}$.

تکلیف ۶.

۱. $۹^{-\frac{۱}{۲}}$، $۹^{\frac{۳}{۲}}$، $۹^{\frac{۱}{۲}}$، $۹^{-\frac{۵}{۲}}$، $۹^{۰}$، $۹^{-\frac{۳}{۲}}$، $۹^{\frac{۵}{۲}}$، $۹^{-۲}$، $۹^{-۳}$، $۹^{\frac{۷}{۲}}$.

۲. ۱) ۳؛ ۲) $۰/۳$؛ ۳) $\frac{۳}{۲}$؛ ۴) ۴؛ ۵) $\frac{۳}{۴}$؛ ۶) $\frac{۱}{۹}$؛ ۷) $\frac{۲۱}{۵}$؛
۸) $۳-۲\sqrt{۲}$؛ ۹) ۳؛ ۱۰) ۱۰؛ ۱۱) ۱؛ ۱۲) ۲.

۳. ۱) $\sqrt[۳]{۲۴}$؛ ۲) $-۲\sqrt{۳}$؛ ۳) $\sqrt{۱۰}$؛ ۴) $\sqrt{۳(۲-\sqrt{۳})^{۲}}$؛
۵) $-\sqrt{۷(۱-\sqrt{۷})^{۲}}$؛ ۶) $\sqrt[۴]{۲}$.

۴. ۱) $۷\sqrt{۲}$؛ ۲) $۲\sqrt{۷۰}$؛ ۳) $۵\sqrt[۳]{۲}$؛ ۴) $۳\sqrt[۴]{۳}$؛ ۵) $۳\sqrt[۵]{۵}$؛
۶) $(\sqrt{۳}-۱)\sqrt[۴]{۲}$؛ ۷) $(\sqrt{۲}-۱)\sqrt[۴]{۳}$؛ ۸) $\sqrt{۲}(۳+\sqrt{۱۰})$.

۵. ۱) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۵}$؛ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۰}$؛ ۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۲}$؛ ۴) $\frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{۶}$؛ ۵) $۲\sqrt[۳]{۳}$؛

۶) $\frac{۱}{۳}\sqrt[۳]{۹۹}$.

۶. ۱) ۲، ۶، ۲، $۴\sqrt{۶}$؛ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt[۳]{۴}$، $۲۲\sqrt{۳}$، $\sqrt{۷}$، $\sqrt[۳]{۲}$؛ ۳) $\sqrt{۲}$،

$\sqrt{۳}$، $\sqrt[۴]{۸}$، $\sqrt[۳]{۱۸}$؛ ۴) ۶۲۵، ۲۷، $\frac{۴۹}{۱۲۸}\sqrt[۵]{۴}$.

۷. ۱) $\sqrt[۱۲]{۳^{۶}}$، $\sqrt[۱۲]{۳^{۴}}\sqrt[۱۲]{۳^{۳}}$؛ ۲) $\sqrt[۲۰]{۲^{۱۰}}$، $\sqrt[۲۰]{۲^{۵}}$، $\sqrt[۲۰]{۲^{۴}}$؛
۳) $\sqrt[۶۰]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}}$، $\sqrt[۶۰]{\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۴}}$، $\sqrt[۶۰]{۴^{۵}}$.

تکلیف ۷.

۱. ۱) $۳\sqrt{۵}+۲\sqrt{۳}+۳\sqrt{۲}$؛ ۲) $-\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}$؛ ۳) $۴۷-۹\sqrt{۵}$؛

۴) $۳۶-\sqrt{۲}+۲۷\sqrt{۳}$؛ ۵) $۱+\frac{۴}{۱۵}\sqrt{۶}-\frac{۵}{۳}\sqrt{۵}$؛ ۶) $۱۸-\frac{۳۴}{۵}\sqrt{۵}$؛

۷) $۱۷\sqrt{۵}$؛ ۸) $\frac{۷}{۸}-\frac{۱۴}{۳}\sqrt{\frac{۲}{۳}}+۴\sqrt{\frac{۲}{۵}}$؛ ۹) $۴\sqrt{۳}$؛
۱۰) $۳۵+۱۲\sqrt{۲}-۱۶\sqrt{۳}-۴\sqrt{۶}$.

۲. ۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$؛ ۲) $\sqrt{۲}\cdot\frac{\sqrt[۳]{۹}}{۳}$؛ ۳) $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$؛
۴) $\frac{۴(-۱+۳\sqrt{۲})}{۱۷}$؛ ۵) $-\frac{۲\sqrt{۲}+۳\sqrt{۳}}{۱۹}$؛
۶) $\frac{۷+۵\sqrt{۲}+۳\sqrt{۵}+۲\sqrt{۱۰}}{۲}$.

تکلیف ۸.

۱. ۱) $\sqrt[۳]{۵}-۲\sqrt[۳]{۶}$؛ ۲) $۱۹\sqrt{۲}$؛ ۳) ۱۸؛ ۴) $-۱۴\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}$؛
۵) $\frac{۱}{۶}\sqrt{۲}+\frac{۵}{۳}\sqrt{۳}-\frac{۵}{۴}\sqrt{۵}$؛ ۶) $۲۴+\sqrt{۱۱۱}$؛ ۷) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲۳}{۵}-۳\sqrt[۳]{۹}\right)$؛
۸) ۲؛ ۹) $۱۱+۶\sqrt{۲}+۴\sqrt{۳}+۲\sqrt{۶}$؛ ۱۰) ۱۰؛ ۱۱) $۲\sqrt{۵}$.

۲. ۱) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$؛ ۲) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\sqrt[۳]{۴}$؛ ۳) $\frac{۲}{۷}\sqrt[۴]{۴۹}$؛ ۴) $-\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$؛
۵) $\frac{۲}{۷}+\frac{۴}{۷}\sqrt{۲}$؛ ۶) $\frac{۱}{۱۵}(۳\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲})$؛ ۷) $\frac{۳}{۴}(۲+\sqrt{۶}-\sqrt{۱۰})$؛
۸) $\frac{۲}{۱۳}(\sqrt{۲۱۰}+۱۰\sqrt{۶}-۹\sqrt{۵}+۱۵\sqrt{۷})$.

تکلیف ۹.

۱. ۱) $۲^{\frac{۱}{۲}}$؛ ۲) $۶^{\frac{۲}{۵}}$؛ ۳) $۲^{\frac{۴}{۷}}$؛ ۴) $۳^{-\frac{۳}{۲}}$؛ ۵) $۴^{-\frac{۵}{۷}}$؛
۶) $۲^{\frac{۵}{۲}}$؛ ۷) $۳^{\frac{۸}{۵}}$؛ ۸) $۳^{۳}$؛ ۹) $۳^{\frac{۳۹}{۸}}$؛ ۱۰) $۳^{-\frac{۱}{۲}}$.

۲. ۱) $\sqrt[۳]{۲}$، $\sqrt[۵]{۴}$، $\sqrt[۳]{۲۵}$، $\sqrt[۷]{۳۴۳}$؛ ۲) $\sqrt{۳}$، $\sqrt[۴]{۲}$،
$\sqrt[۴]{\frac{۱}{۸}}$، $۲۵\sqrt[۳]{۵}$؛ ۳) $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}$، $\sqrt{\frac{۱}{۲}}$، $\sqrt{\frac{۱}{۲}}$، $\frac{۱}{۴}$، $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۶۲۵}}$.

۳. ۱) ۵، ۳، ۱۶، ۰، $\frac{۱}{۴}$، ۸، ۲؛ ۲) ۲، ۳، ۲؛ ۳) ۲۵، ۸،
۱۶؛ ۴) ۱۲۸، ۱، ۱۵.

۴. ۱) $۲^{-\frac{۳}{۲}}$، $۲^{-\frac{۸}{۳}}$، $۲^{\frac{۷}{۲}}$؛ ۲) $۲^{\frac{۵}{۶}}$، $۲^{\frac{۱}{۶}}$، $۲^{\frac{۴}{۳}}$؛ ۳) $۲^{\frac{۴}{۵}}$،
$۲^{-\frac{۱}{۸}}$، $۲^{-۱}$؛ ۴) $۲^{\frac{۱}{۴}}$، $۲^{\frac{۲}{۹}}$، $۲^{\frac{۱}{۶}}$، $۲^{-\frac{۷}{۸}}$، $۲^{\frac{۱۳}{۲۷}}$.

تکلیف ۱۰.

۱. ۱) $۲^{\frac{۲}{۳}}$؛ ۲) $۳^{\frac{۱}{۳}}$؛ ۳) $۳^{\frac{۵}{۳}}$؛ ۴) $۲^{-۲}$؛ ۵) $۳^{-\frac{۳}{۵}}$؛
۶) $۵^{\frac{۳}{۵}}$؛ ۷) $۷^{\frac{۷}{۸}}$؛ ۸) $۲^{\frac{۹}{۵}}$؛ ۹) $۳^{\frac{۱۵}{۳}}$؛ ۱۰) $۴^{-\frac{۵}{۳}}$.

۲. ۱) $\sqrt{۳}$، $\sqrt[۳]{۸۱}$، $\sqrt[۴]{۶}$؛ ۲) $\sqrt{۲}$، $\sqrt[۴]{۸}$، $\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲}}$، $\sqrt[۳]{۷۸۱۲۵}$؛
۳) $\sqrt[۴]{\frac{۱}{۳}}$، $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۵}}$، $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴۹}}$.

۳. ۱) ۴، ۴، ۲، ۰، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱۲۵}{۸}$، $\frac{۴}{۹}$؛ ۲) ۱، ۴، ۲؛
۳) ۶، $\frac{۱}{۱۲۵}$، $\frac{۳}{۴}$؛ ۴) ۱، ۳، ۲۴۳.

۴. ۱) $۳^{-\frac{۱}{۲}}$، $۳^{-\frac{۷}{۳}}$، $۳^{۰}$؛ ۲) $۳^{\frac{۴}{۳}}$، $۳^{-\frac{۱}{۱۲}}$، $۳^{۲}$ ۳) $۳^{\frac{۴}{۳}}$،
$۳^{-\frac{۱}{۶}}$، $۳^{\frac{۱}{۲}}$؛ ۴) $۳^{\frac{۱}{۴}}$، $۳^{\frac{۱}{۹}}$، $۳^{\frac{۱}{۶}}$، $۳^{-\frac{۷}{۸}}$، $۳^{\frac{۱۳}{۲۷}}$.

تکلیف ۱۱.

۱. ۱) $۲|a|$، $۲ab$، $۲|x|y^۲$؛ ۲) $\frac{a^۲|b|}{|d|}$، $\frac{x^۲d}{y}$، $\frac{۲a^۲}{۳\sqrt[۳]{|b|}}$؛
۳) $\frac{۱}{x}$، $\frac{۱}{y^۲}$، $\frac{dx^۳}{y}$.

۱۰۲) $2^{-1}x^{\frac{1}{3}}$، $d^{1}y^{\frac{1}{2}}$، $x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}$، $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$؛ ۲) $2^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{7}{2}}$،
$x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}$، $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}$، $a^{1}x^{-\frac{1}{2}}$؛ ۳) y^{3}؛ ۴) $3^{4}\cdot5^{-4}a^{-6}b^{16}c^{0}d^{22}$؛
۵) $2\cdot3^{-1}a^{1}b^{0}c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{1}$؛ ۶) $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{3}}$، $a^{1}b^{-\frac{1}{2}}$، $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{6}}$؛
۷) $y^{-\frac{3}{20}}$، $c^{\frac{7}{9}}$؛ ۸) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{6}}$.

تکلیف ۱۲.

۱۰۱) $3|a|$، $3b$، $\frac{1}{4}b^{2}|a|$، ay؛ ۲) $a^{2}b^{4}y^{6}$، my^{2}، $|xy|$؛
۳) m^{-2}، a^{-2}، md^{2}، $\frac{5}{3}\cdot\frac{cd^{2}}{a^{2}b^{3}}$.

۱۰۲) $2^{1}a^{\frac{1}{2}}$، $c^{\frac{3}{2}}$، $2^{2}d^{\frac{1}{2}}$، $2^{-1}x^{\frac{1}{4}}$، $3^{1}y^{\frac{1}{2}}$، $x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{5}{2}}$،
۲) $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$، $5^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{2}}$، $2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{1}{3}}$، $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{6}}$، $x^{1}y^{-\frac{1}{4}}$؛
۳) $5^{-4}6^{4}a^{\frac{1}{2}}|b|^{-1}$، $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}}$، $2^{-\frac{1}{2}}3^{0}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{1}$،
$3^{\frac{1}{3}}2^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$؛ ۴) $a^{-\frac{16}{3}}b^{\frac{11}{3}}$؛ ۵) $x^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{10}{3}}$؛
۶) $a^{\frac{5}{12}}b^{-2}$؛ ۷) $c^{\frac{1}{2}}d^{-\frac{1}{2}}$؛ ۸) $a^{1}y^{0}$.

تکلیف ۱۳.

۱۰۱) $a=\frac{1}{2}$؛ ۲) $a=-\frac{2}{5}$؛ ۳) $a=-\frac{1}{3}$؛ ۴) $a=8$؛
۵) $a=2$؛ ۶) $a=\frac{1}{4}$؛ ۷) $a=\frac{1}{2}$؛ ۸) $a=\frac{4}{5}$.

تمرین‌ها

۱۰۱) ۳۲، $\frac{1}{27}$، $16\frac{1}{2}$؛ ۲) ۶۴، -64، ۲؛ ۳) ۶۲۵، -3، ۴۹؛

۴) -۱، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۸}$؛ ۵) -۲۷، $\frac{۱}{۲۰۰}$، $\frac{۱}{۲۵}$؛ ۶) $\frac{۱}{۸}$، $-\frac{۱۰۰}{۹}$؛
۷) -۳، $-\frac{۹}{۵}$؛ ۸) $-\frac{۱}{۸}$؛ ۹) -۲؛ ۱۰) $\frac{۲}{۵}$؛ ۱۱) ۳۲؛
۱۲) $\frac{۹۷۰}{۷۲۹}$.

۴. ۱) ۳؛ ۲) -۶۰۸؛ ۳) $-\frac{۳}{۱۶}$؛ ۴) ۲۰۴۸؛
۵) $-\frac{۵}{۲}$؛ ۶) $\frac{۲۳}{۳۰۰}$؛ ۷) $\frac{۲۷۵۴}{۵}$؛ ۸) ۸؛ ۹) ۲۹؛
۱۰) ۲؛ ۱۱) -۸؛ ۱۲) $۵\frac{۱}{۸}$؛ ۱۳) ۰؛ ۱۴) ۱۱.

۳. ۱) $۲^{۸}$؛ ۲) $۳^{۷}$؛ ۳) $۲^{۳}$؛ ۴) $\left(\frac{۵}{۳}\right)^{۳}$، $\left(\frac{۷}{۳}\right)^{۲}$،
$\left(\frac{۲۵}{۸}\right)^{۲}$؛ ۵) $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}$، $\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۶}$، $\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۸}$؛ ۶) $۶^{۵}$، $۶^{۷}$، $۱۰^{۹}$؛
۷) $\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۳}$، $\left(\frac{۴}{۱۵}\right)^{۴}$، $\left(\frac{۵}{۱۲}\right)^{۳}$؛ ۸) $۶^{-۱۲}$، $\left(\frac{۴}{۵}\right)^{۵}$، $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۵}$؛
۹) $\left(\frac{۱}{۱۲}\right)^{۵}$، $\left(\frac{۱}{۲۰۰}\right)^{۳}$، $\left(\frac{۹}{۵}\right)^{۴}$؛ ۱۰) $\left(-\frac{۵}{۲}\right)^{۵}$، $\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۳}$، $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۷}$؛
۱۱) $۳۰^{۵}$، $\left(\frac{۱۵}{۲}\right)^{۳}$.

۵. ۴) راهنمائی: عبارت را این‌طور تبدیل کنید:

$$۶^{۲n}+۳^{n+۲}+۳^{n}=۳^{n}(۱۲^{n}+۱۰)=۳^{n}(۱۲^{n}-۱)+۱$$

۵) راهنمائی: داریم:

$$۷^{n+۲}+۸^{۲n+۱}=۷^{n}\times ۵۷+۸(۶۴^{n}-۷^{n})$$

۶. ۱) $a^{-۶}$، $a^{۹}$، $a^{-۸}$؛ ۲) $a^{۴}$، $a^{۲}$، $a^{۱۸}$، $a^{۳}$؛ ۳) $a^{۷}$، $a^{-۲}$،
$a^{۸}$؛ ۴) $a^{۳}$، $a^{۴}$، $a^{-۶}$؛ ۵) $a^{۵}$، a؛ ۶) $a^{۲۵}$، $a^{-۳۵}$؛ ۷) $a^{۸}$،
$a^{۲۸}$؛ ۸) $a^{-۶}$، $a^{-۱۶}$؛ ۹) $a^{۰}$، $a^{۰}$، $a^{۰}$؛ ۱۰) $a^{-۱۸}$، $a^{-۱۸}$، $a^{-۳۳}$.

۷. ۱) $x^{۲}$؛ ۲) ۰، $۰/۱۶x^{-۲}y^{۲}$؛ ۳) $-\frac{۷}{۳}x^{۲}y^{۸}$؛
۴) $\frac{۹}{۴}x^{-۲}y^{-۴}$؛ ۵) $\frac{۲}{۱۵}x^{۲}y^{۱}$؛ ۶) $-\frac{۱}{۸}x^{۲}y^{-۲}$؛
۷) $-\frac{۱}{۹}x^{-۹}y^{۱۱}$؛ ۸) $\frac{۹}{۴}x^{-۱۰}y^{۱۰}$؛ ۹) $۸x^{۵}y^{-۱۷}$؛ ۱۰) $x^{۰}y^{۰}$
۱۱) $x^{۰}y^{۴}$؛ ۱۲) $x^{۲}y^{۳}$، ۱۳) $x^{۵۰}y^{-۱۷}$.

۸. ۱) ۳؛ ۲) ۴؛ ۳) -۳؛ ۴) ۰؛ ۵) -۱۱؛
۶) ۱، ۲؛ ۷) ۳، ۴؛ ۸) -۵، -۴، -۳؛ ۹) وجود ندارد؛
۱۰) ۶، ۷.

۹. ۱) $۹۱^{۳}>۹۱^{۲}$؛ ۲) $۱۰^{۲۰}>۲۰^{۱۰}$؛ ۳) $۳^{۳۴}>۲^{۵۱}$؛
۴) $۲۰۲^{۳۰۳}>۳۰۳^{۲۰۲}$؛ ۵) $(۶^{۱۰۱})^{۳}=(۶^{۳})^{۱۰۱}$؛
۶) $(۳^{-۲})^{-۳}=(۳^{۳})^{۲}$؛ ۷) $۳^{۶۴}=۶۵۶۱^{۸}$؛ ۸) $۲^{۳۳}>۲۰۲۴^{۳}$؛
۹) $۳^{۶}>(-۲۷)^{۳}$؛ ۱۰) $۵^{۲۵}>۱۵۶۲۵^{۴}$؛ ۱۱) $۲^{(۲^{۳})}>(۲^{۲})^{۳}$؛
۱۲) $۲^{۳^{۲}}>۲^{۲^{۳}}$.

۱۰. ۱) ۱۰، ۴، ۴، $\frac{۱}{۳}$، ۰/۹، ۰/۳؛ ۲) ۲، ۶، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲۱}{۲۰}$؛
۳) $\frac{۱}{۴}$، ۲: ۵، ۱، ۰/۴؛ ۴) ۱۰۰، ۱۲، $\frac{۶}{۵}$؛ ۵) ۴۲۰، ۶، ۶۰؛
۶) ۴، $\frac{۹}{۱۱}$، ۴۵، ۴۴؛ ۷) ۲، ۱؛ ۸) $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۹}{۲}$؛ ۹) ۴۴۱، ۵۰؛
۱۰) ۲؛ ۱۱) $\frac{۱}{۱۲}$؛ ۱۲) ۱۰۸۰؛ ۱۳) ۲۴؛ ۱۴) ۲؛
۱۵) ۳۲۴.

۱۱. ۱) $\sqrt{۲}$، $۷\sqrt{۱۰}$، $\sqrt{۶}$، ۲۴؛ ۲) $\frac{۲}{۵}\sqrt[۴]{۱۲۵}$، $\sqrt{۷}$، $۲\sqrt{۵}$؛
۳) -۲۴، $۳\sqrt{۷}$؛ ۴) $۱۴\sqrt{۳}$، ۰؛ ۵) $۱۶\frac{۱}{۹}\sqrt[۳]{۸}$؛ ۶) $\sqrt[۳]{۵}$،
$\sqrt{۱۰-\pi^{۲}}$؛ ۷) $۱۴\sqrt{۵\sqrt{۳}}$؛ ۸) $-۳\sqrt{۱۱}$؛

۹) $\frac{۲۳}{۶}\sqrt{۲}-۱۰\sqrt{۳}$؛ ۱۰) $۲+\sqrt{۳}$، $۲-\sqrt{۳}$، $۲-\sqrt{۳}$؛

۱۱) $\sqrt[۳]{\sqrt{۳}-۱}$، $\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$، $\sqrt{\sqrt{۲}-۱}$؛ ۱۲) $\frac{۱۵}{۱۶}-\frac{۹}{۴}\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳}}$؛

۱۳) $\frac{۳}{۲}\sqrt{۶}$؛ ۱۴) $-(۶+۲۸\sqrt{۵})$؛ ۱۵) -۲؛

۱۶) $۱۰\sqrt{۳۰}+۲۸\sqrt{۱۰}-۳۸$؛ ۱۷) ۱، ۲؛ ۱۸) ۱، $۱+\sqrt{۲}$؛

۱۹) ۳؛ ۲۰) ۱؛ ۲۱) $۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$؛ ۲۲) $۲+\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$.

۱۲. ۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$، $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$، $\sqrt[۴]{۱۲۵}$ · $\frac{۱}{۵}\sqrt[۳]{۲}$، $\frac{۱}{۱۲}\sqrt{۶}$، $\frac{۱}{۴}\sqrt{۲}\sqrt[۳]{۴}$؛

۲) $\frac{۱}{۳}\sqrt[۵]{۹}$، $۲-\sqrt{۲}$، $\frac{۲}{۳}(۳+\sqrt{۳})$، $-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$، $\frac{۵}{۲}(۳\sqrt{۲}-۴)$،

$\frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۱)$؛ ۳) $\frac{۱}{۷}\sqrt{۲۱}$، $\frac{۱۱}{۱۷}(۳\sqrt{۵}+۲\sqrt{۷})$،

$\frac{۱}{۵}(۲\sqrt{۶}+۷)$، $-\frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{۴}-۲+۲\sqrt[۳]{۲})$؛

۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$، $\frac{۳\sqrt{۲}+۲\sqrt{۳}-\sqrt{۹۰}}{۱۲}$، $۲\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$، $\frac{\sqrt[۴]{۸}+\sqrt[۴]{۴}+\sqrt{۲}+۱}{۱۲}$؛

۵) $-\frac{۲}{۲۳}(۴+۶\sqrt[۳]{۲}+۹\sqrt[۳]{۴})$، $\frac{\sqrt{۳۰}+\sqrt{۵}}{۵}$، $\frac{\sqrt[۳]{۳}+\sqrt[۳]{۲}}{۵}$،

$\frac{\sqrt[۴]{۲۷}(۱-\sqrt[۴]{۳})(۱+\sqrt[۴]{۲۷})(۱+\sqrt{۲۷})}{-۷۸}$؛

۶) $(\sqrt[۳]{۳}-\sqrt{۲})(۳\sqrt[۳]{۳}+۲\sqrt[۳]{۹}+۴)$، $\sqrt{۲}+\sqrt[۴]{۳}$، $۲+\sqrt{۳}$،

$۷(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})(\sqrt{۲}-۱)$؛

۷) $-۳(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$، $\sqrt[۵]{۱۶}+\sqrt[۵]{۸}+\sqrt[۵]{۴}+\sqrt[۵]{۲}+۱$،

$(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۲})(۳\sqrt[۳]{۳}-۲\sqrt[۳]{۹}+۴)$، $\frac{۲۱\sqrt{۲}+۸\sqrt{۳}-۳\sqrt{۶}-۱۰}{۹۲}$؛

۸) $\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۱۰}-۲}{۲}$، $\frac{\sqrt{۳۰}+۱۵\sqrt{۲}-۴\sqrt{۱۵}+۱۰}{۷}$؛

۹) $۳(۳+\sqrt{۳}+\sqrt{۲})(۳\sqrt{۳}-۵)$، $-\frac{۱}{۴}(\sqrt[۴]{۳}+۱)(\sqrt{۳}+۱)^{۲}$؛
۱۰) $(\sqrt[۴]{۷}+\sqrt[۴]{۶})(\sqrt{۷}+\sqrt{۶})$،
$(\sqrt[۸]{۳}-\sqrt[۸]{۲})(\sqrt[۴]{۳}+\sqrt[۴]{۲})(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$؛
۱۱) $\frac{۹\sqrt{۱۰}-۳\sqrt{۵}}{۱۷}$؛ ۱۲) $\frac{۳\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}+۳}{۴۸}$.

۱۳. ۱) $۲\sqrt{۵}>\sqrt{۱۹}$، $۳\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۳]{۸۱}$؛ ۲) $\sqrt[۸]{۱۰}>\sqrt[۴]{۳}$،
$\sqrt[۳]{۵}>\sqrt[۶]{۲۴}$؛ ۳) $\sqrt[۳]{۵}>\sqrt[۱۲]{۶۲۳}$، $(۲\sqrt[۳]{۲})^{-۶}>۲^{-۱۱}$؛ ۴) دو مقدار
برابرند؛ ۵) برابرند؛ ۶) $\sqrt[۳]{۴\sqrt{۲\sqrt{۲}}-۲\sqrt{۶\sqrt{۲}}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}>۲\sqrt[۶]{۲}$؛
۷) باهم برابرند؛ ۸) باهم برابرند؛ ۹) دومقدار باهم برابرند؛
۱۰) $\frac{\sqrt{\sqrt{۵}+\sqrt{۲}}}{\sqrt{۳\sqrt{۵}-۳\sqrt{۲}}}<\sqrt[۴]{۵}+\sqrt{۵}$؛ ۱۱) $\sqrt{۲+\sqrt{۵}}$ بزرگتراست؛
۱۲) $\sqrt[۵]{\sqrt{۱۱}-۳}$ بزرگتراست؛ ۱۳) عبارت اول، مقداری مثبت است؛
۱۴) $\frac{۳}{۲۰}$ بزرگتر است؛ ۱۵) برابرند؛ ۱۶) برابرند.

۱۴. ۱) $۳^{\frac{۱}{۲}}$، $۳^{\frac{۴}{۳}}$، $۷^{\frac{۳}{۴}}$، $۱۹^{\frac{۴}{۵}}$؛ ۲) $۳^{-۱}$، $۱۰^{\frac{۲}{۵}}$، $۷^{-\frac{۲}{۳}}$، $۲^{\frac{۱}{۳}}$؛
۳) $۶۰^{\frac{۱}{۲}}$، $۲^{-\frac{۵}{۴}}$، $۳^{\frac{۳}{۵}}$، $۳^{\frac{۵}{۴}}$؛ ۴) $۳^{\frac{۱۹}{۲۴}}$، $۳^{-\frac{۵}{۵۴}}$، $۵^{\frac{۷}{۱۲}}$؛ ۵) $۵^{\frac{۵}{۱۲}}$، $۲^{\frac{۱}{۸}}$؛
$۲۱^{\frac{۹}{۳۲}}$، $۳^{\frac{۳}{۲۰}}$؛ ۷) $۲^{\frac{۱۱}{۸۱}}$، $۲^{-\frac{۲۳}{۱۲}}$؛ ۸) $۳^{-\frac{۱}{۱۶}}$، $۵^{\frac{۱۱}{۲۴}}$.

۱۵. ۱) $۳^{\frac{۱}{۳}}$؛ ۲) $۵^{\frac{۱}{۴}}$؛ ۳) $۳^{-\frac{۱۷}{۴۸}}$؛ ۴) $۲^{\frac{۳۵}{۶}}$؛ ۵) $۲^{\frac{۹}{۱۶}}$؛
۶) $۲^{\frac{۱۱}{۲}}۳^{\frac{۱۱}{۲۷}}$؛ ۷) $۵^{\frac{۱۱}{۶}}$؛ ۸) $۲^{\frac{۱}{۲}}$؛ ۹) $۲^{-\frac{۵}{۱۲}}۳^{\frac{۲۹}{۲۴}}$؛ ۱۰) $۵^{\frac{۱۳}{۲۵}}$؛
۱۱) $۳^{\frac{۷۷}{۱۲}}$؛ ۱۲) $۲^{\frac{۲۵}{۶۴}}$؛ ۱۳) $۲^{\frac{۱۹}{۳۰}}۳^{\frac{۱۷}{۶۰}}۵^{-\frac{۲}{۱۵}}$.

۱۶. ۱) ۳۲؛ ۲) ۳؛ ۳) $\frac{۳۱}{۱۶}$؛ ۴) $\frac{۲}{۲۷}$؛ ۵) ۳۶؛

۶) ۱۰/۲۴؛ ۷) ۱۴۴؛ ۸) ۳؛ ۹) $\frac{۴}{۹}$؛ ۱۰) $\frac{۱}{۲}$.

۱۸. -۱۰. ۱۹. -۶.

۲۲. ۱) $a^۲$، $a^۲b^۲$، $|ab|$، a، xy، $x^۲$؛ ۲) $\frac{|a|}{۲}$، $\frac{|xy|}{۳}$، $۲|x-۱|$، $۳|۲-y|$؛ ۳) $\left|\frac{a}{b}\right|$، ۱ (اگر $x>۰$)، $\frac{|x|}{|y|}$، $\sqrt[۳]{x}$ (اگـر $x\neq۰$)، $|y|^۳$؛ ۴) ۱ (اگـر $b>۰$ و $a\neq۰$)، -۱ (اگر $b<۰$ و $a\neq۰$)، $\frac{۱}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$، ۱ (اگر a و b مثبت باشند)؛ ۵) $\sqrt{۲}$ (اگر $x>۰$)، $-\sqrt{۲}$ (اگر $x<۰$)، $|x-۳|$، $|x-y|$، ۱ (اگر $a>b$)، -۱ (اگر $a<b$)؛ ۶) $-\sqrt{-x}$، $\sqrt{|x|}$، $a^۲$، $x^۲y^۲$، $\sqrt[۳]{a^۲b^۲}$؛ ۷) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ (اگر $ab>۰$)، $\sqrt{\frac{y}{x}}$ (اگر $xy>۰$)، $\sqrt{ab}$ (اگر $ab>۰$)؛ ۸) $\sqrt{xy}$ (اگر $xy>۰$)، $|a|$ (اگر $ab>۰$)، ۰ (اگـر $b\neq۰$، $a=۰$)، ۱ (اگر x و y مثبت باشند)، -۱ (اگر x و y منفی باشند)؛ ۹) $-۳\sqrt{x}$؛ ۱۰) $۷\sqrt[۳]{x}-۴\sqrt[۳]{a}$، ۱۱) $۵\sqrt[۳]{a^۲b}-۲b\sqrt[۳]{a^۲b}$ (اگر $ab\neq۰$)؛ ۱۲) $\frac{a^۳bx}{y}-a^۳b^۳+a^۴$ (اگر xy مثبت باشد)؛ $x^۲$ (به شرط مثبت بودن x و y)، $-x^۲$ (به‌شرط منفی بودن x و y).

۲۳. ۱) $\frac{۱}{۳}x^{\frac{۱}{۴}}$ ($x\geqslant۰$)، $x^{\frac{۳}{۲}}$ ($x\geqslant۰$)، $|x|^۳y$، $y^{\frac{۳}{۴}}$ ($y\geqslant۰$)؛

۲) $۲x^{\frac{۷}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}}$ (بـه شـرط مثبت‌بـودن x و y)، $-۲(-x)^{\frac{۷}{۲}}(-y)^{\frac{۱}{۲}}$ (بـه‌شرط منفی‌بـودن x و y) ۰ (بـا شـرط $xy=۰$)، $(xy)^{\frac{۳}{۲}}$ (به‌شرط $xy\geqslant۰$)، $-(xy)^{-\frac{۳}{۲}}$ (بـه شـرط $xy\leqslant۰$)، $-۴x^{\frac{۱}{۲}}y^{\frac{۳}{۴}}$ ($x>۰$،

$y\geqslant ۰$)، $۴(-x)^{\frac{۱}{۲}}y^{\frac{۳}{۴}}$ ($x<۰$، $y\geqslant ۰$)؛ ۳) $x^{\frac{۳}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}}$ (اگـر x و y
غیرمنفی باشند)، $(-x)^{\frac{۳}{۲}}(-y)^{\frac{۱}{۲}}$ (اگر x و y غیرمثبت بـاشند)، $x^{\frac{۷}{۶}}y$
($x\geqslant ۰$)، $x^{-\frac{۷}{۴}}y^{-۱}$ ($x>۰$، $y\neq ۰$)؛ ۴) $-\frac{۱}{۲۳}x^{\frac{۱۰}{۳}}y^{-\frac{۱۰}{۳}}$ ($xy\neq ۰$)،
$x^{-\frac{۱}{۳}}y^{\frac{۵}{۳}}$ (اگر $xy\neq ۰$)، $x^{\frac{۳}{۸}}y^{-\frac{۳}{۸}}$ (بـه شـرط مثـبـت بـودن x و y)،
$(-x)^{\frac{۳}{۸}}(-y)^{-\frac{۳}{۸}}$ (به شرط منفی بودن x و y)؛
۵) $x^{\frac{۷}{۲}}y^{\frac{۱}{۲}}$ (اگر $x>۰$ و $y>۰$)، $a^{\frac{۱}{۴}}x^{-\frac{۳}{۴}}$ (اگر x و a مثبت باشند)،
$(-a)^{\frac{۱}{۴}}(-x)^{-\frac{۳}{۴}}$ (به شرط منفی بودن a و x)؛
۶) $-\frac{۳۲}{۶۷۵}x^{\frac{۷}{۲}}y^{۵}$ ($x\geqslant ۰$)؛ ۷) $y^{\frac{۲۳}{۳}}x^{-\frac{۱۶}{۶}}$ (به‌شرط‌مثبت بودن x و y)،
$(-y)^{\frac{۲۳}{۳}}(-x)^{-\frac{۱۹}{۶}}$ (اگر x و y منفی باشند)؛ ۸) $a^{\frac{۵}{۳}}$ ($a\geqslant ۰$)؛
۹) $x^{-\frac{۱}{۶}}y^{\frac{۱}{۶}}$ (اگر x و y مثبت باشند)، $(-x)^{-\frac{۱}{۶}}(-y)^{\frac{۱}{۶}}$ (به‌شرط‌منفی بودن
x و y)؛ ۱۰) a (اگـر a غیرمنفـی و b مثبت بـاشد)، $-a$ (اگـر a
غیرمثبت و b منفی بـاشد)، $x^{\frac{۱۷}{۲۴}}y^{-\frac{۱۷}{۲۴}}$ (بـه شـرط مثبت بـودن x و y)،
$(-x)^{\frac{۱۷}{۲۴}}(-y)^{-\frac{۱۷}{۲۴}}$ (بـرای x و y منفی)؛ ۱۱) $(۲\sqrt{۲})^{-۱}a^{\frac{۵}{۲}}b^{-\frac{۴}{۵}}c$
(وقتی که a و b و c مثبت باشند)؛ ۱۲) $۳b$ (وقتی که a و b غیرمنفی باشند)؛
۱۳) $-\frac{۳}{۲}ba^{-۱}$ (به‌شرط مثبت بودن ab)، $\frac{۵}{۲}ba^{-۱}$ (وقتی که ab منفی باشد)؛
۱۴) ab (وقتی که a مثبت و b مخالف صفر باشد)، $-ab$ (وقتی که a منفی
و b مخـالف صفـر بـاشد)؛ ۱۵) $۸a^{\frac{۷}{۴}}b^{\frac{۱}{۴}}$ (بـرای a و b مـثبـت)،
$-۸(-a)^{\frac{۷}{۴}}(-b)^{\frac{۱}{۴}}$ (برای a و b منفی)؛ ۱۶) $a^{\frac{۵}{۷۲}}$ (بـه‌شرط مثبت

بودن a)؛ ۱۷) $x^{\frac{۵}{۱۲}}$ (به‌شرط مثبت بودن x)؛ ۱۸) x (اگر x مثبت باشد).

۲۴. ۱) ۱؛ ۲) ۶؛ ۳) $\frac{۳}{۲}$؛ ۴) $\frac{۱۳}{۵}$؛ ۵) -۲۸؛
۶) $-\frac{۱}{۸}$؛ ۷) ۴؛ ۸) $-\frac{۳}{۲}$؛ ۹) $\frac{۹}{۴}$؛ ۱۰) ۷.

۲۵. ۱) $p=۱، ۲، ۳، \ldots$؛ ۲) $p=۱، ۲، ۳، \ldots$؛
۳) $p=۰، ۱، ۲، \ldots$؛ ۴) $p=-۲، -۳، -۴، \ldots$؛
۵) $p=-۱، -۲، \ldots$؛ ۶) $p=۱، ۲، \ldots$؛ ۷) $p=۱، ۲، ۳، \ldots$؛
۸) $p=-۶، -۷، -۸، \ldots$.

§۴. لگاریتم عددها

$a>۰$، $a\neq ۱$ و $b>۰$ فرض می‌کنیم. لگاریتم عدد b درمبنای a، به‌عددی گفته می‌شود که، اگر مبنای a را به توان آن عدد برسانیم، عدد b به‌دست آید. این عدد را با نماد log_ab نشان می‌دهند.

درحالت $a=۱۰$، به‌جای $log_{۱۰}b$ می‌نویسند $\lg b$.

اگر $a=e$، آن‌وقت log_eb را به‌صورت $\ln b$ می‌نویسند.

وجود و منحصر به‌فرد بودن عدد log_ab را از ویژگی‌های تابع نمائی نتیجه می‌گیرند.

مثال ۱. الف) چون $۹=۳^{۲}$، پس $log_{۳}۹=۲$؛

ب) چون $۴=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۲}$، بنابراین $log_{\frac{۱}{۲}}۴=-۲$؛

ج) چون $a^{۰}=۱$، پس $log_a۱=۰ (a>۰، a\neq ۱)$؛

د) چون $a^{۱}=a$، بنابراین $log_aa=۱ (a>۰، a\neq ۱)$.

بنابر تعریف، عبارت‌های $log_{۲}(-۵)$ و $log_{۱}۷$ معنا ندارند.

از تعریف لگاریتم عدد b درمبنای a، این اتحاد به‌دست می‌آید:

$$a^{log_ab}=b \ ، \ a>۰ \ ، \ a\neq ۱ \ ، \ b>۰ \qquad (۱)$$

که اتحاد اصلی لگاریتمی نامیده می‌شود.

با توجه به‌ویژگی‌های توان واتحاد (۱)، نتیجه می‌شود:

الف) $$۲^{\log_۲ ۳}=۳;\quad ۴^{\log_۲ ۳}=۲^{۲\log_۲ ۳}=(۲^{\log_۲ ۳})^۲=۳^۲=۹;$$

ب) $$\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)^{\log_۳ ۵}=۳^{-\frac{۱}{۲}\log_۳ ۵}=(۳^{\log_۳ ۵})^{-\frac{۱}{۲}}=۵^{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

ج) $$a^{\log_{\sqrt{a}} b}=(\sqrt{a})^{۲\log_{\sqrt{a}} b}=b^۲,\ a>۰,\ a\neq ۱,\ b>۰$$

ویژگی‌های اساسی لگاریتم. M و N را عددهای مثبت دلخواه؛ $a>۰$، $a\neq ۱$، $b>۰$، $b\neq ۱$ و α را عددی حقیقی فرض می‌کنیم. دراین‌صورت

۱. $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N;$

۲. $\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N;$ ۳. $\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M;$

۴. $\log_b M=\dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

مثال ۲.

الف) $$\log_۲ ۱۴=\log_۲(۲\times ۷)=\log_۲ ۲+\log_۲ ۷=۱+\log_۲ ۷,$$
$$\log_۶ ۲+\log_۶ ۳=\log_۶(۲\times ۳)=\log_۶ ۶=۱;$$

ب) $$\log_۳\left(\frac{۹}{۸}\right)=\log_۳ ۹-\log_۳ ۸=۲-۳\log ۲,$$

$$\log_۸ ۱۶-\log_۸ ۲=\log_۸\left(\frac{۱۶}{۲}\right)=\log_۸ ۸=۱;$$

ج) $$\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۶=\log_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۴}=-۴;$$

د) $$\log_{۱۶} ۳۲=\frac{\log_۲ ۳۲}{\log_۲ ۱۶}=\frac{۵}{۴};$$

ه) $$\log_{\sqrt{a}} a^۴=\frac{\log_a a^۴}{\log_a\sqrt{a}}=۴:\frac{۱}{۲}=۸,\ a>۰,\ a\neq ۱$$

یادآوری می‌کنیم که، ویژگی‌های ۱ تا ۴، نتیجه‌ای از اتحاد اصلی لگاریتمی و ویژگی‌های توان هستند.

مثال ۳. ویژگی ۴ را ثابت کنید.

حل.

$$b^{\log_b M}=M,\quad a^{\log_a b}=b$$

بنابراین $M=b^{\log_b M}=\left(a^{\log_a b}\right)^{\log_b M}=a^{(\log_a b)\cdot(\log_b M)}$.

از این‌جا، از تعریف لگاریتم عدد M درمبنای a، به‌دست می‌آید:

$$\log_a M=\log_a b\cdot\log_b M\Rightarrow\log_b M=\frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ویژگی‌های مربوط به یکنوائی لگاریتم‌ها. اگر $M>0$ و $N>0$، آن‌گاه

۵. به‌شرط $a>1$

الف) از نابرابری $M>N$ نتیجه می‌شود: $\log_a M>\log_a N$، یعنی

$$M>N\Rightarrow\log_a M>\log_a N$$

ب) از نابرابری $\log_a M>\log_a N$ نتیجه می‌شود $M>N$، یعنی

$$\log_a M>\log_a N\Rightarrow M>N$$

به‌این ترتیب اگر $a>1$: $M>N\Leftrightarrow\log_a M>\log_a N$.

۶. اگر $0<a<1$؛ آن‌وقت

الف) از نابرابری $M>N$ نتیجه می‌شود $\log_a M<\log_a N$، یعنی

$$M>N\Rightarrow\log_a M<\log_a N$$

ب) از نابرابری $\log_a M<\log_a N$ نتیجه می‌شود $M>N$، یعنی

$$\log_a M<\log_a N\Rightarrow M>N$$

به این ترتیب اگر $0<a<1$: $M>N\Leftrightarrow\log_a M<\log_a N$.

از ویژگی‌های ۵ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت:

الف) اگر $a>1$ و $M>1$، آن‌وقت $\log_a M>0$؛

ب) اگر $a>1$ و $0<M<1$، آن‌وقت $\log_a M<0$؛

ج) اگر $0<a<1$ و $M>1$، آن‌وقت $\log_a M<0$؛

د) اگر $۰<a<۱$ و $۰<M<۱$، آن‌وقت $\log_a M>۰$.

از ویژگی‌های ۵ و ۶، ویژگی دیگری هم به‌دست می‌آید:

۷. برابری $\log_a M=\log_a N$، تنها به‌ازای $M=N$ ممکن است، یعنی

$$\log_a M=\log_a N \Longleftrightarrow M=N$$

مثال ۴. الف) چون $\pi<۵$ بنابراین $\log_۲\pi<\log_۲ ۵$؛ اگر داشته باشیم:

$\log_۲ ۷>\log_۲ x$، آن‌وقت $۰<x<۷$؛

ب) چون $۱۱<۲۳$، پس $\log_{\frac{۱}{۲}}۱۱>\log_{\frac{۱}{۲}}۲۳$؛ اگر

$\log_{\frac{۱}{۴}}x<\log_{\frac{۱}{۴}}۸$، آن‌وقت $x>۸$؛

ج) چون $۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$، پس $\log_a\left(\frac{۱}{۲}\right)=\log_a ۲^{-۱}$؛ اگر

$\log_۲ ۸=\log_۲ x$، آن‌وقت $x=۸$.

مثال ۵. محاسبه کنید:

الف) $\log_{۲۷}۸۱$؛ ب) $\log_{۱۲}۲+\log_{۱۲}۶$؛ ج) $\log_۲\left(\frac{۲}{۳}\right)+\log_۴\left(\frac{۹}{۴}\right)$؛

حل.

الف) $\log_{۲۷}۸۱=\dfrac{\log_۳ ۸۱}{\log_۳ ۲۷}=\dfrac{۴}{۳}$؛

ب) $\log_{۱۲}۲+\log_{۱۲}۶=\log_{۱۲}(۲\times ۶)=\log_{۱۲}۱۲=۱$؛

ج) $$\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۴\frac{۹}{۴}=\log_۲\frac{۲}{۳}+\frac{\log_۲\frac{۹}{۴}}{\log_۲ ۴}=\log_۲\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}\log_۲\frac{۹}{۴}=$$

$$=\log_۲\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}\log_۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲=\log_۲\frac{۲}{۳}+\log_۲\frac{۳}{۲}=\log_۲ ۱=۰$$

مثال ۶. می‌دانیم: $\log_۲ ۳=a$، $\log_۳ ۵=b$، $\log_۷ ۲=c$. لگاریتم عدد ۶۳ را در مبنای ۱۴۰، برحسب a و b و c محاسبه کنید.

حل. بنابر ویژگی ۴ داریم:

$$\log_{۱۴۰}۶۳=\frac{\log_{۲}۶۳}{\log_{۲}۱۴۰}=\frac{\log_{۲}(۷\times ۳^{۲})}{\log_{۲}(۲^{۲}\times ۵\times ۷)}=\frac{\log_{۲}۷+۲\log_{۲}۳}{۲+\log_{۲}۵+\log_{۲}۷}$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض مسأله:

$$\log_{۲}۷=\frac{۱}{\log_{۷}۲}=\frac{۱}{c};\quad \log_{۲}۵=\frac{\log_{۳}۵}{\log_{۳}۲}=\log_{۳}۵\times\log_{۲}۳=ab$$

به این ترتیب:
$$\log_{۱۴۰}۶۳=\frac{\frac{۱}{c}+۲a}{۲+\frac{۱}{c}+ab}=\frac{۱+۲ac}{۲c+abc+۱}$$

مثال ۷. عددهای $\log_{۱۳}۱۵۰$ و $\log_{۱۷}۲۹۹$ را باهم مقایسه کنید.

حل. داریم:

$$\log_{۱۳}۱۵۰<\log_{۱۳}۱۶۹=\log_{۱۲}(۱۳^{۲})=۲;$$
$$\log_{۱۷}۲۹۹>\log_{۱۷}۲۸۹=\log_{۱۷}(۱۷^{۲})=۲;$$

بنابراین $\log_{۱۳}۱۵۰<\log_{۱۷}۲۹۹$.

مثال ۸. عددهای $\log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{۸۰}\right)$ و $\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۵+\sqrt{۲}}$ را مقایسه کنید.

حل. داریم: $\log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{۸۰}\right)<\log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{۸۱}\right)=۴$ و

$$۱۵+\sqrt{۲}>۱۶;\quad \log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۵+\sqrt{۲}}>\log_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۱۶}\right)=۴;$$

بنابراین $\log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{۸۰}\right)<\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۵+\sqrt{۲}}$

مثال ۹. عددهای $\log_{۳}۴$ و $\log_{۵}۶$ را مقایسه کنید.

حل. عددهای $۵\log_{۳}۴$ و $۵\log_{۵}۶$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$۵\log_{۳}۴=\log_{۳}(۴^{۵})=\log_{۳}۱۰۲۴>\log_{۳}۷۲۹=\log_{۳}(۳^{۶})=۶;$$
$$۵\log_{۵}۶=\log_{۵}(۶^{۵})=\log_{۵}۷۷۷۶<\log_{۵}۱۵۶۲۵=\log_{۵}(۵^{۶})=۶$$

بنابراین $۵\log_{۳}۴>۵\log_{۵}۶$. یعنی $\log_{۳}۴>\log_{۵}۶$.

مثال ۱۰. ثابت کنید: $\log_{۹}۱۰>\lg ۱۱$.

حل. کسر $A=\frac{\lg ۱۱}{\log_۹ ۱۰}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که $A>۰$. باید ثابت کنیم $A<۱$. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم: $\sqrt{A}<۱$.

با توجه به‌ویژگی ۴ و با استفاده از نابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وهندسی برای عددهای $\lg ۱۱$ و $\lg ۹$، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt{A}=\sqrt{\frac{\lg ۱۱}{\log_۹ ۱۰}}=\sqrt{\lg ۱۱\times\lg ۹}\leqslant\frac{\lg ۱۱+\lg ۹}{۲}=$$

$$=\frac{۱}{۲}\lg ۹۹<\frac{۱}{۲}\lg ۱۰۰=۱;$$

بنابراین $\sqrt{A}<۱$، یعنی $\log_۹ ۱۰>\lg ۱۱$.

به‌همین ترتیب، بافرض $a>۱$، می‌توان ثابت کرد:

$$\log_a(a+۱)>\log_{a+۱}(a+۲) \qquad (۲)$$

با استفاده از نابرابری (۲)، مثلاً می‌توان ثابت کرد: $\log_{۱۷}۱۹>\log_{۱۹}۲۰$؛ به‌زنجیرهٔ این نابرابری‌ها توجه کنید:

$$\log_{۱۷}۱۹>\log_{۱۷}۱۸>\log_{۱۸}۱۹>\log_{۱۹}۲۰$$

مثال ۱۱. عددهای $\log_۷ ۱۰$ و $\log_{۱۱}۱۳$ را مقایسه کنید.

حل. تفاضل این عددها را درنظر می‌گیریم:

$$A=\log_۷ ۱۰-\log_{۱۱}۱۳=\log_۷ ۱۰-\frac{\log_۷ ۱۳}{\log_۷ ۱۱}=$$

$$=\frac{\log_۷ ۱۰ . \log_۷ ۱۱-\log_۷ ۱۳}{\log_۷ ۱۱}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\log_۷ ۱۰=\log_۷\left(۷\times\frac{۱۰}{۷}\right)=۱+\log_۷\frac{۱۰}{۷};$$

$$\log_۷ ۱۱=\log_۷\left(۷\times\frac{۱۱}{۷}\right)=۱+\log_۷\frac{۱۱}{۷};$$

$$\log_۷ ۱۳=\log_۷\left(۷\times\frac{۱۳}{۷}\right)=۱+\log_۷\frac{۱۳}{۷}$$

و درنتیجه

$$A=\frac{۱}{log_۷۱۱}\left[\left(۱+log_۷\frac{۱۰}{۷}\right)\left(۱+log_۷\frac{۱۱}{۷}\right)-\left(۱+log_۷\frac{۱۳}{۷}\right)\right]=$$

$$=\frac{۱}{log_۷۱۱}\left(log_۷\frac{۱۰\times۱۱\times۷}{۷\times۷\times۱۳}+log_۷\frac{۱۰}{۷}.log_۷\frac{۱۱}{۷}\right)=$$

$$=\frac{۱}{log_۷۱۱}\left(log_۷\frac{۱۱۰}{۹۱}+log_۷\frac{۱۰}{۷}.log_۷\frac{۱۱}{۷}\right)$$

همهٔ لگاریتم‌ها، درعبارت اخیر، مقدارهایی مثبت‌اند (ویژگی۶) و، بنابراین $A>۰$، یعنی $log_۷۱۰>log_{۱۱}۱۳$.

مثال ۱۲. همهٔ عددهای a را پیدا کنید، به‌شرطی که

الف) $۲\lg(a+۳)=۱$؛ ب) $\lg(a+۳)<\lg۲$

حل. الف) برابری مفروض را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\lg(a+۳)=\frac{۱}{۲}$$

ازاین‌جا، بنابر تعریف لگاریتم، به‌دست می‌آید:

$$a+۳=\sqrt{۱۰}\Rightarrow a=\sqrt{۱۰}-۳$$

ب) مقدارهای ممکن a، ازیک طرف (بنابه تعریف لگاریتم) باید در شرط $a+۳>۰$ و، از طرف دیگر (بنابه ویژگی یکنوائی) درشرط $a+۳<۲$ صدق کنند. بنابراین، مقدار a، ازدستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} a+۳>۰ \\ a+۳<۲ \end{cases}$$

ازآن‌جا $-۳<a<-۱$.

مثال ۱۳. عدد $۲^{۱۰۰}$، چند رقم دارد؟

حل. از جدول لگاریتم به‌دست می‌آید: $۰/۳<\lg۲<۰/۳۰۲$. از ویژگی یکنوائی توان‌ها، نتیجه می‌گیریم: $۱۰^{۰/۳}<۱۰^{lg۲}<۱۰^{۰/۳۰۲}$؛ یا

$$(۱۰^{۰/۳})^{۱۰۰}<۲^{۱۰۰}<(۱۰^{۰/۳۰۲})^{۱۰۰};$$

$$۱۰^{۳۰}<۲^{۱۰۰}<۱۰^{۳۰}\times۱۰^{۰/۲} \tag{۳}$$

چون $۱۰^{۳۰}$ دارای ۳۱ رقم و بخش درست عدد $\sqrt[۵]{۱۰}\times ۱۰^{۳۰}$ هم دارای ۳۱ رقم است، بنابراین، از نابرابری‌های (۳) روشن می‌شود که عدد $۲^{۱۰۰}$، دارای ۳۱ رقم است.

تکلیف ۱.

۱. لگاریتم این عددها را، درمبنای ۲، پیدا کنید:

$$۱,\ ۲,\ ۴,\ ۸,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳۲},\ \frac{۱}{۱۶},\ \sqrt{۲},\ \sqrt[۳]{۸},\ ۲\sqrt{۲},\ \frac{۱}{\sqrt[۵]{۲}},\ \frac{۱}{\sqrt[۷]{۸}}$$

۲. لگاریتم این عددها را، درمبنای $\frac{۱}{۳}$، پیداکنید:

$$۱,\ \frac{۱}{۳},\ \frac{۱}{۹},\ ۳,\ ۹,\ ۸۱,\ \sqrt[۳]{۳},\ \frac{۱}{\sqrt[۷]{۳}},\ ۹\sqrt{۳},\ \frac{۱}{۹\sqrt[۴]{۳}}$$

۳. همهٔ عددهای a را پیداکنید، به‌شرطی که

۱) $\log_{۲}a=۲;$ ۲) $\log_{a}۲=۱;$ ۳) $\log_{a}۱=۰;$

۴) $\lg a(a+۳)=۱;$ ۵) $\log_{\frac{۱}{۳}}(a^{۲}-۱)=-۱;$

۶) $\log_{۲}(a^{۲}-۵)=۲$

۴. کدام یك ازاین لگاریتم‌ها، مثبت‌اند؟

۱) $\log_{۲}۳;$ ۲) $\log_{۳}\frac{۱}{۲};$ ۳) $\log_{۱/۱}\pi;$ ۴) $\lg ۱۱;$ ۵) $\lg ۰/۷;$

۶) $\log_{\frac{۱}{۷}}۶;$ ۷) $\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۳};$ ۸) $\log_{\sqrt{۱۹}}۱/۱;$ ۹) $\lg(۱/۰۳)^{۲}-۱;$

۱۰) $\log_{۹}(۲/۷)^{-۰/۳};$ ۱۱) $\log_{\sqrt{۲}}(\sqrt{۴۵}+۱)^{۰};$

۱۲) $\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{\sqrt{۵}}-۲$

تکلیف ۲.

۱. لگاریتم این عددها را، درمبنای ۳، پیدا کنید:

$$۱،\ ۳،\ ۹،\ ۸۱،\ \frac{۱}{۳}،\ \sqrt{۳}،\ \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}،\ ۲۷\sqrt{۳}،\ \sqrt[۷]{۹}$$

۲. لگاریتم این عددها را، درمبنای $\frac{۱}{۲}$، به‌دست آورید:

$$۱،\ \frac{۱}{۲}،\ \frac{۱}{۸}،\ ۱۶،\ \sqrt{۲}،\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}،\ ۲\sqrt{۲}،\ ۱:(۴\sqrt[۴]{۲})$$

۳. همهٔ عددهای a را پیدا کنید، به‌شرطی که

$۱)\ \log_۳ a=۲;\quad ۲)\ \log_{\frac{۱}{۳}} a=۴;\quad ۳)\ \log_{\frac{۱}{۳}} a=۰;$

$۴)\ \log_a ۱=۰;\quad ۵)\ \log_a(a+۲)=۲;\quad ۶)\ \log_۳(a^۲+۱)=۱$

۴. کدام یك از این لگاریتم‌ها، مقداری منفی‌اند؟

$۱)\ \log_{\sqrt{۲}}\sqrt{۳};\quad ۲)\ \log_{\frac{۱}{۷}}\frac{۱}{\sqrt{۴۵}};\quad ۳)\ \log_۲ ۱/۲;$

$۴)\ \log_{\frac{۱}{\sqrt{۲}}} ۴;\quad ۵)\ \log_{۱+\sqrt{۲}}\sqrt{۵};\quad ۶)\ \log_{\frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}} ۲۵;$

$۷)\ \log_\pi(\sqrt{۴۹}-۶);\quad ۸)\ \ln\frac{۵}{۲};\quad ۹)\ \ln\frac{۱}{\sqrt{۳}};$

$۱۰)\ \log_{\frac{۱}{۴}} ۷;\quad ۱۱)\ \log_{۰/۱} tg\frac{۳\pi}{۸};\quad ۱۲)\ \log_{tg\frac{\pi}{۳}} ۲$

تکلیف ۳.

۱. ساده کنید:

$۱)\ ۲^{\log_۲ ۳};\quad ۲)\ ۵^{\log_۰\frac{۱}{۱۰}};\quad ۳)\ ۲^{۳\log_۲ ۳};$

$۴)\ ۳^{\frac{۱}{۲}\log_۳ ۵};\quad ۵)\ ۲^{-\log_۲ ۳};\quad ۶)\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{\log_۲ ۵};$

$۷)\ \left(\frac{۱}{۹}\right)^{\log_۳ ۷};\quad ۸)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)^{-۵\log_۲ ۳};\quad ۹)\ ۲^{-\log_{\frac{۱}{۲}} ۷}$

۲. $\lg A$ را برحسب لگاریتم‌های عددهای اول بنویسید:

۱) $A=\frac{۷\cdot۳}{۵}$; ۲) $A=\frac{۷^{۳}\cdot۳^{۵}}{۵^{۲}}$; ۳) $A=\frac{\sqrt{۷}\cdot\sqrt[۳]{۴}}{۳^{۲}}$;

۴) $A=\frac{۲۱^{\frac{۳}{۴}}\cdot\sqrt[۳]{۱۲۴}}{\sqrt{۵}\cdot\sqrt[۷]{۲۴}}$; ۵) $A=\frac{(۵\cdot۲^{\frac{۱}{۳}})^{۵}}{۲^{\frac{۱}{۲}}\cdot۳^{\frac{۱}{۳}}\cdot۷^{-\frac{۲}{۵}}}$;

۶) $\frac{\sqrt[۳]{۲}\cdot\sqrt[۴]{۸}}{\sqrt{۱۲}}$

۰۳ محاسبه کنید:

۱) $log_{۱۲}۳+log_{۱۲}۴$، $log_{۳}۱۵-log_{۳}۵$، $\lg ۱۵-\lg ۱/۵$;

۲) $log_{۲}۳+log_{۲}\frac{۲}{۳}$، $log_{۷}۲-log_{۷}\frac{۲}{۷}$، $log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۸}$، $log_{۲}\frac{\sqrt{۲}}{۴}$، $log_{۳}\frac{۱}{۳}$;

۳) $\frac{\lg ۱۶-\lg ۴}{\lg ۶۴}$, $\frac{\lg ۲+\lg ۳}{\lg ۳/۶+۱}$, $\frac{\lg ۹}{\lg ۳}$, $\frac{log_{۴}۲۷}{log_{۴}۳}$، $log_{۲}cos\frac{\pi}{۴}$;

۴) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱+۲log_{۲}۳}$، $۸^{log_{۲}۳-log_{۴}۵}$, $۳^{۲log_{۳}۲+log_{۳}۵}$, $log_{۲}log_{۲}۴$

۰۴ به‌مبنای ۳ بروید و، سپس، ساده کنید:

۱) $log_{۳\sqrt{۳}}۲۷$; ۲) $log_{\frac{۱}{۹}}\frac{\sqrt[۳]{۳}}{۳}$; ۳) $log_{\frac{۱}{۳}}(۲۷\sqrt{۳})$;

۴) $\frac{۱}{log_{۲}۳}+\frac{۱}{log_{۴}۹}-\frac{۱}{log_{۸}۳}$; ۵) $log_{۳}۲\cdot log_{۲}۳\cdot log_{۵}۳$;

۶) $log_{۲۷}\frac{۸}{log_{۳}۲}$

تکلیف ۴.

۰۱ ساده کنید:

۱) $۳^{log_{۳}۲}$; ۲) $۴^{log_{۴}۷}$; ۳) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{log_{\frac{۱}{۲}}۵}$;

۴) $۳^{۲log_{۳}۴}$; ۵) $۳^{-log_{۳}۲}$; ۶) $\left(\frac{۱}{۳}\right)^{log_{۳}۵}$;

$۷)\ \left(\frac{۱}{۴}\right)^{log_۲ ۶};\qquad ۸)\ \left(\frac{۱}{۹}\right)^{-۲log_۳ ۷};\qquad ۹)\ ۸^{\frac{۱}{-log_۳ ۲}}$

۲. $\lg A$ را برحسب لگاریتم‌های عددهای اول بنویسید:

$۱)\ A=۳^۳.\frac{\sqrt{۴}}{\sqrt[۳]{۵.۷}};\qquad ۲)\ A=۳^۲.\sqrt[۷]{۳^{\frac{۱}{۴}}.۵^{\frac{۲}{۳}}};$

$۳)\ A=\sqrt{۷\sqrt{۲}:(۳\sqrt{۵})};\qquad ۴)\ A=۷^۲.\frac{\sqrt[۵]{۱۲۸}}{\sqrt[۴]{۲۱۷۸}};$

$۵)\ A\sqrt{\sqrt{۲}.\sqrt[۳]{۳}:\sqrt[۴]{۴}};\qquad ۶)\ A=\sqrt{\sqrt{\sqrt{۳}:\sqrt{۲.۴^۶}}}$

۳. محاسبه کنید:

$۱)\ log_۶ ۲+log_۶ ۳،\ log_۳ ۲+log_۳ \frac{۳}{۲}،\ log_۳ ۱۸-log_۳ ۲،\ log_۴ \frac{۱}{۸};$

$۲)\ log_۲ ۵+log_۲ \frac{۲}{۵}،\ log_۵ ۹+log_۵ \frac{۱}{۹}،\ log_{\sqrt{۳}} tg\frac{\pi}{۶}،\ log_۳ \frac{\sqrt{۳}}{۹};$

$۳)\ \frac{\lg ۴}{\lg ۳۲},\ \frac{۲\lg ۶}{\lg ۱۲+\lg ۳},\ \frac{log_۵ ۱۶-log_۵ ۴}{log_۵ ۱۲۸},\ log_{\frac{۱}{۴}}\left(\frac{۱}{۱۶}\right)^{-۲};$

$۴)\ (\sqrt{۳})^{-log_۳ ۲},\ ۱۰^{۱+lg۲},\ ۶^{log_۶ ۳+log_۶ ۴},\ ۴^{log_۲ ۳-log_۴ ۵};$

$۵)\ ۲^{۲log_۲ ۵+\frac{۱}{۲}log_۴ ۶},\ log_۳ log_۳ \sqrt[۳]{۲۷}،\ log_۴ log_۲ log_۳ ۸۱$

۴. به‌مبنای ۲ بروید وعبارت حاصل را ساده کنید:

$۱)\ log_۴ ۲\sqrt{۲};\qquad ۲)\ log_{۴\sqrt{۲}} ۴;\qquad ۳)\ log_{\frac{۱}{۴}} \frac{۱}{۳۲};$

$۴)\ log_{\sqrt{۲}} ۸;\qquad ۵)\ log_{\frac{۱}{۲}} \sqrt[۳]{۲};\qquad ۶)\ \frac{۱}{log_۳ ۲}+\frac{۲}{log_۹ ۴}-\frac{۳}{log_{۲۷} ۸}$

تکلیف ۵.

۱. می‌دانیم: $\lg ۲=a$، $\lg ۳=b$، $\lg ۵=c$. لگاریتم عددهای زیر را درمبنای ۱۰، برحسب a، b و c پیدا کنید:

۱) ۱۲; ۲) ۳۰; ۳) $\frac{۶}{۵}$; ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$; ۵) ۲۵۰; ۶) ۲۰;

۷) $\sqrt[۳]{۲}\cdot\sqrt{۱۵}$

۲. این عددها را باهم مقایسه کنید:

۱) $\log_۲ ۳$ و $\log_۲ ۵$; ۲) $\log_۲ ۳$ و $\log_۳ ۲$; ۳) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۵$ و $\log_{\frac{۱}{۲}} ۶$;

۴) $\log_۲ ۵$ و $\log_۳ ۷$; ۵) $\log_۳ ۵$ و $\log_۴ \sqrt{۶۵}$; ۶) $\lg\frac{۹}{۱۱}$ و $\lg\frac{۱۱}{۱۵}$;

۷) $\lg ۴۲ - \lg ۳/۵$ و $۳\lg ۲$; ۸) $\lg\sqrt[۳]{۱۲۰}$ و $\lg ۵$

۳. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $\log_۲ ۳ + \log_۳ ۲ > ۲$;

۲) $\log_۳ ۱۹ \cdot \log_{\frac{۱}{۷}} ۳ \cdot \log_۴ \frac{۱}{۷} > ۲$

۴. مطلوب است همهٔ مقدارهای x، به‌شرطی که

۱) $\log_۲ x^۲ = ۱$; ۲) $\log_۳ x = \log_۳ (۲ - x)$;

۳) $\log_۴ x^۲ = \log_۴ x$; ۴) $\log_{\frac{۱}{۲}} (۲x + ۱) = \log_{\frac{۱}{۲}} (x + ۱)$;

۵) $\log_۲ (۴x) + \log_۲ x = ۲$; ۶) $\lg x = ۲\lg ۲ - \frac{۱}{۳}\lg ۴ + \lg\sqrt{۳}$;

۷) $\log_{\frac{۱}{۳}} (x^۲ + ۸) = -۲$; ۸) $\log_۲ x = \frac{۱}{۴}\log_۲ ۴۸ - ۲ + \frac{۳}{۴}\log_۲ ۴$

۵. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $\log_۲ x > ۱$; ۲) $\log_۳ x < ۰$; ۳) $\log_{\frac{۱}{۲}} (x + ۱) > ۱$;

۴) $\log_{\frac{۱}{۲}} (\sqrt{x} - ۱) > ۰$; ۵) $\log_۲ x^۲ < ۱$;

۶) $\log_{\frac{۱}{۲}} (x - ۱) > ۱$; ۷) $\log_{\frac{۱}{۴}} x^۲ > ۱$;

۸) $\lg(۷ + ۲x) > \lg ۲$; ۹) $\log_{\frac{۱}{۲}} (x^۲ + ۱) < ۴$

تکلیف ۶.

۱. می‌دانیم: $\lg ۲ = a$، $\lg ۳ = b$، $\lg ۵ = c$. لگاریتم دهدهی (لگاریتم با مبنای ۱۰) این عددها را پیدا کنید:

۱) $\frac{۱}{۳۰}$; ۲) ۲۴; ۳) $\frac{۵}{۶}$; ۴) $\frac{۲۵}{۲۱۶}$; ۵) ۷۲۰; ۶) ۴۰;

۷) $\sqrt[۳]{۶}$; ۸) $۱:۳۰۰$

۲. این عددها را باهم مقایسه کنید:

۱) $\log_۲ ۷$ و $\log_۲ ۸$;

۲) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۴$ و $\log_{\frac{۱}{۳}} ۵$;

۳) $\log_{\frac{۱}{۷}}\left(\frac{۴}{۵}\right)$ و $\log_{\frac{۱}{۷}}\left(\frac{۵}{۶}\right)$;

۴) $\log_۴ ۵$ و $\log_۶ ۵$;

۵) $\log_۳ ۴$ و $\log_۲ ۵$;

۶) $\log_۲ ۳$ و $\log_۵ ۸$;

۷) $\lg\sqrt[۳]{۱۰}$ و $\lg\sqrt{۵}$;

۸) $\lg\sqrt[۴]{۱۵۰}$ و $\lg\sqrt{۱۲}$

۳. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $\log_۵ ۳ + \log_۳ ۵ > ۲$;

۲) $\log_۲ ۱۵ \cdot \log_{\frac{۱}{۶}} ۲ \cdot \log_۳ \frac{۱}{۶} > ۲$

۴. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $\log_۲ x^۲ = ۲$; ۲) $\log_{\frac{۱}{۴}} x^۲ = ۱$; ۳) $\log_{\frac{۱}{۲}} x = \log_{\frac{۱}{۲}}(۳ - x)$;

۴) $\log_۲(x+۱) = \log_۲(۲x-۳)$; ۵) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۳x + \log_{\frac{۱}{۳}} x = ۳$;

۶) $\log_۴ x + \log_۴(x+۲) = \log_۴ ۳x$;

۷) $\lg x = ۳\lg ۲ + \frac{۱}{۳}\lg ۴ - \lg ۸$; ۸) $\log_۲(x+۱)^۲ = ۱ - \log_۲ ۳$

۵. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

۱) $\log_۵ x < ۱$; ۲) $\log_{\frac{۱}{۵}} x > ۱$; ۳) $\log_۳ x > ۱$;

۴) $\log_{\frac{۱}{۳}} x < ۱$; ۵) $\log_۲ x^۲ < ۲$; ۶) $\log_{\frac{۱}{۳}} x^۲ > ۰$;

۷) $۱ < \log_۳ x^۲ < ۲$

تمرین‌ها

۱. لگاریتم این عددها را درمبنای ۵ پیدا کنید:

$$۱،\ ۵،\ ۲۵،\ ۶۲۵،\ \frac{۱}{۵}،\ \frac{۱}{۲۵}،\ \frac{۱}{\sqrt{۵}}،\ \sqrt{\sqrt{۵}}،\ ۵^{\frac{۱}{۲}}،\ ۵^{\frac{۱}{۳}}،\ \sqrt[۴]{۵\sqrt[۳]{۵}}$$

۲. هریك ازاین عددها، بین کدام دوعدد درست متوالی قراردارد؟

۱) $\log_{۲}۳$; ۲) $\log_{۳}۵$; ۳) $\log_{۳}۱۱$; ۴) $\log_{۳}\frac{۱}{۱۰}$;

۵) $\lg ۲۴۸$; ۶) $\log_{۳}\sqrt{۲۱}$; ۷) $\lg ۰/۰۰۳$; ۸) $\ln ۶$;

۹) $\log_{۵}\frac{۱}{۲۳}$

۳. آیا مثبت‌اند؟

۱) $\log_{\sqrt{۳}}\sqrt{۲}،\ \log_{\frac{۱}{۷}}۲،\ \log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{۵}\right)،\ \log_{۳}۴،\ \log_{۷}۲/۱۱$;

۲) $\lg(۰/۰۲)^{۲}،\ \lg\sqrt[۵]{۱/۰۰۳}،\ \lg\left(\frac{۲\sqrt{۶}}{۵}\right)،\ \log_{۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{-\frac{۲}{۳}}$;

۳) $\log_{۳}(\sqrt{۷}-۲)،\ \log_{۴}\left(\frac{\sqrt{۲}+۱}{\sqrt{۲}-۱}\right)،\ \log_{۳}\left(\frac{۲\sqrt[۳]{۳}}{۳}\right)،\ \lg\lg ۹$;

۴) $\log_{\frac{۱}{۳}}(\sqrt{۷۳}-۸)،\ \lg\lg ۱۱،\ \log_{۵}\left(\frac{۳}{\sqrt[۳]{۱۰}}\right)،\ \log_{۷}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}$;

۵) $\lg(\sqrt[۶]{۷۰۰۰}-۲\sqrt[۳]{۱۰})،\ \lg(۳-۲\sqrt[۳]{۳})،\ \lg \sin ۱۶۰^{\circ}$

۴. ساده کنید:

۱) $۱۰^{-۰/۵\lg ۲/۲۵},\ ۱۰^{۲-\lg ۲/۵}\ (\sqrt[۳]{۱۰})^{\lg ۲۷},\ ۲^{\log_{۲}۳۰-۱}$;

۲) $۵^{\log_{۰}۲+\log_{۰}۳},\ \left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}\right)^{\lg ۹-۲},\ (۰/۰۱)^{\lg ۰/۲-\frac{۱}{۲}}$;

۳) $۲^{۴\log_{۲}۳-۱},\ \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\log_{۹}۲-۳},\ \left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_{۲۰}۴+۲}+۳$;

۴) $\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲۴۳}\right)^{۳-\log_٤\frac{۱۹}{۲\log_٤ ۲۷}}}$;

۵) $\frac{۱}{\sqrt[۴]{\left(\frac{۱}{۱۲۵}\right)^{۲-\frac{\log_۲ ۱۷}{۲-\log_۲\sqrt[۳]{۲۵}}}}}$، $۳^{\log_{\sqrt{۲۷}} ۱۷}+۲^{\frac{۱}{\log_۷ ۴}}$;

۶) $\left(\sqrt[۸]{\frac{۱}{۸۱}}\right)^{\frac{۱}{۶\log_۶ ۳}+\log_{۹\sqrt{۳}} ۲۵۶}$;

۷) $\left(۱۶^{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\log_٤ ۳}+۲۵^{\log_{۱۲۵} ۶}\right)\cdot ۱۶^{\log_٤ ۲}$

۸) $\log_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\left(\frac{۶۴}{۲۷}\right)$، $\log_{۰/۶}\left(\frac{\sqrt{۱۵}}{۵}\right)$، $\log_۳\left(\sqrt[۴]{۸۱}\cdot\frac{\sqrt[۶]{۳}}{\sqrt[۵]{۲۷}}\right)$;

۹) $\log^۲_{\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{۴}\right)$، $\log^۳_{۲\sqrt{۲}} ۸$، $-\log_۵\log_۳\sqrt{\sqrt[۵]{۹}}$;

۱۰) $\frac{\lg ۶۴}{\lg ۴۸-\lg ۳}, \frac{۳\lg ۲+\lg ۳}{\lg ۵۷۶}, \frac{\lg ۱۲-\lg ۲}{\lg ۸}$;

۱۱) $\frac{۲\lg ۲+\lg ۳}{\lg ۴۸-\lg ۴}, \frac{۲\lg ۶-\lg ۳}{\lg ۱۴۴}, \frac{\lg ۲+\lg ۳}{\lg ۳/۶+۱}$;

۱۲) $\log_{\sqrt{۶}} ۳\cdot\log_۳ ۳۶$، $\log_{\sqrt{۳}} ۸\cdot\log_۴ ۸۱$;

۱۳) $\log_۲\sqrt{\frac{۱}{۵}}\cdot\log_{۲۵}\sqrt[۴]{۲}$، $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\log_{\sqrt{۵}}\sin\left(\frac{\pi}{۵}\right)\cdot\log_{\sqrt{\sin\frac{\pi}{۵}}}۵}$

۵. آیا مثبت است؟

۱) $\lg ۲+\lg ۳+\lg ۰/۱۶$;

۲) $\frac{۱}{۲}\log_{۱۱} ۵+\frac{۱}{۲}\log_{۱۱} ۳-\log_{۱۱} ۴/۵$;

۳) $\log_۲ ۳+\log_۲ ۱/۴-\frac{۱}{۲}\log_۲ ۱۶$;

۴) $\log_{\frac{۱}{۵}} ۷ - \frac{۱}{۲}\log_{\frac{۱}{۵}} ۱/۲ - ۳\log_{\frac{۱}{۵}} ۲;$

۵) $\lg ۴ + \lg ۱۲ - ۲\lg ۷;$ ۷) $\lg\left(\frac{۷}{۵}\right) + \frac{۱}{۲}\lg\left(\frac{۲}{۲۵}\right) - ۱;$

۶) $۱ + ۲\lg ۲ - ۳\lg ۵ + \lg ۳;$ ۸) $۳\lg ۶ - ۲ - \frac{۱}{۲}\lg ۵$

۰۶ محاسبه کنید:

۱) $\frac{\log_۳ ۱۲}{\log_{۳۶} ۳} - \frac{\log_۳ ۴}{\log_{۱۰۸} ۳};$

۲) $\lg ۵ \cdot \lg ۲۰ + (\lg ۲)^۲;$ ۴) $\frac{\log_۲ ۲۴}{\log_{۹۶} ۲} - \frac{\log_۲ ۱۹۲}{\log_{۱۲} ۲};$

۳) $\frac{\log_۵ ۲۵۰}{\log_{۵۰} ۵} - \frac{\log_۵ ۱۰}{\log_{۱۲۵۰} ۵};$ ۵) $\frac{۱ + ۲\log_۳ ۲}{(۱ + \log_۳ ۲)^۲} + \log_۶^۲ ۲$

۰۷ باهم مقایسه کنید:

۱) $\lg\sqrt{۱۰}$ و $\lg ۲;$ ۲) $\lg\left(\frac{۴}{۱۹}\right)$ و $\lg\left(\frac{۱۳}{۲۱}\right);$

۳) $\lg ۱/۰۵$ و $\lg(۱/۰۵)^{-۲};$ ۴) $۱ - ۲\lg ۲ + \lg ۳$ و $۲\lg ۱۱;$

۵) $\lg(۲\sqrt{۵})$ و $\lg ۴/۵;$ ۶) $\lg\left(\frac{۳۱}{۵۳}\right)$ و $\lg ۰/۶;$

۷) $\lg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ و $\lg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۳;$ ۸) $۵\lg ۵$ و $۷\lg ۲;$

۹) $\frac{۱}{۲} + \lg ۳$ و $\lg ۱۹ - \lg ۲;$ ۱۰) $\log_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{۱}{۳}\right)$ و $\log_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۱}{۲}\right);$

۱۱) $\log_{\frac{۱}{۵}}\left(\frac{۱}{۷}\right)$ و $\log_{\frac{۱}{۷}}\left(\frac{۱}{۵}\right);$ ۱۲) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_۵\left(\frac{۱}{۷}\right)}$ و $\left(\frac{۱}{۷}\right)^{\log_۷\left(\frac{۱}{۵}\right)};$

۱۳) $\lg ۵\sqrt{۲}$ و $\lg ۷;$ ۱۴) $\lg ۰/۷$ و $\log_{۰/۷} ۳;$

۱۵) $\log_{\frac{۱}{۷۱}}\left(\frac{۲}{۴۳}\right)$ و $\log_{\frac{۱}{۷۱}}\left(\frac{۳}{۴۴}\right);$

۱۶) $\log_۴ ۲۶$ و $\log_۶ ۱۷;$ ۱۷) $\log_۲ ۵$ و $\log_۳ ۱۶;$

۱۸) $(\log_۲ ۵)^۲$ و $\log_۲ ۲۰;$ ۱۹) $\log_۲ ۳$ و $\log_۳ ۷;$

۲۰) $\log_{۳}۷$ و $\log_{۷}۲۷$;   ۲۱) $\log_{۲}۵$ و $\log_{۵}۱۶$;

۲۲) $\log_{۱۸}۳۶$ و $\log_{۲۴}۷۲$;   ۲۳) $\log_{\pi}۲+\log_{۲}\pi$ و ۲;

۲۴) $\log_{۳}۱۰+۴\lg ۳$ و ۴;   ۲۵) $۳^{\log_{۴}۲}$ و $۲^{\log_{۲۷}۳}$;

۲۶) $۱۰^{\log_{۹}۳}$ و $۷^{\log_{۴}۲}$;   ۲۷) $۲^{\sqrt{\log_{۲}۳}}$ و $۳^{\sqrt{\log_{۳}۲}}$

۲۸) $\dfrac{۴}{\lg\frac{۱}{۲}}, \ \dfrac{۷}{\lg\frac{۱}{۲}}$

۸. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $۳=۲x$;   ۲) $۲^{x}\cdot۳^{-x}=۴$;   ۳) $۲^{x+۲}=۵$;

۴) $۳\cdot۱۰^{۱-x}=۲$;   ۵) $۲^{x+۳}\cdot۱۰^{x}=۷$;   ۶) $۷^{x}\cdot۵^{x+۲}=۳^{۲x-۱}$;

۷) $\sqrt{۳^{x}}\cdot\sqrt{۵^{x}}=۱۵$;   ۸) $۵^{\lg x}-۳^{\lg x-۱}=۳^{\lg x+۱}-۵^{\lg x-۱}$

۹. محاسبه کنید:

۱) $\lg tg۱^{\circ}\cdot\lg tg۲^{\circ}\cdot\ldots\cdot\lg tg۸۹^{\circ}$;

۲) $\lg sin۱^{\circ}\cdot\lg sin۲^{\circ}\cdot\ldots\cdot\lg sin۹۰^{\circ}$;

۳) $\lg tg۱^{\circ}+\lg tg۲^{\circ}+\ldots+\lg tg۸۹^{\circ}$;

۴) $۷^{\log_{۳}۵}+۳^{\log_{۵}۷}-۵^{\log_{۳}۷}-۷^{\log_{۵}۳}$;

۵) $۶^{\log_{\sqrt{۳}}۶}+\log_{\sqrt{۳}}\left(\dfrac{۹}{\sqrt{۵}}+\sqrt{۲}\right)+\log_{\frac{۱}{۳}}\left(\dfrac{۱}{۷}+۲\sqrt{۱۰}\right)$;

۶) $۵^{\log_{\frac{۱}{۵}}\left(\frac{۱}{۲}\right)}+\log_{\sqrt{۲}}\left(\dfrac{۴}{\sqrt{۷}}+\sqrt{۳}\right)+\log_{\frac{۱}{۲}}\left(\dfrac{۱}{۱۰}+۲\sqrt{۲۱}\right)$;

۷) $۴^{۵\log_{۴\sqrt{۲}}(۳-\sqrt{۶})-۶\log_{۸}(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})}$;

۸) $۲^{\log_{۲\sqrt{۲}}(۵-\sqrt{۱۰})+\log_{\frac{۱}{۴}}(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})}$;

۱۰. مقایسه کنید:

۱) $۷\log_{۱۹۷۸}۱۹۷۰+۱$ و $۸\log_{۱۹۷۸}۱۹۷۱$;

۲) $۳\log_{۱۷۵۹}۱۷۵۱+۱$ و $۴\log_{۱۷۵۹}۱۷۵۳$;

۳) $۳\log_{۱۶}۱۸۶۲+\log_{۱۶}۱۸۶۶$ و $\log_{۲}۱۸۶۳$;

۴) $\log_{۱۱۴۷}۱۱۵۴+۷\log_{۱۱۴۷}۱۱۴۶$ و ۸

۱۱. مطلوب است:

۱) $[\lg ۲۶]$; ۲) $[\lg ۰/۰۴۷]$

۱۲. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $[\lg x]=۱$; ۲) $[\lg x]=-۲$

۱۳. ثابت کنید:

۱) $\log_{۱۸۹}۱۳۲۳>\log_{۶۳}۱۴۷$; ۲) $\log_{۱۳۵}۶۷۵<\log_{۴۵}۷۵$;

۳) $\log_{۱۳۵}۶۷۵>\log_{۱۵}۶۰>\log_{۶۰}۴۸۰$; ۴) $\log_{۲۰}۸۰>\log_{۸۰}۶۴۰$

۱۴. برحسب a و b محاسبه کنید:

۱) $\log_{۴}۲۰$، $(\lg ۲=a)$; ۲) $\log_{۴۹}۳۲$، $(\log_{۲}۱۴=a;)$

۳) $\log_{۳۵}۲۸$، $(\log_{۱۴}۷=a$، $\log_{۱۴}۵=b)$;

۴) $\log_{۱۷۵}۵۶$، $(\log_{۱۴}۷=a$، $\log_{۵}۱۴=b)$;

۵) $\log_{۳۵}۲۸$، $(\log_{۱۴}۷=a$، $\log_{۱۴}۱۴۰=b)$;

۶) $\log_{۵۴}۱۶۸$، $(\log_{۷}۱۲=a$، $\log_{۱۲}۲۴=b)$;

۷) $\log_{۱۲}۶۰$، $(\log_{۶}۳۰=a$، $\log_{۱۵}۲۴=b)$

۱۵. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $\log_{۲}|x+۱|=-۱$;

۲) $\log_{۲}x=lo$[illegible]$(۶-x^{۲})$;

۳) $\log_{x}۲=۳$;

۴) $\log_{۲}x=-\log_{۴}x$;

۵) $\log_{۳}x+\log_{x}۳=۲$;

۶) $\log_{۲}\log_{۴}\log_{۵}x=۰$

۱۶. این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $\log_{۲}(x+۳)<۲$;

۲) $\log_{۲}(x^{۲}-۵x+۵)>۰$

۳) $\log_{x}۳>۵$;

۴) $\log_{۴}x+\log_{۸}x<۰$

۵) $\log_{۲}x+\log_{۴}x+\log_{۸}x<۲$;

۶) $\dfrac{۱}{\log_{۲}x}+\dfrac{۱}{\log_{۲}x^{۲}}>۱$

۱۷. این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $\begin{cases}\log_{۲}xy=۳،\\ \log_{\frac{۱}{۲}}\left(\dfrac{x}{y}\right)=۱;\end{cases}$

۲) $\begin{cases}x^{۲}-۵x+۶=۰;\\ \log_{۲}(x+y)=\log_{۲}۵;\end{cases}$

۳) $\begin{cases}xy=۴۰،\\ \lg x\cdot\lg y=\lg ۴\end{cases}$

۱۸. تعداد رقم‌های این عددها را پیدا کنید:

۱) $۳^{۳۷}$; ۲) $۶^{۱۵}$; ۳) $۵^{۲۰۰}$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۰، ۱، ۲، ۳، -۱، -۵، -۴، $\frac{۱}{۲}$، ۱، $\frac{۳}{۲}$، $-\frac{۱}{۵}$، $-\frac{۳}{۷}$.

۲. ۰، ۱، ۲، -۱، -۲، -۴، $-\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۷}$، $-\frac{۵}{۲}$، $\frac{۹}{۴}$.

۳. ۱) ۴؛ ۲) ۲؛ ۳) $a>۰$ و $a\neq ۱$؛ ۴) -۵ و ۲؛
۵) -۲ و ۲؛ ۶) -۳ و ۳.

۴. عددهای مربوط به ۱)، ۳)، ۴)، ۷) و ۸) مثبت‌اند.

تکلیف ۲.

۱. ۰، ۱، ۲، ۴، -۱، $\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۳}{۲}$؛ $\frac{۷}{۲}$، $\frac{۲}{۷}$.

۲. ۰، ۱، ۳، -۴، $-\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $-\frac{۳}{۲}$، $\frac{۹}{۴}$.

۳. ۱) ۹؛ ۲) $\frac{۱}{۸۱}$؛ ۳) ۱؛ ۴) $a>۰$ و $a\neq ۱$؛ ۵) ۲؛
۶) $-\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۲}$.

۴. عددهای ۱)، ۲)، ۳)، ۵)، ۶)، ۸) و ۱۲) مثبت‌اند.

تکلیف ۳.

۱. ۱) ۳؛ ۲) $\frac{۱}{۱۰}$؛ ۳) ۲۷؛ ۴) $\sqrt{۵}$؛ ۵) $-\frac{۱}{۳}$؛

۶) $-\frac{۱}{۵}$؛ ۷) $\frac{۱}{۴۹}$؛ ۸) $۳^{۱۰}$؛ ۹) ۷.

۲. ۱) $\lg ۷+\lg ۳-\lg ۵$؛ ۲) $۳\lg ۷+۵\lg ۳-۲\lg ۵$؛
۳) $\frac{۱}{۲}\lg ۷+\frac{۲}{۳}\lg ۲-۳\lg ۳$؛
۴) $\frac{۳}{۴}\lg ۷+\frac{۱۷}{۲۸}\lg ۳+\frac{۵}{۲۱}\lg ۲+\frac{۱}{۳}\lg ۳۱-\frac{۱}{۲}\lg ۵$؛
۵) $\frac{۷}{۶}\lg ۲-\frac{۱}{۳}\lg ۳+۵\lg ۵+\frac{۲}{۵}\lg ۷$؛ ۶) $\frac{۱}{۱۲}\lg ۲-\frac{۱}{۳}\lg ۳$.

۳. ۱) ۱، ۱، ۱؛ ۲) ۱، ۱، ۳، $-\frac{۳}{۲}$، -۱؛ ۳) $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۲}$، ۲، ۳، $-\frac{۱}{۲}$؛ ۴) $\frac{۱}{۱۸}$، $\frac{۲۷}{۵\sqrt{۵}}$، ۲۰، ۱.

۴. ۱) ۲؛ ۲) $\frac{۱}{۳}$؛ ۳) $-\frac{۷}{۲}$؛ ۴) $-log_{۳}۲$؛
۵) $(log_{۳}۵)^{-۱}$؛ ۶) ۱.

تکلیف ۴.

۱. ۱) ۲؛ ۲) ۷؛ ۳) ۵؛ ۴) ۱۶؛ ۵) $\frac{۱}{۲}$؛ ۶) $\frac{۱}{۵}$؛
۷) $\frac{۱}{۳۶}$؛ ۸) ۲۴۰۱؛ ۹) $\frac{۱}{۲۷}$.

۲. ۱) $۳\lg ۳+\lg ۲-\frac{۱}{۳}\lg ۵-\lg ۷$; ۲) $\frac{۵۷}{۲۸}\lg ۳+\frac{۲}{۲۱}\lg ۵$;
۳) $\frac{۱}{۲}\lg ۷+\frac{۱}{۴}\lg ۲-\frac{۱}{۲}\lg ۳-\frac{۱}{۴}\lg ۵$; ۴) $\frac{۲۳}{۲۰}\lg ۲+۲\lg ۷-$
$-\frac{۱}{۲}\lg ۳-\frac{۱}{۲}\lg ۱۱$; ۵) $\frac{۱}{۶۰}\lg ۳$; ۶) $-\frac{۱۳}{۸}\lg ۲+\frac{۱}{۸}\lg ۳$

۳. ۱) ۱، ۱، ۲، $-\frac{۳}{۲}$؛ ۲) ۱، ۰، -۱، $-\frac{۳}{۲}$؛ ۳) $\frac{۲}{۵}$، ۱، $\frac{۲}{۷}$، -۴؛ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$، ۲۰، ۱۲، $\frac{۹}{۵}$؛ ۵) $۲۵\sqrt[۴]{۶}$، ۰، $\frac{۱}{۲}$.

۴. ۱) $\frac{۳}{۴}$؛ ۲) $\frac{۴}{۵}$؛ ۳) $\frac{۵}{۲}$؛ ۴) ۶؛ ۵) $-\frac{۱}{۳}$؛ ۶) ۰.

تکلیف ۵.

۱. ۱) $۲a+b$؛ ۲) $b+۱$؛ ۳) $۱+b-۲c$؛
۴) $۲(۱+b-۲c)$؛ ۵) $۲e+۱$؛ ۶) $a+۱$؛ ۷) $\frac{۱}{۶}(۲+c+۳b)$.
۲. ۱) $\log_۲ ۵$؛ ۲) $\log_۲ ۳$؛ ۳) $\log_{\frac{۱}{۲}} ۵$؛ ۴) $\log_۲ ۵$؛
۵) $\log_۴\sqrt{۶۵}$؛ ۶) $\lg\frac{۱۱}{۱۵}$؛ ۷) $\lg ۴۲-\lg ۳/۵$؛ ۸) $\lg ۵$ [عدد بزرگتر را نوشته‌ایم).
۴. ۱) $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$؛ ۲) ۱؛ ۳) ۱؛ ۴) ۰؛ ۵) ۱؛ ۶) $۲^{\frac{۴}{۳}}\sqrt{۳}$؛
۷) ۱ و -۱؛ ۸) $\frac{۳}{۲}$.

۵. ۱) $x>۲$؛ ۲) $۰<x<۱$؛ ۳) $-۱<x<-\frac{۱}{۲}$؛
۴) $۱<x<۴$؛ ۵) $-\sqrt{۲}<x<۰$ و $۰<x<\sqrt{۲}$؛ ۶) $۱<x<\frac{۴}{۳}$؛
۷) $-\frac{۱}{۴}<x<۰$ و $۰<x<\frac{۱}{۴}$؛ ۸) $x>-\frac{۵}{۲}$؛
۹) $-\infty<x<+\infty$.

تکلیف ۶.

۱. ۱) $-۱-b$؛ ۲) $۳a+b$؛ ۳) $۱-b-۲a$؛
۴) $۲-۳b-۵a$؛ ۵) $۳a+۲b+۱$؛ ۶) $۲a+۱$؛
۷) $\frac{۱}{۳}(a+b)$؛ ۸) $-۲-b$.

۲. ۱) $\log_۲ ۸$، ۲) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۴$، ۳) $\log_{\frac{۱}{۷}}\frac{۴}{۵}$، ۴) $\log_۴ ۵$، ۵) $\log_{۲}۵$، ۶) $\log_{۲}۳$، ۷) $\lg\sqrt{۵}$، ۸) $\lg\sqrt[۴]{۱۵۰}$.

۴. ۱) ۲ و -۲، ۲) $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$، ۳) $\frac{۳}{۲}$، ۴) ۴،
۵) $\frac{۱}{۹}$، ۶) ۱، ۷) $۲^{\frac{۲}{۳}}$، ۸) $-۱+\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ و $-۱-\sqrt{\frac{۲}{۳}}$.

۵. ۱) $۰<x<۵$، ۲) $۰<x<\frac{۱}{۵}$، ۳) $x>۳$،
۴) $x>\frac{۱}{۳}$، ۵) $-۲<x<۰$ و $۰<x<۲$، ۶) $-۱<x<۰$
و $۰<x<۱$، ۷) $-۳<x<-\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۳}<x<۳$.

تمرین‌ها

۱. ۰، ۱، ۲، ۴، -۱، -۲، $-\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۵}{۶}$، $\frac{۱}{۳}$.

۲. ۱) ۱ و ۲، ۲) ۱ و ۲، ۳) ۲ و ۳، ۴) -۳ و -۲،
۵) ۲ و ۳، ۶) ۱ و ۲، ۷) -۳ و -۲، ۸) ۱ و ۲، ۹) -۲ و -۱.

۳. ۱) بله، نه، بله، بله، بله؛ ۲) نه، بله، نه، بله؛ ۳) نه، بله، نه، نه؛ ۴) بله، بله، بله بله؛ ۵) نه، نه، نه.

۴. ۱) $\frac{۲}{۳}$، ۴۰، ۳، ۱۵؛ ۲) ۶، $\frac{۱۰}{۳}$، ۲۵۰؛ ۳) $۴۰\frac{۱}{۲}$،
$\frac{۲۷}{۲}\sqrt{۲}$، ۳/۰۲؛ ۴) $۳^{-\frac{۵}{۲}}۱۹^{\frac{۵}{۵۴}}$؛ ۵) $۵^{\frac{۳}{۲}}۱۷^{-\frac{۹}{۱۶}}$، $۱۷^{\frac{۲}{۳}}+۷^{\frac{۱}{۲}}$؛
۶) $۲^{-\frac{۱۰۱}{۶۰}}۳^{-\frac{۱}{۱۲}}$؛ ۷) $۴(۳^{-\frac{۱}{۲}}\cdot۴+۶^{\frac{۲}{۳}})$؛ ۸) -۶، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۹}{۱۰}$؛
۹) ۱۶، ۸، ۱؛ ۱۰) $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$؛ ۱۱) ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$؛ ۱۲) ۴، ۱۲؛
۱۳) $-\frac{۱}{۱۲}$، ۲.

۵. ۱) نه؛ ۲) نه؛ ۳) بله؛ ۴) نه؛ ۵) نه؛ ۶) نه؛

۷) نه؛ ۸) نه.

۱۰۶ ۱) ۲؛ ۲) ۱؛ ۳) ۲؛ ۴) ۳؛ ۵) ۱.

۱۰۷ ۱) $\lg\sqrt[۳]{۱۰} > \lg ۲$، ۲) $\lg\frac{۴}{۱۹} < \lg\frac{۱۳}{۳۱}$؛

۳) $\lg ۱/۰۵ < \lg(۱/۰۵)^{۲}$، ۴) $۲\lg ۱۱ > ۱ - ۲\lg ۲ + \lg ۳$؛

۵) $\lg ۴/۵ > \lg ۲\sqrt{۵}$، ۶) $\lg ۰/۶ > \lg\frac{۳۱}{۵۳}$؛

۷) $\lg\frac{\sqrt{۳}}{۲} > \lg\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۳}$، ۸) $۵\lg ۵ > ۷\lg ۲$؛

۹) $\lg ۱۹ - \lg ۲ > \frac{۱}{۲} + \lg ۳$، ۱۰) $\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۳} > \log_{\frac{۱}{۳}}\frac{۱}{۲}$؛

۱۱) $\log_{\frac{۱}{۵}}\frac{۱}{۷} > \log_{\frac{۱}{۷}}\frac{۱}{۵}$، ۱۲) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\log_{۵}\frac{۱}{۷}} > \left(\frac{۱}{۷}\right)^{\log_{۷}\frac{۱}{۵}}$؛

۱۳) $\lg ۵\sqrt{۲} > \lg ۷$، ۱۴) $\log_{۰/۷} ۳ > \lg ۰/۷$؛

۱۵) $\log_{\frac{۱}{۷۱}}\frac{۲}{۴۳} > \log_{\frac{۱}{۷۱}}\frac{۳}{۴۳}$؛ ۱۶) $\log_{۴} ۲۶ > \log_{۶} ۱۷$؛

۱۷) $\log_{۲} ۵ > \log_{۳} ۱۶$؛ ۱۸) $(\log_{۲} ۵)^{۲} > \log_{۲} ۲۰$؛

۱۹) $\log_{۳} ۷ > \log_{۲} ۳$؛ ۲۰) $\log_{۷} ۲۷ < \log_{۳} ۷$، ۲۱) $\log_{۲} ۵ > \log_{۵} ۱۶$؛

۲۲) $\log_{۲۴} ۷۲$ بزرگتر است؛ ۲۳) عدد ۲ کوچکتر است؛ ۲۴) عدد ۴ کوچکتر است، ۲۵) $۳^{\log_{۴} ۲}$ بزرگتر است؛ ۲۶) $۷^{\log_{۴} ۲}$ کوچکتر است؛

۲۷) $۲^{\sqrt{\log_{۲} ۳}}$ بزرگتر است، ۲۸) $\frac{۴}{\lg\frac{۱}{۷}}$ بزرگتر است.

۱۰۸ ۱) $x = \log_{۲} ۳$؛ ۲) $x = ۲\log_{\frac{۲}{۳}} ۲$؛ ۳) $x = -۲ + \log_{۲} ۵$؛

۴) $x = \lg ۱۵$؛ ۵) $x = \log_{۲۰}\frac{۷}{۸}$؛ ۶) $x = \left(\log_{۷۵}\frac{۹}{۳۵}\right)^{-۱}$؛

۷) $x = ۲$؛ ۸) $x = ۱۰۰$.

۱۰۹ ۱) ۰؛ ۲) ۰؛ ۳) ۰؛ ۴) ۰؛ ۵) ۱۳؛ ۶) ۶؛

۷) ۹؛ ۸) $\frac{(۵-\sqrt{۱۰})^{\frac{۲}{۳}}}{(\sqrt{۵}-\sqrt{۲})^{۴}}$.

۱.۱۰ ۱) $\log_{۱۹۷۸}۱۹۷۰+۱>۷\log_{۱۹۷۸}۱۹۷۱ \cdot ۸$؛ *(sic: as printed)*

۲) $\log_{۱۷۵۹}۱۷۵۳ ۴$ بزرگتر است؛ ۳) $\log_{۲}۱۸۶۳$ بزرگتر است؛

۴) عدد ۸ بزرگتر است.

۱.۱۱ ۱) ۱؛ ۲) -۱.

۱.۱۲ ۱) $۱۰\leqslant x<۱۰۰$؛ ۲) $۱۰۰^{-۱}\leqslant x<۱۰^{-۱}$.

۱.۱۴ ۱) $\frac{a+۱}{۲a}$؛ ۲) $\frac{۵}{۲(a-۱)}$؛ ۳) $\frac{۲-a}{a+b}$؛

۴) $\frac{(۳-۲a)b}{۲+ab}$؛ ۵) $\frac{۲-a}{b+a-۲}$؛ ۷) $\frac{۱+ab}{a(۸-۵b)}$؛ $\frac{۲a+۲ab-۱}{ab+b+۱}$.

۱.۱۵ ۱) $x_۱=-\frac{۱}{۲}$ و $x_۲=-\frac{۳}{۲}$؛ ۲) $x=۲$؛ ۳) $x=\sqrt[۳]{۲}$؛

۴) $x=۱$؛ ۵) $x=۳$؛ ۶) $x=۶۲۵$.

۱.۱۶ ۱) $-۳<x<۱$؛ ۲) $x<۱$، $x<۴$؛

۳) $۱<x<\sqrt[۵]{۳}$؛ ۴) $۰<x<۱$؛ ۵) $۰<x<۲^{\frac{۱۲}{۱۱}}$؛

۶) $۱<x<۲^{\frac{۳}{۲}}$.

۱.۱۷ ۱) (۲، ۴) و (−۲، −۴)؛ ۲) (۳، ۲) و (۲، ۳)؛

۳) (۴، ۱۰) و (۱۰، ۴).

۱.۱۸ ۱) ۱۷؛ ۲) ۱۱؛ ۳) ۱۳۹.

§۵. قدرمطلق عدد

قدرمطلق یا مدول عدد a، در حالت $a>۰$ برابرخود a، ودرحالت $a<۰$ برابر $(-a)$ است؛ درحالت $a=۰$، قدرمطلق a هم برابرصفراست (قدرمطلق a را، به‌صورت $|a|$ نشان می‌دهند). به‌زبان دیگر

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqslant ۰) \\ -a & (a \leqslant ۰) \end{cases}$$

از تعریف قدرمطلق نتیجه می‌شود که، برای هر $a \in \mathbf{R}$، داریم:

$$|a| \geqslant ۰ \quad \text{و} \quad |a| \geqslant a$$

مثال ۱.

$$|-۲| = ۲، \ |۵/۱| = ۵/۱، \ |۰| = ۰، \ \left|\log_{\frac{۱}{\pi}} ۲\right| = -\log_{\frac{۱}{\pi}} ۲،$$

$$|\cos ۲| = -\cos ۲، \ |tg\,۱/۰۱| = tg\,۱/۰۱، \ |\sqrt{۲} - \sqrt{۳}| = \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$$

ویژگی‌های قدرمطلق عدد

۱. $|ab| = |a| \cdot |b|$;

۲. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq ۰)$;

۳. $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;

۴. $|a+b| \geqslant |a| - |b|$;

۵. $|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$

مثال ۲.

$$|-a| = |-۱ \times a| = |-۱| \cdot |a| = |a|;$$

$$|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|;$$

$$|a-b| = |a+(-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$$

مثال ۳. ثابت کنید، اگر $|a| < ۱$، $|b-۱| < ۱۰$ و $|a-c| < ۱۰$، آن وقت $|ab-c| < ۲۰$.

حل. داریم:

$$|ab-c| = |ab-a+a-c| = |(ab-a)+(a-c)| \leqslant$$

$$\leqslant |ab-a| + |a-c| = |a| \cdot |b-۱| + |a-c| < ۱۰ + ۱۰ = ۲۰$$

مثال ۴. ثابت کنید، برای هر عدد a ($a \neq ۲n\pi$، $n \in \mathbf{Z}$)، این نابرابری برقرار است:

$$|\sin a + \sin ۲a + \sin ۳a + \ldots + \sin na| \leqslant \frac{۱}{\left|\sin \frac{a}{۲}\right|}$$

حل. عبارت داخل قدرمطلق را درسمت‌چپ نابرابری در $۲\sin\frac{a}{۲}$ ضرب و بر آن تقسیم و، سپس، ازدستور زیر استفاده می‌کنیم:

$$۲\sin ka\sin\frac{a}{۲}=\cos\left(ka-\frac{a}{۲}\right)-\cos\left(ka+\frac{a}{۲}\right)$$

$$k=۱،\ ۲،\dots،n$$

دراین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$\sin a+\sin ۲a+\dots+\sin na=$$

$$=\frac{۱}{۲\sin\frac{a}{۲}}\left(۲\sin a\sin\frac{a}{۲}+۲\sin ۲a\sin\frac{a}{۲}+\dots+۲\sin na\sin\frac{a}{۲}\right)=$$

$$=\frac{۱}{۲\sin\frac{a}{۲}}\left[\cos\left(a-\frac{a}{۲}\right)-\cos\left(a+\frac{a}{۲}\right)+\cos\left(۲a-\frac{a}{۲}\right)-\right.$$

$$\left.-\cos\left(۲a+\frac{a}{۲}\right)+\dots+\cos\left(na-\frac{a}{۲}\right)-\cos\left(na+\frac{a}{۲}\right)\right]=$$

$$=\frac{۱}{۲\sin\frac{a}{۲}}\left[\cos\frac{a}{۲}-\cos(۲n+۱)\frac{a}{۲}\right]$$

بنابراین

$$|\sin a+\sin ۲a+\dots+\sin na|=$$

$$=\left|\frac{۱}{۲\sin\frac{a}{۲}}\left(\cos\frac{a}{۲}-\cos(۲n+۱)\frac{a}{۲}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{۱}{۲\left|\sin\frac{a}{۲}\right|}\left(\left|\cos\frac{a}{۲}\right|+\left|\cos\frac{۲n+۱}{۲}a\right|\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{۲}{۲\left|\sin\frac{a}{۲}\right|}=\frac{۱}{\left|\sin\frac{a}{۲}\right|}$$

از تعریف ریشهٔ حسابی یک عدد غیرمنفی نتیجه می‌شود:

۶. $\sqrt{A^۲}=|A|$، $a\in\mathbf{R}$.

مثال ۵. $\sqrt{۹}=\sqrt{۳^۲}=|۳|=۳;$

$$\sqrt{۹}=\sqrt{(-۳)^۲}=|-۳|=-(-۳)=۳;$$

$$\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=|۱-\sqrt{۲}|=$$

$$=-(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱$$

مثال ۶. ثابت کنید، برای هرعدد حقیقی a، داریم

$$\sqrt{a^۲+۱}-a>۰$$

حل. چون $a^۲+۱>a^۲$، پس $\sqrt{a^۲+۱}>\sqrt{a^۲}=|a|$. بنابراین

$$\sqrt{a^۲+۱}-a>\sqrt{a^۲}-a=|a|-a\geqslant ۰$$

زیرا برای هرعدد حقیقی a داریم $|a|\geqslant a$.

مثال ۷. محاسبه کنید:

$$A=\frac{۲b\sqrt{x^۲-۱}}{x-\sqrt{x^۲-۱}}, x=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

که درآن، a و b، عددهایی مثبت‌اند.

حل. داریم:

$$\sqrt{x^۲-۱}=\sqrt{\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^۲-۱}=$$

$$=\sqrt{\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+۲+\frac{b}{a}\right)-۱}=\sqrt{\frac{(a-b)^۲}{۴ab}}=\frac{|a-b|}{۲\sqrt{ab}}$$

به این ترتیب

$$A=\frac{۲b|a-b|:(۲\sqrt{ab})}{\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-|a-b|:(۲\sqrt{ab})}=$$

$$=\frac{۲b|a-b|}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)-|a-b|}=\frac{۲b|a-b|}{a+b-|a-b|}$$

اگر $a-b\geqslant ۰$، آن‌وقت $|a-b|=(a-b)$ ودر نتیجه

$$A=\frac{۲b(a-b)}{(a+b)-(a-b)}=\frac{۲b(a-b)}{۲b}=a-b$$

اگر $a-b\leqslant ۰$، آن‌وقت $|a-b|=-(a-b)$، درنتیجه

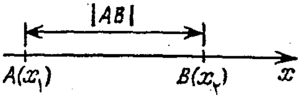
$$A=\frac{-۲b(a-b)}{(a+b)+(a-b)}=\frac{b(b-a)}{a}$$

پاسخ را می‌توان به‌این ترتیب نوشت:

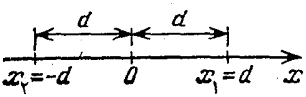
$$A=\begin{cases} a-b & (a\geqslant b) \\ \frac{b}{a}(b-a) & (a<b) \end{cases}$$

فاصلهٔ بین نقطهٔ $A(x_۱)$ بـه‌مختص $x_۱$ و نقطهٔ $B(x_۲)$ بـه‌مختص $x_۲$، واقع برمحورعددی (به‌هـرترتیبی کـه قرارگرفته باشند)، به‌صورت $|AB|$ نشان داده می‌شود و با دستور زیر محاسبه می‌شود (شکل ۵):

$$|AB|=|x_۱-x_۲|$$



شکل ۵



شکل ۶

مجموعهٔ نقطه‌های $M(x)$ ازمحورعددی، که برای آن‌ها $|x|=d$ $(d>۰)$، شامل دو نقطهٔ $x_۱=d$ و $x_۲=-d$ است. درواقع، $|x|=|x-۰|$، عبارت است ازفـاصلهٔ بین نقطهٔ M و نقطهٔ O (مبداء مختصات) (شکل ۶)؛ وتنها دو نقطه ازاین‌گونه روی محور عددی پیدا می‌شود: $x_۱=d$ و $x_۲=-d$.

ازاین جا می‌توان نتیجه گرفت که معادلهٔ $|x|=d$ $(d>۰)$، دارای دو جواب است: $x_۱=d$ و $x_۲=-d$.

به‌ازای $d=۰$، معادلهٔ $|x|=d$ یك جواب دارد و به‌ازای $d<۰$، بدون جواب است (که نتیجه‌ای است از تعریف قدرمطلق عدد).

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|<d$ $(d>۰)$ را، می‌توان به‌عنوان مجموعهٔ نقطه‌های $M(x)$ از محور عددی دانست که از مبداء به‌فاصله‌ای کوچکتر از d واقع باشند، یعنی بین دو نقطهٔ $M(d)$ و $M(-d)$ قرار گیرند. به‌این ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|<d$ $(d>۰)$، عبارت است از بازهٔ $-d<x<d$، و مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $|x|>d$ $(d>۰)$، عبارت است از اجتماع دو بازهٔ $-\infty<x<-d$ و $d<x<+\infty$.

برای حل معادله‌ها و نامعادله‌های شامل قدرمطلق، درحالت‌های ساده می‌توان از تعبیر هندسی قدرمطلق، و درحالت‌های بغرنج‌تر از تعریف قدرمطلق استفاده کرد. درضمن، بهتر است، محور عددی را به‌بازه‌هایی تقسیم کنیم که، درهر کدام از آن‌ها، علامت مقدارهای واقع درقدرمطلق، معلوم باشند.

مثال ۸. معادلهٔ $|x-۴|=۳$ را حل کنید.

حل. چون $|x-۴|$ عبارت است از فاصلهٔ نقطهٔ $M(x)$ تا نقطهٔ $M(۴)$، بنابراین برای حل معادلهٔ مفروض باید همهٔ نقطه‌های $M(x)$ را پیدا کرد که ازنقطهٔ $M(۴)$ به فاصلهٔ ۳ باشند. ازاین‌گونه، دونقطه وجود دارد: $M(۷)$ و $M(۱)$، یعنی جواب‌های معادله عبارتند از: $x_۱=۷$ و $x_۲=۱$.

مثال ۹. معادلهٔ $|x-۲|=b$ را حل کنید.

حل. چون $|x-۲|\geqslant ۰$، بنابراین معادلهٔ مفروض به‌ازای $b<۰$ جواب ندارد. اگر $b=۰$، آن‌وقت، معادله دارای جواب $x=۲$ است. زیرا تنها وقتی $|A|=۰$، که داشته باشیم $A=۰$. به‌ازای $b>۰$، معادلهٔ مفروض دوجواب دارد: $x=۲+b$ و $x=۲-b$ (مثال ۸ را ببینید).

مثال ۱۰. نامعادلهٔ $|x+۲|<۳$ را حل کنید.

حل. چون $|x+۲|$ برابر است با فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $M(x)$ و $M(-۲)$ درروی محور عددی، بنابراین باید همهٔ نقطه‌های $M(x)$ را پیدا کرد که برای آن‌ها، فاصلهٔ تا نقطهٔ $M(-۲)$ کمتر از ۳ باشد. روشن است که، دراین صورت، باید مختص $M(x)$ درنابرابری $-۵<x<۱$ صدق کند.

مثال ۱۱. نامعادلهٔ $|x-۳|>a$ را حل کنید.

حل. برای $a<۰$، نابرابری مفروض به‌ازای هر مقدار حقیقی x برقرار است، زیرا $|x-۳|\geqslant ۰$. برای $a=۰$، نابرابری به‌ازای هر $x\neq ۳$ برقرار است.

برای $a>۰$، جواب نامعادله، متناظر با نقطه‌های $M(x)$ از محور عددی هستند که، فاصلهٔ آن‌ها، از نقطهٔ $M(۳)$، بیشتر از a باشد، یعنی $x<۳-a$ و $x>۳+a$.

مثال ۱۲. نامعادلهٔ $|-۲x+۳|<۵$ را حل کنید.

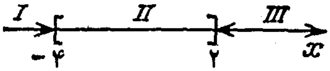
حل. از آن‌جا که

$$|-۲x+۳|=\left|-۲\left(x-\frac{۳}{۲}\right)\right|=|-۲|\cdot\left|x-\frac{۳}{۲}\right|=۲\left|x-\frac{۳}{۲}\right|$$

بنابراین، نامعادلهٔ مفروض به صورت $\left|x-\frac{۳}{۲}\right|<\frac{۵}{۲}$ درمی‌آید و شبیه راه‌حل مساله ۱۰، به‌دست می‌آید: $-۱<x<۴$.

مثال ۱۳. معادلهٔ $۲|x-۲|-۳|x+۴|=۱$ را حل کنید.

حل. برای رها شدن از علامت قدرمطلق، محور عددی را به‌سه حوزه تقسیم می‌کنیم: I) حوزهٔ $-\infty<x<-۴$؛ II) حوزهٔ $-۴\leqslant x\leqslant ۲$؛ III) حوزهٔ $۲<x<+\infty$ (شکل ۷).



شکل ۷

در حوزهٔ اول، $|x-۲|=-(x-۲)$ و $|x+۴|=-(x+۴)$ و بنابراین، معادلهٔ مفروض، به‌صورت

$$-۲(x-۲)+۳(x+۴)=۱\Rightarrow x+۱۶=۱$$

درمی‌آید. جواب این معادله $x=-۱۵$ است که در همان حوزهٔ $-\infty<x<-۴$ قرار دارد.

درحوزهٔ دوم $|x-۲|=-(x-۲)$ و $|x+۴|=x+۴$ و بنابراین

$$-۲(x-۲)-۳(x+۴)=۱\Rightarrow -۵x-۸=۱$$

جواب این معادله $x=-\frac{۹}{۵}$ است. این‌جواب در بازهٔ $[-۴ ، ۲]$ قرار دارد و، درنتیجه، جوابی ازمعادلهٔ اصلی است.

در حوزهٔ سوم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$۲(x-۲)-۳(x+۴)=۱$$

که جواب آن ($x=-۱۷$)، به بازه $(۲ ، +\infty)$ تعلق ندارد و، بنابراین جواب معادلهٔ اصلی نیست.

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض دارای دو جواب است: $x=-۱۵$ و $x=-\frac{۹}{۴}$.

بنابر ویژگی ۳، برای هر دوعدد a و b داریم:

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

به‌زبان دیگر، اگر $M(a+b)$، $N_۱(a)$ و $N_۲(b)$ را روی محور عددی به‌مبداء O درنظر بگیریم، فاصلهٔ M تا O، ازمجموع فاصله‌های $N_۱$ و $N_۲$ تا O، تجاوز نمی‌کند. روشن‌است که، این مجموع (یعنی $|ON_۱|+|ON_۲|$)، تنها وقتی برابر $|OM|$ است کـه، نقطه‌های $N_۱$ و $N_۲$، دریك طرف مبداء باشند. به‌این ترتیب، ویژگی دیگری ازقدرمطلق عددها به‌دست می‌آید:

۷. الف) برابری

$$|a+b|=|a|+|b|$$

تنها وقتی برقرار است که $ab\geqslant ۰$.

ب) نابرابری

$$|a+b|<|a|+|b|$$

تنها وقتی برقرار است که $ab<۰$.

مثال ۱۴. معادلهٔ $|x^۳-۱|+|۲-x^۳|=۱$ راحل کنید.

حل. چون $(x^۳-۱)+(۲-x^۳)=۱$، بنابراین، با توجه به‌ویژگی ۷، برابری

$$|x^۳-۱|+|۲-x^۳|=|(x^۳-۱)+(۲-x^۳)|$$

تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$(x^۳-۱)(۲-x^۳)\geqslant ۰$$

اگر این نامعادله‌را، نسبت به‌مجهول $x^۳$ حل کنیم، به‌دست‌می‌آید: $۱ \leqslant x^۳ \leqslant ۲$ که، از آن‌جا، نتیجه می‌شود: $۱ \leqslant x \leqslant \sqrt[۳]{۲}$.

یادآوری می کنیم که، هم‌زمان بامعادلهٔ مسالهٔ ۱۴، جواب نامعادلهٔ

$$|x^۳-۱|+|۲-x^۳|>۱$$

هم به‌دست‌می‌آید. درواقع، بنابرویژگی ۷. ب) مجموعهٔ جواب این نامعادله بامجموعهٔ جواب نامعادلهٔ

$$(x^۳-۱)(۲-x^۳)<۰$$

یکی است و، بنابراین $x<۱$ و $x>\sqrt[۳]{۲}$، جواب‌های نامعادلهٔ مفروض‌اند.

توجه کنیم، اگر درنابرابری

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|$$

b را به $-b$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|$$

ویا

$$|a-b|+|b|\geqslant|a|$$

چون $(a-b)+b=a$، بنابراین، باتوجه به‌ویژگی ۷، می‌توان ویژگی دیگری ازقدرمطلق عددها را نتیجه گرفت.

۸. الف) برابری

$$|a-b|=|a|-|b|$$

تنها وقتی برقرار است که $(a-b)b\geqslant ۰$؛

ب) نابرابری

$$|a-b|>|a|-|b|$$

تنها وقتی برقراراست که $(a-b)b<۰$.

مثال ۱۵. نامعادلهٔ $|x^۲-x|<|۲-x|+|x^۲-۲|$ را حل کنید.

حل. چون $x^۲-۲=(x^۲-x)-(۲-x)$، بنابراین نامعادلهٔ مفروض را می‌توان به صورت $|x^۲-۲|>|x^۲-x|-|۲-x|$ نوشت و، براساس ویژگی ۸، ب) نتیجه می گیریم که، مجموعهٔ جواب آن، بر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ

$$(۲-x)(x^۲-۲)<۰$$

منطبق است که، از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $-\sqrt{۲}<x<\sqrt{۲}$ و $x>۲$.

تکلیف ۱.

۱. قدرمطلق این عددها را پیدا کنید:

۱) ۴;   ۲) -۵;   ۳) $\log_۲ ۳$;   ۴) $\sqrt{۷}-۳$;   ۵) $\cos ۴$;
۶) $\sin ۱۰۲^\circ$;   ۷) $\operatorname{arc\,tg} \log_{\frac{۱}{۲}} ۵$;   ۸) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\pi$

۲. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $|a|=۲$;   ۲) $|a|=-۳$;   ۳) $|a|=a$;   ۴) $|a|=-a$;
۵) $a-|-a|=۰$;   ۶) $|a|\cdot a=-۱$;   ۷) $|a|:a=۱$

۳. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $|a|\geqslant ۱$;   ۲) $|a|\leqslant ۲$;   ۳) $|a|\geqslant ۳$;   ۴) $|a|\leqslant ۰$;
۵) $|a-۲|>۱$;   ۶) $۱<|a|<۲$

۴. این عبارت‌ها را ساده کنید:

۱) $\sqrt{a^۲}$;   ۲) $\sqrt{a^۴}$;   ۳) $\sqrt{(۲-a)^۲}$;   ۴) $\sqrt{a^۴(۱-a)^۲}$;
۵) $\frac{\sqrt{a^۲}}{a}$;   ۶) $\sqrt{(a-۱)^۲}-\sqrt{a^۲}$;
۷) $\sqrt{a^۲+۶a+۹}+\sqrt{a^۲-۶a+۹}$

۵. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $|x+۲|=۳$;   ۲) $|x|-x=۲$;   ۳) $||x|-۲|=۲$;
۴) $||x|+۲|=۲$;   ۵) $||x|+۲|=۱$

تکلیف ۲.

۱. قدرمطلق این عددها را پیدا کنید:

۱) -۳;   ۲) $\log_۲ ۵-۳$;   ۳) $\sqrt{۱۰}-۳$;   ۴) $\sin ۷$;
۵) $\cos ۴۰۰^\circ$;   ۶) $۱-۲^{۰/۱}$;   ۷) $\sqrt{۲}-۱/۴۱$;   ۸) $\pi-۳/۱۵$

۲. همهٔ عددهای b را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

۱) $|b|=\pi$;   ۲) $|b|=-\sqrt{۲}$;   ۳) $|b|+|b-۱|=۰$;
۴) $|b|+|b-۱|=b$;   ۵) $|b(b-۱)|=b$

۳. همهٔ مقدارهای b را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $|b-۱|<۳$; ۲) $|b|\geqslant -۲$; ۳) $|b^{۲}-۱|<۱$;
۴) $۲<|b|\leqslant ۳$

۴. ساده کنید:

۱) $\frac{\sqrt{c^{۲}}}{c}-\sqrt{c^{۴}}-|c|$; ۲) $\sqrt{c^{۲}+۲c+۱}-\sqrt{c^{۲}-۲c+۱}$;
۳) $\sqrt{c^{۲}+۲c+۱}:(|c|-۱)$

۵. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $|x-۱|=۲$; ۲) $|x|+x=۲$; ۳) $||x|-x|=۳$;
۴) $||x|-x|=۱$; ۵) $||x|+۱|=۱$; ۶) $||x|+x|=۱$

تکلیف ۳.

۱. نقطه‌های $A(-۱)$، $B(\sqrt{۲})$، $C\left(\frac{۳}{۲}\right)$، $D(\sqrt{۲}-۱)$ را روی محور عددی در نظر بگیرید و $|AC|$، $|BC|$، $|AD|$، $|BD|$ را پیدا کنید.

۲. روی محور عددی، نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصلهٔ آن‌ها تا نقطهٔ $M(۱)$:
۱) برابر ۲؛ ۲) کمتر از ۲؛ ۳) بیشتر از ۲؛ ۴) حداکثر ۳؛
۵) حداقل ۱ باشد.

۳. ساده کنید:

۱) $\sqrt{(a-۱)^{۲}}-\sqrt{(a+۱)^{۲}}$; ۲) $\frac{a-۲}{\sqrt{a^{۲}-۴a+۴}}$; ۳) $\frac{b}{|b|}+۱$

۴. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $|x+۱|=|x-۲|$; ۲) $|x|>x+۲$;
۳) $|x|-|x+۱|=۱$; ۴) $|x-۱|+|x+۱|=۲$

تکلیف ۴.

۱. نقطه‌های $A(-۳)$، $B\left(\frac{۳}{۲}\right)$، $C(\sqrt{۳})$، $D(۱-\sqrt{۳})$ را روی

محور عددی درنظر بگیرید و $|AB|$، $|BC|$، $|AD|$ و $|DC|$ را پیدا کنید.

۲. روی محور عددی، مجموعهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که فاصلهٔ از آن‌ها تا نقطهٔ $M(۲)$:

۱) برابر ۱؛ ۲) کمتر از $\frac{۱}{۲}$؛ ۳) بیشتر از ۵؛ ۴). حداقل ۲؛
۵) حداکثر ۲ باشد.

۳. ساده کنید:

$$۱)\ \sqrt{(a+۳)^۲}-\sqrt{(۵-a)^۲};\quad ۲)\ \frac{|a|+a}{|a|-a};\quad ۳)\ \frac{b-۱}{|b|}+\frac{۱+b}{b}$$

۴. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌شرطی‌که

$$۱)\ \sqrt{x^۲}=۲;\quad ۲)\ \sqrt{x^۲}\leqslant ۴;\quad ۳)\ \sqrt{(x+۲)^۲}\leqslant ۳;$$

$$۴)\ |x|+|x+۲|=۳;\qquad ۵)\ |x-۱|+|x+۳|>۲$$

تمرین‌ها

۱. قدرمطلق این عددها را پیدا کنید:

$۱)\ \sqrt{۲}+\sqrt{۳}-۳/۱;$ $\qquad ۲)\ \sqrt[۳]{۴۹}-log_۲۱۶;$

$۳)\ sin\frac{۳\pi}{۱۰}-۰/۹;$ $\qquad ۴)\ ۴۰\sqrt{۲}-۵۷;$

$۵)\ \sqrt{۳-۲\sqrt{۲}};$ $\qquad ۶)\ \sqrt{۲۷}+\sqrt{۶}-\sqrt{۴۸}+۱;$

$۷)\ ۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳};$ $\qquad ۸)\ ۲^{۳۱}-۳^{۲۱};$

$۹)\ \ln ۵-\frac{۵}{e};$ $\qquad ۱۰)\ \left(۱+\frac{۱}{۱۰}\right)^{۱۰}-e$

۲. ساده کنید:

$$۱)\ \sqrt[۶]{a^۶},\ \sqrt{a^۶b},\ \sqrt{a^۲b^۲};$$

$$۲)\ \sqrt{x^۲}-\sqrt{(x+۱)^۲}+\sqrt{(x-۱)^۲};\quad ۳)\ \sqrt{sin^۲a}-sina;$$

$$۴)\ \sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}\quad (۱\leqslant x\leqslant ۲);$$

$$۵)\ \sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}\quad (x>۲);$$

۶) $(a+\sqrt{x})^{\frac{۱}{۲}}+(a-\sqrt{x})^{-\frac{۱}{۲}}$ $\qquad (x=۴(a-۱)، a>۲)$;

۷) $(a+\sqrt{x})^{-\frac{۱}{۲}}-(a-\sqrt{x})^{-\frac{۱}{۲}}$ $\qquad (x=۴(a-۱)، a>۲)$;

۸) $\frac{۲b\sqrt{۱+x^{۲}}}{\sqrt{۱+x^{۲}}-x}$ $\qquad \left(x=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)$;

۹) $\frac{۱-ax}{۱+ax}\sqrt{\frac{۱+bx}{۱-bx}}$ $\qquad \left(x=\frac{۱}{a}\sqrt{\frac{۲a}{b}-۱}\right)$;

۱۰) $\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+۱}-\sqrt{x^{۲}-۱}}{\sqrt{x^{۲}+۱}+\sqrt{x^{۲}-۱}}\right)^{۲}$ $\qquad \left(x=\sqrt{\frac{m^{۲}+n^{۲}}{۲mn}}، m\neq n\right)$;

۱۱) $\frac{۲b\sqrt{x^{۲}-۱}}{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}$ $\qquad \left(x=\frac{۱}{۲}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)، a>۰، b>۰\right)$;

۱۲) $\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}$ $\qquad \left(x=\frac{۲a}{b+\frac{۱}{b}}، a>۰ \quad b>۰\right)$;

۱۳) $۲x:\sqrt{۱-\left(\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}\right)^{۲}}$ $\qquad \left(x=a+\frac{۱}{a}\right)$

۳. کسرها را ساده کنید:

۱) $\frac{a|a-۳|}{a^{۲}-۵a+۶}$; $\qquad$ ۲) $\frac{a}{\sqrt{a^{۲}}}\cdot\frac{a-۱}{|a-۱|}$; $\qquad$ ۳) $\frac{\sqrt{x-۴}\cdot\sqrt{x-۴}}{x^{۲}-۱۶}$

۴. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید، به شرطی که

۱) $|a^{۲}|=|a|^{۲}$; $\qquad$ ۲) $|a|=\frac{۱}{a}$; $\qquad$ ۳) $|a+۲|=|a-۱|$;

۴) $a\geqslant|a|$; $\qquad$ ۵) $|a-۱|>۲$; $\qquad$ ۶) $|۱-۲a|<۳$;

۷) $\left|a-\frac{۱}{a}\right|=|a-۱|$; $\qquad$ ۸) $|a^{۲}-a|<a$

۵. ثابت کنید، برابری

$$|a_{۱}+a_{۲}+\dots+a_{n}|=|a_{۱}|+|a_{۲}|+\dots+|a_{n}|$$

تنها وقتی برقرار است که، بین عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، علامت‌های مختلف وجود نداشته باشد.

۶. معادله‌ها را حل کنید:

۱) $|x-۲|=۱$، $|x-۳|=-۱$; $|x+۴|=۲$;

۲) $|۳x-۵|=|x+۲|$; ۳) $|x-a|=|x-۴|$;

۴) $|x^۲-۱|=(x-۱)(x+۱)$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) ۴؛ ۲) ۵؛ ۳) $log_۲۳$؛ ۴) $۳-\sqrt{۷}$؛ ۵) $-cos۴$؛
۶) $sin۱۰۲^\circ$؛ ۷) $-\mathrm{arc}\,tg\,log_{\frac{۱}{۲}}۵$؛ ۸) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\pi$.

۲. ۱) ۲ و -۲؛ ۲) ϕ؛ ۳) $a\geqslant ۰$؛ ۴) $a\leqslant ۰$؛
۵) $a\geqslant ۰$؛ ۶) -۱؛ ۷) $a>۰$.

۳. ۱) $a\leqslant -۱$ و $a\geqslant ۱$؛ ۲) $-۲\leqslant a\leqslant ۲$؛ ۳) $a\leqslant -۳$، $a\geqslant ۳$؛ ۴) ۰؛ ۵) $a<۱$ و $a>۳$؛
۶) $-۲<a<-۱$ و $۱<a<۲$.

۴. ۱) a به‌ازای $a\geqslant ۰$، $-a$ به‌ازای $a<۰$؛ ۲) $a^۲$؛
۳) $۲-a$ به‌ازای $a\leqslant ۲$، $a-۲$ به‌ازای $a>۲$؛ ۴) $a^۲(۱-a)$ به‌ازای $a\leqslant ۱$، و $a^۲(a-۱)$ به‌ازای $a>۱$؛ ۵) ۱ به‌ازای $a>۰$، و -۱ به‌ازای $a>۰$؛ ۶) ۱ به ازای $a\leqslant ۰$، و $-۲a+۱$ به ازای $۰<a\leqslant ۱$، و -۱ به‌ازای $a>۱$؛ ۷) $-۲a$ به‌ازای $a<-۳$ و ۶ به‌ازای $-۳\leqslant a\leqslant ۳$، و $۲a$ به‌ازای $a>۳$.

۵. $\{۱, -۵\}$، -۱، $\{-۴, ۰, ۴\}$، ۰، ϕ.

تکلیف ۲.

۱. ۱) ۳، $۳-log_۲۵$، $\sqrt{۱۰}-۳$، $sin۷$، $cos۴۰۰^\circ$، $۲^{۰/۱}-۱$،

$\sqrt{۲}-۱/۴۱$، $۳/۱۵-\pi$.

۲. ۱) π و $-\pi$؛ ۲) ϕ؛ ۳) ϕ؛ ۴) ۱؛ ۵) ۰ و ۲.

۳. ۱) $-۲<b<۴$؛ ۲) $-\infty<b<+\infty$؛
۳) $-\infty<b<۳$؛ ۴) $-۳\leqslant b<-۲$ و $۲<b\leqslant ۳$.

۴. ۱) $۱-c-c^۲$ به‌ازای $c>۰$، و $c-۱-c^۲$ به‌ازای $c<۰$؛
۲) -۲ به‌ازای $c<-۱$، و $۲c$ به‌ازای $-۱\leqslant c\leqslant ۱$، و ۲ به‌ازای $c>۱$؛
۳) ۱ به‌ازای $a<-۱$، و -۱ به‌ازای $-۱<c<۰$، و $\frac{c+۱}{c-۱}$ به‌ازای $c>۰$.

۵. ۱) $\{-۱، ۳\}$؛ ۲) ۱؛ ۳) $\{-۶، ۰، ۶\}$؛ ۴) $-\frac{۱}{۲}$؛
۵) ۰؛ ۶) $\frac{۱}{۲}$.

تکلیف ۳.

۱. $|AB|=\sqrt{۲}+۱$، $|BC|=\sqrt{۲}-\frac{۲}{۳}$، $|AD|=\sqrt{۲}$، $|BD|=۱$.

۲. ۱) $x=-۱$، $x_۲=۳$؛ ۲) $-۱<x<۳$؛
۳) $-\infty<x<-۱$ و $۳<x<+\infty$؛ ۴) $-۲\leqslant x\leqslant ۴$؛
۵) $-\infty<x\leqslant ۰$ و $۲\leqslant x<+\infty$.

۳. ۱) ۲ به‌ازای $a\leqslant ۱$، و $-۲a$ به‌ازای $-۱<a<۱$ و -۲
به‌ازای $a\geqslant ۱$؛ ۲) ۱ به‌ازای $a>۲$، و -۱ به‌ازای $a<۲$؛ ۳) ۲
به‌ازای $b>۰$، و ۰ به‌ازای $b<۰$.

۴. ۱) $\frac{۱}{۲}$؛ ۲) $-\infty<x<-۱$؛ ۳) $-\infty<x\leqslant -۱$؛
۴) $-۱\leqslant x\leqslant ۱$.

تکلیف ۴.

۱. $|AB|=\frac{۹}{۲}$، $|BC|=\sqrt{۳}-\frac{۳}{۲}$، $|AD|=۴-\sqrt{۳}$،

$|DC|=۲\sqrt{۳}-۱$.

۲. ۱) $x_۱=۱$، $x_۲=۳$؛ ۲) $\frac{۳}{۲}<x<\frac{۵}{۲}$؛
۳) $-\infty<x<-۳$ و $۷<x<+\infty$؛ ۴) $-\infty<x\leqslant ۰$ و
$۴\leqslant x<+\infty$؛ ۵) $۰\leqslant x\leqslant ۴$.

۳. ۱) -۸ به‌ازای $a<-۳$، و $۲a-۲$ به‌ازای $-۳\leqslant a\leqslant ۵$،
و ۸ به‌ازای $a>۵$؛ ۲) ۰ به‌ازای $a<۰$؛ ۳) ۲ به‌ازای $b>۰$، و
$\frac{۲}{b}$ به‌ازای $b<۰$.

۴. ۱) $\{-۲, ۲\}$، ۲) $-۴\leqslant x\leqslant ۴$، ۳) $-۵\leqslant x\leqslant ۱$،
۴) $\left\{-\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}\right\}$، ۵) $-\infty<x<+\infty$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-۳/۱$؛ ۲) $۴-\sqrt[۳]{۴۹}$؛ ۳) $۰/۹-\sin\frac{۳\pi}{۱۰}$؛
۴) $۵۷-۴۰\sqrt{۲}$؛ ۵) $\sqrt{۲}-۱$؛ ۶) $\sqrt{۶}+۱-\sqrt{۳}$؛
۷) $۳\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$؛ ۸) $۳^{۲۱}-۲^{۳۱}$؛ ۹) $\frac{۵}{e}-\ln ۵$؛
۱۰) $e-\left(۱+\frac{۱}{۱۰}\right)^{۱۰}$.

۲. ۱) $|a|$، $|a|\sqrt[۶]{b}$، $|ab|$؛ ۲) $x-۲$ به‌ازای $x\geqslant ۱$، و $-x$
به‌ازای $۰\leqslant x<۱$، و $-۳x$ به‌ازای $-۱\leqslant x<۰$، و $۲-x$ به‌ازای
$x<-۱$؛ ۳) ۰ به‌ازای $۲k\pi<a<۲k\pi+\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$، و $-۲\sin a$
به‌ازای $۲k\pi+\pi<a<۲k\pi+۲\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$؛ ۴) ۲؛ ۵) $۲\sqrt{x-۱}$؛
۶) $\frac{۲\sqrt{a-۱}}{a-۲}$؛ ۷) $\frac{۲}{۲-a}$؛ ۸) $a+b$ $(ab>۰)$؛ ۹) ۱ به‌ازای
$\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{a}{b}<۱$، و -۱ به‌ازای $\frac{a}{b}>۱$؛ ۱۰) $\frac{n^۲}{m^۲}$ به‌ازای $|m|>|n|$، و

$\frac{m^۲}{n^۲}$ به‌ازای $|m|<|n|$؛ ۱۱) $a-b$ به‌ازای $a>b$، و $\frac{b}{a}(b-a)$
به‌ازای $a\leqslant b$؛ ۱۲) $\frac{۱}{b}$ به‌ازای $b\geqslant ۱$، و b به‌ازای $۰<b<۱$؛
۱۳) $\frac{۳a^۲+a^۴+۱}{a^۲}$ به‌ازای $a>۰$، و $-\frac{۳a^۲+a^۴+۱}{a^۲}$ به‌ازای $a<۰$.

۳. ۱) $\frac{a}{a-۲}$ به‌ازای $a>۳$، و $\frac{a}{۲-a}$ به‌ازای $a<۳$؛ ۲) ۱
به‌ازای $a>۱$، و ۱ — به‌ازای $۰<a<۱$، و ۱ به‌ازای $-\infty<a<۰$؛
۳) $\frac{۱}{x+۴}(x>۴)$.

۴. ۱) $-\infty<a<+\infty$؛ ۲) ۱؛ ۳) $-\frac{۱}{۲}$؛ ۴) $a\geqslant ۰$؛
۵) $a>۳$ و $a<-۱$؛ ۶) $-۱<a<۲$؛ ۷) ۱ و $-\frac{۱}{۲}$؛
۸) $۰<a<۲$.

۶. ۱) $\{-۱ و -۳\}$، ϕ، ϕ به‌ازای $a<۰$ و ۴ — به‌ازای $a=۰$
و $\{-۴+a، -۴-a\}$ به‌ازای $a>۰$؛ ۲) $\left\{\frac{۳}{۴}, \frac{۷}{۲}\right\}$؛ ۳) $\frac{a+۴}{۲}$
به‌ازای $a\neq۴$، و $-\infty<x<+\infty$ به‌ازای $a=۴$؛
۴) $-\infty<x\leqslant -۱$ و $۱\leqslant x<+\infty$.

فصل دوم

عبارت‌های جبری

§۱. یادداشت‌های کلی

عبارت جبری به‌عبارتی گفته می‌شود که، در آن، عددها و حرف‌ها، به‌وسیلهٔ عمل‌های جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان با نمای طبیعی و ریشهٔ حسابی، به‌هم مربوط شده باشند، نمونه‌هایی از عبارت‌های جبری، چنین‌اند:

$$\frac{a}{۲b}+ad،\ \frac{ad+bc}{k+۱}+lm،\ \frac{\sqrt{\alpha^۲\beta-c^۲}+abc}{a+b+\sqrt{mn}}$$

گروه‌حرفی عبارت جبری به مجموعهٔ همهٔ حرف‌های مختلفی گفته‌می‌شود که دراین عبارت وارد شده‌اند و به ردیف معینی درنظر گرفته می‌شوند.

برای عبارت جبری $\frac{\sqrt{ab}-c}{d+k+a}$، گروه حرفی را می‌توان

$$(a، b، c، d، k) \quad \text{یا} \quad (d، k، b، c، a)$$

و یا بارديف دیگری دانست.

اگر به‌جای حرف‌ها، در یك عبارت جبری، عددهای ثابتی را درنظر بگیریم، آن‌وقت با گروه عددی متناظر با گروه حرفی سروکارخواهیم داشت. مثلاً گروه عددی (۰، ۱، ۳، ۵) متناظر با گروه حرفی $(a، b، c، d)$، به‌این معناست که: $a=۰$، $b=۱$، $c=۳$ و $d=۵$.

گروه عددی را قابل قبول می‌نامند، وقتی که با جای‌گزین کردن عددها به‌جای حرف‌ها در عبارت جبری، به‌عبارتی عددی برسیم که دارای معنا باشد.

مثلاً برای عبارت جبری $\frac{a^۲+\sqrt{bc}-d}{a+b}$ وگروه حرفی $(a، b، c، d)$، گروه عددی (۱، ۱، ۱، ۲) قابل قبول است، زیرا عبارت عددی

$$\frac{۱^۲+\sqrt{۱\times۱}-۲}{۱+۱}$$

معنادارد؛ ولی گروه‌عددی (۱، —۱، ۱، ۲) قابل‌قبول نیست، زیراعبارت‌عددی

$$\frac{۱^۲+\sqrt{۱\times(-۱)}-۲}{۱-۱}$$

معنا ندارد (تقسیم بر ۰ ممکن نیست).

حوزهٔ مقدارهای قابل قبول (یا حوزهٔ تعریف، یا دامنهٔ) عبارت‌جبری به‌مجموعهٔ همهٔ گروه‌های عددی قابل قبول، متناظر با گروه حرفی این‌عبارت، گفته می‌شود.

مثلاً، برای عبارت جبری $\frac{a+b+c}{a-b}$، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول، عبارت است ازهمهٔ گروه‌های عددی دلخواه متناظر با گروه حرفی $(a، b، c)$ که، درآن‌ها $a\neq b$.

گروه‌حرفی عبارت‌های‌جبری $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n به‌همهٔ‌حرف‌های مختلفی گفته می‌شود که، هرکدام ازآن‌ها، دست‌کم در یکی ازاین عبارت‌ها وارد شده باشد. مثلاً $(a، b، c، d)$، گروه حرفی عبارت‌های جبری زیررا تشکیل می‌دهند:

$$a^۲+۲ab+b^۲،\quad a+c،\quad ۳bd،\quad \sqrt{۲}+۴$$

یك گروه عددی را، برای عبارت‌های جبری $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n قابل قبول گویند، وقتی‌که هریك ازاین عبارت‌ها، به‌ازای مقدارهای متناظر خود از گروه عددی، دارای معنا باشد. مثلاً، برای گروه حرفی $(a، b، c، d)$ از عبارت‌های جبری

$$\frac{ab+d}{c-d}, \frac{\sqrt{a-۲}\cdot b}{a+۱}, \frac{۱}{b}$$

گروه عددی $(۴،۱،۲،۳)$ قابل‌قبول است، زیرا هریك ازعبارت‌های عددی

$$\frac{۳\times ۲+۴}{۱-۴},\ \frac{\sqrt{۳-۲\times ۲}}{۳+۱},\ \frac{۱}{۲}$$

معنا دارد؛ درحالی که گروه عددی $(۴،۱،۰،۳)$ قابل‌قبول نیست، زیرا عبارت $\frac{۱}{b}$ به‌ازای $b=۰$ معنا ندارد.

حوزهٔ مقدارهای قابل قبول (یادامنهٔ) عبارت‌های جبری $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، به مجموعهٔ همهٔ گروه‌های عددی قابل قبول این عبارت‌ها گفته می‌شود. مثلاً، حوزهٔ مقدارهای قابل قبول (یا حوزهٔ تعریف) عبارت‌های جبری $\frac{۱}{a-x}$ و $\frac{۱}{\sqrt{ab}}$ عبارت است از همهٔ گروه‌های عددی متناظر با گروه حرفی آن‌ها، یعنی $(a،b،x)$، که برای آن‌ها، داشته باشیم: $a\neq x$ و $ab>۰$.

دوعبارت جبری را، درمجموعهٔ M ازحوزهٔ تعریف، متحد گویند، وقتی که برای هر گروه عددی از M، مقدارهای عددی متناظر دو عبارت، برابرشوند. مثلاً، عبارت‌های جبری a و $\frac{a^۲}{a}$، در مجموعهٔ عددهای حقیقی، به‌جز صفر، یا در هر بخشی از این مجموعه، متحدند. عبارت‌های جبری $\frac{۱}{a-x}-\frac{۱}{a+x}$ و $\frac{-۲x}{a^۲-x^۲}$ درمجموعهٔ $M=\{(a،x):a\neq x،a\neq -x\}$ متحدند.

تکلیف ۱.

۱. کدام یك از گروه‌های عددی متناظر با گروه حرفی $(a،b،d)$ از عبارت جبری $\frac{a-b}{b+d}$ قابل قبول است:

۱) $(۱،۱،۰)$؛ ۲) $(۲،۰،۳)$؛ ۳) $(۱،۲،-۲)$؛
۴) $(۱،۰،۰)$؛ ۵) $(۰،\pi،-۳/۱۴)$؛ ۶) $(۲،\sqrt{۲}،۱/۴۱)$

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول این عبارت‌های جبری را پیدا کنید:

۱) $\frac{۱}{a}+\frac{b}{b+۱}+\frac{۱}{c}$; ۲) $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}$;

۳) $\frac{a^۲}{a^۳}+\frac{x^۲-y^۲}{xy}xy$; ۴) $(a^۲-x^۲)(a^۲+x^۲)$;

۵) $\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۱+x^۲}}(۱+x^۲)+\frac{۱}{x^۴}$; ۶) $\sqrt{x^۲-۹}+\sqrt{۹-x^۲}+\frac{۱}{x+۳}$

۳. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول این عبارت‌های جبری را پیدا کنید:

۱) $\frac{۱}{abc}$ و $a-b+c+d$; ۲) $\frac{۱}{y^۳+a^۳}+ay$ و $\sqrt{ay}-\frac{۱}{ay}$;

۳) $\frac{a-۱}{a^۲-۱}+x$ و $\frac{۱}{a+۱}-\frac{۱}{x}$;

۴) $\sqrt{x^۲(x-۱)}$، $\frac{x-۲}{x^۲+x+۱}$ و $x^{-۱}\cdot\frac{۱}{x+۱}$;

۵) $\frac{۱}{x^۲-۱}:\frac{x}{y}$، $x+y+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x}$ و xyz;

۶) $\frac{۱}{a^۲+a-۲}$، $\frac{۱}{a^۲-۴a+۳}+\sqrt{xy}$ و $\frac{۱}{a^۲+۱}+\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$

۴. آیا این عبارت‌های جبری، درمجموعهٔ M، متحدند؟

۱) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ و $\frac{a+b}{ab}$; $M=\{(a،b):ab\neq ۰\}$;

۲) $\frac{a^۲-۴}{a+۲}$ و $a-۲$; $M=\{a:a>۰\}$;

۳) $\sqrt{a^۲}$ و $-a$; $M=\{a:a<۰\}$;

۴) $\sqrt{a^۲}$ و $-a$; $M=\{a:a=-۴، -۳، ۰، ۲\}$

۵. مجموعهٔ M را پیدا کنید، به‌نحوی که این دو عبارت جبری، در آن، متحد یکدیگر باشند:

۱) $a^{۳}+b^{۳}$ و $(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})$;

۲) $\frac{a^{۲}-b^{۲}}{a-b}$ و $a+b$; ۳) $a^{۴}$ و $a^{۲}.\frac{a^{۳}}{a}$;

۴) $(a+۱)^{۲}$ و $a(a+۱)$; ۵) $\sqrt{a^{۲}}$ و a;

۶) $\sqrt{\frac{x}{y}}$ و $\sqrt{\sqrt{x^{۲}}}:\sqrt{\sqrt{y^{۲}}}$; ۷) $a^{۲}+۱+\sqrt{a}-\sqrt{a}$ و $a^{۲}+۱$

تکلیف ۲.

۱. کدام گروه عددی متناظر با گروه حرفی $(a، b، c، d)$ از عبارت جبری $\frac{a+b+\sqrt{c}}{d+c}$ قابل قبول است؟

۱) $(۱، ۱، ۱، ۰)$; ۲) $(۲، -۱، -۲، ۱)$; ۳) $(۰، -۵، ۲، -۲)$;

۴) $(۱، -۱، -۲، ۱)$; ۵) $(۰، \pi، \pi^{۲}، -۹/۸۵۹۶)$;

۶) $(۱، ۱، ۲، -\sqrt{۲})$

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول هرعبارت جبری را پیدا کنید:

۱) $ab+cd$; ۲) $\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\frac{xy}{y^{۲}+x^{۲}}$;

۳) $\frac{۲}{x}-\frac{۲}{x}+(a^{۲}+۱)^{۲}$; ۴) $\frac{a^{۲}b}{a}+\frac{b^{۲}a}{b}+\sqrt{cd}$;

۵) $\frac{۱}{۱+۱:(a+x)}$; ۶) $(a^{۲}+۱)^{۲}x$

۳. حوزهٔ تعریف این عبارت‌های جبری را پیدا کنید:

۱) $xy+\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{y}+xy-\left(۱+\frac{۱}{y}\right)$;

۲) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲-x}$ و $\frac{۱}{x^{۲}-۴}+(x-۲)^{۳}$;

۳) $\sqrt{x^{۲}+x}، \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+۱}$ و $\frac{۱}{x+۱}(x+۱)^{۲}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x}\right)$;

۴) $\frac{a}{۳a-۶}, \frac{۳x}{x^۲-۴}$ و $\frac{\sqrt{a-۱}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{۵-x}}$;

۵) $\sqrt{\frac{a-۲}{a}}, \frac{\sqrt{۴-a^۲}}{۸a-۴}$ و $a\sqrt{۱-x}$

۴. آیا این عبارت‌های جبری درمجموعهٔ M متحدند؟

۱) $\frac{x^۳+۱}{x+۱}$ و $x^۲-x+۱$، $M=\{x:x\geqslant ۲\}$;

۲) $\frac{۱۲a^۲-۸a}{۴a}$ و $۳a-۲$، $M=\{a:a>۰\}$;

۳) $\frac{۶x^۳-۱۲x^۲}{-۳x^۲}$ و $۴-۲x$، $M=\{x:x<۰\}$;

۴) $\frac{x+۱}{x-۱}$ و $۱+\frac{۲}{x-۱}$، $M=\{x:x\leqslant ۰\}$;

۵) $\frac{c^۲+۲c+۱}{c^۲-۱}$ و $\frac{c-۱}{c+۱}$، $M=\{c:c\geqslant ۰\}$;

۶) $\sqrt{\frac{b-۳}{b^۲-۹}}$ و $\frac{۱}{\sqrt{b+۳}}$، $M=\{b:b\geqslant ۳\}$;

۷) $\frac{x^۲+۵}{x^۳-۳x-۲}$ و $\frac{۱}{x-۲}-\frac{۲}{(x+۱)^۲}$، $M=\{x:x\geqslant ۵\}$

۵. مجموعهٔ M را پیدا کنید که دو عبارت جبری زیر، در آن، متحد یکدیگر باشند:

۱) $(a^۲-۹)x$ و $(a-۳)(a+۳)x$; ۲) $\frac{x^۲-۱}{x+۱}\cdot\frac{x^۲}{x}$ و $x-۱$;

۳) $x\sqrt{x-۲}$ و $\sqrt{x^۲(x-۲)}$; ۴) $x^۳-x^۲-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x}$ و $x^۳-x^۲$;

۵) $\frac{۱}{a-x}+\frac{۱}{a+x}$ و $\frac{۲a}{a^۲-x^۲}$; ۶) $(\sqrt{xy})^۲+۳$ و $xy+۳$;

۷) $\sqrt{x^۲}+\sqrt{(x+۱)^۲}$ و $-۲x-۱$;

۸) $\sqrt{\frac{b}{۲x^۲-۲b^۲}}$ و $\frac{\sqrt{۲b}}{۲\sqrt{x^۲-b^۲}}$

تمرین‌ها

۱. مطلوب است حوزهٔ تعریف عبارت جبری:

۱) $\frac{۳}{۲x^۲+۲x}+\frac{۲x-۱}{x^۲-۱}-\frac{۲}{x}$;

۲) $\frac{۱}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+۲}$;

۳) $\frac{۱}{a-b}\cdot\frac{۱}{b-c}\cdot\frac{۱}{c-a}\sqrt{abc}$;

۴) $\frac{a^۲}{ab}+\frac{b}{b^۲}+\frac{۱}{a^{-۱}}$;

۵) $\frac{۱}{x^۲+۱}\cdot\frac{y^۲-۱}{y+۱}\sqrt{y}$;

۶) $\frac{a+۱}{a^۲+۴a+۴}\cdot\frac{a+۲}{a^۴-۴a^۲+۴}$;

۷) $\frac{۱}{۱+۱:\left(۱+\frac{۱}{x}\right)}\cdot\frac{۱}{\sqrt{x+۱}}$;

۸) $\frac{a^۳-۲a^۲}{۳a+۳}\cdot\frac{a^۲-۴}{۳a^۲+۶a+۳}$;

۹) $\frac{۱}{a-\sqrt{a^۲-۴}}\cdot\frac{۱}{a+\sqrt{a^۲-۴}}$;

۱۰) $\sqrt{x^۲+x}+x\sqrt{۱-x^۲}$;

۱۱) $\sqrt{\frac{۳x-۱}{۴-x}}+۲$;

۱۲) $\frac{x-\sqrt{۲x-۱-x^۲}}{۱+x}$;

۱۳) $\frac{\sqrt{a-۲b}-\sqrt{۲b-a}}{۲ab}$;

۱۴) $\sqrt{\frac{x^۲+y^۲}{۴b^۲}}-\sqrt{\frac{y^۲-x^۲}{c^۲}}$

۲. حوزهٔ مقدارهای قابل قبول این عبارت‌های جبری را پیدا کنید:

۱) $\frac{\sqrt{x-y}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{۱۶-x^۲}}$ و $\frac{x^۲-xy}{x^۲+xy}\cdot\frac{x^۲y+xy^۲}{xy}$;

۲) $\sqrt{x^۲-۱}$ و $\frac{۱}{۱-x}-\frac{۱}{۱+x}$;

۳) $\sqrt{a-\frac{۱}{a}}$ و $\sqrt{۱-\frac{۱}{a}}$;

۴) $\frac{\sqrt[۴]{۸x+۳}}{x-۵}$ و $\sqrt{۱-۴x^۲}$;

۵) $\sqrt{\frac{a-۱}{۲a+۱}}$ و $\sqrt{a^۲-a-۲}$;

۶) $\frac{(a+\sqrt{a})\sqrt{۲۵-a^۲}}{(a-\sqrt{a})(a-۵)}$ و $\sqrt{ab}$;

۷) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{ab}$ و $\frac{\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}}{(a-۱)(b-۲)}$;

۸) $\frac{\sqrt[۴]{ab}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[۴]{ab}}$ و $\sqrt{a-\sqrt{ba}}$

۳. آیا این عبارت‌های جبری، درمجموعهٔ M، متحدند؟

۱) $\sqrt[۴]{۱۶a^۴}-۴a+c$ و c، $M=\{(a،c):a\geqslant ۰، c\in\mathbf{R})$;

۲) $\sqrt[۴]{۱۶a^۴}-۴a+c$ و $c-۸a$، $M=\{(a، c):a\leqslant ۰، c\in\mathbf{R})$;

۳) $\frac{x^۲-۴}{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}$ و $x+۲$ $M=\{x:x>۲\}$;

۴) $\frac{\sqrt{a^۲+۲ab+b^۲}}{a^۲-b^۲}(a-b)^۲$ و $-a+b$، $M=\{(a، b):a<-b\}$;

۵) $\sqrt{۴a^۲b^۲}+۲ab-a^۲$ و $-a^۲$، $M=\{(a، b):ab\leqslant ۰\}$;

۶) $a\sqrt[۴]{b^۲}+b\sqrt[۴]{a^۲}$ و $-\sqrt{-a^۲b}-\sqrt{-ab^۲}$،
$M=\{(a، b):a\geqslant ۰، b\leqslant ۰\}$;

۷) $-b\sqrt[۴]{a^۲}-a\sqrt[۴]{b^۲}$ و $\sqrt{-ab^۲}+\sqrt{-a^۲b}$،
$M=\{(a، b):a\leqslant ۰، b\leqslant ۰\}$

۴. مجموعهٔ M را پیدا کنید که، در آن، دوعبارت جبری متحد باشند:

۱) $\sqrt{a^۲(۳-a)}$ و $a\sqrt{۳-a}$; ۲) $\sqrt{a^۲(۳-a)}$ و $-a\sqrt{۳-a}$;

۳) $(a-۱)\sqrt{\frac{۳a}{۱-a^۲}}$ و $-\sqrt{\frac{۳a(۱-a)}{۱+a}}$;

۴) $\frac{۲}{x-y}\sqrt{\frac{y^۲-x^۲}{۲}}$ و $\sqrt{۲}\cdot\sqrt{\frac{y+x}{y-x}}$;

۵) $\sqrt[۴]{(x-y)^{۲}}$ و $\sqrt{x-y}$; ۶) $\dfrac{a^{۴}-۱}{a^{۲}-\dfrac{۱}{a^{۲}}}$ و $a^{۲}$;

۷) $\dfrac{a-۱}{a^{۲}+۱}-\dfrac{۱}{a}+\dfrac{۲}{۲a}$ و $\dfrac{a-۱}{a^{۲}+۱}$; ۸) $\dfrac{x}{x+۲}$ و $\dfrac{x(x-۲)}{x^{۲}-۴}$;

۹) $\dfrac{۱}{\dfrac{۱}{a}+\dfrac{۱}{b}}$ و $\dfrac{ab}{b-a}$; ۱۰) $۲a+\sqrt{(a-۳)^{۲}}$ و $۳a-۳$;

۱۱) $\sqrt{(۱+x)^{۲}}-\sqrt{x^{۲}}$ و $۱+۲x$; ۱۲) $\sqrt{\dfrac{xy}{y^{۲}}}$ و $\dfrac{\sqrt{xy}}{-y}$;

۱۳) $xy+\dfrac{\sqrt{x^{۲}y^{۲}}}{xy}$ و $xy-۱$; ۱۴) $۲ab-\dfrac{ab}{\sqrt{a^{۲}b^{۲}}}-۱$ و $۲ab$;

۱۵) $\sqrt{(a+۲)^{۲}}-\sqrt{a^{۲}-۲a+۱}$ و ۱;

۱۶) $\sqrt{(a+۲)^{۲}}+\sqrt{a^{۲}-۲a+۱}$ و $۲a+۱$;

۱۷) $\sqrt{(a+۲)^{۲}}-\sqrt{a^{۲}-۲a+۱}$ و ۳;

۱۸) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^{۲}-۲ab+b^{۲}}}(x^{۲}-۱)$ و $x^{۲}-۱$;

۱۹) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a^{۲}-۲ab+b^{۲}}}(x^{۲}-۱)$ و $۱-x^{۲}$

پاسخ‌ها وراهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱.۱) ۱) و ۲) و ۵) و ۶).

۱.۲) ۱) $\{(a, b, c): a\neq ۰, b\neq -۱, c\neq ۰\}$؛ ۲) همهٔ عددهای حقیقی a و b و c، بـا شرط $ab\geqslant ۰$، $bc\geqslant ۰$ و $cd\geqslant ۰$؛ ۳) $a\neq ۰$، $x\neq ۰$ و $y\neq ۰$؛ ۴) $\{(a, x): a\in\mathbf{R}, x\in\mathbf{R}\}$؛ ۵) $\{x: x\neq ۰\}$؛ ۶) $\{x: x=۳\}$.

۳. ۱) $\{(a, b, c, d): abc\neq ۰\}$؛ ۲) $\{(a, y): ay>۰\}$؛
۳) $a\neq ۱$، $a\neq -۱$، $x\neq ۰$؛ ۴) $\{x: x\geqslant ۱\}$؛ ۵) $x\neq ۱$، $x\neq ۰$،
$x\neq -۱$، $y\neq ۰$؛ ۶) $a\neq ۱$، $a\neq -۲$، $a\neq -۱$، $a\neq ۳$،
$y\geqslant ۰$، $x\geqslant ۰$؛

۴. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) بله؛ ۴) نه.

۵. ۱) $a\in \mathbf{R}$، $b\in \mathbf{R}$؛ ۲) $a\neq b$؛ ۳) $a\neq ۰$؛ ۴) $a=-۱$؛
۵) $a\geqslant ۰$؛ ۶) $xy\geqslant ۰$، $y\neq ۰$؛ ۷) $a\geqslant ۰$.

تکلیف ۲.

۱. ۱) و ۵) و ۶).

۲. ۱) $a\in \mathbf{R}$، $b\in \mathbf{R}$، $c\in \mathbf{R}$، $d\in \mathbf{R}$؛ ۲) $x\neq ۰$ و $y\neq ۰$؛
۳) $\{(a, x): x\neq ۰\}$؛ ۴) $a\neq ۰$، $b\neq ۰$، $cd\geqslant ۰$؛ ۵) $a+x\neq ۰$
و $a+x\neq -۱$؛ ۶) $\{(a, x): a\in \mathbf{R}, x\in \mathbf{R}\}$.

۳. ۱) $\{(x, y): x\neq ۰, y\neq ۰\}$؛ ۲) ϕ؛ ۳) $\{x: x>۰\}$؛
۴) $a\geqslant ۱$، $a\neq ۲$، $۰\leqslant x<۵$، $x\neq ۲$؛ ۵) $x\leqslant ۱$، $a=۲$ و $x\leqslant ۱$،
$-۲\leqslant a<۰$.

۴. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) بله؛ ۴) بله؛ ۵) نه؛ ۶) نه؛ ۷) بله.

۵. ۱) $\{(a, x): a\in \mathbf{R}, x\in \mathbf{R}\}$؛ ۲) $\{x: x=۱\}$؛ ۳) $\{x: x\geqslant ۲\}$؛
۴) $\{x: x\neq ۰\}$؛ ۵) $\{(a, x): a\neq x, a\neq -x\}$؛ ۶) $xy\geqslant ۰$؛
۷) $x\leqslant -۱$؛ ۸) $b\geqslant ۰$، $x>b$ و $b\geqslant ۰$، $x<-b$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $x\neq \pm ۱$، $x\neq ۰$؛ ۲) $a\neq ۰$، $b\neq ۰$، $a\neq -b$؛
۳) $abc\geqslant ۰$، $a\neq b$، $a\neq c$، $b\neq c$؛ ۴) $a\neq ۰$، $b\neq ۰$؛ ۵) $y\geqslant ۰$؛
۶) $a\neq -۲$، $a\neq \sqrt{۲}$، $a\neq -\sqrt{۲}$؛ ۷) $x>۰$؛ ۸) $a\neq -۲$،
$a\neq -۱$، $a\neq ۲$؛ ۹) $a\leqslant -\sqrt{۲}$، $a\geqslant \sqrt{۲}$؛ ۱۰) $x=-۱$،
$۰\leqslant x\leqslant ۱$؛ ۱۱) $\frac{۱}{۳}\leqslant x<۴$؛ ۱۲) $\{x: x=۱\}$؛
۱۳) $a=۲b$، $a\neq ۰$؛ ۱۴) $x^{۲}=y^{۲}$، $b\neq ۰$، $c\neq ۰$.

۲. ۱) $۰<x<۴$، $x-y\geqslant ۰$، $y\neq ۰$، $x+y\neq ۰$؛ ۲) $x>۱$

و $x<-۱$؛ ۳) $-۱\leqslant a<۰$ و $a\geqslant ۱$؛ ۴) $-\frac{۳}{۸}\leqslant x\leqslant \frac{۱}{۲}$؛
۵) $a\leqslant -۱$ و $a\geqslant ۲$؛ ۶) $b\geqslant ۰$، $۰<a<۱$ و $۱<a<۵$، $b\geqslant ۰$
۷) $b=a$، $a>۰$، $a\neq ۱$، $b\neq ۲$؛ ۸) $a>b\geqslant ۰$.

۳. ۱) بله؛ ۲) بله؛ ۳) بله؛ ۴) بله؛ ۵) بله؛ ۶) بله؛ ۷) بله

۴. ۱) $\{a:۰\leqslant a\leqslant ۳\}$؛ ۲) $\{a:a\leqslant ۰\}$؛ ۳) $a<-۱$،
$۰\leqslant a<۱$؛ ۴) $y\leqslant -x<۰$ و $y<۰$، $x=۰$ و $y<x<۰$
۵) $x\geqslant y$؛ ۶) $a\neq ۱$، $a\neq ۰$، $a\neq -۱$؛ ۷) $a\neq ۰$؛
۸) $x\neq -۲$، $x\neq ۲$؛ ۹) $ab\neq ۰$، $a\neq b$؛ ۱۰) $a\geqslant ۳$؛
۱۱) $-۱\leqslant x\leqslant ۰$؛ ۱۲) $y<۰$، $x<۰$ و $x=۰$، $y\neq ۰$؛
۱۳) $xy<۰$؛ ۱۴) $ab<۰$؛ ۱۵) $a\leqslant -۲$؛ ۱۶) $-۲\leqslant a\leqslant ۱$؛
۱۷) $a\geqslant ۱$؛ ۱۸) $a>b$، $x\in\mathbf{R}$؛ ۱۹) $a<b$، $x\in\mathbf{R}$.

§۲. چندجمله‌ای‌ها

به‌یاد بیاوریم که، برای عددهای طبیعی ودلخواه m و n، ویژگی‌های توان‌ها برقرارند:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ (a^m)^n=a^{mn},\ (ab)^m=a^mb^m$$

مثال ۱. الف) $۴x^۳\cdot x\cdot x^۴=۴x^{۳+۱+۴}=۴x^۸;$

ب) $۲^۳\cdot x^۴\cdot axa^۵=۸a^۶x^۵;$ ج) $۳^۲ab^۳cbca^۲=۹a^۳b^۴c^۲;$

د) $۴(a^۲)^۳=۴a^۶,\ ۵(b^۴)^۳=۵b^{۱۲};$

ه) $۴^۲(a^۲)^۴\cdot(b^۳)^۴\cdot ba^۲=۱۶a^{۱۰}b^{۱۳};$

و) $(۳^۲ab)^۳\cdot ab\cdot(a^۲b)^۴=۷۲۹a^{۱۲}b^۸;$

ز) $۲^۲(a^۳b^۳)^۲\cdot(ab)^۳=۴a^۶b^۶\cdot a^۳b^۳=۴a^۹b^۹$

یك جمله‌ای به‌عبارتی گفته می‌شود که، در آن، عددها وحرف‌ها، تنها با دوعمل ضرب و توان بانمای طبیعی به‌هم مربوط شده باشند. مثلاً، هریك ازعبارت‌های جبری

$$۸،\ a،\ -۱۰،\ bc،\ ۴a،\ -c،\ -\frac{۱۵}{۷}ab^۲c^۲،\ \frac{۱۳}{۵}mnp^۴k^۵$$

یک جمله‌ای هستند. اگر حاصل‌ضرب همهٔ عددهای یک جمله‌ای را قبل از حرف‌ها بنویسیم، و حاصل ضرب توان‌های با پایه‌های مشترک را به‌دست آوریم (که باید، در نتیجه، با نمای طبیعی باشند)، گویند یک جمله‌ای را به صورت متعارف خود نوشته‌ایم و، دراین صورت، عامل عددی را ضریب عددی یک جمله‌ای می‌نامند. مثلاً، صورت متعارف یک جمله‌ای‌های

$$\frac{۱}{۳}a^۲b\cdot ۲a\cdot ba \text{ و } ۵ab\cdot abc\cdot d\cdot ۳c$$

به‌ترتیب عبارتند از $\frac{۲}{۳}a^۴b^۲$ و $۱۵a^۲b^۲c^۲d$ که عددهای $\frac{۲}{۵}$ و ۱۵، ضریب‌های عددی آن‌ها هستند.

اگر یک جمله‌ای شامل یک حرف باشد، آن‌وقت نمای این حرف را، درجهٔ یک جمله‌ای گویند. مثلاً $۲۵x^{۱۰}$ از درجهٔ دهم و $-\frac{۵}{۶}a^۲$ از درجهٔ دوم است.

درجهٔ یک‌جمله‌ای، وقتی که‌تنها شامل عدد باشد، صفر به‌حساب می‌آید.

برای این که یک‌جمله‌ای‌ها رادرهم ضرب کنیم، بایدضریب‌های عددی آن‌ها را درهم وتوان‌های با پایهٔ مشترک را درهم ضرب کرد.

مثال ۲.

الف) $(۵xy)\cdot(-۲x^۲yb)=۵\cdot(-۲)\cdot x^{۱+۲}y^{۱+۱}\cdot b=-۱۰x^۳y^۲b;$

ب) $\left(-\frac{۴}{۵}ab^۲c\right)(-۲۰a^۴bx)=$

$$=\left(-\frac{۴}{۵}\right)\cdot(-۲۰)a^{۱+۴}b^{۲+۱}\cdot c\cdot x=۱۶a^۵b^۳cx;$$

ج) $\left(\frac{۴}{۳}a^۲b^۴\right)(۲ab)(۷abc)=\frac{۴}{۳}\cdot۲\cdot۷a^{۱+۲+۱}b^{۱+۴+۱}c=\frac{۵۶}{۳}a^۴b^۶c;$

د) $۲x(-۴xy)\cdot(۸x^۲y^۳)=-۶۴x^۴y^۴$

برای این‌که یك جمله‌ای را به توان برسانیم، باید ضریب عددی آن را به‌این‌توان رسانید ونماهای توان‌های‌هرحرف را درنمای‌توان‌ضرب کرد.

مثال ۳. الف) $(۵a^{۲}b^{۳})^{۴}=۵^{۴}\cdot a^{۲\times ۴}\cdot b^{۳\times ۴}=۶۲۵a^{۸}b^{۱۲}$;

ب) $\left(\frac{۱}{۲}cb^{۲}a^{۵}\right)^{۳}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\cdot c^{۳}\cdot b^{۲\times ۳}\cdot a^{۵\times ۳}=\frac{۱}{۸}c^{۳}b^{۶}a^{۱۵}$;

ج) $۳(ab^{۲})^{۲}(p^{۳}q^{۲})^{۴}=۳a^{۲}b^{۴}p^{۱۲}q^{۸}$;

د) $(۲a^{۲}b^{۳}c^{۴})^{k}=۲^{k}a^{۲k}b^{۳k}c^{۴k}$

مجموع جبری چند یك جمله‌ای را، چندجمله‌ای گویند. یك‌جمله‌ای‌هایی‌که چندجمله‌ای را تشکیل می‌دهند، جمله‌های چندجمله‌ای نامیده می‌شوند. یك جمله‌ای حالت خاصی از چندجمله‌ای است.

دوجمله‌را متشابه گویند، وقتی‌که‌صورت متعارف آن‌ها، یا برهم‌منطبق باشند و یا تنها درضریب عددی باهم فرق داشته باشند. مثلاً، جمله‌های $۲a\cdot a$، $a^{۴}$، $۷a^{۲}\cdot a^{۲}$ و $-۵a^{۴}$ باهم متشابه‌اند.

جمله‌های متشابه یك چندجمله‌ای را می‌توان به‌جمله‌ای متشابه باآن‌ها تبدیل کرد، به‌نحوی‌که ضریب عددی آن، برابر با مجموع جبری ضریب‌های عددی این جمله‌ها باشد.

مثال ۴.

الف) $$۴x-۵a+۵x-۸a-۳c=(۴+۵)x+$$
$$+(-۵-۸)a-۳c=۹x-۱۳a-۳c;$$

ب) $$x+۳x+۴a-x+۸a=(۱+۳-۱)x+$$
$$+(۴+۸)a=۳x+۱۲a;$$

ج) $$۵ax-۳ax^{۲}-۴ax+۷ax^{۲}=(۵-۴)ax+$$
$$+(-۳+۷)ax^{۲}=ax+۴ax^{۲}$$

وقتی یك چندجمله‌ای در داخل پرانتزی باشد، که، جلو آن، علامت مثبت قراردارد، می‌توان باحفظ علامت‌ها، پرانتز را برداشت. مثلاً

$$۱+۳a+(۸b-۴kc-۵k+x)=۱+۳a+۸b-۴kc-۵k+x$$

ولی اگر چندجمله‌ای در داخل پرانتزی باشد که جلو آن، علامت منفی قرار دارد، می‌توان پرانتز را برداشت، به‌شرطی که علامت‌های جلو جمله‌های داخل پرانتز را تغییر دهیم. مثلاً

$$۴x-(۴a-۳bx+۴ab-x^۲)=۴x-۴a+۳bx-۴ab+x^۲$$

مجموع (تفاضل) دو چندجمله‌ای، به‌یك چندجمله‌ای گفته می‌شود که ضریب آن، برابر مجموع (تفاضل) ضریب‌های جمله‌های متشابه در این دوچندجمله‌ای باشند. مثلاً، تفاضل چندجمله‌ای $۴x-۲y+۵xy$ ازچندجمله‌ای $۵x+۷xy-۳$، برابر است با چندجمله‌ای $x+۲xy+۲y-۳$.

برای پیدا کردن مجموع یا تفاضل چندجمله‌ای‌ها، می‌توان ازقانون‌های بازکردن پرانتزها، که در بالا آوردیم، استفاده کرد.

مثال ۵.

الف) $(۲x+۳y)+(-۵x+۳y-۴)=۲x+۳y-۵x+$
$+۳y-۴=-۳y+۶y-۴;$

ب) $(۹a)-(-۸b)-(۳a+۶b)=۹a+۸b-۳a-۶b=$
$=۶a+۲b;$

ج) $(۴x-۵y)-(-x-۴y)+x=۴x-۵y+$
$+x+۴y+x=۶x-y$

برای ضرب چند جمله‌ای در یك جمله‌ای، باید هریك از جمله‌های چندجمله‌ای را در یك جمله‌ای ضرب و، سپس، جمله‌های حاصل را با هم جمع کرد.

مثال ۶.

الف) $۴(a-۲b)=۴a-۸b;$

ب) $(-۵a)(۴-b-a^۲)=-۲۰a+۵ab+۵a^۳;$

ج) $۳a(a^۲-b-۲a^۲)=۳a(-b-a^۲)=-۳ab-۳a^۳$

برای ضرب چندجمله‌ای در چندجمله‌ای، باید هریك ازجمله‌های چندجمله‌ای اول را، درهریك ازجمله‌های چندجمله‌ای دوم ضرب و، سپس، جمله‌های حاصل را باهم جمع کرد.

مثال ۷. الف) $(x+y)(x-a-b)=x^۲-ax-bx+xy-$
$-ay-by;$

ب) $(۲+b)(b^۲-۴)=۲b^۲-۸+b^۳-۴b$

ویژگی‌های توان‌های چندجمله‌ای، شبیه‌ویژگی‌های توان‌های‌عدداست.

مثال ۸. الف) $(a^۲+۱)^۰=۱;$

ب) $(a^۲+a)^۰=۱$ (باشرط $a\neq ۰$ و $a\neq -۱$);

ج) $(ac+d)^۲=(ac+d)(ac+d)=a^۲c^۲+acd+acd+$
$+d^۲=a^۲c^۲+۲acd+d^۲$

دستورهای اصلی، برای ساده‌کردن ضرب‌ها

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲;$$
$$(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲;$$
$$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳;$$
$$(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳;$$
$$(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲;$$
$$(a-b)(a^۲+ab+b^۲)=a^۳-b^۳;$$
$$(a+b)(a^۲-ab+b^۲)=a^۳+b^۳;$$
$$(a-b)(a^۳+a^۲b+ab^۲+b^۳)=a^۴-b^۴;$$
$$(a-b)(a^۴+a^۳b+a^۲b^۲+ab^۳+b^۴)=a^۵-b^۵;$$
$$(a+b)(a^۴-a^۳b+a^۲b^۲-ab^۳+b^۴)=a^۵+b^۵;$$
$$(a-b)(a^۵+a^۴b+a^۳b^۲+a^۲b^۳+ab^۴+b^۵)=a^۶-b^۶;$$
$$(a-b)(a^۶+a^۵b+a^۴b^۲+a^۳b^۳+a^۲b^۴+ab^۵+b^۶)=a^۷-b^۷;$$
$$(a+b)(a^۶-a^۵b+a^۴b^۲-a^۳b^۳+a^۲b^۴-ab^۵+b^۶)=a^۷+b^۷;$$
$$(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc;$$
$$(a+b-c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab-۲ac-۲bc;$$
$$(a+b+c+d)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+۲ab+۲ac+۲ad+$$
$$+۲bc+۲bd+۲cd;$$

$$(a+b-c-d)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+۲ab-$$
$$-۲ac-۲ad-۲bc-۲bd+۲cd$$

مثال ۹. این حاصل‌ضرب‌ها را پیدا کنید:

الف) $(a-b)(a^۲+b^۲)(a+b)$؛

ب) $(۲x-y)(۴x^۲+۲xy+y^۲)(۸x^۳+y^۳)$.

حل.

الف) $(a-b)(a^۲+b^۲)(a+b)=$
$$=(a-b)(a+b)(a^۲+b^۲)=(a^۲-b^۲)(a^۲+b^۲)=a^۴-b^۴;$$

ب) $(۲x-y)(۴x^۲+۲xy+y^۲)(۸x^۳+y^۳)=$
$$=(۸x^۳-y^۳)(۸x^۳+y^۳)=۶۴x^۶-y^۶$$

مثال ۱۰. محاسبه کنید:

الف) $۴۱\times ۳۹;$ ب) $A=\dfrac{۴۳^۲-۱۱^۲}{(۳۶/۵)^۲-(۲۷/۵)^۲};$

ج) $B=\dfrac{۹۷^۳+۸۳^۳}{۱۸۰}-۹۷\times ۸۳$

حل.

الف) $۴۱\times ۳۹=(۴۰+۱)(۴۰-۱)=۴۰^۲-۱=۱۵۹۹;$

ب) $A=\dfrac{(۴۳-۱۱)(۴۳+۱۱)}{(۳۶/۵-۲۷/۵)(۳۶/۵+۲۷/۵)}=\dfrac{۳۲\times ۵۴}{۹\times ۶۴}=۳;$

ج) $B=\dfrac{(۹۷+۸۳)(۹۷^۲-۹۷\times ۸۳+۸۳^۲)}{۱۸۰}-۹۷\times ۸۳=$
$$=\frac{۱۸۰(۹۷^۲-۹۷\times ۸۳+۸۳^۲)}{۱۸۰}-۹۷\times ۸۳=$$
$$=۹۷^۲-۹۷\times ۸۳+۸۳^۲-۹۷\times ۸۳=۹۷^۲-۲\times ۹۷\times$$
$$\times ۸۳+۸۳^۲=(۹۷-۸۳)^۲=۱۴^۲=۱۹۶$$

مثال ۱۱. ثابت کنید، بخش‌پذیر است:

الف) $۲^۹-۱$ بر ۷۳؛ ب) $۵^۶-۱۰^۴$ بر ۹.

حل. الف) داریم:

$$۲^۹-۱=(۲^۳)^۳-۱=۸^۳-۱=(۸-۱)(۸^۲+۸+۱)=۷\times۷۳;$$

ب) $۵^۶-۱۰^۴=(۵^۳)^۲-(۱۰^۲)^۲=(۵^۳-۱۰^۲)(۵^۳+۱۰^۲)=$

$$=(۱۲۵-۱۰۰)(۱۲۵+۱۰۰)=۲۵\times۲۲۵=۹\times۲۵^۲$$

تبدیل یك چندجمله‌ای را، به‌صورت ضرب دو یا چند چندجمله‌ای، تجزیهٔ چندجمله‌ای به عامل‌ها گویند. برای تجزیهٔ چندجمله‌ای، از روش‌های گوناگونی استفاده می‌کنند: دستورهای ساده کردن ضرب، بیرون کشیدن عامل مشترك جمله‌ها (فاکتورگیری)، روش گروه‌بندی وغیره.

یکی ازروش‌های تجزیهٔ چندجمله‌ای این است که ابتدا، مجذور کامل‌ها را، نسبت به یك حرف یا یك عبارت، جدا کنیم واز دستور

$$P^۲\pm۲PQ+Q^۲=(P\pm Q)^۲$$

استفاده کنیم. چند مثال می‌آوریم:

الف) $x^۲+۴x+۸=x^۲+۲\times۲x+۲^۲+۴=(x+۲)^۲+۴;$

ب) $a^۲b^۲-ab+۱=(ab)^۲-۲\times\frac{۱}{۲}\cdot ab+\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}=$

$$=\left(ab-\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴};$$

ج) $c^۲-۴ac+۴a^۲+۴a-۲c+۷=$

$$=(۲a-c)^۲+۲(۲a-c)+۱+۶=(۲a-c+۱)^۲+۶$$

مثال ۱۲. این چندجمله‌ای‌ها را، به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

الف) $۲x(x+y)+ax+ay;$ ب) $۴y^۲-۲m^۲;$

ج) $a^۲+a-ab-b;$ د) $n^۲+۲n-۸;$ ه) $x^۴+۱$

حل. الف) $۲x(x+y)+ax+ay=$

$$=۲x(x+y)+a(x+y)=(x+y)(۲x+a);$$

ب) $۴y^۲-۲m^۲=۲(۲y^۲-m^۲)=$

$$=۲[(\sqrt{۲}y)^۲-m^۲]=۲(\sqrt{۲}y-m)(\sqrt{۲}y+m);$$

ج) $a^۲+a-ab-b=a(a+۱)-b(a+۱)=(a+۱)(a-b);$

د) $n^۲+۲n-۸=n^۲+۲n+۱-۹=$

$$=(n+۱)^{۲}-۹=(n-۲)(n+۴);$$

ه) $x^{۴}+۱=x^{۴}+۲x^{۲}+۱-۲x^{۲}=(x^{۲}+۱)^{۲}-۲x^{۲}=$

$$=(x^{۲}+۱)^{۲}-(\sqrt{۲}x)^{۲}=(x^{۲}+\sqrt{۲}x+۱)(x^{۲}-\sqrt{۲}x+۱)$$

مثال ۱۳. ثابت کنید، این چندجمله‌ای‌ها، به‌ازای هر مقدار عددی x و y و z، مقدارهای غیرمنفی را می‌پذیرند:

الف) $x^{۲}-۲x+۲y^{۲}+۸y+۹;$

ب) $(x^{۲}-xy+y^{۲})^{۳}+(x^{۲}+xy+y^{۲})^{۳};$

ج) $x^{۲}+۱۹y^{۲}+۶z^{۲}-۸xy-۴xz+۱۲yz$

حل. به‌ترتیب داریم:

الف) $x^{۲}-۲x+۲y^{۲}+۸y+۹=x^{۲}-۲x+۱+$

$$+۲(y^{۲}+۴y+۴)=(x-۱)^{۲}+۲(y+۲)^{۲}\geqslant ۰$$

علامت برابری تنها به‌ازای $x=۱$ و $y=-۲$ پیش می‌آید.

ب) $(x^{۲}-xy+y^{۲})^{۳}+(x^{۲}+xy+y^{۲})^{۳}=[(x^{۲}-xy+y^{۲})+$

$+(x^{۲}+xy+y^{۲})][(x^{۲}-xy+y^{۲})^{۲}-(x^{۲}-xy+y^{۲})(x^{۲}+$

$+xy+y^{۲})+(x^{۲}+xy+y^{۲})^{۲}]=۲(x^{۲}+y^{۲})[(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-$

$-۲xy(x^{۲}+y^{۲})+x^{۲}y^{۲}-(x^{۲}+y^{۲})^{۲}+x^{۲}y^{۲}+(x^{۲}+y^{۲})^{۲}+$

$+۲xy(x^{۲}+y^{۲})+x^{۲}y^{۲}]=۲(x^{۲}+y^{۲})[(x^{۲}+y^{۲})^{۲}+۳x^{۲}y^{۲}]\geqslant ۰$

علامت برابری، تنها برای $x=y=۰$ برقرار است.

ج) $x^{۲}+۱۹y^{۲}+۶z^{۲}-۸xy-۴xz+۱۲yz=x^{۲}-۲(۴y+$

$+۲z)x+(۴y+۲z)^{۲}+۳y^{۲}-۴yz+۲z^{۲}=(x-۴y-$

$$-۲z)^{۲}+۲(y^{۲}-۲yz+z^{۲})+y^{۲}=$$

$$=(x-۴y-۲z)^{۲}+۲(y-z)^{۲}+y^{۲}\geqslant ۰$$

وعلامت برابری تنها وقتی پیش می‌آید که $x=y=z=۰$.

تکلیف ۱.

۱. کدام یک از این عبارت‌ها، یک‌جمله‌ای هستند:

۱) $b;$ ۲) $-۴;$ ۳) $۲+c;$ ۴) $ab^{۲};$ ۵) $۳a^{۲}c;$

۶) $۲\sqrt{\pi^{۲}}ab;$ ۷) $۴a-۳ab+c$

۲. این جمله‌ها را به‌صورت متعارف خود بنویسید:

۱) $۲aba$;　۲) $\frac{۸}{۷}ab۳ab$;　۳) $p^۲x^۲\left(-\frac{۱}{۲}xp^۳q\right)$;

۴) $۲x^۲y(-۳x^۲y^۲)x$;　۵) $-۲p^۲qx^۲xq^۲p$;

۶) $۲a^۳b\left(-\frac{۱}{۲}ab\right)a^۲b$;　۷) $-۲\frac{۱}{۳}a^۳c^۲\frac{۱}{۷}ac^۲۶abc$;

۸) $۳ak^۲(-۲kx^۳)k^۳$;　۹) $(۲y)(۳y^۲)(dy^۳)d^۲y^۲$

۳. این یک جمله‌ای‌ها را درهم ضرب کنید:

۱) $۲^۳abc$ و $\frac{۱}{۳}a^۲bc^۳$;　۲) $ab^۳a^۲$ و $a^۲b\cdot cb$;

۳) $c\cdot ۲ad\cdot c^۲d^۲$ و $c^۲\cdot\frac{۱}{۳}d^۲\cdot cd$;　۴) $abcabc^۲bc$ و $a^۲bc\cdot ab^۲c\cdot c^۳b\cdot a^۴$

۴. این یک جمله‌ای‌ها را به‌توان m برسانید:

۱) $k^۲nb^۳p$، $m=۳$;　۲) $ab^۲.c^۲a$، $m=۲$;

۳) $pq^۲\cdot(qap)^۲$، $m=۳$;　۴) $(ca\cdot a^۲)^۲abc$، $m=۲$

۵. جمله‌های متشابه را به‌یک جمله تبدیل کنید:

۱) $۲a^۲b-۳a^۲b+۴a^۲b$;　۲) $۰/۱x^۲y^۲-۰/۲x^۲y^۲+۰/۳x^۲y^۲$;

۳) $۲/۱xab+۲x+۴xab-x+۳x+۳xab$;

۴) $۳kl^۲+۳/۱kl^۲-۰/۱kl^۲+xy-۲xy-۲xy+۴kl^۲-۲xy$;

۵) $\frac{۱۳}{۶}ab^۲c^۳-۶/۲۵ab^۲c^۳+\frac{۱}{۴}ab^۲c^۳+۸ab^۲c^۳$

۶. پرانتزها را باز وجمله‌های متشابه را تبدیل کنید:

۱) $۴+۳+[((x+۱)-۲x)+۳x]-$
$-[۲x-(x-۴)]+۳x-۷+x$;

۲) $a+[۲b-c(-۲+۳)]-$
$-[a-(a-۲b)-۳c]+۲(a+c-b)$;

۳) $-(۲x-۴y-۱)+[(۱-$
$-۲x-y)+(x+y-۲)-x+(y-۳x)]$;

۴) $a+[b-(c-d)]-(a-(b-(c-d)))+$
$+[a+۲b-(a-b)];$

۵) $[m-(mn-۲m)]-۳mn+۲m-$
$-[۱-(۲-(۳-mn-m))]-۲$

۷. مجموع و تفاضل چندجمله‌ای‌های P و Q را پیدا کنید:

۱) $P=-۲x^{۳}+xy^{۲}+۳x$، $Q=۳x^{۳}+xy^{۲}+۴x;$

۲) $P=۲a^{۲}-۳ab-b^{۲}+(-۳a^{۲}+۲ab-b^{۲})$،
$Q=a^{۲}-۲ab+۳b^{۲};$

۳) $P=\left(\frac{۱}{۳}a-\frac{۱}{۳}b\right)-(a+۲b)$، $Q=\frac{۱}{۳}a+\frac{۱}{۳}b-(a-b);$

۴) $P=۲a^{۲}+ab-b^{۲}-(-a^{۲}+b^{۲}-ab)$،
$Q=۳a^{۲}+b^{۲}-(ab-a^{۲});$

۵) $P=[x+(y-z)-۲x]+y+z-(z-x-y)$،
$Q=x-[x-(y-z)-x]$

۸. چندجمله‌ای‌ها را درهم ضرب کنید:

۱) -۲ و $-(۲a+b)+c;$ ۲) $۳a$ و $a+۲b-(c+a);$

۳) $۲x+y$ و $\frac{۱}{۲}x-y;$ ۴) $ab-x^{۲}y+x$ و $\frac{۱}{۳}ab+x;$

۵) $(a-۲a^{۲}+a^{۳})-a^{۳}$ و $a^{۲}-۲a+۱$

تکلیف ۲.

۱. کدام عبارت، یک جمله‌ای است؟

۱) $۱+b;$ ۲) $-۵a;$ ۳) $abc;$ ۴) $a-\sqrt{۲}b;$

۵) $cd\cdot dk;$ ۶) $a^{۳}bc\cdot\frac{۱}{۲}a;$ ۷) $a^{۲}+۲b+c$

۲. یک جمله‌ای‌ها را به‌صورت متعارف بنویسید:

۱) $x^{۲}y\cdot(-۲xy);$ ۲) $ab\cdot ab\cdot ab\cdot ۲x^{۲}\cdot ۳x^{۳};$

۳) $p^{۲}q\cdot q^{۳}p^{۴}\cdot\frac{۱}{۴}(pq)^{۲}\cdot(۴p^{۲}q)^{۲};$ ۴) $\left(-\frac{۲}{۳}a^{۲}b\right)b^{۲}a\cdot\frac{۹}{۴}(a^{۲}b^{۲})^{۳};$

۵) $\left(-۲\frac{۱}{۳}cd\right)\cdot\left(۱\frac{۱}{۴}c^{۲}d\right)\left(-\frac{۵}{۶}cd\right)^{۰}$;

۶) $\left(\frac{۱}{۲}a\cdot\frac{۱}{۴}a^{۲}\cdot\frac{۱}{۸}a^{۳}\right)^{۲}\cdot(۲b\cdot۴b^{۲}\cdot۸b^{۳})$

۳. درهم ضرب کنید:

۱) $\frac{۲}{۳}a^{۲}b^{۴}x$ و $\frac{۳}{۴}a^{۳}bx^{۲}$;   ۲) $(-۴a^{۲}c)(۳b^{۲}c)$ و $(-۲ac^{۲})(۳ca^{۳})$;

۳) $(-۱/۵ab^{۲})\left(\frac{۱}{۴}bc\right)(a^{۲}b)$ و $(-۲ac)(۲ab)(-a)$;

۴) $۵ac^{۲}(-۲a^{۳}bc)$ و $\left(\frac{۱}{۲}abc\right)(۴ab^{۳}c)(ab^{۲}c)(bc^{۲})$

۴. یك جمله‌ای را به‌توان m برسانید:

۱) $\frac{۱}{۲}cbx^{۲}$، $m=۲$;   ۲) $-۲cp^{۲}q^{۲}l^{۳}$، $m=۳$;

۳) $(m^{۲}n^{۲})^{۲}(mn)$، $m=۲$;   ۴) $(۰/۱ab^{۲}c)^{۲}\cdot a^{۳}$، $m=۳$

۵. باتوجه به‌جمله‌های متشابه، ساده کنید:

۱) $۴ab\cdot\frac{۱}{۳}ac-۲aca-۹a^{۲}\cdot\frac{۱}{۲}b+۱۰a^{۲}\cdot\frac{۱}{۵}c+a^{۲}b-a^{۲}bc$;

۲) $۲ab-۲bc\cdot c+ab+\frac{۱}{۲}c^{۲}b-۴ab^{۲}+۲cb\cdot b$;

۳) $\frac{x}{۳}+\frac{x}{۶}+\frac{۳x}{۲}-\frac{۴}{۳}mn^{۲}+۰/۲mn^{۲}-۱\frac{۱}{۳}mn^{۲}$;

۴) $۳ab\cdot\frac{۲}{۵}ac-۲a\cdot abc-\frac{۱}{۳}a^{۲}bc+a-۵-۲a+۷+a+۲$;

۵) $\left(\frac{۲}{۳}ac\right)^{۲}\cdot c^{۲}-\frac{۲}{۳}a(a\cdot c)^{۲}+\frac{۲}{۳}ac^{۳}\cdot c-\frac{۱}{۴}ac^{۴}$

۶. پرانتزها را باز و، سپس، ساده کنید:

۱) $a+(۲a+c)-۳a^{۲}-۲a^{۲}+((a+۳a-۷a)+c)$;

۲) $a-(۲b+(c-(d-a)))+d-((a-b)-c)$;

۳) $۲a-((۲b-۳c)-d)+a-$

$-(۲b-(c-d))+a+(۲b-(c+۲d));$

۴) $۱-((m-۱)-(m+۲))-۳m+(۵m-(۲m-(۳m-۴)))$

۷. مجموع تفاضل چندجمله‌ای‌های P و Q را پیدا کنید:

۱) $P=ab-a+۱$، $Q=۲ab-(ab-a+۲);$

۲) $P=a^۲b+۲a\cdot ab-۳ac$، $Q=a^۲b-۲ab+۳ac;$

۳) $P=\left(\frac{۱}{۲}ax-۲(ax+۳)\right)-(xa+۱),$

$Q=((ax-۲)-(۳-(ax-۱)))-۴;$

۴) $P=y-(y-(y-((y+۲x)-x)));$

$Q=y-(y-x+۲(x-y));$

۵) $P=a-(b-(c-a-b))$، $Q=b+(a-(c-b-a))$

۸. چندجمله‌ای‌ها را درهم ضرب کنید:

۱) $۲x+۳-(۴+x-۵x)$ و $۱-۲x+x+۴-۳x+۱;$

۲) $a(a+b+c)$ و $b(a-b-c);$

۳) $\frac{۱}{۳}ab$ و $(a-(a-(a-(b-a))));$

۴) $a-((b+p)-a)$ و $a-((b-a)+p)-۲a;$

۵) $(x^۲-x+۱)(x+۱)$ و $(x^۲+x+۱)(x-۱)$

تکلیف ۳.

۱. ساده کنید:

۱) $۳y^۲((۲y-۱)+y+۱)-y(۱-y+y^۲)-y^۲+y;$

۲) $۲x^۲\cdot a-a(۱+۲x^۲)-(a-x(x+a));$

۳) $(۲p\cdot p^۲-(p^۳-۱)+(p+۳)۲p^۲-۲pp\cdot p)(۳p)^۲-۳p^۵;$

۴) $(x+۱)(۱+x-x^۲+x^۳-x^۴)-$

$-(x-۱)(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴);$

۵) $(x-y-z)(x-y)+(y-x-z)(z-x)+$

$$+(z-x-y)(y-z);$$

۶) $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)-$
$-(x+۲)(x+۳)(x+۴)(x+۵)$

۲. این عمل‌ها را با استفاده از دستورهای «ضرب ساده» انجام دهید:

۱) $(y-۳)(y+۳)$;
۲) $(m-n)(m+n)$;
۳) $(۳ab+۱)(۳ab-۱)$;
۴) $(a-x)(a+x)(a^۲+x^۲)$;
۵) $(m+n)(m^۲-mn+n^۲)$;
۶) $(۲-a)(۴+۲a+a^۲)$;
۷) $(x-۲y)^۲-(x+۲y)^۲$;
۸) $(a^۲+b^۲)^۲+(a^۲-b^۲)^۲$;
۹) $(a-۳)^۳-(a+۳)^۳$;
۱۰) $(a-b-c)^۲-(a-b+c)^۲$;
۱۱) $(a-x-y)^۳-(a+x-y)^۳$;
۱۲) $(۱+x+x^۲)(۱-x)(۱+x)(۱-x+x^۲)$

۳. به‌مجذور یا مکعب یك دوجمله‌ای تبدیل کنید:

۱) $p^۲+۲pq+q^۲$;
۲) $۴m^۲-۴mn+n^۲$;
۳) $p^۴-۶p^۲q+۹q^۲$;
۴) $a^۶+۲a^۳b^۳+b^۶$;
۵) $a^۳+۳a^۲+۳a+۱$;
۶) $a^۳-۳a^۲+۳a-۱$;
۷) $۸-۱۲m+۶m^۲-m^۳$;
۸) $۱+۶a+۱۲a^۲+۸a^۳$;
۹) $۸p^۳-۲۷q^۳-۳۶p^۲q+۵۴pq^۲$;
۱۰) $x^۳y^۳+۶x^۲y^۲+۱۲xy+۸$

۴. محاسبه کنید:

۱) $۴۱^۲$; ۲) $۳۹^۲$; ۳) $۳۱^۳$; ۴) $۲۹^۳$; ۵) $۳۵^۲-۲۵^۲$;

۶) $۴۲\cdot۵۸$; ۷) $\frac{۸۴/۵^۲-۵۹/۵^۲}{۶۱^۲-۱۱^۲}$; ۸) $۱۰۰۲\cdot۹۹۸-۱۰۰۳\cdot۹۹۷$;

۹) $\sqrt{۶۵^۲-۶۳^۲}$; ۱۰) $\sqrt{۳۱۳^۲-۳۱۲^۲}$;

۱۱) $\frac{۸۷^۲-۱۵^۲}{۹۷^۲-۵۶^۲+۱۵۳\cdot۳۱}$; ۱۲) $\frac{۷۱^۳+۴۹^۳}{۱۲۰}-۷۱\cdot۴۹$

۵. ثابت کنید، بخش‌پذیر است:

۱) $۸^۵+۲^{۱۱}$ بر ۱۷؛ ۲) $۶۹^۲-۶۹\times۵$ بر ۳۲؛
۳) $۲۲۸^۳+۱۷۲^۳$ بر ۲۰۰۰؛ ۴) $۱۹^{۱۹}+۶۹^{۱۹}$ بر ۴۴

تکلیف ۴.

۱. ساده کنید:

۱) $(y-۲)(y+۲)+(y-۳)(y+۳)-y(۲y+۱)-۴;$

۲) $(۵a-b+۱)(۵a+b-۱)-۲۴(a+۱)^{۲}+b^{۲}-۱;$

۳) $a(b+c-bc)-b(c+a-ac)+c(b-a);$

۴) $(a+b+c)(a+b-c)+(a+c+b)(a+c-b)+$
$+(a+b+c)(a+c-b);$

۵) $(۲x-۴(۵x-(۱۱y-۳x))-$
$-۳(۵y-۲(۳x-۶y)))\cdot(۲x-y+۱);$

۶) $(a^{۲}+۲a+۱)(a^{۴}-۲a^{۳}+۳a^{۲}+۲a+۱)-a^{۶}+۲a^{۳};$

۷) $\left(۳x^{۲m-۱}-\frac{۳}{۷}y^{۳n-۵}+x^{۲m}y^{۳n}-۳y^{۲}\right)\cdot۸x^{۳-۲n}\cdot y^{۶-۳n}$

۲. این عمل‌ها را، با استفاده از «ضرب ساده»، انجام دهید:

۱) $(x-۲y^{۲})^{۲}-(x+۲y^{۲})^{۲};$ ۲) $(۱/۵xy-۰/۵y)^{۲};$

۳) $(۲x+۱)(۲x-۱)(۴x^{۲}+۱);$ ۴) $(a+b-c)^{۲}+(a-b+c)^{۲}$

۵) $(۲m-n)(۴m^{۲}+۲mn+n^{۲});$ ۶) $(a+b+c)(a-b-c);$

۷) $(x+۲y)(x^{۲}-۲xy+۴y^{۲});$

۸) $(۲+x)(۴-۲x+x^{۲})(۸-x^{۳});$

۹) $(a+۲b-c)^{۲}-(a-۲b+c)^{۲};$ ۱۰) $(x-y)^{۳}-(x+y)^{۳};$

۱۱) $\left(\frac{۱}{۲}b+y\right)^{۳}+\left(\frac{۱}{۲}b-y\right)^{۳};$ ۱۲) $(a-b+c)^{۳}-(a+b+c)^{۳}$

۱۳) $(۲x-y)(۴x^{۲}+y^{۲})(۲x+y)+y^{۴};$

۱۴) $(۴x-۱+y)^{۴}-(۴x+۱-y)^{۴};$

۱۵) $(۲+x)^{۵}-(۲-x)^{۵};$ ۱۶) $(a+۱-b)^{۴}$

۳. به‌صورت مجذور یا مکعب یك دوجمله‌ای درآورید:

۱) $x^{۲}+۲xy+y^{۲};$ ۲) $z^{۲}-۲zm+m^{۲};$

۳) $۴x^{۲}-۴x+۱;$ ۴) $x^{۲}y^{۲}-۴xycd+۴c^{۲}d^{۲};$

۵) $x^۳+۳x^۲+۳x+۱$; ۶) $۲\sqrt{۲}+۱۸y+۲۷\sqrt{۲}y^۲+۲۷y^۳$;
۷) $۱-۱۲y+۶y^۲-۸y^۳$; ۸) $۳\sqrt{۳}-۹y+۳\sqrt{۳}y^۲-y^۳$;
۹) $(x+y)^۲+۲(x+y)+۱$;
۱۰) $x^۲-۲xy+y^۲-۲ux+۲uy+u^۲$;
۱۱) $(a-b)^۲+۲ac+۲(a-b)-۲bc+(c+۱)^۲$;
۱۲) $a^۲+b^۲+d^۲+f^۲+۲(ab+ad+af)+$
$+۲bd+۲bf+۲df$

۴. محاسبه کنید:

۱) $۳۲^۲$; ۲) $۳۸^۲$; ۳) $۴۱^۳$; ۴) $۲۱^۳$; ۵) $۱۹^۳$;
۶) $۲۵۶^۲-۴۴^۲$; ۷) ۴۳×۵۷; ۸) $\frac{۱۸۱^۲-۶۱^۲}{۳۱۹^۲-۲۰۹^۲}$;
۹) $۲۰۳\times ۱۹۷-۲۰۱\times ۱۹۹$; ۱۰) $\frac{۶۷^۳+۵۲^۳}{۱۱۹}-۶۷\times ۵۲$;
۱۱) $\frac{۵۹^۲-۳۸^۲}{۳۸^۲-۱۷^۲+۳۱۰۰}$; ۱۲) $\sqrt{۲۷۵^۲-۵۰^۲}$;
۱۳) $\sqrt{۶۱۴^۲-۶۱^۲}$

۵. ثابت کنید بخش‌پذیر است:

۱) $۸^۷-۲^{۱۸}$ بر ۱۴؛ ۲) $۷۹^۲+۷۹\times ۱۱$ بر ۳۰؛
۳) $۴۱^۳+۱۹^۳$ بر ۲۰؛ ۴) $۳۶^{۸۱}+۱۰\times ۳^{۸۱}$ بر ۱۱.

تکلیف ۵.

۱. مجذورهای کامل را جدا، و ثابت کنید حاصل هریك از این عبارت‌ها، به‌ازای هرمقدار ازحرف‌ها، عددی غیرمنفی است:

۱) $y^۲+۶y+۱۰$; ۳) $۲x^۲+۲xy+y^۲+۲x+۱$;
۲) $x^۲y^۲-۵xy+۷$; ۴) $۳x^۲y^۲z^۲+۲xyz+۵$;
۵) $۳x^۲+۳y^۲+۶xy+۲x+۲y+۱$;
۶) $۲x^۲+۳y^۲+۴z^۲-۲xy+۴yz+۳$

۲. این چندجمله‌ای‌ها را به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $۲a+۶b;$

۲) $ab-a^{۲}b^{۲};$

۳) $a+b+a^{۲}-b^{۲};$

۴) $a^{۲}-b^{۲}+a^{۳}-b^{۳};$

۵) $x^{۳}+x^{۲}+x+۱;$

۶) $y^{۲}-۵y+۶;$

۷) $x^{۳}y^{۲}+x^{۲}.y-۲+x^{۲}y^{۲}+xy-۲x;$

۸) $x^{۳}-۲x^{۲}-۵x+۶;$

۹) $a^{۴}-b^{۲}(۲a-b)^{۲};$

۱۰) $x^{۶}-(yz)^{۶};$

۱۱) $u^{۴}+u^{۳}+u+۱;$

۱۲) $x^{۴}+۳$

۳. ثابت کنید، حاصل چندجمله‌ای، به‌ازای هرمقدار عددی حرف‌ها، غیرمنفی است:

۱) $x^{۴}+۲x^{۳}+y^{۴}-۴y^{۳}+x^{۲}+۴y^{۲};$

۲) $x^{۲}y^{۲}+x^{۲}y^{۴}+x^{۴}y^{۲}+۲x^{۳}y^{۳}+۲xy-$
$-۲(x+y)(۱+x^{۲}y^{۲})+۱+x^{۲}+y^{۲};$

۳) $a^{۴}+۲a^{۳}b+a^{۲}b^{۲}-۲a^{۳}c-۴a^{۲}bc-$
$-۲acb^{۲}+a^{۲}c^{۲}+۲abc^{۲}+b^{۲}c^{۲};$

۴) $۱+a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+a^{۲}b^{۲}+a^{۲}c^{۲}+b^{۲}c^{۲}+a^{۲}b^{۲}c^{۲}$

۴. دوعدد طبیعی، درتقسیم بر ۴، به‌ترتیب به‌باقی‌مانده‌های ۱ و ۳ رسیده‌اند. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های این دوعدد بر ۴ بخش‌پذیراست.

۵. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های سه‌عددطبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

۶. به‌صورت چندجمله‌ای بنویسید:

۱) $\overline{mn}+۲m-۳n$

۲) $\overline{abc}-\overline{cba}$

۳) $(\overline{ab})^{۲}-\overline{ab}$

۷. ثابت کنید $\overline{ab}+\overline{ba}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

تکلیف ۶.

۱. مربع‌های کامل را جدا کنید ونشان دهید، چندجمله‌ای، به‌ازای هر مقدار عددی ازحرف‌ها، تنها مقدارهای غیرمنفی را قبول می‌کند:

۱) $۴y^{۲}-۴y+۱/۱;$

۲) $۲x^{۲}+y^{۲}-۲x-۴y+۵;$

۳) $a^{۲}b^{۴}-۴ab^{۲}+۴;$

۴) $x^{۴}+۲x^{۳}+۲x+۳x^{۲}+۳;$

۵) $x(x+۱)(x+۲)(x+۳)+۱$;   ۶) $a^۴+a^۳+۲a^۲+a+۱$

۲. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $ax^۲-bx^۲+bx-ax+a-b$;

۲) $x^۲-۷x+۱۲$;   ۳) $x^۳-۳x^۲+۴x-۲$;

۴) $(ay+bx)^۲+(ax-by)^۲-c^۲(x^۲+y^۲)$;

۵) $۳۶a^۴b-۱۶b^۵$;   ۶) $u^۴-u^۳-u+۱$;

۷) $(x-a)^۴-(x+a)^۴$;

۸) $a^۲c^۲+b^۲d^۲-b^۲c^۲-a^۲d^۲-۴abcd$

۳. ثابت کنید، حاصل چندجمله‌ای، به‌ازای هرمقدار عددی حرف‌ها، غیرمنفی است:

۱) $۲x^۲y^۲-۲xy(x+y)+x^۲+y^۲$;

۲) $-a^۴+a^۶+a^۵-a^۲-۲a^۳+۱+a$;

۳) $x^۲y^۲+x^۴y^۲+x^۲y^۴+x^۲+y^۲-۲x^۳y^۳+$
$+۲(x-y)(x^۲y^۲+۱)+۱-۲xy$;

۴) $(۱-a+a^۲)(x^{۱۰}-x^۸-x^۲+۱)$

۴. دوعدد طبیعی، در تقسیم بر ۱۳، به‌ترتیب، به‌باقی‌مانده‌های ۱ و ۳ رسیده‌اند. ثابت کنید، تفاضل مکعب‌های این دوعدد، بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۵. ثابت کنید، اگرمجموع مربع‌های سه‌عدد متوالی را با واحد جمع کنیم، حاصل جمع بر ۳ بخش‌پذیر است.

۶. به‌صورت چندجمله‌ای بنویسید:

۱) $\overline{abcd}-\overline{abc}$;   ۲) $(\overline{mn})^۳-(\overline{mn})^۲$;   ۳) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$

۷. این بخش‌پذیری‌ها را ثابت کنید:

۱) $\overline{ab}-\overline{ba}$ بر ۹؛   ۲) $\overline{abc}-\overline{cba}$ بر ۹۹.

تمرین‌ها

۱. یک جمله‌ای را به‌صورت متعارف بنویسید:

۱) $x^۲y(-۲xy)\frac{۳xy^۲}{۵}$;   ۲) $abab۳x^۲ab۲x^۲$;

۳) $p^{۲}q\cdot q^{۳}p^{۴}\left(\frac{pq}{۲}\right)^{۲}۳(p^{۲}q)^{۳}$; ۴) $\left(-\frac{۲}{۳}a^{۲}b\right)b^{۲}a\frac{۹}{۴}(a^{۲}b^{۲})^{۳}$;

۵) $\left(۱\frac{۱}{۴}c^{۲}d\right)\left(-\frac{۵}{۶}cd\right)^{۰}\left(-۲\frac{۱}{۳}cd\right)$;

۶) $\left(\frac{۱}{۲}a\frac{۱}{۴}a^{۲}\frac{a^{۳}}{۸}\right)(۲b۴b^{۲}۸b^{۳})$;

۷) $\left(-\frac{a}{۲}\right)^{۳}۳mn۴a^{۲}m^{۳}\left(۴\frac{۱}{۳}n^{۲}a\right)$;

۸) $a^{۲}b^{۳}\left(-\frac{۲۱b}{۴}\right)\left(\frac{۸m^{۲}ab}{۷}\right)\left(-۱\frac{۱}{۳}mn^{۲}\right)$;

۹) $۴ab^{۲}۳a^{۶}x^{۴}۱۲a^{۵}x^{۴}y\left(-\frac{ax^{۲}y^{۳}}{۲۴}\right)$;

۱۰) $(۰/۲xy^{۲})\left(۲\frac{۱}{۲}yax^{۲}\right)\left(-\frac{۳y^{۲}ax^{۳}}{۴}\right)$;

۱۱) $\left(-۳\frac{۱}{۳}a^{۲}b\right)(-۰/۲۵ab^{۲})\left(-\frac{۴ab}{۳}\right)$;

۱۲) $(۲/۵ap^{۲}c)^{۲}\left(\frac{۴pc^{۲}}{۱۵}\right)\left(-\frac{۹ca^{۳}}{۲}\right)(-۰/۴a)$;

۱۳) $\left(-۴\frac{۳}{۴}mn^{۲}\right)\left(-\frac{۱۷}{۳۸}amn\right)\left(-\frac{a^{۲}n}{۳۴}\right)\left(-\frac{۱۶m}{۵}\right)$;

۲. ضرب‌ها را انجام دهید و، سپس، ساده کنید:

۱) $(۳a-۲b)(a+b)$; ۲) $(۴a^{۲}-۵b^{۲})(۵a^{۲}-۴b^{۲})$;

۳) $(۳a^{۳}-۲a^{۲}b+ab^{۲})(۲a^{۲}-ab-۵b^{۲})$;

۴) $(۲a^{۵}-b^{۳}+۱)\left(a^{۵}-\frac{b^{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)$;

۵) $(x^{۲}-x+۱)(x^{۲}+۲x+۳)$;

۶) $\left(\frac{x^{۳}}{۴}-\frac{x^{۲}}{۳}+\frac{x}{۲}\right)\left(\frac{x^{۳}}{۴}+\frac{x^{۲}}{۳}-\frac{x}{۲}\right)$;

۷) $\left(۱+\frac{x}{۲}+\frac{x^{۲}}{۳}+\frac{x^{۳}}{۴}\right)\left(۱-\frac{x}{۲}+\frac{x^{۲}}{۳}-\frac{x^{۳}}{۴}\right)$;

۸) $(۲+x-۳x^۲+x^۳)(۲-x+۳x^۲+x^۳);$

۹) $(a^۲+b^۲+c^۲)(a^۲-b^۲-c^۲);$

۱۰) $(x^۲+۲xy-y^۲)(۲x^۲-۲xy+۳y^۲)$

۳. ساده کنید:

۱) $(x+y)^۲-(x-y)^۲;$ ۲) $(a-۲b)^۳-(a+۲b)^۳;$

۳) $-(۲a-x)^۲-۸(a-x)^۲+۵(۱+a)(۱-a)-۵x^۲;$

۴) $(m-n)(m^۲+mn+n^۲)-(m+n)(m^۲-mn+n^۲);$

۵) $(a-b)(a+b)-۲a(a-b)-(a-b)^۲;$

۶) $x^۲(a-b)+b(۱-x)+x(bx+b)-ax(x+۱);$

۷) $(۴x+۲)(۳-x)+(۴-x)(x+۱)-(x-۴)(x+۴);$

۸) $(۵x^۲-a(x+a))-(۳(a^۲-x^۲)+۲ax)+;$
$+(۲ax-۴(a+۲ax^۲));$

۹) $۲\cdot\left(\frac{-۵x^۲}{۶}+۱\frac{۲}{۳}xy+\frac{۷}{۴}y^۲\right)+۳\cdot\left(\frac{۵x^۲}{۱۲}-\frac{۴xy}{۳}+\frac{۴y^۲}{۳}\right)+$
$+\frac{۵}{۱۲}(x^۲-۳y^۲);$

۱۰) $۶\frac{۱}{۴}\left(\frac{۳}{۵}a-\frac{۲}{۳}a+\frac{۱}{۳}a\right)(۰/۳۷ab^۲-۰/۵۳ab^۲)+$
$+۴b\left(\frac{ab^۲}{۳}-\frac{b^۲a}{۵}\right);$

۱۱) $\left(\frac{۴}{۵}x-\frac{۳}{۷}y\right)(x+۲y)-(x-۲y)\left(\frac{۳y}{۷}-\frac{۴x}{۵}\right);$

۱۲) $۳x^۲+۴y^۲+۲x(x+y)-y(۳y-۴x)+(x-y)^۲;$

۱۳) $(a-۲b)(۲b+۳a)+(a+۴b)(b-۲a)+۲(a-b)^۲;$

۱۴) $۲(x+y)(۳x+۲y)-۴(x-y)(x+y)-۲x(x-y);$

۱۵) $۴ab(c-a)-۳c(a^۲-b)+۴a(b^۲-ac)-$
$-(b-a)(۴ba-c);$

۱۶) $(a^۲+b^۲-ab)(a^۲+ab+b^۲)-(a^۲+b^۲)^۲;$

۱۷) $(x+۲a)(x^۲-xa+۲a^۲)-(x-a)^۳;$

۱۸) $۴x(a-x)-۲(a+x^{۲})-(۳x+a)(a-۲x)$;

۱۹) $x^{۲}(۱۱x-۲)+x^{۲}(x-۱)-۳x(۴x^{۲}-۲-x)$;

۲۰) $(۲x+۳y)(۴y-۳x)-۲(x+y)(۴x-x^{۲}-y)$;

۲۱) $(a-b)(a^{۲}+b^{۲})+۲(a-b)(a^{۲}+ab+b^{۲})-۳a(a^{۲}-b^{۲})$;

۲۲) $(۱/۴x^{۲}+۲/۲۴xy-۱/۵y^{۲})(x+y)-$

$-(۲x-y)\left(۱\frac{۱}{۲}y^{۲}-۱۰\frac{۳}{۴}x^{۲}\right)$;

۲۳) $b(۳a^{۲}-۱۳b)+(a-b)(۳a^{۲}-۶b^{۲})+۲(a+b)(ab-a^{۲})$

۴. ازدستورهای «ضرب‌ساده» برای انجام این ضرب‌ها استفاده کنید:

۱) $(۱+۳m)(۱-۳m)$; ۲) $(۲x+۱)(۲x-۱)$;

۳) $(۲x-۳y)(۳y+۲x)$; ۴) $(۳-۴ab)(۴ab+۳)$;

۵) $(۲+bx^{۲})(bx^{۲}-۲)$; ۶) $(۲c+bx^{۴})(bx^{۴}-۲c)$;

۷) $(۲y^{۳}-۵x^{۲})(۲y^{۳}+۵x^{۲})$; ۸) $\left(۵ax^{۳}-\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۳}+۵ax^{۳}\right)$;

۹) $(a^{۳}x-ax^{۳})(ax^{۳}+a^{۳}x)$; ۱۰) $\left(۴-\frac{a^{n-۲}}{۳}\right)\left(۴+\frac{a^{n-۲}}{۳}\right)$;

۱۱) $(a^{p}-b^{k})(a^{p}+b^{k})$; ۱۲) $\left(\frac{x^{۲}p}{۶}-۳y^{k}\right)\left(\frac{x^{۲}p}{۶}+۳y^{k}\right)$;

۱۳) $(x+y)(x^{۲}-xy)$; ۱۴) $(x-y)(x+y)(x^{۲}+y^{۲})$;

۱۵) $(a+۲b)(a-۲b)(a^{۲}+۴b^{۲})$;

۱۶) $(۲+x)(۲-x)(۴+x^{۲})$; ۱۷) $(a+c-b)(a+c+b)$;

۱۸) $(xy+x^{۲}+y^{۲})(xy-x^{۲}-y^{۲})$;

۱۹) $(a-b+c)(a-b-c)$; ۲۰) $(x+۳z-y)(x-y-۳z)$;

۲۱) $(۱+a)(۱-a)(۱+a^{۲})(۱+a^{۴})$;

۲۲) $(a+۱)(a+۲)(a^{۲}+۴)(a-۱)(a^{۲}+۱)(a-۲)$;

۲۳) $(a+۲b-۳c-d)(a+۲b+d+۳c)$;

۲۴) $(۲+a^{۲}+۳a^{۳}+d)(۲-a^{۲}+۳a^{۳}-d^{۲})$;

۲۵) $(۱-x-۲x^{۳}+۳x^{۲})(۱-x+۲x^{۳}-۳x^{۲})$;

۲۶) $(d-۵)(d^{۲}+۵d+۲۵)$; ۲۷) $(m+۲a)(m^{۲}-۲am+۴a^{۲})$;

۲۸) $(۹m^{۲}+۳am+a^{۲})(۳m-a)$;

۲۹) $(۱۶m^{۲}+۴m^{۲}y^{۲}+y^{۴})(۴m-y^{۲})$;

۳۰) $(a^{۶}-۳a^{۳}+۹)(a^{۳}+۳)$;

۳۱) $(a^{۲}-۱)(a^{۲}-a+۱)(a^{۲}+a+۱)$;

۳۲) $(x^{۳}y^{۳}+x^{۶}+y^{۶})(x^{۳}y^{۳}-x^{۶}-y^{۶})$;

۳۳) $(x^{۲}-xy)(x^{۲}+xy+y^{۲})(x^{۲}-xy+y^{۲})(x+y)$;

۳۴) $(۴+۲a+a^{۲})(۴-a^{۲})(۴-۲a+a^{۲})$;

۳۵) $(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(x-y-z)$;

۳۶) $(x-a)^{۲}(x+a)^{۲}$; ۳۷) $(a+b)^{۲}(a-b)^{۳}$;

۳۸) $(m^{۲}+mn+n^{۲})(m^{۲}-mn+n^{۲})(m^{۴}+۳m^{۲}n^{۲}+n^{۴})$;

۳۹) $(b^{۲}-b+۱)(b^{۲}+b+۱)(b^{۴}+b^{۲}+۱)$;

۴۰) $(m^{۲}+۲m+۱)(m^{۲}-۲m+۱)(m^{۴}-۲m^{۲}+۱)$;

۴۱) $(y-۵k)(y^{۲}+۵ky+۲۵k^{۲})(۱۲۵k^{۳}+y^{۳})$;

۴۲) $(x^{۲n}+x^{n}y^{n}+y^{۲n})(x^{n}-y^{n})(y^{۳n}+x^{۳n})$

۵. به‌صورت مربع یا مکعب يك چندجمله‌ای بنویسید:

۱) $a^{۲}+۲ax^{۲}+x^{۴}$; ۵) $k^{۱۰}-۱۰k^{۵}l^{۸}+۲۵l^{۱۶}$;

۲) $a^{۴}-۲a^{۲}x+x^{۲}$; ۶) $m^{۶}+۶m^{۳}y^{۴}+۹y^{۸}$;

۳) $x^{۲}-۸xy+۱۶y^{۲}$; ۷) $۸۱m^{۶}-۹۰m^{۳}p^{۲}n+۲۵p^{۴}n^{۲}$;

۴) $۲۵m^{۲}+۳۰mn+۹n^{۲}$; ۸) $۱۶a^{۲}+۲۴a^{۳}+۹a^{۴}$;

۹) $۴x^{۲}+۹y^{۲}+۲۵z^{۲}+۱۲xy-۳۰yz-۲۰zx$;

۱۰) $۹m^{۲}+۴n^{۲}+p^{۲}-۱۲mn+۶mp-۴np$;

۱۱) $\frac{x^{۴}}{۴}+۱۶y^{۲}+\frac{۴y^{۴}}{۹}-۴x^{۲}y+\frac{۲x^{۲}y^{۲}}{۳}-\frac{۱۶y^{۳}}{۳}$;

۱۲) $u^{۲}+v^{۲}+w^{۲}+p^{۲}+۲uv+۲uw+۲up+۲vw+۲pv+۲pw$;

۱۳) $u^{۲}+x^{۲}+y^{۲}+p^{۲}-۲ux+۲uy-۲up-۲xy+۲xp-۲py$;

۱۴) $x^{۳}+۶x^{۲}y+۱۲xy^{۲}+۸y^{۳}$; ۱۵) $۱۲۵+۷۵a+۱۵a^{۲}+a^{۳}$;

۱۶) $x^{۱۲}-۳x^{۸}y^{۲}+۳x^{۴}y^{۴}-y^{۶}$;

۱۷) $۲۷p^{۳}-۲۷p^{۲}y+۹py^{۲}-y^{۳}$;

۱۸) $۸x^{۳}+۶۰x^{۲}z+۱۵۰xz^{۲}+۱۲۵z^{۳}$;

۱۹) $۶۴x^{۱۵}-۱۴۴x^{۱۰}y^{۳}+۱۰۸y^{۶}x^{۵}-۲۷y^{۹}$;

۲۰) $$x^{۳}+y^{۳}+۳x^{۲}y+۳xy^{۲}+۳x^{۲}+۶xy+$$
$$+۳y^{۲}+۳x+۳y+۱;$$

۲۱) $$x^{۳}-y^{۳}-۳x^{۲}y+۳xy^{۲}+$$
$$+۱۲xy-۶x^{۲}-۶y^{۲}+۱۲x-۱۲y-۸$$

۶. درستی این اتحادها را ثابت کنید:

۱) $(m+n)^{۲}-(m-n)^{۲}=۴mn$;

۲) $(b-a)^{۲}-(b-a)(a+b)=۲a(a-b)$;

۳) $(ab-۱)^{۲}+(a+b)^{۲}=(a^{۲}+۱)(b^{۲}+۱)$;

۴) $(۱-m)(۱-m^{۲})+m(m+۱)=m^{۲}+۱$;

۵) $a(a-b)(a+b)-(a+b)(a^{۲}-ab+b^{۲})=-b^{۲}(a+b)$;

۶) $(a^{۲}+b^{۲})(c^{۲}+d^{۲})=(ac-bd)^{۲}+(bc+ad)^{۲}$;

۷) $(b-۱)(b-۲)(۱+b+b^{۲})(۴+۲b+b^{۲})=b^{۶}-۹b^{۳}+۸$;

۸) $(x^{۳}+y^{۳})^{۲}-(x^{۲}+y^{۲})^{۳}+۳x^{۲}y^{۲}(x+y)^{۲}=(۲xy)^{۳}$;

۹) $(a-۳b)^{۳}-(۲a-۳b)(۳ab+(a-۳b)^{۲})=-a^{۳}$;

۱۰) $$(a+b+ab+۲)^{۲}+(a+۲-ab-b)^{۲}=$$
$$=۲(a+۲)^{۲}+۲b^{۲}(a+۱)^{۲};$$

۱۱) $$x(y+z)^{۲}+y(x+z)^{۲}+z(x+y)^{۲}-۴xyz=$$
$$=(x+z)(x+y)(y+z);$$

۱۲) $$a^{۳}+b^{۳}-c^{۳}+۳abc=$$
$$=(a+b-c)(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}-ab+bc+ac);$$

۱۳) $a^{۲}(b-c)+c^{۲}(a-b)+b^{۲}(c-a)=(a-c)(b-a)(c-b)$

۱۴) $$a^{۳}(c-b)+b^{۳}(a-c)+c^{۳}(b-a)=$$
$$=(a-c)(a-b)(c-b)(a+b+c);$$

۱۵) $(ab+ac+bc)(a+b+c)-abc=(a+b)(a+c)(b+c);$

۱۶) $(x+y+z)^۳-x^۳-y^۳-z^۳=۳(x+y)(x+z)(y+z);$

۱۷) $$y^۳(a-x)-x^۳(a-y)+a^۳(x-y)=$$
$$=(x-y)(x-a)(y-a)(x+y+a);$$

۱۸) $$x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱=$$
$$=(x+۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱);$$

۱۹) $$(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)^۲-x^۵=$$
$$=(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴)(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴+x^۵+x^۶);$$

۲۰) $$x^۳-(a+b+c)x^۲+(ab+ac+bc)x-abc=$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c);$$

۲۱) $$x^۴-(\alpha+\beta+\gamma+\rho)x^۳+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\rho+\beta\gamma+\beta\rho+$$
$$+\gamma\rho)x^۲-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\rho+\alpha\gamma\rho+\beta\gamma\rho)x+\alpha\beta\gamma\rho=$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\rho)$$

۷. محاسبه کنید:

۱) $۴۷\cdot۳۳;$ ۲) $۶۲\cdot۵۸;$ ۳) $۱۰/۲^۲-۹/۸^۲;$ ۴) $۹۸۱^۲-۱۹^۲;$

۵) $۴۷^۲+۲\cdot۴۷\cdot۱۳+۱۳^۲;$ ۶) $۳۲۳^۲-۷۷^۲;$ ۷) $۲۰۸\cdot۱۹۲;$

۸) $\dfrac{۱۲۴^۲-۱۴۴}{۲۳۹^۲-۱};$ ۹) $\dfrac{۱۰۶^۲-۱۲۱}{۱۲۲^۲-۶۴};$ ۱۰) $\dfrac{۳۸^۲-۱۷^۲}{۴۷^۲-۱۹^۲};$

۱۱) $\dfrac{۵۳^۲-۲۷^۲}{۷۹^۲-۵۱^۲};$ ۱۲) $\dfrac{۷۷^۳-۶۹^۳}{۷۰^۲-۶۲^۲}-\dfrac{۷۷^۳+۴۱^۳}{۱۲۵^۲-۴۹}-\dfrac{۱}{۲};$

۱۳) $\dfrac{۵۹^۳-۴۱^۳}{۱۸}+۵۹\cdot۴۱;$ ۱۴) $۲۰۲^۲-۵۴^۲+۲۵۶\cdot۳۵۲;$

۱۵) $۵۰۷\cdot۴۹۳-۵۰۵\cdot۴۹۵;$ ۱۶) $۸۷^۲-۲\cdot۸۷\cdot۶۷+۶۷^۲$

۸. این بخش‌پذیری‌ها را ثابت کنید:

۱) $۱۰^{۵۷}-۱$ بر ۳؛ ۲) $۳۱۳\times۲۹۹-۳۱۳^۲$ بر ۷؛

۳) $۲^{۵۵}+۱$ بر ۳۳؛ ۴) $۱۱^{۱۰۰}-۱$ بر ۱۰۰؛

۵) $۱۰^۶-۵^۷$ بر ۵۹؛ ۶) $۷۹^۳-۲۹^۳$ بر ۵۰؛

۷) $۵۴^۳-۲۴^۳$ بر ۱۰۸۰؛ ۸) $۲۲۸^۳+۱۷۲^۳$ بر ۲۰۰۰؛
۹) $۷۳۱^۳-۶۱۱^۳$ بر ۱۲۰؛ ۱۰) $۴۷۱۹^۳-۲۷۳۴^۳$ بر ۱۹۸۵.

۹. ثابت کنید، به‌ازای هرمقدار طبیعی n بخش‌پذیر است:

۱) $(۳n-۱)+(۲n+۱)$ بر ۵؛ ۲) $n^۵-n$ بر ۱۰؛
۳) $۲n^۳+۳n^۲+۷n$ بر ۶؛ ۴) $n^۴+۳n^۳-n^۲-۳n$ بر ۶؛
۵) $n^۴+۲n^۳+۳n^۲+۲n$ بر ۸؛ ۶) $n(n+۵)-(n-۳)(n+۲)$ بر ۶؛
۷) $(۲n-۱)^۳-(۲n-۱)$ بر ۲۴؛
۸) $۳^{n+۲}-۲^{n+۲}+۳^n-۲^n$ بر ۱۰؛
۹) $۲۵n^۴-۲n^۳-n^۲+۲n$ بر ۲۴؛
۱۰) $(۷n+۳)^۲-(۳-n)^۲$ بر ۹۶؛
۱۱) $۳^{n+۳}+۵^{n+۳}+۳^{n+۱}+۵^{n+۲}$ بر ۶۰.

۱۰. مجذور کامل را جدا کنید ونشان دهید، چندجمله‌ای بـه‌ازای هر مقدار عددی حرف‌ها، غیرمنفی است:

۱) $a^۲+۲a+۳;$ ۳) $۱۶a^۲b^۴-۸ab^۲+۲;$
۲) $x^۲m^۲-۶mx^۲+۹x^۲;$ ۴) $۹x^۲-۱۲xy^۴+۱۲y^۸;$
۵) $۴x^۲+۹y^۲+۴x+۶y+۲;$
۶) $a^۲b^۴+۲ab^۲+x^۲+۲xy+y^۲+۵;$
۷) $m^۴-۴m^۲n^۲+۴n^۴+۲m^۲-۴n^۲+۱;$
۸) $(a+b)^۲+۶a+۶b+۱۰;$

۱۱. این چندجمله‌ای‌ها را به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $۲a-۲b;$ ۲) $ab+bc;$ ۳) $۱۲x-۸xy;$
۴) $a^۲b^۲+b^۴;$ ۵) $p^۳-p^۲;$ ۶) $۴a^۸b-۲a^۴b^۲;$
۷) $۱۰ax-۲۵bx-۲۰x^۲;$ ۸) $۸a^۲b^۲x^۲-۴a^۳b^۳x^۳-۲a^۴b^۴x^۴;$
۹) $a^۲+a^۳-۲a^۲c;$ ۱۰) $۱۲a^۲c-۸a^۳c^۲-۴a^۴c;$
۱۱) $ax+bx-cx;$ ۱۲) $x(y+z)+u(z+y);$
۱۳) $a(b+۴)-b(۴+b);$ ۱۴) $y(a-۱)-(a-۱);$
۱۵) $a(x-y)-b(y-x);$ ۱۶) $۲+a^۲+۳a;$

۱۷) $a(x+y)+(x^{۲}-y^{۲});$ ۱۸) $x^{۲}(z-۵)+۵-z;$

۱۹) $x^{۲}-y^{۴};$ ۲۰) $۹p^{۲}-۲۵m^{۲};$ ۲۱) $ax-ay+۵x-۵y;$

۲۲) $x^{۲}y-z^{۲}x+y^{۲}x-yz^{۲};$ ۲۳) $b^{۴}+۴۱۱b-۴b^{۳};$

۲۴) $b^{۳}+b^{۲}c-b^{۲}d-bcd;$ ۲۵) $۸x^{۳}-y^{۳};$

۲۶) $c^{۳}d^{۳}-k^{۳};$ ۲۷) $c^{۶}+p^{۶};$ ۲۸) $x^{۳}+۶۴m^{۳}$

۱۲. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $۲a^{۲}+۴a+۲;$ ۲) $(a+b)^{۲}-(m-n)^{۲};$

۳) $y^{۲}-۱۰y+۲۵-۴m^{۲};$ ۴) $m^{۲}+n^{۲}+۲mn+۲m+۲n+۱;$

۵) $ax^{۲}-bx^{۲}-bx+ax+a-b;$ ۶) $d^{۳}-p^{۶}+(p^{۲}-d)d^{۲};$

۷) $۸x^{۴}-۸y^{۶}z^{۲}-x^{۲}+y^{۳}z;$ ۸) $۸۱a^{۸}-۱۶c^{۱۲}+۳a^{۲}+۲c^{۳};$

۹) $(a+b)^{۲}-c^{۲}+a+b+c;$

۱۰) $(a-b)^{۲}-(c+d)^{۲}-a+b-c-d;$

۱۱) $(m-n)^{۴}-p^{۴}-m+n-p;$

۱۲) $(x+y)^{۴}-z^{۴}-x-y+z;$ ۱۳) $(a+b)^{۳}-(a-b)^{۳}-۲b;$

۱۴) $(a+b)^{۳}+(a-b)^{۳}-۲a;$

۱۵) $(b^{۲}-by)^{۴}-(b^{۲}+by)^{۴}-۲b^{۲};$

۱۶) $(x^{۲}+bc)^{۳}-۸b^{۳}c^{۳}-x^{۲}+bc;$ ۱۷) $۲-b^{۳}y^{۳}-by;$

۱۸) $(a-b)^{۳}-(c+d)^{۳}-a+b+c+d;$

۱۹) $۹a-۳ax+ax^{۲}-۲۷x^{۳};$ ۲۰) $a^{۳}+b^{۳}+a^{۲}-b^{۲};$

۲۱) $a^{۳}-x^{۳}+۲x-۲a;$ ۲۲) $x^{۳}-۸+(x+۲)^{۲}-۲x;$

۲۳) $۳x^{۳}-۳y^{۳}+۵x^{۲}-۵y^{۲}$

۱۳. ثابت کنید، چندجمله‌ای بـه‌ازای هرمقدار عددی حرف‌ها همیشه غیرمنفی است:

۱) $x^{۲}+y^{۲}-۲xy+x-y+۱;$

۲) $۲x^{۲}+۵y^{۲}+۳z^{۲}-۶xy-۲xz+۵yz;$

۳) $۸x^{۲}+y^{۲}+۱۱z^{۲}+۴xy-۱۲xz-۵yz;$

۴) $۵x^{۲}+۵y^{۲}+۵z^{۲}+۶xy-۸xz-۸yz$

۵) $۳a^۲+۳b^۲+۳c^۲-۲ab-۲ac-۲bc;$

۶) $x^۴+x^۳+y^۲+x^۲+y+x+۲;$

۷) $a^۴+b^۴+a^۲b^۲+x^۲-xy+y^۲+۱;$

۸) $x^۴+۲x^۲a+a^۲+۲x^۲+۲a+۱;$

۹) $(x+a)(x+۲a)(x+۳a)(x+۴a)+a^۴;$

۱۰) $(x^۲-xy+y^۲)^۳+(x^۲+xy+y^۲)^۳;$

۱۱) $a^۶+۲a^۵x+۹x^۴x^۲+۱۶a^۳x^۳+۲۴a^۲x^۴+۳۲ax^۵+۱۶x^۶;$

۱۲) $a^۶b^۴+۴a^۳b^۲c+۴c^۲+x^۲+x+۲;$

۱۳) $۴x^۲+۴xy+۴y^۲-۶y+۴;$

۱۴) $۲x^۲+۴xa+۸xc+۱۲a^۲+۱۶c^۲+۱;$

۱۵) $۲x^۲-۲xy-۴xa+y^۲+۲a^۲+۲$

۱۴. عددی طبیعی در تقسیم بر ۸، به باقی‌ماندهٔ ۷ رسیده است. ثابت کنید، مکعب این عدد هم، در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر ۷ به‌دست می‌دهد.

۱۵. در تقسیم عددی طبیعی بر ۵، باقی‌مانده‌ای برابر ۴ به‌دست آمده است. ثابت کنید، عددی که از مجموع مکعب و مجذور این عدد به‌دست می‌آید، بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۶. عددی طبیعی در تقسیم بر ۷ به باقی‌مانده ۲ و عدد طبیعی دیگری در تقسیم بر ۷ به باقی‌ماندهٔ ۳ رسیده است. ثابت کنید مجموع مکعب‌های این دو عدد بر ۷ بخش‌پذیر است.

۱۷. دو عدد طبیعی را بر ۵ تقسیم کرده‌ایم، به ترتیب، باقی‌مانده‌های ۱ و ۲ به‌دست آمده است. ثابت کنید، مجموع مجذورهای این دو عدد، بر ۵ بخش‌پذیر است.

۱۸. عددهای n و m را بر ۱۲ تقسیم کرده‌ایم، به‌ترتیب، به باقی‌مانده‌های ۵ و ۷ رسیده‌ایم. ثابت کنید: باقی‌ماندهٔ تقسیم حاصل‌ضرب n و m بر ۱۲، برابر است با ۱۱.

۱۹. عددی طبیعی در تقسیم بر ۱۱، به باقی‌ماندهٔ ۴ رسیده است. ثابت کنید، مجذور این عدد، در تقسیم بر ۱۱، باقی‌مانده‌ای برابر ۵ می‌دهد.

۲۰. باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۹، برابر ۳ شده‌است. ثابت کنید، مجذور این عدد، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲۱. در تقسیم عددی طبیعی بر ۵، باقی‌ماندهٔ ۲ به‌دست آمده است. ثابت کنید، از تقسیم مکعب این عدد بر ۵، به باقی‌ماندهٔ ۳ می‌رسیم.

۲۲. از تقسیم عددی طبیعی بر ۴، باقی‌ماندهٔ ۳ به‌دست آمده است. ثابت کنید، از مجموع مکعب و مجذور این عدد، عددی بخش‌پذیر بر ۴ به‌دست می‌آید.

۲۳. ثابت کنید، عدد $\overline{aabb}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۲۴. ثابت کنید، مجذور یک عدد فرد، در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ای برابر واحد دارد.

۲۵. به‌صورت چندجمله‌ای بنویسید:

۱) $\overline{abc}-\overline{bc}+a$; ۲) $(\overline{ab})^{۲}-۲\overline{ab}+۱$;

۳) $(\overline{ab})^{۳}-(\overline{ab})^{۲}-\overline{ab}$; ۴) $۲\overline{ab}-۳\overline{ba}+۳(\overline{ab})^{۲}$;

۵) $۴(\overline{ab})^{۲}+۴\overline{ab}+۱$; ۶) $\overline{ba}+۳a+۴b-۶\overline{ab}$;

۷) $(\overline{ab})^{۲}-(\overline{ba})^{۲}$; ۸) $۲\overline{ab}-(\overline{bc})^{۲}+۴(ba)$

۲۶. این بخش‌پذیری‌ها را ثابت کنید:

۱) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}$ بر ۳ و ۳۷؛ ۲) $\overline{aaa}$ بر ۳۷؛

۳) $\overline{abc}-\overline{cba}$ بر ۹؛ ۴) $۱۹^{۶۹}+۶۹^{۶۹}$ بر ۴۴؛

۵) $۳^{۱۰۵}+۴^{۱۰۵}$ بر ۱۸۱ و ۴۹؛ ۶) $۲^{۶۰}+۷^{۳۰}$ بر ۱۳؛

۷) $(۳۲۹۹^{۵}+۶)^{۱۸}-۱$ بر ۱۱۲؛ ۸) $۲۰^{۱۵}-۱$ بر $۶۱\times۳۱\times۱۱$.

پاسخ و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱

۱. ۱)، ۲)، ۴)، ۵)، ۶)؛ **۲.** ۱) $۲a^{۲}b$; ۲) $\frac{۲۴}{۷}a^{۲}b^{۲}$;

۳) $-\frac{۱}{۲}x^{۳}p^{۵}q$; ۴) $-۶x^{۵}y^{۳}$; ۵) $-۲p^{۳}q^{۳}x^{۴}$; ۶) $-a^{۶}b^{۳}$;

۷) $-۲a^۵bc^۵$; ۸) $-۶k^۶x^۳a$; ۹) $۶d^۳y^۸$. ۳. ۱) $۲a^۳b^۲c^۴$;
۲) $a^۵b^۵c$; ۳) $\frac{۲}{۳}c^۷d^۶$; ۴) $a^۹b^۷c^۹$. ۴. ۱) $k^۶n^۳b^۹p^۳$;
۲) $a^۴b^۴c^۴$; ۳) $a^۶p^۹q^{۱۲}$; ۴) $a^{۱۴}b^۲c^۶$. ۵. ۱) $۳a^۲b$;
۲) $۰/۲x^۲y^۲$; ۳) $۹/۱abx+۴x$; ۴) $۱۰kl^۲-۳xy$; ۵) $\frac{۲۵}{۶}ab^۲c^۳$.
۶. ۱) $۵x-۵$; ۲) $۳a-۲b+۴c$; ۳) $-۷x+۷y$;
۴) $۵b-۲c+۲d$; ۵) $۶m-۳mn$. ۷. ۱) $x^۳+۷x$، $-۵x^۳+۲xy^۲-x$; ۲) $-۳ab+b^۲$، $-۲a^۲+ab-۵b^۲$;
۳) $-\frac{۴}{۳}a-b$، $-\frac{۱۱}{۳}b$; ۴) $۷a^۲+ab-b^۲$، $a^۲$، $a^۲+۳ab-۳b^۲$;
۵) $۲y$، $۴y-۲z$. ۸. ۱) $۴a+۲b-۲c$; ۲) $۶ab-۳ac$;
۳) $x^۲-\frac{۳}{۲}xy-y^۲$; ۴) $\frac{۱}{۳}a^۲b^۲-\frac{۱}{۳}abx^۲y+\frac{۴}{۳}abx-x^۳y+x^۲$;
۵) $-۲a^۴+۵a^۳-۴a^۲+a$.

تکلیف ۲.

۱. ۲)، ۳)، ۵)، ۶). ۲. ۱) $-۲x^۳y^۲$; ۲) $۶a^۳b^۳x^۵$;
۳) $۴p^{۱۲}q^۸$; ۴) $-\frac{۳}{۲}a^۹b^۹$; ۵) $-\frac{۳۵}{۱۲}c^۳d^۲(cd\neq ۰)$;
۶) $\frac{۱}{۶۴}a^{۱۲}b^۶$; ۳. ۱) $\frac{۱}{۲}a^۵b^۵x^۳$; ۲) $۷۲a^۶b^۲c^۵$; ۳) $-\frac{۳}{۲}a^۶b^۵c^۲$;
۴) $-۲۰a^۷b^۸c^۸$. ۴. ۱) $\frac{۱}{۴}c^۲b^۲x^۴$; ۲) $-۸c^۳p^۶q^۶l^۹$;
۳) $m^{۱۰}n^{۱۰}$; ۴) $\frac{۱}{۱۰^۶}a^{۱۵}b^{۱۲}c^۶$. ۵. ۱) $\frac{۱}{۳}a^۲bc-\frac{۷}{۲}a^۲b$;
۲) $۳ab-\frac{۳}{۲}bc^۲-۲cb^۲$; ۳) $۲x-\frac{۳۷}{۱۵}mn^۲$; ۴) $-\frac{۱۷}{۱۵}a^۲bc+۴$;
۵) $\frac{۴}{۹}a^۲c^۴+\frac{۱}{۶۰}ac^۴$. ۶. ۱) $۲c-۵a^۲$; ۲) $-a-b+۲d$;

۳) $۴a-۲b+۳c-۲d$;   ۴) $۳m-۴$.   ۷. ۱) $۲ab-۱$، $-۲a+۳$;   ۲) $۴a^۲b-۲ab$، $۲a^۲b+۲ab-۶ac$;
۳) $-\frac{ax}{۲}-۱۷$، $-\frac{۹ax}{۲}+۳$;   ۴) $۲y-۲x$، $-۲y$;   ۵) $۲a$، $-۴b+۲c-۲a$.   ۸. ۱) $-۲۴x^۲+۴۰x-۶$;
۲) $a^۳b-ab^۳-۲ab^۲c-abc^۲$;   ۳) $\frac{۲}{۳}a^۲b-\frac{۱}{۳}ab^۲$;
۴) $p^۲+b^۲+۲pb-۲ab-۲ap$;   ۵) $x^۶-۱$.

تکلیف ۳.

۱. ۱) $۸y^۳$;   ۲) $x^۲+ax-۲a$;   ۳) $۶p^۵+۵۴p^۴+۹p^۲$;
۴) $-۲x^۵+۲x+۲$;   ۵) $۲x^۲-۴xy+۴yz-۲z^۲$;
۶) $-۴x^۳-۳۶x^۲-۱۰۴x-۹۶$.   ۲. ۱) $y^۲-۹$; ۲) $m^۲-n^۲$;
۳) $۹a^۲b^۲-۱$;   ۴) $a^۴-x^۴$;   ۵) $m^۳+n^۳$;   ۶) $-a^۳+۸$;
۷) $-۸xy$;   ۸) $۲a^۴+۲b^۴$;   ۹) $-۱۸a^۲-۵۴$;
۱۰) $۴bc-۴ac$;   ۱۱) $۱۲axy-۶a^۲x-۶xy^۲-۲x^۳$;
۱۲) $۱-x^۶$.   ۳. ۱) $(p+q)^۲$;   ۲) $(۲m-n)^۲$;   ۳) $(p^۲-۳q)^۲$;
۴) $(a^۳+b^۳)^۲$;   ۵) $(a+۱)^۳$;   ۶) $(a-۱)^۳$;   ۷) $(۲-m)^۳$;
۸) $(۱+۲a)^۳$;   ۹) $(۲p-۳q)^۳$;   ۱۰) $(xy+۲)^۳$.   ۴. ۱) ۱۶۸۱;
۲) ۱۵۲۱;   ۳) ۲۹۷۹۱;   ۴) ۲۴۳۸۹;   ۵) ۶۰۰;   ۶) ۲۴۳۶;
۷) ۱;   ۸) ۵;   ۹) ۱۶;   ۱۰) ۲۵;   ۱۱) $\frac{۲}{۳}$;   ۱۲) ۴۸۴.

۵. راهنمایی‌ها: ۱) $۸^۵+۲^{۱۱}=۲^{۱۱}.۱۷$;   ۲) $۶۹^۲-۶۹.۵=$
$=۶۹(۶۹-۵)$;   ۳) $۳۲۸^۳+۱۷۲^۳=۲۰۰۰.۴(۸۱^۲+۸۱.۴۳+۴۳^۲)$
۴) $۱۹^{۱۹}+۶۹^{۱۹}=۸۸(۱۹^{۱۸}-۱۹^{۱۷}\times ۶۹+\ldots+۶۹^{۱۸})$.

تکلیف ۴.

۱. ۱) $-y-۱۷$;   ۲) $a^۲-۴۸a+۲b-۲۶$;   ۳) ۰;
۴) $۳a^۲+۲ab+۴ac+c^۲-b^۲$;   ۵) $۷y^۲-۲xy-۲۴x^۲-$

$-۱۲x-۷y$; ۶) $۸a^۳+۸a^۲+۴a+۱$;

۷) $۲۴x^{۲m-۲n+۲}y^{۶-۳n}-\frac{۲۴}{۷}x^{۳-۲n}y+۸x^{۳+۲m-۲n}y^۶-$
$-۲۴x^{۳-۲n}y^{۸-۳n}$. **۲.** ۱) $-۸xy^۲$; ۲) $۲/۲۵x^۲y^۲-۱/۵xy^۲+$
$+۰/۲۵y^۲$; ۳) $۱۶x^۴-۱$; ۴) $۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲-۴bc$;
۵) $۸m^۳-n^۳$; ۶) $a^۲-b^۲-۲bc-c^۲$; ۷) $x^۳+۸y^۳$;
۸) $۶۴-x^۶$; ۹) $۸ab-۴ac$; ۱۰) $-۶x^۲y-۲y^۳$;
۱۱) $\frac{۱}{۴}b^۳+۳by^۲$; ۱۲) $-۲b^۳-۶a^۲b-۶bc^۲-۱۲abc$;
۱۳) $۱۶x^۴$; ۱۴) $۵۱۲x^۳y+۹۶xy+۳۲xy^۳-۹۶xy^۲-$
$-۵۱۲x^۳-۳۲x$; ۱۵) $۱۶۰x+۸۰x^۳+۲x^۵$; ۱۶) $a^۴+۴a^۳+$
$+۶a^۲+۴a+۱-۴a^۳b-۱۲a^۲b+۱۲ab-۴b+۶a^۲b^۲+$
$+۱۲ab^۲+۶b^۲-۴ab^۳-۴b^۳+b^۴$. **۳.** ۱) $(x+y)^۲$;
۲) $(z-m)^۲$; ۳) $(۲x-۱)^۲$; ۴) $(xy-۲cd)^۲$; ۵) $(x+۱)^۳$;
۶) $(۳y+\sqrt{۲})^۳$; ۷) $(۱-۲y)^۳$; ۸) $(\sqrt{۳}-y)^۳$;
۹) $(x+y+۱)^۲$; ۱۰) $(x-y-۴)^۲$; ۱۱) $(a-b+c+۱)^۲$;
۱۲) $(a+b+d+f)^۲$. **۴.** ۱) ۱۰۲۴; ۲) ۱۴۴۴; ۳) ۶۸۹۲۱;
۴) ۹۲۶۱; ۵) ۶۸۵۹; ۶) ۶۳۶۰۰; ۷) ۲۴۵۱; ۸) $\frac{۱}{۲}$;
۹) -۸; ۱۰) ۲۲۵; ۱۱) ۰/۲۱; ۱۲) $۷۵\sqrt{۱۳}$; ۱۳) $۳۵\sqrt{۳}$.
۵. راهنمایی‌ها: ۱) $۸^۷-۲^{۱۸}=۲^{۱۷}(۱۶-۲)$; ۲) $۷۹^۲+۷۹.۱۱=$
$=۷۹.۹۰$; ۳) $۴۱^۳+۱۹^۳=۶۰.(۴۱^۲-۴۱.۱۹+۱۹^۲)$; ۴) $۳۶^{۸۱}+$
$+۱۰.۳^{۸۱}=۳^{۸۱}.((۱۲^{۸۱}-۱)+۱۱)$.

تکلیف ۵.

۱. ۱) $(y+۳)^۲+۱$; ۲) $\left(xy-\frac{۵}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}$;
۳) $(x+y)^۲+(x+۱)^۲$; ۴) $۳\left(xyz+\frac{۱}{۳}\right)^۲+\frac{۱۴}{۳}$;

۵) $۳\left(x+y+\frac{۱}{۳}\right)^۲+\frac{۲}{۳}$; ۶) $(۲z+y)^۲+(x-y)^۲+x^۲+y^۲+۳$.
۲. ۱) $۲(a+۳b)$; ۲) $ab(۱-ab)$; ۳) $(a+b)(۱+a-b)$;
۴) $(a-b)(a^۲+ab+b^۲+a+b)$; ۵) $(x^۲+۱)(x+۱)$;
۶) $(y-۲)(y-۳)$; ۷) $(x+۱)(xy+۲)(xy-۱)$;
۸) $(x-۳)(x+۲)(x-۱)$;
۹) $(a-b)^۲(a+(۱+\sqrt{۲})b)(a+(۱-\sqrt{۲})b)$;
۱۰) $(x-yz)(x+yz)(x^۲-xyz+y^۲z^۲)(x^۲+xyz+y^۲z^۲)$;
۱۱) $(u+۱)^۲(u^۲-u+۱)$; ۱۲) $(x^۲-\sqrt[۴]{۱۲}x+\sqrt{۳})\cdot(x^۲+$
$+\sqrt[۴]{۱۲}x+\sqrt{۳})$. **۳.** ۱) $(x^۲+x)^۲+(y^۲-۲y)^۲$;
۲) $(x+y-۱)^۲(x^۲y^۲+۱)$; ۳) $(a^۲+ab-ac-bc)^۲$;
۴) $(۱+a^۲)(۱+b^۲)(۱+c^۲)$. **۴.** $(۴k+۱)^۳+(۴n+۳)^۳=$
$=۴(k+n+۱)((۴k+۱)^۲+(۴k+۱)(۴n+۳)+(۴n+۳)^۲)$.
۵. $k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳=۳k^۳+۹k^۲+۱۵k+۹$.
۶. ۱) $۱۲m-۲n$; ۲) $۹۹a-۹۹c$; ۳) $۱۰۰a^۲+۲۰ab+$
$+b^۲-۱۰a-b$. **۷.** $\overline{ab}+\overline{ba}=۱۱(a+b)$.

تکلیف ۶.

۱. ۱) $(۲y-۱)^۲+۰/۱$; ۲) $۲\left(x-\frac{۱}{۲}\right)^۲+(y-۲)^۲+$
$+\frac{۱}{۲}$; ۳) $(ab^۲-۲)^۲$; ۴) $(x^۲+x+۱)^۲+۲$;
۵) $(x^۲+۳x+۱)^۲$; ۶) $\left(a^۲+\frac{a}{۲}\right)^۲+\frac{۷}{۴}\left(a+\frac{۲}{۷}\right)^۲+\frac{۶}{۷}$.
۲. ۱) $(a-b)(x^۲-x+۱)$; ۲) $(x-۳)(x-۴)$;
۳) $(x-۱)(x^۲-۲x+۲)$; ۴) $(x^۲+y^۲)(a^۲+b^۲-c^۲)$;
۵) $۴b(۳a^۲+۲b^۲)(\sqrt{۳}a+\sqrt{۲}b)(\sqrt{۳}a-\sqrt{۲}b)$;
۶) $(u-۱)^۲(u^۲+u+۱)$; ۷) $-۸ax(x^۲+a^۲)$; ۸) $(ac+bc+$

$+ad-bd)(ac-bd-bc-ad)$. ۳. ۱) $۲\left(xy-\frac{x+y}{۲}\right)^۲+$
$+\frac{۱}{۲}(x-y)^۲$; ۲) $(a-۱)^۲((a+۱)^۲+۱)\left(\left(a+\frac{۱}{۲}\right)^۲-\frac{۳}{۴}\right)$;
۳) $(۱+x^۲y^۲)(۱+x-y)^۲$; ۴) $\left(\left(a-\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}\right)\times$
$\times(x^۲-۱)^۲(x^۲+۱)(x^۴+۱)$. ۴. $(۱۳k+۱)^۳-(۱۳n+۳)^۳=$
$=۱۳(۱+۱۳(k^۲+n^۲+nk+۷n+k))\cdot(۱۳k-۱۳n-۲)$.
۵. $n^۲+(n+۱)^۲+(n+۲)^۲+۱=۳(n^۲+۲n+۲)$.
۶. ۱) $۹۹۹a+۹۹b+۹c+d$; ۲) $۱۰۰۰m^۳+۳۰۰m^۲n+$
$+۳۰mn^۲+n^۳-۱۰۰m^۲-۲۰mn-n^۲$; ۳) $۱۱۱a+۱۱۱b+$
$+۱۱۱c$. ۷. ۱) $\overline{ab}-\overline{ba}=۹(a-b)$; ۲) $\overline{abc}-\overline{cba}=$
$=۹۹(a-c)$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\frac{-۶}{۵}x^۴y^۴$; ۲) $۶a^۳b^۳x^۴$; ۳) $\frac{۳}{۴}p^{۱۴}q^۹$;
۴) $\frac{-۳}{۲}a^۹b^۹$; ۵) $\frac{-۳۵}{۱۲}c^۳d^۲$; ۶) $a^۶b^۶$; ۷) $\frac{-۱۳}{۲}a^۶m^۴n^۳$;
۸) $۸a^۳b^۷m^۳$; ۹) $-۶a^{۱۳}b^۲x^{۱۰}y^۴$; ۱۰) $\frac{-۳}{۸}a^۲x^۶y^۵$;
۱۱) $\frac{-۱۰}{۹}a^۴b^۴$; ۱۲) $\frac{۶}{۵}a^۶b^۵c^۵$; ۱۳) $\frac{۱}{۵}a^۳m^۳n^۴$.
۲. ۱) $۳a^۲+ab-۲b^۲$; ۲) $۲۰a^۴-۴۱a^۲b^۲+۲۰b^۴$;
۳) $۶a^۵-۷a^۴b-۱۱a^۳b^۲+۹a^۲b^۳-۵ab^۴$; ۴) $۲a^{۱۰}-۲a^۵b^۳+$
$+\frac{b^۶}{۲}-\frac{۱}{۲}$; ۵) $x^۴+x^۳+۲x^۲-x+۳$; ۶) $\frac{x^۶}{۱۶}-\frac{x^۴}{۹}+\frac{x^۳}{۳}-$
$-\frac{x^۲}{۴}$; ۷) $۱+\frac{۵}{۱۲}x^۲-\frac{۵}{۳۶}x^۴-\frac{۱}{۱۶}x^۶$; ۸) $۴-x^۲+۱۰x^۳-$

$-۹x^۴+x^۶$; ۹) $a^۴-b^۴-۲b^۲c^۲-c^۴$; ۱۰) $۲x^۴+۲x^۳y-$
$-۳x^۲y^۲+۸xy^۳-۳y^۴$. **۳.** ۱) $۴xy$; ۲) $-۱۲a^۲b-۱۶b^۳$;
۳) $۵+۲۰ax-۱۷a^۲-۱۴x^۲$; ۴) $-۲n^۳$; ۵) $۴ab-۲a^۲-۲b^۲$;
۶) $b-ax$; ۷) $۲۶+۱۳x-۶x^۲$; ۸) $-ax-۴a-۴a^۲$;
۹) $\frac{-۲xy}{۳}+\frac{۲۵y^۲}{۴}$; ۱۰) $\frac{۳۲ab^۲}{۵}-\frac{۴a^۲b^۲}{۱۵}$; ۱۱) $\frac{۸x^۲}{۵}-\frac{۶xy}{۷}$;
۱۲) $۶x^۲+۴xy+۲y^۲$; ۱۳) $۷a^۲-ab-۶b^۲$; ۱۴) $۱۲xy+$
$+۸y^۲$; ۱۵) $۴abc-۷a^۲c+۴bc-ac$; ۱۶) $-a^۲b^۲$;
۱۷) $۴x^۲a-۳xa^۲+۵a^۳$; ۱۸) $-ax-۳a^۲$; ۱۹) $۶x$;
۲۰) $۲x^۳-۱۴x^۲+۲yx^۲-۷xy+۱۴y^۲$; ۲۱) $-۳b^۳+$
$+۴ab^۲-a^۲b$; ۲۲) $۲۲/۹x^۳-۷/۱۱x^۲y-۲/۲۶xy^۲$;
۲۳) $a^۳-۴ab^۲-۱۳b^۲+۶b^۳$. **۴.** ۱) $۱-۹m^۲$; ۲) $۴x^۲-۱$;
۳) $۴x^۲-۹y^۲$; ۴) $۹-۱۶a^۲b^۲$; ۵) $b^۲x^۴-۴$; ۶) $b^۲x^۸-۴c^۲$;
۷) $۴y^۶-۲۵x^۴$; ۸) $۲۵a^۲x^۶-\frac{۱}{۹}$; ۹) $a^۶x^۲-a^۲x^۶$;
۱۰) $۱۶-\frac{a^{۲n-۴}}{۹}$; ۱۱) $a^{۲p}-b^{۲k}$; ۱۲) $\frac{x^{۴p}}{۳۶}-۹y^{۲k}$;
۱۳) $x^۳-xy^۲$; ۱۴) $x^۴-y^۴$; ۱۵) $a^۴-۱۶b^۴$; ۱۶) $۱۶-x^۴$;
۱۷) $a^۲+c^۲-b^۲+۲ac$; ۱۸) $-x^۴-y^۴-x^۲y^۲$;
۱۹) $a^۲+b^۲-c^۲-۲ab$; ۲۰) $x^۲-۲xy+y^۲-۹z^۲$;
۲۱) $۱-a^۸$; ۲۲) $a^۸-۱۷a^۴+۱۶$; ۲۳) $a^۲+۴ab+۴b^۲-$
$-۹c^۲-۶cd-d^۲$; ۲۴) $۴+۱۲a^۳+۹a^۶-a^۴-۲a^۲d^۲-d^۴$;
۲۵) $-۴x^۶+۱۲x^۵-۹x^۴+x^۲-۲x+۱$; ۲۶) $d^۳-۱۲۵$;
۲۷) $m^۳+۸a^۳$; ۲۸) $۲۷m^۳-a^۳$; ۲۹) $۶۴m^۳-y^۶$;
۳۰) $a^۹+۲۷$; ۳۱) $a^۶-۱$; ۳۲) $-x^{۱۲}-y^{۱۲}-x^۶y^۶$;
۳۳) $x^۷-xy^۶$; ۳۴) $۶۴-a^۶$; ۳۵) $x^۴+y^۴+z^۴-۲x^۲y^۲-$
$-۲x^۲z^۲-۲y^۲z^۲$; ۳۶) $x^۴-۲x^۲a^۲+a^۴$; ۳۷) $a^۵-۲a^۳b^۲+$
$+ab^۴-ba^۴+۲a^۲b^۳-b^۵$; ۳۸) $m^۸+n^۸+۴m^۲n^۶+$

$۴m^{۶}n^{۲}+۵m^{۴}n^{۴}$; ۳۹) $b^{۸}+b^{۴}+۱+۲b^{۶}+۲b^{۴}+۲b^{۲}$;
۴۰) $m^{۸}-۴m^{۶}+۶m^{۴}-۴m^{۲}+۱$; ۴۱) $y^{۶}-۱۵۷۲۵k^{۶}$;
۴۲) $x^{۶n}-y^{۶n}$. **۵۰** ۱) $(a+x^{۲})^{۲}$; ۲) $(a^{۲}-x)^{۲}$; ۳) $(x-۴y)^{۲}$;
۴) $(۵m+۳n)^{۲}$; ۵) $(k^{۵}-۵l^{۸})^{۲}$; ۶) $(m^{۳}+۳y^{۴})^{۲}$;
۷) $(۹m^{۳}-۵p^{۲}n)^{۲}$; ۸) $(۴a+۳a^{۲})^{۲}$; ۹) $(۲x+۳y-۵z)^{۲}$;
۱۰) $(۳m-۲n+p)^{۲}$; ۱۱) $\left(\frac{x^{۲}}{۲}-۴y+\frac{۲y^{۲}}{۳}\right)^{۲}$;
۱۲) $(u+v+w+p)^{۲}$; ۱۳) $(u-x+y-p)^{۲}$; ۱۴) $(x+۲y)^{۳}$;
۱۵) $(۵+a)^{۳}$; ۱۶) $(x^{۴}-y^{۲})^{۳}$; ۱۷) $(۳p-y)^{۳}$;
۱۸) $(۲x+۵z)^{۳}$; ۱۹) $(۴x^{۵}-۳y^{۳})^{۳}$; ۲۰) $(x+y+۱)^{۳}$;
۲۱) $(x-y-۲)^{۳}$. **۷۰** ۱) ۱۵۵۱; ۲) ۳۵۹۶; ۳) ۹۹/۹۶;
۴) ۹۶۲۰۰۰; ۵) ۳۶۰۰; ۶) ۹۸۴۰۰; ۷) ۳۹۹۳۶; ۸) $\frac{۴}{۱۵}$;
۹) $\frac{۳}{۴}$; ۱۰) $\frac{۵}{۸}$; ۱۱) $\frac{۴}{۷}$; ۱۲) ۸۷; ۱۳) $۱۰^{۴}$; ۱۴) ۱۲۸۰۰۰;
۱۵) -۲۴; ۱۶) ۴۰۰. **۸۰** راهنمایی‌ها: ۱) $۹(۱۰^{۶۴}+۱۰^{۶۳}+$
$+\dots+۱۰^{۲}+۱۰+۱)$; ۲) $-۲\cdot۷\cdot۳۱۳$; ۳) $۳۳(۳۲^{۱۰}-$
$-۳۲^{۹}+\dots+۳۲^{۲}-۳۲+۱)$; ۴) $۱۱^{۱۰۰}-۱=(۱۱-۱)\times$
$\times(۱۱^{۹۹}+\dots+۱)=۱۰(۱۰A+۱۰۰)$; ۵) $۵۹:۵^{۶}$;
۶) $۵۰(۷۹^{۲}+۷۹\cdot۲۹+۲۹^{۲})$; ۷) $۳۰\cdot۳۶(۷^{۲}+۷\cdot۴+۴^{۲})$;
۸) $۵۰۰\cdot۱۶(۸۲^{۲}+۸۲\cdot۴۳+۴۳^{۲})$; ۹) $۱۲۰(۷۳۱^{۲}+۷۳۱\cdot۶۱۱+$
$۶۱۱^{۲})$; ۱۰) $۱۹۸۵(۴۷۱۹^{۲}+۴۷۱۹\cdot۲۷۳۴+۲۷۳۴^{۲})$.
۹۰ راهنمایی‌ها: ۱) $۵(n+۲)$; ۲) $(n-۱)n(n+۱)(n^{۲}+۱)$;
۳) $n(n+۱)\times(۲n+۱)+۶n$; ۴) $(n-۱)(n+۱)(n+۳)$;
۵) $n(n-۱)n(n+۱)+۲(n-۱)n(n+۱)+۴n(n+۱)$;
۶) $۶(n+۱)$; ۷) $۸(n-۱)n(n+۱)-۱۲n(n-۱)$;
۸) $۱۰(۳^{n}-۲^{n-۱})$; ۹) $۲۴n^{۴}+n(n-۱)(n+۱)(n+۲)$;
۱۰) $۴۸n(n+۱)$; ۱۱) $۳۰(۳^{n}+۵^{n+۱})$.

۱۰. ۱) $(a+۱)^۲+۲$; ۲) $(xm-۳x^۲)$; ۳) $(۴ab^۲-۱)^۲+۱$;
۴) $(۳x-۲y^۴)^۲+۸y^۸$; ۵) $(۲x+۱)^۲+(۳y+۱)^۲$;
۶) $(ab^۲+۱)^۲+(x+y)^۲+۴$; ۷) $(m^۲۲n^۲+۱)^۲$;
۸) $(a+b+۳)^۲+۱۰$. **۱۱.** ۱) $۲(a-b)$; ۲) $b(a+c)$;
۳) $۴x(۳-۲y)$; ۴) $b^۲(a^۲+b^۲)$; ۵) $p^۲(p-۱)$;
۶) $۲a^۴b(۲a^۴-b)$; ۷) $۵x(۲a-۵b-۴x)$; ۸) $۲a^۲b^۲x^۲(۴-$
$-۴abx-a^۲b^۲x^۲)$; ۹) $a^۲(a-۲c+۱)$; ۱۰) $۴a^۲c(۳-$
$-۲ac-a^۲)$; ۱۱) $x(a+b-c)$; ۱۲) $(z+y)(x+u)$;
۱۳) $(b+۴)(a-b)$; ۱۴) $(a-۱)(y-۱)$; ۱۵) $(x-y)\times$
$\times(a+b)$; ۱۶) $(a+۲)(a+۱)$; ۱۷) $(x+y)(a+x-y)$;
۱۸) $(z-۵)(x-۱)(x+۱)$; ۱۹) $(x-y^۲)(x+y^۲)$;
۲۰) $(۳p-۵m)(۳p+۵m)$; ۲۱) $(x-y)(a+۵)$;
۲۲) $(x+y)(xy-z^۲)$; ۲۳) $(b-۴)(b-۱)(b^۲+b+۱)$;
۲۴) $b(b+c)(b-d)$; ۲۵) $(۲x-y)(۴x^۲+۲xy+y^۲)$;
۲۶) $(cd-k)(c^۲d^۲+cdk+k^۲)$; ۲۷) $(p^۲+c^۲)(p^۲-\sqrt{۳}pc+$
$+c^۲)(p^۲+\sqrt{۳}pc+c^۲)$; ۲۸) $(x+۴m)(x^۲-۴xm+۱۶m^۲)$.
۱۲. ۱) $۲(a+۱)^۲$; ۲) $(a+b+m-n)\times(a+b-m+n)$;
۳) $(y-۵+۲m)(y-۵-۲m)$; ۴) $(m+n+۱)^۲$;
۵) $(a-b)(x^۲+x+۱)$; ۶) $p^۲(p^۲+d)(d-p^۲)$;
۷) $(x^۲-y^۳z)(۸x^۲+۸y^۳z-۱)$; ۸) $(۳a^۲+۲c^۳)(۳q^۲-$
$-۲c^۳)(۹a^۴+۴c^۶+۱)$; ۹) $(a+b+c)(a+b-c+۱)$;
۱۰) $(a+c+d-b)(a-b-c-d-۱)$; ۱۱) $(m-n+$
$+p)(m-n-p)(m^۲+n^۲+p^۲)$; ۱۲) $(x+y-z)^۲(x+$
$+y+z)^۲$; ۱۳) $۲b(۳a^۲+b^۲-۱)$; ۱۴) $۲a(a+\sqrt{۳}b)^۲$;
۱۵) $-۸b^۵y(b-y)^۲$; ۱۶) $(x^۲+bc)(x^۲-bc)^۲$;
۱۷) $(۱-by)(b^۲y^۲+by+۲)$; ۱۸) $(a-b-c-b)(a-$
$-b)(c+d)$; ۱۹) $(a-x-۳)(۹-۳x+x^۲)$;

۲۰) $(a+b)(a^۲-ab+b^۲+a-b)$; ۲۱) $(a-x)(a^۲+ax+x^۲-۲)$; ۲۲) $(x^۲+۲x+۴)(x-۱)$; ۲۳) $(x-y)\times(۳x^۲+۳xy+۳y^۲+۵)$. **۱۳.** راهنمایی‌ها: ۱) $\left(x-y+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}>۰$ ۲) $۲\left(x-\frac{۳y+z}{۲}\right)^۲+\frac{۱}{۲}(y+۲z)^۲+\frac{z^۲}{۲}\geqslant ۰$;

۳) $۸\left(x+\frac{y-۳z}{۴}\right)^۲+\frac{(y-۲z)^۲}{۲}+\frac{۹}{۴}z^۲\geqslant ۰$;

۴) $۵\left(x+\frac{۳y-۴z}{۵}\right)^۲+\frac{۱۶}{۵}\left(y-\frac{z}{۲}\right)^۲+z^۲\geqslant ۰$;

۵) $۳\left(a-\frac{b+c}{۳}\right)^۲+\frac{۸}{۳}\left(b-\frac{c}{۲}\right)^۲+۲c^۲$; ۶) $\left(x^۲+\frac{x}{۲}\right)^۲+\frac{۴}{۳}\left(x+\frac{۲}{۳}\right)^۲+\left(y+\frac{۱}{۳}\right)^۲+\frac{۱۷}{۱۲}>۰$; ۷) $a^۴+b^۴+a^۲b^۲+\left(x-\frac{y}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}y^۲+۱>۰$; ۸) $(x^۲+a+۱)^۲\geqslant ۰$;

۹) $(x^۲+۵ax+a^۲)^۲\geqslant ۰$; ۱۰) $\left(\left(x-\frac{y}{۲}\right)^۲+\frac{۳y^۲}{۴}\right)^۳+\left(\left(x+\frac{y}{۲}\right)^۲+\frac{۳y^۲}{۴}\right)^۳\geqslant ۰$; ۱۱) $((x+a)(a^۲+۴x^۲))^۲$;

۱۲) $(a^۳b^۲+۲c)^۲+\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^۲+\frac{۷}{۴}>۰$; ۱۳) $۴\left(x+\frac{y}{۲}\right)^۲+۳(y-۱)^۲+۱>۰$; ۱۴) $(x+۲a)^۲+(x+۴c)^۲+۸a^۲+۱>۰$; ۱۵) $۲\left(x-\frac{y+۲a}{۲}\right)^۲+\frac{۱}{۲}(y-۲a)^۲+۲>۰$. **۱۴.** $(۸k+۷)^۳=۸(۶۴k^۳+۱۶۸k^۲+۱۴۷k+۴۲)+۷$. **۱۵.** $(۵k+۴)^۳+(۵k+۴)^۲=۵(۵k+۴)^۲(k+۱)$. **۱۶.** $(۷k+۲)^۳+(۷p+۳)^۳=۷(۴۹(k^۳+p^۳)+۲۱(۲k^۲+۳p^۲)+۳(۴k+۹p)+۵)$.

۱۷. $(۵k+۱)^۲+(۵p+۲)^۲=۵(۵(k^۲+p^۲)+۱۰(k+۲p)+۱)$. **۱۸.** $(۱۲k+۵)(۱۲p+۷)=۱۲(۱۲kp+۵p+۷k+۲)+۱۱$. **۱۹.** $(۱۱k+۴)^۲=۱۱(۱۱k^۲+۸k+۱)+۵$. **۲۰.** $(۹k+۳)^۲=۹(۹k^۲+۶k+۱)$. **۲۱.** $(۵k+۲)^۳=۵(۲۵k^۳+۳۰k^۲+۱۲k+۱)+۳$. **۲۲.** $(۴k+۳)^۳+(۴k+۳)^۲=۴(۴k+۳)^۲(k+۱)$. **۲۳.** $\overline{aabb}=۱۱(b+۱۰۰a)$. **۲۴.** $(۲k+۱)^۲=۴k(k+۱)+۱$. **۲۵.** ۱) $۱۰۱a$; ۲) $۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲-۲۰a-۲b+۱$; ۳) $۱۰۰۰a^۳+۳۰۰a^۲b+۳۰ab^۲+b^۳-۱۰۰a^۲-۲۰ab-b^۲-۱۰a-b$; ۴) $۳۰۰a^۲+۶۰ab+۳b^۲+۱۷a-۲۸b$; ۵) $۴۰۰a^۲+۸۰ab+۴b^۲+۴۰a+۴b+۱$; ۶) $۸b-۵۶a$; ۷) $۹۹a^۲-۹۹b^۲$; ۸) $-۱۰۰b^۲-۱۶ab-a^۲+۲۰a+۲b$. **۲۶.** راهنمائی‌ها: ۱) $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=۳.۳۷(a+b+c)$; ۲) $\overline{aaa}=۳.۳۷a$; ۳) $\overline{abc}-\overline{cba}=۹.۱۱(a-c)$; ۴) $۱۹^{۶۹}+۶۹^{۶۹}=۸۸(۱۹^{۶۸}-۱۹^{۶۷}.۶۹+\dots+۱۹.۶۹^{۶۸}-۶۹^{۶۹})$; ۵) $۳^{۱۰۵}+۴^{۱۰۵}=۲۴۳^{۲۱}+۱۰۲۴^{۲۱}=(۱۸۱+۶۲)^{۲۱}+(۶.۱۸۱-۶۲)^{۲۱}$; ۶) $۳^{۱۰۵}+۴^{۱۰۵}=(۳^۷)^{۱۵}+(۴^۷)^{۱۵}=۲۱۸۷^{۱۵}+۱۶۲۸۴^{۱۵}=۴۹.۳۷۹(۲۱۸۷^{۱۴}-\dots-۱۶۳۸۴^{۱۴})$; ۷) $۲^{۶۰}+۷^{۳۰}=۱۶^{۱۵}+۴۹^{۱۵}=۱۳.۵(۱۶^{۱۴}-\dots-۴۹^{۱۴})$.

§۳. چندجمله‌ای‌های با یك متغیر

چندجمله‌ای $P_n(x)$، نسبت به‌متغیر x، وقتی که به‌صورت

$$P_n(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\dots+a_{n-۱}x+a_n \qquad (۱)$$

نوشته شود ($a_۰$، $a_۱$، ...، a_n عددهایی حقیقی‌اند و $a_۰\neq ۰$)، گویند برحسب توان‌های نزولی x منظم شده است؛ این صورت چندجمله‌ای را، صورت

متعارف آن هم می‌گویند.

عددهای $a_۰$، $a_۱$، ...، a_n را ضریب‌های چندجمله‌ای، $a_۰x^n$ را جملهٔ بزرگتر و n را، درجهٔ چندجمله‌ای گویند.

اگر در یک چندجمله‌ای، توانی از x وجود نداشته باشد، به‌معنای آن است که، جملهٔ متناظر با آن، ضریبی برابر صفر دارد. مثلاً چندجمله‌ای $x^۳+۲x^۲+۱$، یک چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است که به‌صورت متعارف خود نوشته شده است و، در آن، ضریب $x^۲$ برابر صفر است.

دو چندجمله‌ای که به‌صورت متعارف نشان داده شده‌اند، وقتی متحد با یکدیگر یا به‌طور اتحادی باهم برابرند که، اولاً هم درجه باشند و ثانیاً ضریب‌های توان‌های برابر در آن‌ها، باهم برابر باشند. مثلاً، چندجمله‌ای‌های $x^۳+۲x^۲+۱$ و $a^۳+bx^۲+۱$، به‌ازای $a=۱$ و $b=۲$، متحد یکدیگرند.

مثال ۱. عددهای α، β و γ را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$x^۳+۶x^۲+\alpha x+\beta\equiv(x+\gamma)^۳$$

(«$\equiv$» نماد اتحاد است).

حل. داریم:

$$(x+\gamma)^۳=x^۳+۳\gamma x^۲+۳\gamma^۲x+\gamma^۳$$

که با استفاده از تعریف اتحاد دو چندجمله‌ای، به این دستگاه می‌رسیم:

$$۳\gamma=۶,\qquad ۳\gamma^۲=\alpha,\qquad \gamma^۳=\beta$$

از آن جا $\alpha=۱۲$، $\beta=۸$ و $\gamma=۲$.

اگر چندجمله‌های $P_m(x)$، $Q_n(x)$ و $K_l(x)$ چنان باشند که داشته باشیم:

$$P_m(x)\equiv Q_n(x)\cdot K_l(x)$$

آن‌وقت، هر یک از چندجمله‌ای‌های $Q_n(x)$ و $K_l(x)$ را مقسوم‌علیه چندجمله‌ای $P_m(x)$ گویند؛ همچنین می‌توان گفت که چندجمله‌ای $P_m(x)$ بر چندجمله‌ای $Q_n(x)$ (یا $K_l(x)$) بخش‌پذیر است، در این‌صورت، $K_l(x)$ (یا $Q_n(x)$) را خارج قسمت تقسیم $P_m(x)$ بر $Q_n(x)$ (یا $K_l(x)$) گویند.

می‌توان ثابت کرد که، اگر چندجمله‌ای درجهٔ m، بر چندجمله‌ای درجهٔ

n بخش‌پذیر باشد، خارج قسمت یك چندجمله‌ای منحصر به‌فرد و از درجهٔ $m-n$ است.

ازاین جا نتیجه می‌شود که، اگر چندجمله‌ای $P_n(x)$ ازدرجهٔ n بر چندجمله‌ای $Q_n(x)$ ازدرجهٔ n بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت $P_n(x)\equiv C\cdot Q_n(x)$ که در آن $C\neq ۰$، یعنی ضریب‌های این چندجمله‌ای‌ها، متناسب‌اند. مثلاً، اگر بدانیم چندجمله‌ای $۲x^{۲}+bx+c$ بر چندجمله‌ای $x^{۲}-x+۱$ بخش‌پذیر است، آن‌وقت $b=-۲$ و $c=۲$.

مثال ۲. می‌دانیم چند جمله‌ای $۲x^{۴}-x^{۳}+۲x^{۲}+۱$ برچندجمله‌ای $x^{۲}-x+۱$ بخش‌پذیر است. خارج قسمت تقسیم را پیدا کنید.

حل. ازتقسیم چندجمله‌ای درجهٔ چهارم برچندجمله‌ای درجهٔ دوم، به‌یك چندجمله‌ای درجهٔ دوم می‌رسیم. چند جمله‌ای خارج قسمت را $ax^{۲}+bx+c$ بگیرید. دراین‌صورت، باید داشته باشیم:

$$۲x^{۴}-x^{۳}+۲x^{۲}+۱\equiv(x^{۲}-x+۱)(ax^{۲}+bx+c)=$$
$$=ax^{۴}+(b-a)x^{۳}+(a+c-b)x^{۲}+(b-c)x+c$$

که اگر ضریب‌های توان‌های برابر را دردوطرف، برابر قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$a=۲,\ b-a=-۱,\ a+c-b=۲, b-c=۰,\ c=۱$$

و از آن جا $a=۲$، $b=۱$، $c=۱$، به‌این ترتیب، چندجمله‌ای خارج قسمت چنین است: $۲x^{۲}+x+۱$.

ویژگی‌های بخش‌پذیری درچندجمله‌ای‌ها

۱. اگر چندجمله‌ای $P_n(x)$ بر چندجمله‌ای $Q_m(x)$، و چند جمله‌ای $Q_m(x)$ برچندجمله‌ای $F_l(x)$ بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت چندجمله‌ای $P_n(x)$ برچندجمله‌ای $F_l(x)$ بخش‌پذیر است.

مثلاً $x^{۴}-۱$ بر $x^{۲}-۱$، و $x^{۲}-۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیرند، بنابراین، چندجمله‌ای $x^{۴}-۱$ برچندجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است.

۲. اگر چندجمله‌ای‌های $P_n(x)$ و $Q_m(x)$ بر چندجمله‌ای $K_l(x)$

بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت، چندجمله‌ای‌های $P_n(x)+Q_m(x)$ و $P_n(x)-Q_m(x)$ بر $K_l(x)$، و چندجمله‌ای $P_n(x)\cdot Q_m(x)$ بر چند جمله‌ای $K_l^۲(x)$ بخش‌پذیرند.

مثلاً، هر یک از چندجمله‌ای‌های $x^۳-۱$ و $۵x^۲-x-۴$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین چندجمله‌ای‌های

$x^۳-۵x^۲+x+۳$ و $x^۳+۵x^۲-x-۵$

(مجموع و تفاضل دوچندجمله‌ای) بر $x-۱$ و چندجمله‌ای

$$۵x^۵-x^۴-۴x^۳-۵x^۲+x+۴$$

(حاصل‌ضرب آن‌ها) بر $(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱$ بخش‌پذیرند.

۳. اگر چندجمله‌ای $P_n(x)$ بر چندجمله‌ای $Q_m(x)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه، حاصل‌ضرب $P_n(x)$ در هر چندجمله‌ای دلخواه $K_l(x)$ هم، بر $Q_m(x)$ بخش‌پذیر خواهد بود.

مثلاً $x^۲-x+۱$ بر خودش یعنی $x^۲-x+۱$ بخش‌پذیر است، بنابراین چندجمله‌ای $x^۴+x^۲+۱$ که از ضرب $x^۲-x+۱$ در $x^۲+x+۱$ به‌دست آمده است، بر چندجمله‌ای $x^۲-x+۱$ بخش‌پذیر است.

۴. چندجمله‌ای‌های $P_n(x)$ و $Q_m(x)$، تنها وقتی بر یکدیگر بخش‌پذیرند که داشته باشیم: $P_n(x)=C\cdot Q_m(x)$ $(C\neq ۰)$.

مثال ۳. می‌دانیم چندجمله‌ای‌های $x^۳+x+۱$ و $P_n(x)$ بر یکدیگر بخش‌پذیرند و $P_n(۰)=۳$. چندجمله‌ای $P_n(x)$ را پیدا کنید.

حل. از ویژگی ۴ نتیجه می‌شود: $P_n(x)=C(x^۳+x+۱)$ و چون $P_n(۰)=۳$، پس $C=۳$. به این ترتیب $P_n(x)=۳x^۳+۳x+۳$.

۵. اگر چندجمله‌ای $P_n(x)=Q_m(x)\cdot K_l(x)$ بر دوجمله‌ای $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت دست کم یکی از چندجمله‌ای‌های $Q_m(x)$ یا $K_l(x)$، بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است.

مثلاً از آن‌جا که $x^۴-۱$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است و، درضمن، $x^۴-۱$ را می‌توان به‌صورت $(x+۱)(x^۳-x^۲+x-۱)$ نوشت، بنابراین $x^۳-x^۲+x-۱$ بر دوجمله‌ای $x-۱$ بخش‌پذیر است.

تقسیم با باقی‌ماندهٔ چندجمله‌ای $P_n(x)$ برچندجمله‌ای $T_m(x)$ $(m\leqslant n)$، به‌معنای پیدا کردن چند جمله‌ای‌های $q_l(x)$ و $r_k(x)$ است، به نحوی که برابری اتحادی زیر برقرار باشد:

$$P_n(x)=T_m(x)\cdot q_l(x)+r_k(x)$$

که در آن $۰\leqslant k<m$. درضمن، چندجمله‌ای $q_l(x)$ را خارج‌قسمت و چندجمله‌ای $r_k(x)$ را باقی‌ماندهٔ تقسیم گویند.

یادآوری می‌کنیم که، اگر چندجمله‌ای $P_n(x)$ را بر چندجمله‌ای $T_m(x)$ تقسیم کنیم، برای چندجمله‌ای‌های $q_l(x)$ و $r_k(x)$، جوابی منحصر به‌فرد به‌دست می‌آید، به‌نحوی که

$$P_n(x)=T_m(x)\cdot q_l(x)+r_k(x)$$

و درضمن، $l=n-m$ و $۰\leqslant k<m$.

مثال ۴. خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم چندجمله‌ای $x^۳-x+۲$ برچند جمله‌ای $x^۲+۱$ را پیدا کنید.

حل. $ax+b$ را خارج‌قسمت و $cx+d$ را چندجمله‌ای باقی‌مانده می‌گیریم. دراین صورت، بنا به‌تعریف تقسیم، باید اتحاد زیر را داشته باشیم:

$$x^۳-x+۲=(ax+b)(x^۲+۱)+cx+d$$

و چون

$$(ax+b)(x^۲+۱)+cx+d=ax^۳+bx^۲+(a+c)x+(b+d)$$

بنا براین بااستفاده ازتعریف اتحاد دوچندجمله‌ای، به‌دست می‌آید:

$$a=۱،\ b=۰،\ a+c=-۱،\ b+d=۲$$

ازآن جا $a=۱$، $b=۰$، $c=-۲$، $d=۲$. به‌این ترتیب

$$x^۳-x+۲=(x^۲+۱)\cdot x+(-۲x+۲)$$

که درآن x خارج‌قسمت و $-۲x+۲$ باقی‌ماندهٔ تقسیم است.

هر چندجمله‌ای $P_n(x)$ را می‌توان، یا در تقسیم با باقی‌مانده و یا در تقسیم بی‌باقی‌مانده، بر چندجمله‌ای $T_m(x)$ $(m\leqslant n)$ تقسیم کرد. درحالت اول (تقسیم با باقی‌مانده) خارج‌قسمت و باقی‌مانده، ودرحالت دوم خارج‌قسمت را، می‌توان باروش ضریب‌های نامعین به‌دست آورد

روش ضریب‌های نامعین. چندجمله‌ای‌های

$$P_n(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n,\quad T_m(x)=b_۰x^m+\dots+b_m$$

را، به‌ترتیب، ازدرجه‌های n و m $(m\leqslant n)$ درنظر می‌گیریم. خارج‌قسمت تقسیم $P_n(x)$ بر $T_m(x)$ را به‌صورت

$$q_{n-m}(x)=\frac{a_۰}{b_۰}x^{n-m}+c_۱x^{n-m-۱}+\dots+c_{n-m} \qquad (۱)$$

وباقی‌ماندهٔ تقسیم را به‌صورت

$$r_l(x)=d_۰x^{m-۱}+d_۱x^{m-۲}+\dots+d_{m-۱} \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم، که در آن‌ها، $۰\leqslant l\leqslant m-۱$ وعددهای $c_۱$، $c_۲$، …، c_{n-m} و $d_۰$، $d_۱$، …، $d_{m-۱}$، مقدارهایی نامعین‌اند. این اتحاد را می‌نویسیم:

$$P_n(x)=T_m(x)\cdot q_{n-m}(x)+r_l(x) \qquad (۳)$$

اگر چند جمله‌ای‌های $T_m(x)$ و $q_{n-m}(x)$ را درهم ضرب کنیم و، سمت‌راست برابری (۳) را که یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ n است، به‌صورت متعارف خود بنویسیم، آن‌وقت باید ضریب‌های توان‌های یکسان دردوطرف برابری (۳)، باهم برابر باشند. به‌این‌ترتیب، دستگاهی‌شامل n معادله به‌دست می‌آید که، باحل آن، عددهای $c_۱$، …، c_{n-m} و $d_۰$، $d_۱$، $d_{m-۱}$ به‌دست‌می‌آیند.

اگر همهٔ عددهای $d_۰$، $d_۱$، $d_{m-۱}$، برابرصفرشوند، به‌معنای آن است که چندجمله‌ای $P_n(x)$ بر چند جمله‌ای $T_m(x)$ بخش‌پذیر است؛ ولی اگر دست‌کم یکی از این عددها مخالف صفر باشد، به‌معنای آن است که، تقسیم $P_n(x)$ بر $T_m(x)$، دارای باقی‌مانده است و، درضمن، درجهٔ باقی‌مانده، برابراست با بزرگترین توان x درسمت‌راست برابری (۲) که ضریبی‌مخالف صفر دارد.

مثال ۵. چندجمله‌ای $۲x^۴+x^۳-۵x^۲-x+۱$ را بر $x^۲-x$ تقسیم کنید.

حل. خارج‌قسمت به صورت $q_۲(x)=۲x^۲+c_۱x+c_۲$ وباقی‌ماندهٔ تقسیم به‌صورت $r_۱(x)=d_۰x+d_۱$ است. این اتحاد را داریم:

$$۲x^۴+x^۳-۵x^۲-x+۱=$$
$$=(۲x^۲+c_۱x+c_۲)(x^۲-x)+d_۰x+d_۱$$

که بعد از باز کردن پرانتزها درسمت‌راست وتبدیل‌های ساده به‌دست‌می‌آید:

$$۲x^۴+x^۳-۵x^۲-x+۱=۲x^۴+(c_۱-۲)x^۳+$$
$$+(-c_۱+c_۲)x^۲+(d_۰-c_۲)x+d_۱$$

وبا برابر قراردادن ضریب‌های توان‌های برابر، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$c_۱-۲=۱،\quad -c_۱+c_۲=-۵،\quad d_۰-c_۲=-۱،\quad d_۱=۱$$

از آن‌جا $c_۱=۳$، $c_۲=-۲$، $d_۰=-۳$، $d_۱=۱$. به‌این ترتیب

$$۲x^۴+x^۳-۵x^۲-x+۱(۲x^۲+۳x-۲)(x^۲-x)=-۳x+۱$$

مثال ۶. چندجمله‌ای $-۱۲x^۶+۴x^۵-۳x^۴+۴x^۳+۸x^۲-۱$ را بر دوجمله‌ای $x^۲+۱$ تقسیم کنید.

حل. خارج‌قسمت به‌صورت

$$q_۴(x)=-۱۲x^۴+c_۱x^۳+c_۲x^۲+c_۳x+c_۴$$

و باقی‌ماندهٔ تقسیم به‌صورت $r_۱(x)=d_۰x+d_۱$ است. اتحاد و تقسیم را می‌نویسیم.

$$-۱۲x^۶+۴x^۵-۳x^۴+۴x^۳+۸x^۲-۱=$$
$$=(-۱۲x^۴+c_۱x^۳+c_۲x^۲+c_۳x+c_۴)(x^۲+۱)+d_۰x+d_۱=$$
$$=-۱۲x^۶+c_۱x^۵+(c_۲-۱۲)x^۴+(c_۳+c_۱)x^۳+$$
$$+(c_۴+c_۲)x^۲+(c_۳+d_۰)x+c_۴+d_۱$$

که با برابرقراردادن ضریب‌های توان‌های برابر، دردوطرف، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$c_۱=۴،\quad c_۲-۱۲=-۳،\quad c_۳+c_۱=۴،\quad c_۴+c_۲=۸،$$
$$c_۳+d_۰=۰،\quad c_۴+d_۱=-۱$$

از آن‌جا $c_۱=۴$، $c_۲=۹$، $c_۳=۰$، $c_۴=-۱$، $d_۰=۰$، $d_۱=۰$.

به این ترتیب، چندجمله‌ای مفروض بر $x^۲+۱$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$-۱۲x^۶+۴x^۵-۳x^۴+۴x^۳+۸x^۲-۱=$$
$$=(-۱۲x^۴+۴x^۳+۹x^۲-۱)(x^۲+۱)$$

تقسیم چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای، به‌صورت ستونی. این روش را، با مثال تقسیم چند جمله‌ای $۲x^۴-۳x^۳+۴x^۲+۱$ برچندجمله‌ای $x^۲-۱$

روشن می‌کنیم:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & ۲x^۴-۳x^۳+۴x^۲+۱ & x^۲-۱ \\
 & ۲x^۴-۲x^۲ & \overline{۲x^۲-۳x+۶} \\
\hline
- & -۳x^۳+۶x^۲+۱ & \\
 & -۳x^۳+۳x & \\
\hline
- & ۶x^۲-۳x+۱ & \\
 & ۶x^۲-۶ & \\
\hline
 & -۳x+۷ &
\end{array}
$$

درحالت کلی، برای تقسیم چندجمله‌ای $P_n(x)$ برچندجمله‌ای $T_m(x)$ $(m\leqslant n)$ با روش ستونی، ابتدا چندجمله‌ای‌ها را برحسب توان‌های نزولی x می‌نویسیم. سپس، بزرگترین جملهٔ $P_n(x)$ را بـر بزرگترین جملهٔ $T_m(x)$ تقسیم می‌کنیم، بـزرگترین جملهٔ خارج قسمت $q(x)$ به‌دست می‌آیـد. این بزرگترین جملهٔ $q(x)$ را در مقسوم‌علیه $T_m(x)$ ضرب و چندجمله‌ای حاصل را ازمقسوم کم می‌کنیم. درتفاضل، یك چندجمله‌ای مثل $D_۱(x)$ به‌دست‌می‌آید که، درجهٔ آن، کمتر از n است.

اگردرجهٔ $D_۱(x)$ از m کمتر باشد، عمل تقسیم تمام شده است و $D_۱(x)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم است. اگر درجهٔ چندجمله‌ای $D_۱(x)$ از m بیشتر یا با آن برابر باشد، آن‌وقت روندی را که دربالا شرح دادیم، برای $D_۱(x)$ تکرار می‌کنیم، یعنی بزرگترین جملهٔ $D_۱(x)$ را بر بزرگترین جملهٔ $T_m(x)$ تقسیم، جملهٔ حاصل را در $T_m(x)$ ضـرب و چندجمله‌ای حاصل را از $D_۱(x)$ کم می‌کنیم. درنتیجه، چندجمله‌ای $D_۲(x)$ به دست می‌آیـد کـه، درجهٔ آن، از $n-۱$ کمتر است. اگـر درجهٔ چندجمله‌ای $D_۲(x)$ از m کمتر باشد، عمل تقسیم به‌پایان رسیده است و $D_۲(x)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم است. اگر درجهٔ چندجمله‌ای $D_۲(x)$ از m بیشتر یا با آن برابر باشد، روند بالا را برای $D_۲(x)$ تکرار می‌کنیم.

این روند را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که درجهٔ چندجمله‌ای $D_k(x)$، که در k امین دور به‌دست می‌آید، از درجهٔ چندجمله‌ای $T_m(x)$، یعنی از m کمتر

باشد. دراین صورت، $D_k(x)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم است.

مثال ۷. چندجمله‌ای $۵x^۴-۳x^۵+۳x-۱$ را بـر چند جملـه‌ای $x+۱-x^۲$ تقسیم کنید.

حل. مقسوم و مقسوم‌علیه را بـه‌صورت متعارف خود می‌نویسیم و با روش ستونی عمل می‌کنیم:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & -۳x^۵+۵x^۴+۳x-۱ & -x^۲+x+۱ \\ \cline{3-3}
- & -۳x^۵+۳x^۴+۳x^۳ & ۳x^۳-۲x^۲+x-۱ \\ \cline{2-2}
 & ۲x^۴-۳x^۳+۳x-۱ & \\
- & ۲x^۴-۲x^۳-۲x^۲ & \\ \cline{2-2}
 & -x^۳+۲x^۲+۳x-۱ & \\
- & -x^۳+x^۲+x & \\ \cline{2-2}
 & x^۲+۲x-۱ & \\
- & x^۲+x-۱ & \\ \cline{2-2}
 & ۳x &
\end{array}
$$

نتیجهٔ تقسیم را، می‌توان به‌یکی ازاین دوصورت نوشت:

$$
\begin{aligned}
&۵x^۴-۳x^۵+۳x-۱= \\
&=(۳x^۳-۲x^۲+x-۱)(-x^۲+x+۱)+۳x،
\end{aligned}
$$

$$
\frac{-۳x^۵+۵x^۴+۳x-۱}{-x^۲+x+۱}=۳x^۳-۲x^۲+x-۱+\frac{۳x}{-x^۲+x+۱}
$$

مثال ۸. چندجمله‌ای $۱۲x^۴+۴x^۳+۹x+۳$ را بر $۳x-۲$ تقسیم کنید.

حل. خارج قسمت و باقی‌مانده را، باروش تقسیم ستونی، به‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & ۱۲x^۴+۴x^۳+۹x+۳ & ۳x-۲ \\ \cline{3-3}
 & ۱۲x^۴-۸x^۳ & ۴x^۳+۴x^۲+\frac{۸}{۳}x+\frac{۴۳}{۹} \\ \cline{2-2}
- & ۱۲x^۳+۹x+۳ & \\
 & ۱۲x^۳-۸x^۲ & \\ \cline{2-2}
- & ۸x^۲+۹x+۳ & \\
 & ۸x^۲+\frac{۱۶}{۳}x & \\ \cline{2-2}
- & \frac{۴۳}{۳}x+۳ & \\
 & \frac{۴۳}{۳}x+\frac{۸۶}{۹} & \\ \cline{2-2}
 & \frac{۱۱۳}{۹} &
\end{array}
$$

ونتیجهٔ تقسیم را می‌توان به‌یکی ازاین دوصورت نوشت:

$$۱۲x^۴+۴x^۳+۹x+۳=$$

$$=\left(۴x^۳+۴x^۲+\frac{۸}{۳}x+\frac{۴۳}{۹}\right)(۳x-۲)+\frac{۱۱۳}{۹},$$

$$\frac{۱۲x^۴+۴x^۳+۹x+۳}{۳x-۲}=۴x^۳+۴x^۲+\frac{۸}{۳}x+\frac{۴۳}{۹}+\frac{\frac{۱۱۳}{۹}}{۳x-۲}$$

دربسیاری موردها، تنها به‌باقی‌ماندهٔ تقسیم یك چندجمله‌ای برچندجمله‌ای دیگر احتیاج داریم. درچنین حالت‌هایی، می‌توان از روشی استفاده کرد که، آن را، ضمن مثال زیر، روشن می‌کنیم.

مثال ۹. مطلوب است باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم چندجمله‌ای درجهٔ چهارم

$$x^۴-۲x^۳+۳x^۲+۴x+۱$$

برچندجمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲+x-۲$.

حل. ازآن‌جا که مقسوم‌علیه، ازدرجهٔ دوم است، باقی‌ماندهٔ تقسیم یا ازدرجهٔ اول است ویا مقداری ثابت. بنابراین، باید این اتحاد برقرار باشد:

$$x^۴-۲x^۳+۳x^۲+۴x+۱=$$

$$=(ax^۲+bx+c)(x+۲)(x-۱)+(dx+r)$$

که درآن، به‌جای مقسوم‌علیه $x^۲+x-۲$، تجزیه شده آن‌را $(x+۲)(x-۱)$ نوشته‌ایم.

دراین اتحاد، ابتدا $x=-۲$ و سپس $x=۱$ قرار می‌دهیم، به این دستگاه می‌رسیم:

$$۳۷=-۲d+r, \qquad ۷=d+r$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید: $d=-۱۰$ و $r=۱۷$.

به‌این‌ترتیب، باقی‌ماندهٔ این تقسیم، برابراست با $-۱۰x+۱۷$.

برای تقسیم چندجمله‌ای

$$P_n(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n$$

بر دوجمله‌ای* $x-\alpha$، می‌توان از روشی استفاده کرد که به‌طرح هورنر معروف است. این روش، درواقع، نتیجهٔ مستقیم روش ضریب‌های نامعین است. توجه کنیم که، از تقسیم چندجمله‌ای $P_n(x)$ بادرجهٔ n، بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $x-\alpha$، به خارج قسمت

$$Q_{n-۱}(x)=a_۰x^{n-۱}+b_۱x^{n-۲}+\dots+b_{n-۱}$$

می‌رسیم که از درجهٔ $(n-۱)$ است و برای باقی‌ماندهٔ تقسیم، عددی ثابت (ودرحالت خاص، صفر) به‌دست می‌آید. با توجه به‌روش ضریب‌های نامعین، باید داشته باشیم:

$$a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\dots+a_{n-۲}x^۲+a_{n-۱}x+a_n=$$
$$=(a_۰x^{n-۱}+b_۱x^{n-۲}+b_۲x^{n-۳}+\dots+b_{n-۲}x+b_{n-۱})(x-\alpha)+r$$

یعنی

$$\begin{aligned}a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+a_{n-۲}x^۲+a_{n-۱}x+a_n=\\ =a_۰x^n+b_۱x^{n-۱}+b_۲x^{n-۲}+\dots+b_{n-۲}x^۲+b_{n-۱}x-\\ -a_۰\alpha x^{n-۱}-b_۱\alpha x^{n-۲}-\dots-b_{n-۲}\alpha x-b_{n-۱}\alpha+r \qquad (۴)\end{aligned}$$

اگر ضریب‌های توان‌های برابر را، درسمت چپ وسمت راست برابری (۴)، برابر قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}a_۱=b_۱-\alpha_۰,\\ a_۲=b_۲-\alpha b_۱,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n-۱}=b_{n-۱}-\alpha b_{n-۲},\\ a_n=r-\alpha b_{n-۱}\end{cases}$$

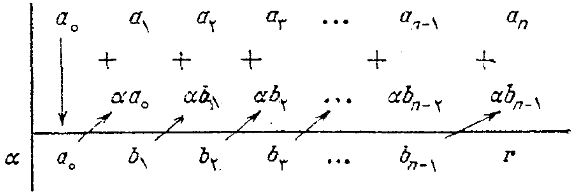
از این‌جا، دستورهای برگشتی زیر، برای محاسبهٔ ضریب‌های خارج قسمت و، همچنین، باقی‌ماندهٔ r پیدا می‌شود:

---

*) عبارت به‌صورت $ax+b$ $(a\neq ۰)$ را، خطی می‌نامند.

$$\begin{cases} b_۱ = a_۱ + \alpha a_۰, \\ b_۲ = a_۲ + \alpha b_۱, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n-۱} = a_{n-۱} + \alpha b_{n-۲}, \\ r = a_n + \alpha b_{n-۱} \end{cases}$$

در عمل، محاسبهٔ ضریب‌هـای خارج‌قسمت $Q_{n-۱}(x)$ و باقی‌ماندهٔ r، طبق طرح زیر (طرح هورنر) انجام می‌شود (شکل ۸):



شکل ۸

دراین طرح، با آغازازضریب $b_۱$، هرعدد سطرسوم، ازعدد قبل از آن درهمین سطر به‌دست می‌آیـد، به‌شرطی‌که، این عدد قبلی را در α ضرب و، سپس، به‌حاصل‌ضرب حاصل، عدد متناظر آن را درسطر اول که در بالای عدد مجهول قرار دارد، اضافه کنیم.

مثال ۱۰. با استفاده از طرح هورنر، تقسیم کنید:

$$(۴x^۳ - x^۵ + ۳۲ - ۸x^۲):(x+۲)$$

حل. مقسوم را به‌صورت متعارف می‌نویسیم، یعنی به‌صورت

$$-x^۵ + ۰.x^۴ + ۴x^۳ - ۸x^۲ + ۰.x + ۳۲$$

واز طرح هورنر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & -۱ & ۰ & ۴ & -۸ & ۰ & ۳۲ \\ & & + & + & + & + & + \\ & & ۲ & -۴ & ۰ & ۱۶ & -۳۲ \\ \hline -۲ & -۱ & ۲ & ۰ & -۸ & ۱۶ & ۰ \end{array}$$

به‌این ترتیب، خارج‌قسمت $Q_۴(x)=-x^۴+۲x^۳-۸x+۱۶$ و باقی‌ماندهٔ تقسیم $r=۰$. بنابراین

$$۴x^۳-x^۵+۳۲-۸x^۲=(x+۲)(-x^۴+۲x^۳-۸x+۱۶)$$

مثال ۱۱. با استفاده ازطرح هورنر، تقسیم کنید:

$$(۲x^۲-۳x^۳-x+x^۵+۱):(x+۱)$$

حل. مقسوم را برحسب توان‌های نزولی x یعنی به صورت متعارف، می‌نویسیم:

$$x^۵+۰.x^۴-۳x^۳+۲x^۲-x+۱$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & ۱ & ۰ & -۳ & ۲ & -۱ & ۱\\ & & + & + & + & + & +\\ & & -۱ & ۱ & ۲ & -۴ & ۵\\ \hline -۱ & ۱ & -۱ & -۲ & ۴ & -۵ & ۶ \end{array}$$

پس $Q_۴(x)=x^۴-x^۳-۲x^۲+۴x-۵$ و $r=۶$. یعنی

$$۲x^۲-۳x^۳-x+x^۵+۱=$$

$$=(x+۱)(x^۴-x^۳-۲x^۲+۴x-۵)+۶$$

در تقسیم چندجمله‌ای $P_n(x)$ بر $x-\alpha$، داریم:

$$P_n(x)=(x-\alpha)Q_{n-۱}(x)+r$$

این اتحاد، باید برای $x=\alpha$ هم برقرار باشد، یعنی $r=P_n(\alpha)$.

قضیهٔ زیر به‌ما امکان می‌دهد تا باقی‌ماندهٔ تقسیم $P_n(x)$ را بر $x-\alpha$، بدون محاسبهٔ خارج‌قسمت، به‌دست آوریم:

قضیه بِزو. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P_n(x)$ بر $x-\alpha$، برابر است با مقدار $P_n(x)$ به‌ازای $x=\alpha$، یعنی $r=P_n(\alpha)$.

مثال ۱۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم $P_۴(x)$ بر $x-۱$ را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$P_۴(x)=x^۴+x^۳+۲x^۲+۲x+۲$$

حل. باتوجه به‌قضیهٔ بِزو داریم:

$$r=P_۴(۱)=۱+۱+۳+۲+۲=۹$$

مثال ۱۳. مطلوب است مقدار عبارت $P_۵(x)=۲x^۵-۴x^۴-x^۲+۱$ به‌ازای $x=۷$.

حل. با توجه به‌قضیهٔ بِزو، $P_۵(۷)$ برابر است با باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $P_۵(x)$ بر $x-۷$. به‌جای محاسبهٔ مستقیم، این مقدار را به‌کمك طرح هورنر پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\begin{array}{c|cccccc} & ۲ & -۴ & ۰ & -۱ & ۰ & ۱ \\ & & + & + & + & + & + \\ & & ۱۴ & ۷۰ & ۴۹۰ & ۳۴۲۳ & ۲۳۹۶۱ \\ \hline ۷ & ۲ & ۱۰ & ۷۰ & ۴۸۹ & ۳۴۲۳ & ۲۳۹۶۲ \end{array}$$

به‌این ترتیب $P_۵(۷)=۲۳۹۶۲$.

برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $P_n(x)$ بر دوجمله‌ای به‌صورت $ax+b$، مقدار چندجمله‌ای $P_n(x)$ را به‌ازای $x=-\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آوریم، یعنی $r=P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$.

مثال ۱۴. در تقسیم $P_۳(x)=x^۳-۳x^۲+۵x+۷$ بر $۲x+۱$، مقدار باقی‌ماندهٔ تقسیم را پیدا کنید.

حل. باتوجه به‌نکته‌ای که هم‌اکنون آوردیم، داریم:

$$r=P_۳\left(-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۲۹}{۸}$$

مثال ۱۵. آیا چند جمله‌ای $P_۴(x)=x^۴+۴x^۳+۵x+۸$: الف) بردوجمله‌ای $x+۲$؛ ب) بردوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است؟

حل. الف) چون $P_۴(-۲)\neq ۰$، بنابراین چندجمله‌ای مفروض، بر $x+۲$ بخش‌پذیر نیست؛ ب) $P_۴(-۱)=۰$ و، بنابراین، چندجمله‌ای مفروض، بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱۶. همهٔ مقدارهای a و b را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، چندجمله‌ای $P_۳(x)=x^۳+ax^۲-x+b$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر باشد.

حل. اگر $P_۳(x)$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر باشد، باید هم بر $x-۱$ و هم بر $x+۱$ بخش‌پذیر شود. بنابراین باید داشته باشیم: $P_۳(۱)=۰$ و $P_۳(-۱)=۰$؛ از این‌جا، برای به‌دست آوردن a و b، به این دستگاه می‌رسیم:

$$۰=۱+a-۱+b, \qquad ۰=-۱+a+۱+b$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $a=-b$. بنابراین چندجمله‌ای

$$P_۳(x)=x^۳+ax^۲-x-a$$

به‌ازای هر مقدار دلخواه a، بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر است.

عدد α را ریشهٔ چندجمله‌ای $P_n(x)$ گویند، وقتی که، مقدار این چندجمله‌ای، به ازای $x=\alpha$ برابر صفر شود، یعنی $P_n(\alpha)=۰$.

نتیجه‌هایی از قضیهٔ بِزو:

۱. چندجمله‌ای $P_n(x)$، تنها وقتی بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر است که، عدد α، ریشهٔ چندجمله‌ای $P_n(x)$ باشد.

۲. چندجمله‌ای x^n-a^n، برای هر عدد طبیعی n، بر $x-a$ بخش‌پذیر است، درضمن

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-۱}+x^{n-۲}\cdot a+x^{n-۳}\cdot a^۲+\dots+$$
$$+x^۲\cdot a^{n-۳}+x\cdot a^{n-۲}+a^{n-۱}$$

۳. چندجمله‌ای $x^{۲n}-a^{۲n}$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، بر $x+a$ بخش‌پذیر است ودرضمن

$$\frac{x^{۲n}-a^{۲n}}{x+a}=x^{۲n-۱}-x^{۲n-۲}\cdot a+\dots+x\cdot a^{۲n-۲}-a^{۲n-۱}$$

۴. چندجمله‌ای $x^{۲n+۱}+a^{۲n+۱}$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، بر $x+a$ بخش‌پذیر است ودرضمن

$$\frac{x^{۲n+۱}+a^{۲n+۱}}{x+a}=$$
$$=x^{۲n}-x^{۲n-۱}\cdot a+x^{۲n-۲}\cdot a^۲-\dots+x^۲\cdot a^{۲n-۲}-x\cdot a^{۲n-۱}+a^{۲n}$$

مثال ۱۷. ثابت کنید، چندجمله‌ای

$$P_{۱۷}(x)=x^{۱۷}-۱۵x^{۱۴}+۳۷x^{۱۰}-۱۶x^{۸}-۷$$

بر دوجمله‌ای $x-۱$ بخش‌پذیر است.

حل. داریم: $P_{۱۷}(۱)=۱-۱۵+۳۷-۱۶-۷=۰$ و، بنابراین، با توجه به‌نتیجهٔ ۱، $P_{۱۷}(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱۸. $P_{۵}(x)=x^{۵}-۳۲$ را بر $x-۲$ تقسیم کنید.

حل. اگر توجه کنیم که $P_{۵}(x)=x^{۵}-۲^{۵}$، با توجه به‌نتیجهٔ ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{x^{۵}-۳۲}{x-۲}=x^{۴}+۲x^{۳}+۴x^{۲}+۸x+۱۶$$

مثال ۱۹. $P_{۱۰}(x)=x^{۱۰}+۱$ را بر $x^{۲}+۱$ تقسیم کنید:

حل. اگر فرض کنیم $u=x^{۲}$، آن‌وقت می‌توانیم با توجه به‌نتیجهٔ ۴، خارج‌قسمت $P(u)=u^{۵}+۱$ بر $u+۱$ را پیدا کنیم:

$$\frac{u^{۵}+۱}{u+۱}=u^{۴}-u^{۳}+u^{۲}-u+۱$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{x^{۱۰}+۱}{x^{۲}+۱}=x^{۸}-x^{۶}+x^{۴}-x^{۲}+۱$$

مثال ۲۰. ثابت کنید، عدد $۴^{۲n}-۳^{۲n}+۲^{۳n}-۱$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، بر ۷ بخش‌پذیر است.

حل. چون $۴^{۲n}=۱۶^{n}$، $۳^{۲n}=۹^{n}$ و $۲^{۳n}=۸^{n}$، پس

$$۴^{۲n}-۳^{۲n}+۲^{۳n}-۱=۱۶^{n}-۹^{n}+۸^{n}-۱$$

بنا بر نتیجهٔ ۲، عدد $۱۶^{n}-۹^{n}$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، بر $۱۶-۹=۷$، و عدد $۸^{n}-۱$ بر $۸-۱=۷$ بخش‌پذیرند، بنابراین مجموع آن‌ها هم، بر ۷ بخش‌پذیر می‌شود.

برای هر چندجمله‌ای $P_{n}(x)$ $(n\geqslant ۲)$، نمی‌توان یك دوجمله‌ای به‌صورت

$x-\alpha$ پیدا کرد، به‌نحوی که $P_n(x)$ بر $x-\alpha$ بخش‌پذیر باشد. به‌عنوان نمونه‌ای از این چندجمله‌ای‌ها، می‌توان از چندجمله‌ای درجه دوم $ax^۲+bx+c$، باشرط $a\neq ۰$ و $b^۲-۴ac<۰$ نام برد.

سه‌جمله‌ای درجه دوم را، با جدا کردن مجذور کامل آن، تبدیل می کنیم:

$$ax^۲+bx+c=۰\left(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^۲+۲x\cdot\frac{b}{۲a}+\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲+\frac{c}{a}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲+\frac{c}{a}-\frac{b^۲}{۴a^۲}\right]=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲-\frac{b^۲-۴ac}{۴a}$$

عبارت $b^۲-۴ac$ را، مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم می‌نامند و با D (و گاهی با Δ) نشان می‌دهند، یعنی بنابر تعریف $D=b^۲-۴ac$. درحالت $D>۰$، سه‌جمله‌ای درجه دوم را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$ax^۲+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲-\frac{D}{۴a^۲}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲-\left(\frac{\sqrt{D}}{۲a}\right)^۲\right]=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{۲a}+\frac{\sqrt{D}}{۲a}\right)\left(x+\frac{b}{۲a}-\frac{\sqrt{D}}{۲a}\right)=$$

$$=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{۲a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{۲a}\right)$$

یعنی دراین حالت، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم، برابر است با حاصل‌ضرب دوعامل خطی وهریك ازعددهای

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{D}}{۲a},\quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{D}}{۲a}$$

ریشه‌ای ازسه جمله‌ای درجه دوم است.

اگر $D=۰$، آن‌گاه سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$ax^۲+bx+c=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲$$

یعنی سه‌جمله‌ای، به‌ضرب دوعامل خطی یکسان تبدیل وبه‌ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ (ریشهٔ مضاعف = ریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ دوم) برابرصفرمی‌شود.

به‌ازای $D<۰$، سه‌جمله‌ای درجه دوم را نمی‌توان به‌ضرب عامل‌های خطی تبدیل کرد، دراین حالت، سه‌جمله‌ای درجه دوم، ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال ۲۱. به‌ضرب عامل‌های خطی تبدیل کنید:

a) $۲x^۲-۱۲x+۱۸$; b) $۳x^۲-۳x-۶$; c) $x^۲-x+۱$

حل. a) $D=۱۲^۲-۸\times ۱۸=۰$، بنابراین $x_۱=x_۲=۳$؛ وازآن‌جا

$$۲x^۲-۱۲x+۱۸=۲(x-۳)^۲;$$

b) $D=۳^۲+۴\times ۳\times ۶>۰$، بنابراین $x_۱=۲$ و $x_۲=-۱$؛ ازآن‌جا

$$۳x^۲-۳x-۶=۳(x-۲)(x+۱);$$

c) $D=۱-۴<۰$، پس سه جمله‌ای درجه دوم $x^۲-x+۱$ ریشهٔ حقیقی ندارد وقابل تجزیه به‌ضرب عامل‌های اول نیست.

یادآوری‌می‌کنیم، وقتی $D\geqslant ۰$، برای $x_۱$ و $x_۲$، ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c$، این برابری‌های برقرارند (قضیهٔ ویت):

$$x_۱x_۲=\frac{c}{a} \quad \text{و} \quad x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}$$

گزارهٔ عکس هم درست است: اگر عـددهای α و β چنان باشند که $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ و $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$، آن‌وقت این عددها، ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^۲+bx+c$ هستند.

درحالتی که بـا سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲+px+q$ سروکار داشته باشیم، حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با مقدارثابت q ومجموع ریشه‌ها برابر با قرینهٔ ضریب x (یعنی $-p$) خواهند بود.

مثال ۲۲. این چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کنید:

$$\text{a) } x^۲-۵x+۶; \qquad \text{b) } -۱۲-۷x-x^۲$$

حل. a) چون عددهای ۲ و ۳ چنان‌اند که، حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۶ و مجموع آن‌ها برابر (۵−)− است، بنابراین، همین عددها، ریشه‌های سه‌جمله‌ای‌اند و

$$x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)$$

b) چون برای عددهای ۳− و ۴− داریم:

$$(-۳)\cdot(-۴)=\frac{-۱۲}{-۱} \text{ و } (-۳)+(-۴)=-\frac{-۷}{-۱}$$

بنابراین، همین عددها، ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه دوم‌اند و

$$-۱۲-۷x-x^۲=-(x+۳)(x+۴)$$

مثال ۲۳. نمونه‌ای از یك سه‌جمله‌ای درجه‌دوم پیدا کنید که، ریشه‌های آن، برابر با ۲ و $-\frac{۱}{۲}$ باشند.

حل. مثلاً می‌توان این‌عددها را، ریشه‌های سه‌جمله‌ای $x^۲+px+q$ دانست، به‌شرطی‌که $p=-\left(۲+\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right)$ و $q=۲\cdot\left(-\frac{۱}{۲}\right)$، یعنی سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم به صورت $x^۲-\frac{۳}{۲}x-۱$. درضمن، برای هر $a\neq ۰$، سه‌جمله‌ای $a\left(x^۲-\frac{۳}{۲}x-۱\right)$ هم، همان ریشه‌ها را دارد.

می‌توان ثابت کرد که، برای‌هرجمله‌ای بادرجهٔ بزرگتر از ۲، سه‌جمله‌ای درجه دومی وجود دارد که، چندجمله‌ای مفروض، بر آن بخش‌پذیر است.

برای چند جمله‌ای درجهٔ سوم $P_۳(x)=ax^۳+bx^۲+cx+d$، یکی از دو حالت وجود دارد: یا این چندجمله‌ای، به‌دوجمله‌ای‌های خطی‌قابل تجزیه است، یعنی

$$P_۳(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

که در آن، لزومی ندارد، عددهای α و β و γ متمایز باشند؛ و یا به یك دوجمله‌ای خطی و یك سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم تجزیه شود، یعنی

$$P_۳(x)=a(x-\alpha)(x^۲+\beta x+\gamma)$$

مثال ۲۴. به‌ضرب عامل‌ها، تجزیه کنید:

$$a)\ x^۳+x-۲; \qquad b)\ x^۳-۳x+۲$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$a)\ x^۳+x-۲=(x^۳-۱)+(x-۱)=$$
$$=(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)=(x-۱)(x^۲+x+۲)$$

مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲+x+۲$، عددی منفی‌است و، بنابراین، قابل تجزیه به‌عامل‌های خطی نیست.

$$b)\ x^۳-۳x+۲=x^۳-x-۲x+۲=x(x^۲-۱)-۲(x-۱)=$$
$$=(x-۱)(x^۲+x-۲)=(x-۱)^۲(x+۲)$$

برای چندجمله‌ای درجهٔ چهارم

$$P_۴(x)=ax^۴+bx^۳+cx^۲+dx+f$$

سه‌حالت ممکن است پیش‌آید:

الف) به‌چهار دوجمله‌ای خطی تجزیه شود:

$$P_۴(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

که‌البته، در بین α، β، γ و δ، ممکن است عددهای برابرهم وجود داشته‌باشد.

ب) به دوسه‌جمله‌ای درجهٔ دوم تجزیه شود:

$$P_۴(x)=a(x^۲+\alpha x+\beta)(x^۲+\gamma x+\delta)$$

که البته ممکن است، به‌طورهم‌زمان داشته باشیم: $\alpha=\gamma$ و $\beta=\delta$.

ج) به‌ضرب‌دو دوجمله‌ای خطی ویك سه‌جمله‌ای‌درجهٔ دوم‌تجزیه‌شود:

$$P_۴(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x^۲+\gamma x+\delta)$$

که البته، ممکن است عددهای α و β برابرباشند.

مثال ۲۵. این چندجمله‌ای‌ها را به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$a)\ x^۴+۵x^۲+۶; \qquad b)\ x^۴+x^۳-x-۱;$$
$$c)\ x^۴+۵x^۲+۶; \qquad d)\ x^۴+۴$$

حل. به‌ترتیب داریم:

a) $x^۴-۵x^۲+۶=x^۴-۲\times\frac{۵}{۲}x^۲+\frac{۲۵}{۴}-\frac{۲۵}{۴}+۶=$

$$=\left(x^۲-\frac{۵}{۲}\right)^۲-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=$$

$=(x^۲-۳)(x^۲-۲)=(x-\sqrt{۳})(x+\sqrt{۳})(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲});$

b) $x^۴+x^۳-x-۱=x^۳(x+۱)-(x+۱)=$

$=(x+۱)(x^۳-۱)=(x+۱)(x-۱)(x^۲+x+۱);$

c) $x^۴+۵x^۲+۶=\left(x^۲+\frac{۵}{۲}\right)^۲-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=(x^۲+۳)(x^۲+۲);$

d) $x^۴+۴=x^۴+۴x^۲+۴-۴x^۲=(x^۲+۲)-(۲x)^۲=$

$=(x^۲-\sqrt{۲}x+۲)(x^۲+\sqrt{۲}x+۲)$

درحالت کلی، هرچندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجهٔ n را می‌توان به‌صورت ضرب عامل‌هایی نوشت که، درجه هیچ کدام از آن‌ها، از ۲ تجاوز نکند، یعنی هریك از عامل‌ها، یادوجمله‌ای خطی باشد و یا سه‌جمله‌ای درجه دومی که‌ریشهٔ حقیقی نداشته باشد.

گزاره‌هایی دربارهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها

۱. هرچندجمله‌ای درجهٔ n، بیش از n ریشهٔ حقیقی ندارد (با درنظر-گرفتن ریشه‌های تکراری).

۲. چندجمله‌ای بادرجهٔ فرد، دست کم یك ریشهٔ حقیقی دارد.

۳. (قضیهٔ ویت). اگر $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای

$$P_n(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_n$$

باشند، آن‌وقت، این برابری‌ها برقرارند:

$$x_۱+x_۲+\dots+x_n=-\frac{a_۱}{a_۰};$$

$$x_۱x_۲+x_۱x_۳+\dots+x_{n-۱}x_n=\frac{a_۲}{a_۰};$$

$$x_۱x_۲x_۳+\dots+x_{n-۲}x_{n-۱}x_n=-\frac{a_۳}{a_۰};$$

. . . .

$$x_۱x_۲\cdots x_n=(-۱)^n\cdot\frac{a_n}{a_۰}$$

۴. اگر $P_n(x)=Q_m(x)K_l(x)$، آن‌وقت هر ریشهٔ $P_n(x)$، دست‌کم ریشه یکی از چند جمله‌ای‌های $Q_m(x)$ یا $K_l(x)$ است و، برعکس، هر ریشهٔ $Q_m(x)$ یا هر ریشه $K_l(x)$، ریشه‌ای از $P_n(x)$ است.

۵. اگر α، ریشه‌ای ازچندجمله‌ای $P_n(x)$ باشد، آن‌وقت

$$P_n(x)=(x-\alpha)\cdot Q_{n-۱}(x)$$

که در آن، $Q_{n-۱}(x)$، یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ $n-۱$ است.

پیدا کردن ریشهٔ چندجمله‌ای، درحالت کلی، مسالهٔ ساده‌ای نیست، با وجود این، در حالتی که بتوان چندجمله‌ای را به‌ضرب عامل‌هایی که درجهٔ بالاتر از ۲ نداشته باشند، تجزیه کرد، می‌توان مساله را به‌طورکامل حل کرد، زیرا بنا بر ویژگی ۴، مجموعهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای $P_n(x)$، همان مجموعهٔ ریشه‌های مقسوم‌علیه‌های آن است.

مثال ۲۶. ریشه‌های این‌چندجمله‌ای‌ها را پیدا کنید:

a) $x^۴-۲x^۳+x^۲$; b) $x^۳-۸$

حل. a) از آن‌جا که داریم:

$$x^۴-۲x^۳+x^۲=x^۲(x^۲-۲x+۱)=x^۲(x-۱)^۲$$

بنابراین، ریشه‌های این‌چندجمله‌ای چنین‌اند: $x_۱=x_۲=۰$ و $x_۳=x_۴=۱$.

b) چون $x^۳-۸=(x-۲)(x^۲+۲x+۴)$، و مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم سمت راست برابری، منفی است. بنابراین چندجمله‌ای مفروض، تنها یك ریشهٔ حقیقی دارد: $x=۲$.

برای اینکه کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ (p عددی درست و q عددی طبیعی) ریشهٔ چندجمله‌ای باضریب‌های درست

$$P_n(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n$$

باشد، لازم است که عدد p، مقسوم‌علیهی ازمقدار ثابت a_n، وعدد q، مقسوم‌علیهی از $a_۰$ (ضریب بزرگترین درجه) باشد.

درحالت خاص، وقتی که ضریب چندجمله‌ای عددهایی درست باشند و، درضمن $a_۰=۱$، آن وقت، ریشه‌های گویای این چندجمله‌ای، تنها می‌توانند عددهای درستی باشند که، درضمن، مقسوم‌علیه‌هایی ازمقدار ثابت چندجمله‌ای اند.

مثال ۲۷. ریشه‌های این چندجمله‌ای را پیدا کنید:

$$P(x)=۲x^۳+x^۲-۴x-۲$$

حل. تحقیق می‌کنیم، آیا این چندجمله‌ای، ریشهٔ گویا دارد یا نه؟ فرض کنیم، کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$، ریشه‌ای ازاین چندجمله‌ای باشد، دراین صورت عدد p می‌تواند یکی ازعددهای ۱ ـ، ۱، ۲ ـ، ۲ وعدد q، یکی ازعددهای ۱ یا ۲ باشد. بنابراین، ریشه‌های گویای این چندجمله‌ای را (اگر چنین ریشه‌هایی وجود داشته باشند)، می‌توان دربین عددهای زیرجست‌وجو کرد:

$$-۲،\ -۱،\ -\frac{۱}{۲}،\frac{۱}{۲}،\ ۱،\ ۲$$

اگر این عددها را، درچندجمله‌ای قراردهیم، روشن می‌شود که تنها، به‌ازای $x=-\frac{۱}{۲}$، برابرصفراست: $P\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۰$. بنابراین $x=-\frac{۱}{۲}$، یکی از ریشه‌های چند جمله‌ای $P(x)$ است و داریم: $P(x)=\left(x+\frac{۱}{۲}\right)Q(x)$. با استفاده‌ازطرح هودنر، $Q(x)$ به‌دست‌می‌آید $Q(x)=۲x^۲-۴$ که، ریشه‌های آن‌عبارتند از $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$. به‌این‌ترتیب، ریشه‌های این‌چندجمله‌ای، چنین‌اند:

$$x_۱=-\frac{۱}{۲}x^۲=\sqrt{۲}،\ \ x_۳=-\sqrt{۲}$$

مثال ۲۸. این چندجمله‌ای را به ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

$$P(x)=۲x^۴-x^۳+۲x^۲+۳x-۲$$

حل. ببینیم، چندجمله‌ای ریشهٔ گویا دارد یانه! اگرکسر ساده‌نشدنی

$\frac{p}{q}$ ریشه‌ای از معادله باشد، p می‌تواند یکی از عددهای -۱، ۱، -۲ یا ۲ و q یکی از عددهای ۱ یا ۲ باشد. بنابراین، اگر چندجمله‌ای ریشه‌ای گویا داشته باشد، این ریشه تنها می‌تواند یکی از عددهای زیر باشد:

$$-۲,\ -۱,\ -\frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۲},\ ۱,\ ۲$$

آزمایش نشان می‌دهد که $P(-۱)=\left(P\frac{۱}{۲}\right)=۰$، یعنی -۱ و $\frac{۱}{۲}$ ریشه‌های این چندجمله‌ای هستند و بنابراین

$$P(x)=(x+۱)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)Q(x)$$

$Q(x)$ را می‌توان، مثلاً، از تقسیم ستونی $P(x)$ بر $(x+۱)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)$ به‌دست آورد و یا، با توجه به طرح هورنر، ابتدا $P(x)$ را بر $x+۱$ و، سپس، بر $x-\frac{۱}{۲}$ تقسیم کرد و یا با روش ضریب‌های نامعین عمل کرد.

در اینجا $Q(x)=۲x^۲+bx+c$ را با روش ضریب‌های نامعین پیدا می‌کنیم. باید اتحاد زیر برقرار باشد:

$$۲x^۴-x^۳+۲x^۲+۳x-۲=\left(x^۲+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}\right)(۲x^۲+bx+c)$$

با برابر قرار دادن مقدارهای ثابت، در دو طرف برابری، به‌دست می‌آید $c=۴$. اگر این مقدار c را در اتحاد قرار دهیم و، در ضمن $x=۱$ بگیریم، نتیجه می‌شود $b=-۲$.

به این ترتیب $Q(x)=۲x^۲-۲x+۴$ که ریشهٔ حقیقی ندارد. در نتیجه

$$۲x^۴-x^۳+۲x^۲+۳x-۲=۲(x+۱)\left(x-\frac{۱}{۲}\right)(x^۲-x+۲)$$

روش‌های تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها

۱. تجزیهٔ سه‌جمله‌ای درجه دوم به ضرب عامل‌ها.

مثال ۲۹. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

a) $P_۲(x)=۹x^۲-۶۰x+۱۰;$ b) $P_۲(x)=۸-۲x-x^۲;$

c) $P_۴(x)=[(x+۲)(x+۴)]^۲-۵(x+۲)(x+۴)+۶;$

d) $P_۴(x)=(x^۲+۳x+۱)(x^۲+۳x+۲)-۶;$

e) $P_۴(x)=(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)+۱۵;$

f) $P_۴(x)=(۴x+۱)(۱۲x-۱)(۳x+۲)(x+۱)-۴;$

g) $P_۴(x)=۴(x+۵)(x+۶)(x+۱۰)(x+۱۲)-۳x^۲;$

h) $P_۶(x)=۳x^۶-۴x^۴+۲x^۴-۸x^۳+۲x^۲-۴x+۳$

حل. a) مبین چندجمله‌ای مثبت است و $\sqrt{D}=۱۸\sqrt{۱۰}$ و

$$x_۱=\frac{۱۰-۳\sqrt{۱۰}}{۳} \text{ و } x_۲=\frac{۱۰+۳\sqrt{۱۰}}{۳}$$

بنابراین $۹x^۲-۶x+۱۰=۹\left(x-\frac{۱۰-۳\sqrt{۱۰}}{۳}\right)\left(x-\frac{۱۰+۳\sqrt{۱۰}}{۳}\right)$، که می‌توان آن را این‌طور هم نوشت:

$$۹۱^۲-۶۰x+۱۰=(۳x-۱۰+۳\sqrt{۱۰})(۳x-۱۰-۳\sqrt{۱۰})$$

b) به‌سادگی و به‌صورت زیر قابل تجزیه است:

$$۸-۲x-x^۲=-(x^۲+۲x-۸)=-(x+۴)(x-۲)$$

c) اگر $t=(x+۴)(x+۲)$ بگیریم، آن‌وقت، چندجمله‌ای مفروض، به‌صورت $P_۴(t)=t^۲-۵t+۶$ در می‌آید که ۲ و ۳ ریشه‌های آن است و بنابراین

$$t^۲-۵t+۶=(t-۲)(t-۳)=[(x+۲)(x+۴)-۲][(x+۲)\times$$
$$\times(۴+x)-۳]=(x^۲+۶x+۶)(x^۲+۶x+۵)=$$
$$=[(x+۳)^۲-۳][(x+۳)^۲-۴]=$$
$$=(x+۳+\sqrt{۳})(x+۳-\sqrt{۳})(x+۵)(x+۱)$$

d) $P_۴(x)=(x^۲+۳x+۱)(x^۲+۳x+۲)-۶=$

$$=(x^۲+۳x+۱)^۲+(x^۲+۳x+۱)-۶$$

که اگر $t=x^۲+۳+۱$ بگیریم، به سه‌جمله‌ای $t^۲+t-۶$ می‌رسیم که،

ریشه‌های آن، -۳ و ۲ است، یعنی

$$P_۴(x)=(t+۳)(t-۲)=(x^۲+۳x+۴)(x^۲+۳x-۱)$$

درسمت راست، پرانتز اول مبین منفی دارد و پرانتز دوم دارای ریشه‌های $\frac{-۳+\sqrt{۱۳}}{۲}$ و $\frac{-۳-\sqrt{۱۳}}{۲}$ است و بنابراین

$$P_۴(x)=\left(x-\frac{-۳+\sqrt{۱۳}}{۲}\right)\left(x-\frac{-۳-\sqrt{۱۳}}{۲}\right)(x^۲+۳x+۴)$$

e) ازآن‌جا که داریم:

$$(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)=[(x+۱)(x+۷)]\times$$
$$\times[(x+۳)(x+۵)]=(x^۲+۸x+۷)(x^۲+۸x+۱۵)$$

بنابراین، با فرض $t=x^۲+۸x+۷$، می‌توانیم چندجمله‌ای $P_۴(x)$ را به‌صورت

$$t(t+۸)+۱۵=t^۲+۸t+۱۵=(t+۳)(t+۵)$$

بنویسیم؛ اکنون به‌جای t، مقدارش را برحسب x می‌گذاریم:

$$P_۴(x)=(x^۲+۸x+۱۰)(x^۲+۸x+۱۲)$$

هردو سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم درسمت راست برابری، ریشه‌های حقیقی دارند: ریشه‌های سه‌جمله‌ای اول $-۴+\sqrt{۶}$ و $-۴-\sqrt{۶}$ وریشه‌های سه‌جمله‌ای دوم -۶ و -۲ است، بنابراین

$$P_۴(x)=(x+۲)(x+۶)(x+۴-\sqrt{۶})(x+۴+\sqrt{۶})$$

f) $(۴x+۱)(۱۲x-۱)(۳x+۲)(x+۱)=[(۴x+۱)(۳x+۲)]\times$

$$\times[(۱۲x-۱)(x+۱)]=(۱۲x^۲+۱۱x+۲)(۱۲x^۲+۱۱x-۱)$$

که اگر فرض کنیم $t=۱۲x^۲+۱۱x+۲$، چندجمله‌ای اصلی به‌صورت

$$t(t-۳)-۴t^۲-۳t-۲=(t-۴)(t+۱)$$

درمی‌آید واگر به‌جای t، مقدارش را قراردهیم:

$$P_۴(x)=(۱۲x^۲+۱۱x-۲)(۱۲x^۲+۱۱x+۳)$$

پرانتز اول دارای دوریشه حقیقی است وپرانتز دوم، ریشهٔ حقیقی ندارد:

$$P_۴(x)=۱۲\left(x-\frac{-۱۱+\sqrt{۲۱۷}}{۲۴}\right)\left(x-\frac{-۱۱-\sqrt{۲۱۷}}{۲۴}\right)\times$$
$$\times(۱۲x^۲+۱۱x+۳)$$

g) $(x+۵)(x+۶)(x+۱۰)(x+۱۲)=[(x+۵)(x+۱۲)]\times$

$$\times[(x+۶)(x+۱۰)]=(x^۲+۱۷x+۶۰)(x^۲+۱۶x+۶۰)$$

با فرض $t=x^۲+۱۶x+۶۰$، می‌توان چندجمله‌ای مفروض $P_۴(x)$ را به‌صورت $۴t(t+x)-۳x^۲$ نوشت. ولی داریم:

$$۴t(t+x)-۳x^۲=۴t^۲+۴xt-۳x^۲=۴t^۲+۴xt+x^۲-$$
$$-۴x^۲=[(۲t+x)^۲-۴x^۲]=(۲t-x)(۲t+۳x)$$

وبه‌جای t، مقدارش را برحسب x می‌گذاریم:

$$P_۴(x)=[۲(x^۲+۱۶x+۶۰)-x][۲(x^۲+۱۶x+۶۰)+۳x]=$$
$$=(۲x^۲+۳۱x+۱۲۰)(۲x^۲+۳۵x+۱۲۰)$$

وپس از تجزیهٔ سه‌جمله‌ای‌های درجهٔ دوم، سرانجام خواهیم داشت:

$$P_۴(x)=۲(x+۸)(۲x+$$
$$+۱۵)\left(x-\frac{-۳۵+\sqrt{۲۶۵}}{۴}\right)\left(x+\frac{۳۵+\sqrt{۲۶۵}}{۴}\right)$$

h) باتوجه به‌این‌که $x\neq ۰$، می‌توان چندجمله‌ای را، به‌ترتیب، چنین نوشت:

$$P_۶(x)=۳x^۶-۴x^۵+۲x^۴-۸x^۳+۲x^۲-۴x+۳=$$
$$=x^۳\left(۳x^۳-۴x^۲+۲x-۸+\frac{۲}{x}-\frac{۴}{x^۲}+\frac{۳}{x^۳}\right)=$$
$$=x^۳\left[۳\left(x^۳+\frac{۱}{x^۳}\right)-۴\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)+۲\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۸\right]$$

که اگر فرض کنیم $t=x+\frac{۱}{x}$، باتوجه به‌این‌که

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲=t^۲-۲،$$
$$x^۳+\frac{۱}{x^۳}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)=t^۳-۳t$$

به‌دست می‌آید:

$$P_۶(x)=x^۳(۳t^۲-۹t-۴t^۲+۸+۲t-۸)=x^۳.t(۳t^۲-۴t-۷)$$

پرانتز سمت راست دارای ریشه‌های ۱ — و $\frac{۷}{۳}$ است، بنابراین

$$P_۶(x)=۳tx(t+۱)\left(t-\frac{۷}{۳}\right)$$

به‌جای t، مقدار آن را برحسب x می‌گذاریم:

$$P_۶(x)=۳x^۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)\left(x+\frac{۱}{x}+۱\right)\left(x+\frac{۱}{x}-\frac{۷}{۳}\right)=$$
$$=(x^۲+۱)(x^۲+x+۱)(۳x^۲-۷x+۱)$$

وبعد از تجزیه‌کردن آخرین پرانتز سمت راست به‌دست می‌آید:

$$P_۶(x)=۳(x^۲+۱)(x^۲+x+۱)\left(x-\frac{۷+\sqrt{۳۷}}{۶}\right)\left(x-\frac{۷-\sqrt{۳۷}}{۶}\right)$$

۲. جدا کردن عامل مشترک و گروه‌بندی.

مثال ۳۰. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

a) $P_۳(x)=۵x^۳-۵x$; b) $P_۲(x)=۲x^۲+۳x+۱$;

c) $P_۳(x)=x^۲-x^۳+۴-۴x$; d) $P_۳(x)=x^۳+۴x^۲-۵x$;

e) $P_۵(x)=x^۵+۵x^۳-۶x^۲$; f) $P_۶(x)=۳x^۶+۱۲x^۴-۹۶x^۲$

حل. به‌ترتیب داریم:

a) $P_۳(x)=۵x(x^۲-۱)=۵x(x+۱)(x-۱)$;

b) $P_۲(x)=۲x^۲+۲x+x+۱=۲x(x+۱)+(x+۱)=$
$=(x+۱)(۲x+۱)$;

c) $P_۳(x)=x^۲(۱-x)+۴(۱-x)=(۱-x)(x^۲+۴)$;

d) $P_۳(x)=x(x^۲+۴x-۵)=x(x^۲-x+۵x-۵)=$
$=x[x(x-۱)+۵(x-۱)]=x(x-۱)(x+۵)$;

e) $P_۵(x)=x^۲(x^۳+۵x-۶)=x^۲(x^۳-x^۲+x^۲-x+$
$+۶x-۶)=x^۲[x^۲(x-۱)+(x-۱)+۶(x-۱)]=$
$=x^۲(x-۱)(x^۲+x+۶)$;

f) $P_۶(x)=۳x^۲(x^۴+۴x^۲-۳۲)=۳x^۲(x^۴-۴x^۲+۸x^۲-۳۲)=$

$$=۳x^۲[x^۲(x^۲-۴)+۸(x^۲-۴)]=۳x^۲(x-۲)(x+۲)(x^۲+۸)$$

۳. استفادهٔ از اتحادها.

مثال ۳۱. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

a) $P_۳(x)=x^۳-۳x^۲-۳x+۱;$

b) $P_۴(x)=x^۴-۲x^۳+۲x-۱;$

c) $P_۴(x)=x^۴-۲x^۳+۲x^۲-۲x+۱;$

d) $P_۴(x)=x^۴+۱۵x^۲+۲x^۳+۱۴x+۲۴;$

e) $P_۶(x)=x^۶+۲۷;$ f) $P_{۱۲}(x)=۱-x^{۱۲};$

g) $P_۶(x)=x^۶+۲x^۵+۹x^۴+۱۶x^۳+۲۴x^۲+۳۲x+۱۶;$

h) $P_۷(x)=x^۷+x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$

حل. به‌ترتیب داریم:

a) $P_۳(x)=(x^۳+۱)-۳x(x+۱)=(x+۱)(x^۲-x+۱)-$
$-۳x(x+۱)=(x+۱)(x^۲-۴x+۱)=$
$=(x+۱)(x-۲-\sqrt{۳})(x-۲+\sqrt{۳});$

b) $P_۴(x)=x^۴-۲x^۲\cdot x+x^۲-x^۲+۲x-۱=(x^۲-x)^۲-$
$-(x^۲-۲x+۱)=x^۲(x-۱)^۲-(x-۱)^۲=(x-۱)^۳(x+۱);$

c) $P_۴(x)=x^۴+۲x^۲+۱-۲x(x^۲+۱)=(x^۲+۱)^۲-$
$-۲x(x^۲+۱)=(x^۲+۱)(x^۲-۲x+۱)=(x^۲+۱)(x-۱)^۲;$

d) $P_۴(x)=x^۴+۲x^۲\cdot x+x^۲+۱۴x^۲+۱۴x+۲۴=$
$=(x^۲+x)^۲+۱۴(x^۲+x)+۲۴=(x^۲+x+۱۲)(x^۲+x+۲;$

e) $P_۶(x)=(x^۲+۳)(x^۴-۳x^۲+۹)=(x^۲+۳)(x^۴+۶x^۲+$
$+۹-۹x^۲)=(x^۲+۳)[(x^۲+۳)^۲-۹x^۲]=$
$=(x^۲+۳)(x^۲-۳x+۳)(x^۲+۳x+۳);$

f) $P_{۱۲}(x)=(۱-x^۶)(۱+x^۶)=(۱-x^۳)(۱+x^۳)(۱+x^۲)\times$
$\times(۱-x^۲+x^۴)=(۱-x)(۱+x+x^۲)(۱+x)(۱-x+$
$+x^۲)(۱+x^۲)(x^۴+۲x^۲+۱-۳x^۲)=$
$=(۱-x)(۱+x)(۱+x+x^۲)(۱-x+x^۲)\times$

$$\times(x^۲-\sqrt{۳}x+۱)(x^۲+\sqrt{۳}x+۱);$$

g) $P_۶(x)=(x^۳)^۲+۲x^۳\cdot x^۲+x^۴+۸x^۴+۱۶x^۳+۲۴x^۲+$
$+۳۲x+۱۶=(x^۳+x^۲)^۲+۸x^۴+۱۶x^۳+۸x^۲+۱۶x^۲+$
$+۳۲x+۱۶=x^۴(x+۱)^۲+۸x^۲(x+۱)^۲+۱۶(x+۱)^۲=$
$=(x+۱)^۲(x^۴+۸x^۲+۱۶)=(x+۱)^۲(x^۲+۴)^۲$

h) $P_۷(x)=\frac{(x^۷+x^۶+x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)(x-۱)}{x-۱}=$

$$=\frac{x^۸-۱}{x-۱}=\frac{(x^۴-۱)(x^۴+۱)}{x-۱}=$$

$$=\frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)}{x-۱}=$$

$$=(x+۱)(x^۲+۱)(x^۲-\sqrt{۲}x+۱)(x^۲+\sqrt{۲}x+۱)$$

۴. استفاده ازقضیهٔ بِزو و روش ضریب‌های نامعین.

مثال ۳۲. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

a) $P_۳(x)=x^۳+۴x^۲+۵x+۲;$

b) $P_۴(x)=۲x^۴-۳x^۳-۷x^۲+۶x+۸$

حل. a) چون $P_۳(-۱)=۰$، بنابراین $P_۳(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است. خارج‌قسمت این تقسیم را $x^۲+\alpha x+\beta$ می‌گیریم. دراین‌صورت

$$x^۳+۴x^۲+۵x+۲=(x+۱)(x^۲+\alpha x+\beta)=x^۳+$$
$$+(\alpha+۱)x^۲+(\alpha+\beta)x+\beta$$

که اگر ضریب‌های توان‌های برابر را در دو طرف، برابر قراردهیم $\alpha=۳$ و $\beta=۲$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$P_۳(x)=(x+۱)(x^۲+۳x+۲)=(x+۱)^۲(x+۲)$$

b) چون $P_۴(۲)=۰$، بنابراین $P_۴(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است و

$$۲x^۴-۳x^۳-۷x^۲+۶x+۸=(x-۲)(۲x^۳+\alpha x^۲+\beta x+\gamma)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\alpha-۴=۳،\quad \beta-۲\alpha=-۷،\quad \gamma-۲\beta=۶،\quad -۲\gamma=۸$$

یعنی $\alpha=۱$، $\beta=-۵$ و $\gamma=-۴$. به‌این ترتیب

$$P_۴(x)=(x-۲)(۲x^۳+x^۲-۵x-۴)$$

از طرف دیگر داریم:

$$۲x^۳+x^۲-۵x-۴=۲x^۳+۲x^۲-x^۲-x-۴x-۴=$$
$$=۲x^۲(x+۱)-x(x+۱)-۴(x+۱)=(x+۱)(۲x^۲-x-۴)=$$
$$=(x+۱)\left(x-\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۴}\right)\left(x-\frac{۱-\sqrt{۳۳}}{۴}\right)$$

سرانجام

$$P_۴(x)=۲(x+۱)(x-۲)\left(x-\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۴}\right)\left(x-\frac{۱-\sqrt{۳۳}}{۴}\right)$$

۵. استفاده از قضیهٔ بزو وتقسیم ستونی.

مثال ۳۳. به‌صورت ضرب عامل‌ها درآورید:

$$P_۴(x)=۵x^۴+۹x^۳-۲x^۲-۴x-۸$$

حل. چون $P_۴(۱)=۰$، بنابراین $P_۴(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. اگر عمل تقسیم را، با روش ستونی انجام دهیم، به‌خارج قسمت $۵x^۳+۱۴x^۲+۱۲x+۸$ می‌رسیم. بنابراین

$$P_۴(x)=(x-۱)(۵x^۳+۱۴x^۲+۱۲x+۸)=(x-۱)P_۳(x)$$

چون $P_۳(-۲)=۰$، بنابراین $P_۳(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. خارج‌قسمت را با روش تقسیم ستونی پیدا می‌کنیم، $۵x^۲+۴x+۴$ به‌دست می‌آید که ریشهٔ حقیقی ندارد وقابل تجزیه نیست، به‌این ترتیب

$$P_۴(x)=(x-۱)(x+۲)(۵x^۲+۴x+۴)$$

۶. استفاده ازقضیهٔ بزو وطرح هورنر.

مثال ۳۴. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

a) $P_۳(x)=x^۳-x^۲-۸x+۱۲;$

b) $P_۳(x)=۲x^۳-x-۵x^۲+۱;$

c) $P_۳(x)=۲x^۳-۵x^۲-۱۹۶x+۹۹;$

d) $P_۴(x)=x^۴+۴x^۳-۲x^۲-۴x+۱;$

e) $P_۶(x)=x^۶+۳x^۵+۷x^۴+۹x^۳+x^۲-۳x-۱۸$

حل. a) ضریب بزرگترین درجه برابر واحد است، بنا براین، اگر $P_۳(x)$ ریشه درستی داشته باشد، این ریشه برابر با یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲ است. این مقسوم‌علیه‌ها برابرند با

$$\pm۱،\ \pm۲،\ \pm۳،\ \pm۴،\ \pm۶،\ \pm۱۲$$

آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که $P_۳(۱)=۴$، $P_۳(-۱)=۱۸$، $P_۳(۲)=۰$. به این ترتیب، $x=۲$ یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای $P_۳(x)$ است؛ یعنی $P_۳(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. طبق طرح هورنر، ضریب‌های خارج‌قسمت $P_۳(x)$ بر $x-۲$ را پیدا می‌کنیم (چه در این‌جا و چه بعد از این، جدول مربوط به‌طرح هورنر را به‌صورت خلاصه نوشته‌ایم):

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & -۱ & -۸ & ۱۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۱ & -۶ & ۰ \end{array}$$

بنا براین $x^۳-x^۲-۸x+۱۲=(x-۲)(x^۲+x-۶)$. از طرف دیگر

$$x^۲+x-۶=(x^۲-۴)+(x-۲)=(x-۲)(x+۳)$$

و بنا براین، سرانجام

$$P_۳(x)=x^۳-x^۲-۸x+۱۲=(x-۲)^۲(x-۳)$$

b) اگر $P_۳(x)$ دارای ریشهٔ گویای $\frac{p}{q}$ باشد، p مقسوم‌علیهی از $(+۱)$ و q مقسوم‌علیهی از عدد ۲ است؛ بنا براین، ریشهٔ گویای چندجمله‌ای (اگر وجود داشته باشد) در بین عددهای ±۱ و $\pm\frac{۱}{۲}$ است. با آزمایش معلوم می‌شود که $P_۳\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۰$، یعنی بر $x+\frac{۱}{۲}$ بخش‌پذیر است. طبق طرح هورنر، ضریب‌های خارج‌قسمت این تقسیم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cccc} & ۲ & -۵ & -۱ & ۱ \\ \hline -\frac{۱}{۲} & ۲ & -۶ & ۲ & ۰ \end{array}$$

بنا براین

$$P_{۳}(x)=\left(x+\frac{۱}{۲}\right)(۲x^{۲}-۶x+۲)=(۲x+۱)(x^{۲}-۳x+۱)=$$

$$=(۲x+۱)\left(x-\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(x-\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)$$

c) اگر این چندجمله‌ای ریشهٔ گویا داشته باشد، باید آن را در بین عددهای $\pm\frac{۱}{۲}$، ± ۱، $\pm\frac{۳}{۲}$، ± ۳، $\pm\frac{۹}{۲}$، $\pm\frac{۱۱}{۲}$، ± ۹، $\pm\frac{۳۳}{۲}$، ± ۳۳، $\pm\frac{۹۹}{۲}$، ± ۹۹، ± ۱۱ جست‌وجو کرد. برای پیدا کردن ریشهٔ این معادله، از گزارهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

اگر مقدارهای یك چندجمله‌ای، در دو انتهای بازه‌ای مثل $[a ، b]$، علامت‌های مختلفی داشته باشند، آن‌وقت دست‌کم یکی از ریشه‌های معادلهٔ در بازهٔ $(a ، b)$ قرار دارد.

درمورد چندجمله‌ای مفروض $P_{۳}(x)$ داریم:

$$P_{۳}(۰)=۹۹, \qquad P_{۳}(۱)=-۱۰۰$$

بنا براین، دست‌کم یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای در بازهٔ $(۰ ، ۱)$ قراردارد. بنا براین منطقی است که از بین ۲۴ عددی که در بالا داشتیم، آن‌هایی را مورد آزمایش قراردهیم که در بازهٔ $(۰ ، ۱)$ واقع‌اند؛ ازاین عددها، تنها $\frac{۱}{۲}$ متعلق به‌این بازه است.

مقدار $P_{۳}(x)$ را به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$، به جز آزمایش مستقیم، باروش‌های دیگری هم می‌توان به‌دست آورد، مثلاً به‌کمك طرح هودنر. دراغلب موردها، بهتراست ازهمین طرح هودنراستفاده کنیم، زیرا درضمن، ضریب‌های خارج‌قسمت را هم به‌ما می‌دهد.

ازطرح هودنر درمثال ما به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{c|cccc} & ۲ & -۵ & -۱۹۶ & ۹۹ \\ \hline \frac{۱}{۲} & ۲ & -۴ & -۱۹۸ & ۰ \end{array}$$

به‌این ترتیب خواهیم داشت:

$$۲x^۳-۵x^۲-۱۹۶x+۹۹=\left(x-\frac{۱}{۲}\right)(۲x^۲-۴x-۱۹۸)$$

وچون $۲x^۲-۴x-۱۹۸=۲(x+۹)(x-۱۱)$، درنتیجه

$$P_۳(x)=۲x^۳-۵x^۲-۱۹۶x+۹۹=(۲x-۱)(x+۹)(x-۱۱)$$

d) اگر این چندجمله‌ای ریشهٔ درست داشته باشد، این ریشه برابر است با ۱+ یا ۱−. چون $P_۴(۱)=۰$، بنابراین $P_۴(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است؛ به‌کمك طرح هورنر، ضریب‌های خارج‌قسمت تقسیم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|ccccc} & ۱ & ۴ & -۲ & -۴ & ۱ \\ \hline ۱ & ۱ & ۵ & ۳ & -۱ & ۰ \end{array}$$

بنابراین $P_۴(x)=(x-۱)(x^۳+۵x^۲+۳x-۱)$.

چندجمله‌ای $P_۳(x)=x^۳+۵x^۲+۳x-۱$ به‌ازای $x=-۱$ برابر صفر می‌شود و، بنابراین، بر $x+۱$ بخش‌پذیر است. به‌کمك طرح هورنر، ضریب‌های خارج‌قسمت تقسیم را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{c|cccc} & ۱ & ۵ & ۳ & -۱ \\ \hline -۱ & ۱ & ۴ & -۱ & ۰ \end{array}$$

یعنی $P_۳(x)=(x+۱)(x^۲+۴x-۱)$ و درنتیجه

$$P_۴(x)=x^۴+۴x^۳-۲x^۲-۴x+۱=(x-۱)(x+۱)(x^۲+$$
$$+۴x-۱)=(x-۱)(x+۱)(x+۲-\sqrt{۵})(x+۲+\sqrt{۵})$$

e) چون $P_۶(۱)=۰$، بنابراین طبق طرح هورنر داریم:

$$\begin{array}{c|ccccccc} & ۱ & ۳ & ۷ & ۹ & ۱ & -۳ & -۱۸ \\ \hline ۱ & ۱ & ۴ & ۱۱ & ۲۰ & ۲۱ & ۱۸ & ۰ \end{array}$$

پس $P_۶(x)=(x-۱)(x^۵+۴x^۴+۱۱x^۳+۲۰x^۲+۲۱x+۱۸)$.

بااستفاده از طرح هورنر قانع می‌شویم که چندجمله‌ای درجهٔ پنجم سمت‌راست برابری، بر $x+۲$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & ۱ & ۴ & ۱۱ & ۲۰ & ۲۱ & ۱۸ \\ \hline -۲ & ۱ & ۲ & ۷ & ۶ & ۹ & ۰ \end{array}$$

و

$$\begin{aligned} x^۵+۴x^۴+۱۱x^۳+۲۰x^۲+۲۱x+۱۸=(x+۲)(x^۴+۲x^۳+ \\ +۷x^۲+۶x+۹) \end{aligned}$$

برای چندجمله‌ای درجهٔ چهارم حاصل داریم:

$$\begin{aligned} x^۴+۲x^۳+۷x^۲+۶x+۹=x^۴+۲x^۲\cdot x+x^۲+ \\ +۶x^۲+۶x+۹=(x^۲+x)^۲+۶(x^۲+x)+۹=(x^۲+x+۳)^۲ \end{aligned}$$

وچون $x^۲+x+۳$، ریشه‌های حقیقی ندارد. سرانجام نتیجه‌می‌شود:

$$P_۶(x)=(x-۱)(x+۲)(x^۲+x+۳)^۲$$

تکلیف ۱.

۱. دراین اتحادها، a و b را پیدا کنید:

۱) $x^۴-۳x+۲=(x-۱)(x^۳+bx^۲+ax-۲)$;

۲) $$\begin{aligned} ۳x^۵-x^۴+۹x^۳-۱۲x^۲-۲۷= \\ =(x^۲+۳)(۳x^۳-x^۲+ax+b); \end{aligned}$$

۳) $$\begin{aligned} x^۶-x^۴+۳x^۲-۶۰= \\ =(x-۲)(x^۵+۲x^۴+bx^۳+۶x^۲+ax+۳۰); \end{aligned}$$

۴) $(x^۲-۱)(x^۲+ax+b)=x^۴+x^۳-x-۱$

۲. چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ بخش‌پذیر است. بااستفاده ازروش ضریب‌های نامعین، خارج‌قسمت تقسیم را پیدا کنید:

۱) $P_۴(x)=x^۴+۳x^۳-۶x^۲-۸x$، $Q_۲(x)=۲x^۲-۴x$;

۲) $P_۴(x)=x^۴+۶x^۳+۳x^۲-۲۶x-۲۴$، $Q_۲(x)=x^۲+۴x+۳$

۳. باروش ضریب‌های نامعین، خارج‌قسمت و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ را پیدا کنید:

۱) $P_۳(x)=x^۳+۲x^۲+۳x+۱$، $Q_۱(x)=x-۱$;

۲) $P_۴(x)=۲x^۴-۴x^۳-x+۱$، $Q_۱(x)=x+۲$

۴. چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$، با روش ستونی تقسیم کنید:

۱) $P_۳(x)=۲x^۳-x^۲-۵x+۴$، $Q_۱(x)=x-۳$;

۲) $P_۴(x)=۴x^۴-۲x^۳-۱۶x^۲+۵x+۹$، $Q_۲(x)=x^۲-۲x-۱$;

۳) $P_۵(x)=x^۵+۵x^۳+۶$، $Q_۲(x)=x^۲+۲x+۳$;

۴) $P_۶(x)=x^۶+x^۴+x^۳+x^۲+۱$، $Q_۲(x)=x^۲+۱$

۵. با استفاده از طرح هورنر، خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ را پیدا کنید:

۱) $P_۴(x)=۲x^۴-x^۳-۹x^۲+۱۳x-۵$، $Q_۱(x)=(x-۲)$;

۲) $P_۵(x)=۲x^۵-۶x^۴-۳x^۲+۴x$، $Q_۱(x)=(x-۳)$

۶. این چندجمله‌ای‌ها را، به‌صورت ضرب عامل‌ها، تجزیه کنید:

۱) $P_۳(x)=x^۳+۹x^۲+۲۳x+۱۵$;

۲) $P_۳(x)=۲x^۳-x^۲-۵x-۲$;

۳) $P_۴(x)=۳x^۴+۵x^۳-x^۲-۵x-۲$;

۴) $P_۴(x)=x^۴-۹x^۳+۳۰x^۲-۴۴x+۲۴$;

۵) $P_۵(x)=x^۵+۵x^۴+۳x^۳-۱۳x^۲-۸x+۱۲$;

۶) $P_۶(x)=x^۶-۲x^۵-۲۸x^۴+۵۴x^۳+۷۹x^۲-۱۰۰x-۱۰۰$

تکلیف ۲.

۱. a و b را در اتحادهای زیر به‌دست آورید:

۱) $x^۴+۲x^۳-۱۶x^۲-۲x+۱۵=$
$=(x+۱)(x^۳+ax^۲-۱۷x+b)$;

۲) $۲x^۵-۴x^۲+۵x-۳=(x-۱)(۲x^۴+ax^۳+bx^۲-۲x+۳)$;

۳) $x^۵+۲x^۴-۳x^۳+۱۴x^۲-۲۲x+۸=$
$=(x+۴)(x^۴-۲x^۳+۵x^۲+ax+b)$;

۴) $x^۵+x^۳-۲=(x-۱)(x^۴-ax^۳+۲x^۲+۲x+b)$

۲. چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ بخش‌پذیر است. با استفاده از روش ضریب‌های نامعین، خارج‌قسمت تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ را پیدا کنید:

۱) $P_۳(x)=۲x^۳-۲۷x^۲+۱۱۵x-۱۵۰$، $Q_۱(x)=x-۵$;

۲) $P_۵(x)=x^۵-۹x^۴+۲۶x^۳-۱۸x^۲-۲۷x+۲۷$، $Q_۲(x)=x^۲-۴x+۳$

۳. خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ را، با روش ضریب‌های نامعین پیدا کنید:

۱) $P_۴(x)=۲x^۴-۳x^۳-x^۲+۵x-۴$، $Q_۱(x)=x-۳$;

۲) $P_۵(x)=۳x^۵-x^۴-۲x^۳+x^۲+۴x+۵$، $Q_۲(x)=x^۲-۲x+۲$

۴. با روش ستونی، چندجمله‌ای $P(x)$ را بر چندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم کنید.

۱) $P_۳(x)=۲x^۳-۷x^۲+x+۳$، $Q_۱(x)=x-۴$;

۲) $P_۴(x)=۳x^۴-x^۳+۴x^۲-۵x-۵$، $Q_۲(x)=x^۲-۲x+۲$;

۳) $P_۴(x)=x^۴+x^۳+x^۲+x+۱$، $Q_۲(x)=x^۲+۱$;

۴) $P_۵(x)=x^۵-۳x^۳+x^۲+۲x-۱$، $Q_۲(x)=x^۲+x-۱$

۵. با استفاده از طرح هورنر، خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ را پیدا کنید:

۱) $P_۳(x)=x^۳+۳x^۲-۱۸x-۴۰$، $Q_۱(x)=(x+۲)$;

۲) $P_۳(x)=x^۳-۵x^۲-۲۶x+۱۲۰$، $Q_۱(x)=(x+۲)$;

۳) $P_۴(x)=۶x^۴-۵x^۳-۵۳x^۲+۴۵x-۹$، $Q_۱(x)=(x-۲)$;

۴) $P_۴(x)=۳۰x^۴-۳۱x^۳-۱۸۰x^۲+۷x+۶$، $Q_۱(x)=(x+۱)$

۶. چندجمله‌ای $P(x)$ را به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $P_۳(x)=x^۳+x^۲-۴x+۲$;

۲) $P_۳(x)=x^۳-x^۲-x+۱$;

۳) $P_۴(x)=x^۴-۲x^۳+۲x-۱$;

۴) $P_۴(x)=x^۴+۲x^۳-x^۲+۲x+۱$;

۵) $P_۵(x)=x^۵-۲x^۴-۸x^۳+۱۶x^۲+۱۶x-۳۲;$

۶) $P_۶(x)=x^۶+۲۷$

تکلیف ۳.

۱. چندجمله‌ای $P(x)$ را برحسب توان‌های $(x-۲)$ منظم کنید:

۱) $P_۳(x)=x^۳-۸x^۲+۲۳x-۲۴;$

۲) $P_۴(x)=x^۴-۷x^۳+۳x^۲+۶۳x-۱۰۸;$

۳) $P_۵(x)=x^۵-۱۱x^۴+۴۹x^۳-۱۱۱x^۲+۱۲۹x-۶۳;$

۴) $P_۶(x)=x^۶-۱۲x^۵+۶۰x^۴-$

$-۱۶۱x^۳+۲۴۶x^۲-۲۰۴x+۷۲$

۲. همهٔ مقدارهای a و b را پیدا کنید، به‌نحوی که چندجمله‌ای $P(x)$ برچندجمله‌ای $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد:

۱) $P_۳(x)=۲x^۳-x^۲+ax+b,$ $Q_۲(x)=x^۲-۱;$

۲) $P_۴(x)=۶x^۴-x^۳+ax^۲+bx+۴,$ $Q_۲(x)=x^۲-۴$

۳. ثابت کنید، به‌ازای هرعددطبیعی n، بخش‌پذیر است:

۱) $n^۸+۴n^۷+۶n^۶+۴n^۵+n^۴$ بر ۱۶؛

۲) $n^۴-۲n^۳+۱۱n^۲+۶۲n$ بر ۲۴.

۴. ریشه‌های این چندجمله‌ای‌ها را پیدا کنید:

۱) $P_۴(x)=۶x^۴-x^۳-۱۲۴x^۲-۱۰۱x-۲۰;$

۲) $P_۵(x)=۱۲x^۵+۲۵x^۴-۱۰۷x^۳-۲۲۷x^۲-۹x+۱۸$

۵. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $P_۳(x)=۸x^۳-۵x^۲+۵x+۳;$

۲) $P_۳(x)=۴x^۳-۱۲x^۲-۲۵x+۷۵;$

۳) $P_۳(x)=۸x^۳+۴۲x^۲+۳۷x-۱۲;$

۴) $P_۴(x)=۱۲x^۴-۵x^۳-۵۱x^۲+۲۰x+۱۲;$

۵) $P_۴(x)=۶x^۴+۵x^۳-۱۲x^۲-۵x+۶;$

۶) $P_۴(x)=۱۴x^۴-۳۷x^۳-۷۲x^۲-۱۷x+۴$

تکلیف ۴.

۱. این چندجمله‌ای‌ها را برحسب توان‌های $(x+۲)$ منظم کنید:

۱) $P_{۳}(x)=۲x^{۳}+۱۳x^{۲}+۲۵x+۱۴$;
۲) $P_{۴}(x)=۳x^{۴}+۲۴x^{۳}+۷۰x^{۲}+۸۷x+۳۸$;
۳) $P_{۵}(x)=x^{۵}+۹x^{۴}+۳۲x^{۳}+۵۷x^{۲}+۵۱x+۱۸$;
۴) $P_{۶}(x)=x^{۶}+۱۲x^{۵}+۵۹x^{۴}+۱۵۲x^{۳}+$
$+۲۱۵x^{۲}+۱۵۶x+۴۵$

۲. a و b را طوری پیدا کنید که، چندجمله‌ای $P(x)$، بر $x^{۲}-۹$ بخش‌پذیر باشد:

۱) $P_{۳}(x)=۳x^{۳}+۴x^{۲}+ax+b$;
۲) $P_{۴}(x)=۲۰x^{۴}-۳x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱۸$

۳. ثابت کنید، به‌ازای هرمقدار طبیعی n، بخش‌پذیر است:

۱) $n^{۴}+n^{۳}-n^{۲}-۳n$ بر ۶؛ ۲) $n^{۵}-n$ بر ۱۰.

۴. ریشه‌های این چندجمله‌ای‌ها را پیدا کنید:

۱) $P_{۳}(x)=۸x^{۳}+۴۲x^{۲}+۳۷x-۱۲$;
۲) $P_{۴}(x)=۶x^{۴}+۷x^{۳}-۲۲x^{۲}-۲۸x-۸$

۵. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $P_{۳}(x)=۲x^{۳}+۵x^{۲}+۱۰x+۴$;
۲) $P_{۳}(x)=۲x^{۳}+۱۹x^{۲}+۵۶x+۴۸$;
۳) $P_{۳}(x)=۸x^{۳}-۳۶x^{۲}+۵۴x-۲۷$;
۴) $P_{۴}(x)=۳x^{۴}-x^{۳}+x^{۲}+x-۴$;
۵) $P_{۴}(x)=x^{۴}-۲x^{۳}-۲۴x^{۲}+۵۰x-۲۵$;
۶) $P_{۴}(x)=۴x^{۴}-۲۴x^{۳}+۲۹x^{۲}+۴۲x-۶۳$;
۷) $P_{۴}(x)=۶x^{۴}+۵x^{۲}-۹۵x^{۲}-۸۰x-۱۶$

تمرین‌ها

۱. a و b را از اتحادهای زیر پیدا کنید:

۱) $۲x^۳-۸x^۲+۹x-۹=(x-۳)(۲x^۲+ax+b);$

۲) $۳x^۴-۷x^۳+۴x^۲-۷x+۶=(x-۲)(۳x^۳-x^۲+ax+b);$

۳) $۲x^۴+۵x^۳+۳x^۲-۲x-۸=(x^۲+x-۲)(۲x^۲+ax+b);$

۴) $x^۴-۴x^۳-۱۳x^۲+۶۴x-۴۸=$
$=(x^۲-۷x+۱۲)(x^۲+ax+b);$

۵) $x^۵-۵x^۳+۴x^۲-۳x-۲=$
$=(x-۲)(x^۴+ax^۳+bx^۲+۲x+۱);$

۶) $x^۵+۲x^۴-x^۳+۲x^۲+۴x-۸=$
$=(x+۲)^۲(x^۳+ax^۲+۳x+b);$

۷) $x^۶-x^۵-۲x^۴-۴x^۲+۴x+۸=$
$=(x^۲-x-۲)(x^۴+ax^۳+bx-۴);$

۸) $x^۶-۳x^۵+۲x^۴-۱۶x^۳+۴۸x^۲-۳۲x=$
$=(x^۲-۳x+۲)(x^۴+ax+b)$

۲. چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ بخش‌پذیر است. با روش ضریب‌های نامعین، خارج‌قسمت $P(x)$ بر $Q(x)$ را پیدا کنید: .

۱) $P_۳(x)=۲x^۳+۷x^۲+۷x+۲,\quad Q_۱(x)=x+۲;$

۲) $P_۴(x)=۳x^۴-۸x^۳+۲x^۲+۵x-۲,\quad Q_۱(x)=x-۲;$

۳) $P_۵(x)=۵x^۵-۶x^۴-x^۲+x+۱,\quad Q_۱(x)=x-۱;$

۴) $P_۶(x)=x^۶-۳x^۵-x^۴+۲x^۳+۳x^۲+x-۳,$
$Q_۱(x)=x-۳;$

۵) $P_۷(x)=۲x^۷+۳x^۶-۳x-۲,\quad Q_۱(x)=x-۱$

۳. باروش ضریب‌های نامعین، خارج‌قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ را به‌دست آورید:

۱) $P_۳(x)=x^۳-۱۹x-۳۰,\quad Q_۲(x)=x^۲+۱;$

۲) $P_۳(x)=x^۳+۶x^۲+۱۱x+۶,\quad Q_۲(x)=x^۲-۱;$

۳) $P_۴(x)=۵x^۴-x^۳-x-۴,\quad Q_۲(x)=x^۲-۴;$

۴) $P_۵(x)=x^۵-۴x^۴-۲x^۲-x+۵,\quad Q_۲(x)=x^۲-۹$

۴. با روش ستونی، چندجمله‌ای $P(x)$ را برچندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم کنید:

۱) $P_۳(x)=۵x^۳-۲x^۲-۲x-۱$، $Q_۲(x)=x^۲+۴x+۳$;

۲) $P_۳(x)=x^۳-۹x^۲+۲۷x-۲۷$، $Q_۲(x)=x^۲-۲x+۴$;

۳) $P_۴(x)=-۱۲x^۴+۴x^۳+۹x^۲-۱$، $Q_۲(x)=x^۲+۷$;

۴) $P_۴(x)=-۲۰x^۴-۱۳x^۳+۲۰x^۲+۷x+۶$، $Q_۲(x)=x^۲+x$;

۵) $P_۴(x)=x^۴-x^۲+۳$، $Q_۲(x)=x^۲-۳$;

۶) $P_۴(x)=x^۴+۷x^۳+۱۸x^۲+۲۰x+۸$، $Q_۲(x)=x^۲+۲x+۱$;

۷) $P_۵(x)=x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+۱$، $Q_۲(x)=x^۲-x-۲$;

۸) $P_۵(x)=x^۵-x^۳+۲x^۲+x+۱$، $Q_۲(x)=x^۲+۲x+۳$;

۹) $P_۶(x)=x^۶-۳x^۵-۴x^۳+x-۱$، $Q_۲(x)=x^۲+x+۱$;

۱۰) $P_۷(x)=x^۷-x^۶-۳x^۳+x+۱$، $Q_۲(x)=x^۲-x+۱$

۵. با استفاده از طرح هورنر، خارج قسمت و باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ برچندجمله‌ای $Q(x)$ را به‌دست آورید:

۱) $P_۳(x)=x^۳+۳x^۲+۳x+۱$، $Q_۱(x)=x+۱$;

۲) $P_۳(x)=۲x^۳+۳x^۲-۲x-۳$، $Q_۱(x)=x+۲$;

۳) $P_۳(x)=۶x^۳+x^۲-۲۰x-۱۲$، $Q_۱(x)=x-۳$;

۴) $P_۳(x)=۵x^۳-۲۶x^۲+۲۵x-۴$، $Q_۱(x)=x-۵$;

۵) $P_۴(x)=x^۴-۱۰x^۲+۹$، $Q_۱(x)=x+۲$;

۶) $P_۴(x)=x^۴-x^۳-۱۰x^۲+۴x+۲۴$، $Q_۱(x)=x-۱$;

۷) $P_۴(x)=x^۴-۱۵x^۲+۱۰x+۲۴$، $Q_۱(x)=x+۳$;

۸) $P_۴(x)=۶x^۴+۷x^۳-۹x^۲-۷x+۳$، $Q_۱(x)=x-۲$;

۹) $P_۵(x)=x^۵+۳x^۴-۲۰x^۳-۴۸x^۲+۶۴x$، $Q_۱(x)=x+۵$

۶. این چندجمله‌ای‌ها را برحسب توان‌های $x-۳$ منظم کنید.

۱) $P_۳(x)=x^۳-۹x^۲+۲۷x-۲۷$;

۲) $P_۳(x)=x^۳-۵x^۲+۳x+۹;$

۳) $P_۳(x)=۲x^۳-۱۸x^۲+۱۰۸;$

۴) $P_۳(x)=۳x^۳-۸۱x+۱۶۲;$

۵) $P_۴(x)=x^۴-۱۲x^۳+۵۴x^۲-۱۰۸x+۸۱;$

۶) $P_۴(x)=x^۴-۶x^۳+۱۸x^۲-۵۴x+۸۱$

۷. a و b را طوری پیدا کنید که $P(x)$ بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد:

۱) $P_۳(x)=۲x^۳-۵x^۲+ax+b$، $Q_۲(x)=x^۲-۴;$

۲) $P_۳(x)=۳x^۳+ax^۲+bx+۹$، $Q_۲(x)=x^۲-۹;$

۳) $P_۴(x)=۲x^۴+ax^۳-x^۲+bx-۱$، $Q_۲(x)=x^۲-۱;$

۴) $P_۴(x)=۳x^۴+۵x^۳+ax^۲+bx+۱۰$، $Q_۲(x)=(x-۱)(x+۲);$

۵) $P_۵(x)=۴x^۵+ax^۴-۱۱x^۳+۲۳x^۲+bx+۲$، $Q_۲(x)=(x-۱)(x+۲);$

۶) $P_۵(x)=۲x^۵-۹x^۴+۸x^۳+ax^۲+bx+۱۲;$ $Q_۲(x)=(x+۲)(x-۳)$

۸. ثابت کنید، به‌ازای هرعدد طبیعی n بخش‌پذیر است:

۱) $۲n^۳-۳n^۲+n$ بر ۶؛ ۲) $۹n^۵-۵n^۳-۴n$ بر ۱۲۰؛

۳) $n^۳+۱۱n$ بر ۶؛ ۴) $n^۴+۶n^۳+۱۱n^۲+۶n$ بر ۲۴؛

۵) $n^۵-۵n^۳+۴n$ بر ۱۲۰؛ ۶) $n^۶-n^۲$ بر ۶۰؛

۷) $n^۵-۱۲۵n^۳+۴n$ بر ۱۲۰؛ ۸) $n^۴+۲n^۳+۳n^۲+۲n$ بر ۸.

۹. ریشه‌های این چندجمله‌ای‌ها را پیدا کنید:

۱) $P_۳(x)=۵x^۳+۱۸x^۲-۱۰x-۸;$

۲) $P_۳(x)=۲x^۳-۵x^۲-۸x+۲۰;$

۳) $P_۳(x)=۳x^۳-x^۲-۲۷x+۹;$

۴) $P_۴(x)=۳x^۴+۵x^۳-۹x^۲-۹x+۱۰;$

۵) $P_۴(x)=۲x^۴-۳x^۳-x^۲+۳x-۱;$

۶) $P_۴(x)=x^۴+۱۴x^۳+۷۱x^۲+۱۵۴x+۱۲۰;$

۷) $P_۴(x)=۳x^۴-۴x^۳-۴۹x^۲+۶۴x+۱۶;$

۸) $P_۵(x)=۲x^۵-۹x^۴+۸x^۳+۱۵x^۲-۲۸x+۱۲;$

۹) $P_۵(x)=۴x^۵-۵x^۴-۱۱x^۳+۲۳x^۲-۱۳x+۲;$

۱۰) $P_۵(x)=۳x^۵-۱۹x^۴+۹x^۳+۷۱x^۲-۸۴x+۲۰$

۱۰. به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کنید:

۱) $P_۲(x)=۳x^۲-۲x-۷;$ ۲) $P_۲(x)=-۴x^۲+۵x-۱;$

۳) $P_۲(x)=-\frac{۱}{۲}x^۲+۴x-۲;$ ۴) $P_۲(x)=۲x^۲+۶x+۱;$

۵) $P_۲(x)=۳x^۲-x+۲;$ ۶) $P_۲(x)=۴x^۲-۴x+۱;$

۷) $P_۳(x)=x^۳-x^۲-۸x+۱۲;$ ۸) $P_۳(x)=x^۳+x^۲+x+۱;$

۹) $P_۳(x)=۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱;$

۱۰) $P_۳(x)=x^۳-۱۹x-۳۰;$ ۱۱) $P_۳(x)=x^۳+۲x^۲-۳;$

۱۲) $P_۳(x)=۲x^۳-۳x^۲-۲۰۰x-۹۹;$

۱۳) $P_۳(x)=۸x^۳-۷۰x^۲+۱۰۱x-۲۱;$

۱۴) $P_۳(x)=۶x^۳-۳۵x^۲-۸x+۱۲;$

۱۵) $P_۴(x)=x^۴-۳x^۲+۲;$ ۱۶) $P_۴(x)=x^۴-x^۳-x+۱;$

۱۷) $P_۴(x)=x^۴-۲x^۳+۲x^۲-۲x+۱;$

۱۸) $P_۴(x)=x^۴+۳x^۲+۲;$

۱۹) $P_۴(x)=x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۱۶x+۱۶;$

۲۰) $P_۴(x)=۶x^۴+۵x^۳-۷۴x^۲+۱۱x+۱۲;$

۲۱) $P_۴(x)=۱۰x^۴+۲۱x^۳-۵۵x^۲-۷۲x+۳۶;$

۲۲) $P_۵(x)=۶x^۵-۱۷x^۴+۵x^۳+۱۵x^۲-۱۱x+۲;$

۲۳) $P_۵(x)=x^۵-۵x^۴+۶x^۳+x^۲-۵x+۶;$

۲۴) $P_۶(x)=x^۶-x^۴-x^۲+۱$

۱۱. چند جمله‌ای $P(x)$ را برچندجمله‌ای $Q(x)$ تقسیم کنید:

۱) $P_۳(x)=۴x^۳-۲۴x^۲+۲۱x-۵،$ $Q_۱(x)=۲x-۱;$

۲) $P_۳(x)=۳x^۳+۱۹x^۲+۲۲x-۲۴،$ $Q_۱(x)=x+۳;$

۳) $P_۳(x)=۵x^۳-۴۴x^۲+۸۱x+۱۸،$ $Q_۱(x)=x-۳;$

۴) $P_۳(x)=۲x^۳-۱۹x^۲+۳۲x+۲۱$، $Q_۱(x)=x-۷$;

۵) $P_۳(x)=۳x^۳+۳۱x^۲+۸۲x+۲۴$، $Q_۱(x)=x+۴$;

۶) $P_۳(x)=۲x^۳-۲۱x^۲+۶۷x-۶۰$، $Q_۱(x)=x-۵$;

۷) $P_۴(x)=x^۴-۱۱x^۳+۳۳x^۲-۳۷x+۱۴$،
$Q_۲(x)=x^۲-۲x+۱$;

۸) $P_۴(x)=x^۴-۳x^۳-۱۴x^۲+۱۲x+۴۰$، $Q_۲(x)=x^۲-۴$;

۹) $P_۴(x)=x^۴-x^۳-۴۹x^۲-۷۱x+۱۲۰$،
$Q_۲(x)=x^۲+۸x+۱۵$;

۱۰) $P_۵(x)=۳x^۵-۲۸x^۴+۶۵x^۳+۱۶x^۲-۸۰x$،
$Q_۲(x)=۳x^۲-x-۴$

۱۲. با استفاده از طرح هورنر، ثابت کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ بخش‌پذیر است:

۱) $P_۳(x)=۶x^۳-۴۱x^۲-۷۶x+۱۶۰$، $Q_۱(x)=۲x+۵$;

۲) $P_۳(x)=۴x^۳-x^۲-۲۷x-۱۸$، $Q_۱(x)=x+۲$;

۳) $P_۳(x)=۲۱x^۳+۸۰x^۲+۵۳x+۶$، $Q_۱(x)=x+۳$;

۴) $P_۳(x)=۱۲x^۳+۴۹x^۲-۵۳x+۱۰$، $Q_۱(x)=۳x-۲$;

۵) $P_۴(x)=x^۴-۸x^۳+۱۵x^۲+۴x-۲۰$،
$Q_۲(x)=(x-۲)(x+۱)$;

۶) $P_۴(x)=x^۴-۹x^۳+۹x^۲+۴۱x-۴۲$،
$Q_۲(x)=(x-۱)(x+۲)$

۱۳. بخش‌پذیری چندجمله‌ای $P(x)$ بر چندجمله‌ای $Q(x)$ را مورد تحقیق قرار دهید:

۱) $P_۳(x)=۳۵x^۳-۱۲۴x^۲-۶۷x+۱۲$، $Q_۱(x)=۵x+۳$;

۲) $P_۳(x)=۱۸x^۳-۱۰۵x^۲+۷۷x-۱۰$، $Q_۱(x)=x-۵$;

۳) $P_۳(x)=۶۳x^۳-۱۴۹x^۲+۴۸x-۴$، $Q_۱(x)=x-۲$;

۴) $P_۳(x)=۶x^۳+۱۷x^۲-۲۳x-۷۰$، $Q_۱(x)=۲x+۵$;

۵) $P_۴(x)=۲x^۴-x^۳-۲۹x^۲+۲۶x+۴۸$، $Q_۱(x)=x-۳$;

۶) $P_۴(x)=۲x^۴+۵x^۳-۶۰x^۲+۲۵x+۲۸$، $Q_۲(x)=(x-۴)(x+۷)$

۱۴. این کسرها را ساده کنید:

۱) $\dfrac{۶x^۲+۷x-۳}{۲x^۲-x-۶}$;

۲) $\dfrac{۴x^۳-۸x^۲+۳x-۶}{۱۲x^۲+۴x^۲+۹x+۳}$;

۳) $\dfrac{x^۳-۱}{x^۴+x^۲+۱}$;

۴) $\dfrac{x^۴-۱۶}{x^۴-۴x^۳+۸x^۲-۱۶x+۱۶}$;

۵) $\dfrac{x^۸+x^۴+۱}{x^۲+x+۱}$;

۶) $\dfrac{۳x^۲+۱۲x+۹}{x^۶+۵x^۳+۶}$;

۷) $\dfrac{x^۶+x^۴+x^۲+۱}{x^۳+x^۲+x+۱}$;

۸) $\dfrac{x^۲-۱۵x+۳۶}{x^۳-۳x^۲-۲x+۶}$;

۹) $\dfrac{(x+۲)^۷-x^۷-۱۲۸}{(x+۲)^۵-x^۵-۳۲}$;

۱۰) $\dfrac{x^۴-۲x^۳+۲x-۱}{x^۴-۲x^۳+۲x^۲-۲x+۱}$.

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) $a=۱$، $b=۱$; ۲) $a=۰$، $b=-۹$; ۳) $a=۱۵$، $b=۳$; ۴) $a=۱$، $b=۱$ **۲.** ۱) $\dfrac{x^۲+۵x+۴}{۲}$;
۲) $x^۲+۲x-۸$ **۳.** ۱) $P_۳(x)=(x-۱)(x^۲+۳x+۶)+۷$;
۲) $P_۴(x)=(x+۲)(۲x^۳-۸x^۲+۱۶x-۳۳)+۶۷$
۴. ۱) $P_۳(x)=(x-۳)(۲x^۲+۵x+۱۰)+۳۴$; ۲) $P_۴(x)=$
$=(x^۲-۲x+۱)(۴x^۲+۶x)+۱۱x+۹$; ۳) $P_۵(x)=$
$=(x^۲+۲x+۳)(x^۳-۲x^۲+۶x-۶)-۶x+۲۴$;
۴) $P_۶(x)=(x^۲+۱)(x^۴+x+۱)-x$ **۵.** ۱) $P_۴(x)=$
$=(x-۲)(۲x^۳+۳x^۲-۳x+۷)+۹$; ۲) $P_۵(x)=$

$=(x-۳)(۲x^۴-۳x-۵)-۱۵$ ۶. ۱) $P_۳(x)=(x+۱)(x+$
$+۳)(x+۵)$;   ۲) $P_۳(x)=(x+۱)(x-۲)(۴x+۱)$;
۳) $P_۴(x)=(x-۱)(۳x+۲)(x+۱)^۲$;   ۴) $P_۴(x)=(x-$
$-۳)(x-۲)^۳$;   ۵) $P_۵(x)=(x-۱)^۲(x+۲)^۲(x+۳)$;
۶) $P_۵(x)=(x+۵)(x-۵)(x-۲)^۲(x+۱)^۲$

تکلیف ۲.

۱. ۱) $a=۱$، $b=۱۵$; ۲) $a=۲$، $b=۲$; ۳) $a=-۶$،
$b=۲$;   ۴) $a=۱$، $b=۲$ ۲. ۱) $P_۳(x)=(x-۵)\times$
$\times(۲x^۲-۱۷x+۳۰)$;   ۲) $P_۵(x)=(x^۲-۴x+۳)(x^۳-۵x^۲+$
$+۳x+۹)$ ۳. ۱) $P_۴(x)=(x-۳)(۲x^۳+۳x^۲+۸x+۲۹)+$
$+۸۳$;   ۲) $P_۵(x)=(x^۲-۲x+۲)(۳x^۳+۵x^۲+۲x-۵)-$
$-۱۰x+۱۵$ ۴. ۱) $P_۳(x)=(x-۴)(۲x^۲+x+۵)+۲۳$;
۲) $P_۴(x)=(x^۲-۲x+۲)(۳x^۲+۵x+۸)+x-۲۱$;
۳) $P_۳(x)=(x^۲+۱)(x^۲+x)+۱$;   ۴) $P_۵(x)=(x^۲+x-۱)\times$
$\times(x+۱)(x-۱)^۲$ ۵. ۱) $P_۳(x)=(x+۲)(x^۲+x-۲۰)$;
۲) $P_۳(x)=(x+۲)(x^۲-۷x-۱۲)+۱۴۴$;
۳) $P_۴(x)=(x-۲)(۶x^۳+۷x^۲-۳۹x-۳۳)-۷۵$; ۴) $P_۴(x)=$
$=(x+۱)(۳۰x^۳-۶۱x^۲-۱۱۹x+۱۲۶)-۱۲۰$ ۶. ۱) $P_۳(x)=$
$=(x-۱)(x+۱-\sqrt{۳})(x+۱+\sqrt{۳})$;   ۲) $P_۳(x)=(x+$
$+۱)(x-۱)^۲$;   ۳) $P_۴(x)=(x+۱)(x-۱)^۳$;   ۴) $P_۴(x)=$
$=(x^۲-x+۱)\left(x-\frac{-۳+\sqrt{۵}}{۲}\right)\left(x-\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)$;
۵) $P_۵(x)=(x+۲)^۲(x-۲)^۳$;   ۶) $P_۶(x)=(x^۲+۳)(x^۲-$
$-\sqrt{۳}x+۳)(x^۲+\sqrt{۳}x+۳)$.

تکلیف ۳.

۱. ۱) $P_۳(x)=(x-۲)^۳-۲(x-۲)^۲+۳(x-۲)-۲$;
۲) $P_۴(x)=(x-۲)^۴+(x-۲)^۳-۱۵(x-۲)^۲+۲۳(x-۲)-۱۰$;

۳) $P_۵(x)=(x-۲)^۵-(x-۲)^۴+(x-۲)^۳-(x-۲)^۲+$
$+(x-۲)-۱$; ۴) $P_۶(x)=(x-۲)^۶-(x-۲)^۳$
۲. ۱) $a=-۲$، $b=۱$; ۲) $a=-۲۵$، $b=۴$ ۳. ۱) $(n(n+$
$+۱))^۴$; ۲) $(n-۲)(n-۱)n(n+۱)+۱۲n(n+۵)$
۴. ۱) $x_۱=-۴$، $x_۲=-\frac{۱}{۲}$، $x_۳=-\frac{۱}{۳}$، $x_۴=۵$; ۲) $x_۱=-۳$،
$x_۲=-۲$، $x_۳=-\frac{۱}{۳}$، $x_۴=\frac{۱}{۴}$، $x_۵=۳$
۵. ۱) $P_۳(x)=(۸x+۳)(x^۲-x+۱)$; ۲) $P_۳(x)=(۲x-$
$-۵)(x-۳)(۲x+۵)$; ۳) $P_۳(x)=(۴x-۱)(۲x+$
$+۳)(x+۴)$; ۴) $P_۴(x)=(۴x-۳)(۳x+۱)(x-۲)(x+۲)$;
۵) $P_۴(x)=(x-۱)(x+۱)(۳x-۲)(۲x+۳)$; ۶) $P_۴(x)=$
$=(۷x-۱)(۲x+۱)(x+۱)(x-۴)$

تکلیف ۴.

۱. ۱) $P_۳(x)=۲(x+۲)^۳+(x+۲)^۲-۳(x+۲)$;
۲) $P_۴(x)=۳(x+۲)^۴-۲(x+۲)^۲-(x+۲)$; ۳) $P_۵(x)=$
$=(x+۲)^۵-(x+۲)^۴+(x+۲)^۲-(x+۲)$; ۴) $P_۶(x)=$
$=(x+۲)^۶-(x+۲)^۴-(x+۲)^۲+۱$ ۲. ۱) $a=-۲۷$،
$b=-۳۶$; ۲) $a=-۱۸۲$، $b=۲۷$ ۳. ۱) $(n-۱)n(n+$
$+۱)(n+۳)$; ۲) $(n-۱)n(n+۱)(n^۲+۱)$; ۴. ۱) $x_۱=-۴$،
$x^۲=-\frac{۳}{۲}$، $x_۳=\frac{۱}{۴}$; ۲) $x_۱=-۲$، $x_۲=-\frac{۲}{۳}$، $x_۳=-\frac{۱}{۲}$،
$x_۴=۲$ ۵. ۱) $P_۳(x)=(۲x+۱)(x^۲+۲x+۴)$; ۲) $P_۳(x)=$
$=(۲x+۳)(x+۴)^۲$; ۳) $P_۳(x)=(۲x-۳)^۳$; ۴) $P_۴(x)=$
$=(x-۱)(x+۱)(۳x^۲-x+۴)$; ۵) $P_۴(x)=(x-۱)^۲(x-$
$-۵)(x+۵)$; ۶) $P_۴(x)=(۲x-\sqrt{۷})(۲x+\sqrt{۷})(x-۳)^۲$;
۷) $P_۴(x)=(۳x+۱)(۲x+۱)(x-۴)(x+۴)$

تمرین‌ها

۱. ۱) $a=-۲،\ b=۳$; ۲) $a=۲،\ b=-۳$; ۳) $a=۳،\ b=۴$; ۴) $a=۳،\ b=-۴$; ۵) $a=۲،\ b=-۱$; ۶) $a=-۲،\ b=-۲$; ۷) $a=۰،\ b=۰$; ۸) $a=-۱۶،\ b=۰$ ۲. ۱) $P_۳(x)=(x+۲)(۲x^۲+۳x+۱)$; ۲) $P_۴(x)=(x-۲)(۳x^۳-۲x^۲-۲x+۱)$; ۳) $P_۵(x)=(x-۱)(۵x^۴-x^۳-x^۲-۲x-۱)$; ۴) $P_۶(x)=(x-۳)(x^۵-x^۳-x^۲+۱)$; ۵) $P_۷(x)=(x-۱)(۲x^۶+۵x^۵+۵x^۴+۵x^۳+۵x^۲+۵x+۲)$ ۳. ۱) $P_۳(x)=Q_۲(x)x-۲۰x-۳۰$; ۲) $P_۳(x)-=Q_۲(x)(x+۶)+۱۲x+۱۲$; ۳) $P_۴(x)=Q_۲(x)(۵x^۲-x+۲۰)-۵x+۷۶$; ۴) $P_۵(x)=Q_۲(x)(x^۳-۴x^۲+۹x-۳۸)+۸۰x-۳۳۷$ ۴. ۱) $P_۳(x)=Q_۲(x)(۵x-۲۲)+۷۱x+۶۵$; ۲) $P_۳(x)=Q_۲(x)(x-۷)+۹x+۱$; ۳) $P_۴(x)=Q_۲(x)\times(-۱۲x^۲+۴x+۹۳)-۲۸x-۶۵۲$; ۴) $P_۴(x)=Q_۲(x)\times(-۲۰x^۲+۷x+۱۳)-۶x+۶$; ۵) $P_۴(x)=Q_۲(x)(x^۲+۲)+۹$; ۶) $P_۴(x)=Q_۲(x)(x^۲+۵x+۷)+x+۱$; ۷) $P_۵(x)=Q_۲(x)(x^۳+۲x^۲+۵x+۱۰)+۲۰x+۲۱$; ۸) $P_۵(x)=Q_۲(x)(x^۳-۲x^۲+۸)-۱۵x-۲۳$; ۹) $P_۶(x)=Q_۲(x)(x^۴-۴x^۳+۳x^۲-۳x)+۴x-۱$; ۱۰) $P_۷(x)-Q_۲(x)(x^۵-x^۳-x^۲-۳x-۲)+۲x+۳$ ۵. ۱) $P_۳(x)=(x+۱)(x^۲+۲x+۱)$; ۲) $P_۳(x)=(x+۲)(۲x^۲-x)-۳$; ۳) $P_۳(x)=(x-۳)(۶x^۲+۱۹x+۳۷)+۹۹$; ۴) $P_۳(x)=(x-۵)(۵x^۲-x+۲۰)+۹۶$; ۵) $P_۴(x)=(x+۲)(x^۳-۲x^۲-۶x+۱۲)-۱۵$; ۶) $P_۴(x)=(x-۱)(x^۳-۱۰x-۶)+۱۸$; ۷) $P_۴(x)=(x+۳)(x^۳-۳x^۲-۶x+۲۸)-۶۰$; ۸) $P_۴(x)=(x-۲)(۶x^۳+۱۹x^۲+۲۹x+۵۱)+۱۰۵$; ۹) $P_۵(x)=(x+۵)(x^۴-۲x^۳-۱۰x^۲+۲x+۵۴)-۲۷۰$ ۶. ۱) $P_۳(x)=$

$=(x-۳)^۳$; ۲) $P_۳(x)=(x-۳)^۳+۴(x-۳)^۲$;
۳) $P_۳(x)=۲(x-۳)^۳-۵۴(x-۳)$; ۴) $P_۳(x)=۳(x-۳)^۳+۲۷\times$
$(x-۳)^۲$; ۵) $P_۴(x)=(x-۳)^۴$; ۶) $P_۴(x)=(x-۳)^۴+۶(x-$
$-۳)^۳+۱۸(x-۳)^۲$ ۷. ۱) $a=-۸$، $b=۲۰$; ۲) $a=-۱$،
$b=-۲۷$; ۳) $a=-۳$، $b=۳$; ۴) $a=-۹ b=-۹$; ۵) $a=-۵$،
$b=-۱۳$; ۶) $a=۳۹$;$b=-۵۲$ ۸. ۱) $(n-۱)n(n+۱)+$
$+(n-۲)(n-۱)n$; ۲) $۳(۳n^۵-۲n^۳-n)+(n-۱)n(n+۱)$، $۵(۲n^۵-$
$-n^۳-n)-۵n(n^۲-۱)-n(n^۲-۱)(n^۲-۴)$، $n(۸(n^۴-۱)+$
$+(n^۲-۴)(n^۲-۱))$; ۳) $(n-۱)n(n+۱)+۱۲n$; ۴) $n(n+$
$+۱)(n+۲)(n+۳)$; . ۵) $(n-۲)(n-۱)n(n+۱)(n+۲)$;
۶) $(n-۱)n(n+۱)(n^۲+۱)n$; ۷) $-۱۲۰n^۳+(n-۲)(n-$
$\| ۱)n(n+۱)(n+۲)$; ۸) $۴n(n+۱)+(n-۱)n(n+۱)(n+۲)$

۹. ۱) $x_۱=-۴$، $x_۲=\frac{۱+\sqrt{۱۱}}{۵}$; $x_۳=\frac{۱-\sqrt{۱۱}}{۵}$;

۲) $x_۱=-۲$، $x_۲=۲$، $x_۳=\frac{۵}{۲}$; ۳) $x_۱=-۳$; $x_۲=\frac{۱}{۳}$;

$x_۳=۳$; ۴) $x_۱=-۲$، $x_۲=-\frac{۵}{۳}$، $x_۳=x_۴=۱$; ۵) $x_۱=$

$=-۱$، $x_۲=\frac{۱}{۲}$، $x_۳=x_۴=۱$; ۶) $x_۱=-۵$، $x_۲=-۴$،

$x_۳=-۳$، $x_۴=-۲$; ۷) $x_۱=-۴$، $x_۲=\frac{۲-\sqrt{۷}}{۳}$،

$x_۳=\frac{۲+\sqrt{۷}}{۳}$، $x_۴=۴$; ۸) $x_۱=-\frac{۳}{۲}$، $x_۲=x_۳=۱$،

$x_۴=x_۵=۲$; ۹) $x_۱=-۲$، $x_۲=\frac{۱}{۴}$، $x_۳=x_۴=x_۵=۱$;

۱۰) $x_۱=-۲$، $x_۲=\frac{۱}{۳}$، $x_۳=۱$، $x_۴=۲$، $x_۵=۵$

۱۰۰۱) $۳\Big(x-\frac{۱+\sqrt{۲۲}}{۳}\Big)\times\Big(x-\frac{۱-\sqrt{۲۲}}{۳}\Big)$;
۲) $(-۴)(x-۱)\Big(x-\frac{۱}{۴}\Big)$; ۳) $\Big(-\frac{۱}{۲}\Big)(x-۲(۲+\sqrt{۳}))(x-$
$-۲(۲-\sqrt{۳}))$; ۴) $۲\Big(x-\frac{-۳+\sqrt{۷}}{۱}\Big)\times$
$\times\Big(x-\frac{-۳-\sqrt{۷}}{۲}\Big)$; ۵) $۳\Big(x^۲-\frac{x}{۳}+\frac{۲}{۳}\Big)$; ۶) $۴\Big(x-\frac{۱}{۲}\Big)^۲$;
۷) $(x+۳)(x-۲)^۲$; ۸) $(x+۱)(x^۲+۱)$; ۹) $۸\Big(x-\frac{۱}{۲}\Big)^۳$;
۱۰) $(x-۵)(x+۲)(x+۳)$; ۱۱) $(x-۱)(x^۲+۳x+۳)$;
۱۲) $۲(x-۱۱)(x+۹)\Big(x+\frac{۱}{۲}\Big)$; ۱۳) $۸\Big(x-\frac{۱}{۴}\Big)\Big(x-\frac{۳}{۲}\Big)\times$
$\times(x-۷)$; ۱۴) $۶(x-۶)\Big(x+\frac{۲}{۳}\Big)\Big(x-\frac{۱}{۲}\Big)$;
۱۵) $(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})$; ۱۶) $(x-۱)^۲\times$
$\times(x^۲+x+۱)$; ۱۷) $(x-۱)^۲(x^۲+۱)$; ۱۸) $(x^۲+۲)(x^۲+$
$+۱)$; ۱۹) $(x-۲)^۲(x^۲+۴)$; ۲۰) $۶(x-۳)(x+۴)\Big(x+$
$+\frac{۱}{۳}\Big)\Big(x-\frac{۱}{۲}\Big)$; ۲۱) $۱۰\Big(x-\frac{۲}{۵}\Big)\Big(x+\frac{۳}{۲}\Big)(x-۲)(x+۳)$;
۲۲) $۶\Big(x-\frac{۱}{۲}\Big)\Big(x-\frac{۱}{۳}\Big)(x-۱)(x+۱)(x-۲)$; ۲۳) $(x+$
$+۱)(x-۲)(x-۳)(x^۲-x+۱)$; ۲۴) $(x-۱)^۲(x+$
$+۱)^۲(x^۲+۱)$ ۱۱۰۱) $P_۳(x)=(۲x-۱)(۲x^۲-۱۱x+۵)$;
۲) $P_۳(x)=(x+۳)(۳x^۲+۱۰x-۸)$; ۳) $P_۳(x)=(x-$
$-۳)(۵x^۲-۲۹x-۶)$; ۴) $P_۳(x)=(x-۷)(۲x^۲-۵x-۳)$;
۵) $P_۳(x)=(x+۴)(۳x^۲+۱۹x+۶)$;
۶) $P_۳(x)=(x-۵)(۲x^۲-۱۱x+۱۲)$;
۷) $P_۴(x)=(x^۲-۲x+۱)(x^۲-۹x+۱۴)$;

۸) $P_۴(x)=(x^۲-۴)(x^۲-۳x-۱۰)$; ۹) $P_۴(x)=(x^۲+۸x+$
$+۱۵)(x^۲-۹x+۸)$; ۱۰) $P_۵(x)=(۳x^۲-x-۴)\times(x^۳-$
$-۹x^۲+۲۰x)$ **۱۲.** ۱) $P_۳(x)=(۲x+۵)(۳x^۲-۲۸x+$
$+۳۲)$; ۲) $P_۳(x)=(x+۲)(۴x^۲-۹x-۹)$; ۳) $P_۳(x)=$
$=(x+۳)(۲۱x^۲+۱۷x+۲)$; ۴) $P_۳(x)=(۳x-۲)(۴x^۲+$
$+۱۹x-۵)$; ۵) $P_۴(x)=(x^۲-۷x+۱۰)(x-۲)(x+۱)$;
۶) $P_۴(x)=(x-۱)(x+۲)(x^۲-۱۰x+۲۱)$ **۱۳.** ۱) $P_۳(x)=$
$=(۵x+۳)(۷x^۲-۲۹x+۴)$; ۲) $P_۳(x)=(x-۵)(۱۸x^۲-$
$-۱۵x+۲)$; ۳) $P_۳(x)=(x-۲)(۶۳x^۲-۲۳x+۲)$;
۴) $P_۳(x)=(۲x+۵)(۳x^۲+x-۱۴)$; ۵) $P_۴(x)=(x-$
$-۳)(۲x^۳+۵x^۲-۱۴x-۱۶)$; ۶) $P_۴(x)=(x-۴)(x+۷)\times$
$\times(۲x^۲-x-۱)$ **۱۴.** ۱) $\dfrac{۳x-۱}{x-۲}$, $\left(x\neq\dfrac{-۳}{۲}\right)$;
۲) $\dfrac{x-۲}{۳x+۱}$; ۳) $\dfrac{x-۱}{x^۲-x+۱}$; ۴) $\dfrac{x+۲}{x-۲}$; ۵) $(x^۲-x+۱)\times$
$\times(x^۴-x^۲+۱)$; ۶) $\dfrac{۳(x+۳)}{x^۴-x^۳+۶x^۲-۶x+۶}$, $(x\neq-۱)$;
۷) $\dfrac{x^۴+۱}{x+۱}$; ۸) $\dfrac{x-۱۲}{x^۲-۲}$, $(x\neq۳)$; ۹) $\dfrac{۷(x^۲+۲x+۴)}{۵}$,
$(x\neq۰,\ x\neq-۲)$; ۱۰) $\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$, $(x\neq۱)$

§۴. کسرهای جبری

کسری که درصورت و درمخرج آن، چندجمله‌ای‌های جبری باشند، کسر جبری نام دارد. مثلاً، کسرهای

$$\frac{۲}{a},\frac{۲ax}{۳bcy},\frac{۱۴a}{x+y},\frac{x+y}{۲x-y},\frac{۳x^۲-y+x}{(a-b)^۲}$$

کسرهایی جبری هستند.

حوزهٔ تعریف (یا دامنهٔ) کسر $\frac{A}{B}$، عبارت است از مجموعهٔ مقدارهایی که‌حرف‌های وارد در A و B قبول‌می‌کنند، به‌جز مقدارهایی که به‌ازای آن‌ها، مقدار B برابر صفر شود.

مثلاً دامنهٔ کسر جبری $\frac{a(c^۲+d^۲)}{c+d}$، مجموعهٔ همهٔ مقدارهای متناظر با مقدارهای مختلف حرف‌های a، b و c است، به‌شرطی که $c\neq -d$.

دو کسر جبری $\frac{A}{B}$ و $\frac{C}{D}$، وقتی درمجموعهٔ M متحد یکدیگرند که، در مجموعهٔ M، برابری $AD=BC$، با شرط $B\neq ۰$ و $D\neq ۰$، برقرار باشد.

مثلاً برابری $\frac{x^۲}{ax}=\frac{x}{a}$، درمجموعهٔ $M=\{(a ، x):ax\neq ۰\}$، یک اتحاد است، زیرا $x^۲.a=ax.x$. همچنین، برابری $\frac{x^۲-۱}{۲(x+۱)}=\frac{x-۱}{۲}$ در مجموعهٔ $M=\{x:x\neq -۱\}$ یک اتحاد است؛ و بالاخره، این اتحاد هم، درمجموعهٔ متناظر خود برقرار است:

$$\frac{xy+x}{x^۲y+x^۲}=\frac{۱}{x};\ M=\{(x ، y):x\neq ۰ ، \ y\neq -۱\}$$

برای هر چندجمله‌ای P، که درمجموعهٔ مقدارهای قابل قبول کسرجبری $\frac{A}{B}$ برابر صفر نباشد، برابری‌های زیر درست است:

$$\frac{A}{B}=\frac{P\cdot A}{P\cdot B}, \frac{A}{B}=\frac{A:P}{B:P}$$

یعنی صورت ومخرج یک کسر را می‌توان درچند جمله‌ای $P(x)$ ضرب و یا برآن تقسیم کرد، به شرطی که $P(x)$، درحوزهٔ مقدارهای قابل‌قبول کسر برابر صفر نشود. مثلاً

$$\frac{x^۴-۱}{(x^۲-۱)(x+۲)}=\frac{x^۲+۱}{x+۲}, \ (x\neq \pm ۱ ، \ x\neq -۲)$$

دردامنهٔ کسر جبری $\frac{A}{B}$، این برابری‌ها برقرارند:

$$\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{-A}{B}$$

مثلاً به‌ازای $p(y-۵x+۴)\neq ۰$ داریم:

$$\frac{m}{p}-\frac{a^۲+b}{-۴+۵x-y}=\frac{m}{p}+\frac{a^۲+b}{y-۵x+۴}$$

مخرج مشترك چند کسرجبری، به‌چندجمله‌ای گفته می‌شود که بر مخرج هر کدام از کسرها، بخش‌پذیر باشد. مثلاً برای کسرهای

$$\frac{x}{x+۲} \text{ و } \frac{۳x-۱}{x-۲}$$

این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به‌عنوان مخرج مشترك درنظر گرفت:

$$(x+۲)(x-۲)=x^۲-۴;\quad ۲(x^۲-۴);\quad x(x^۲-۴)$$

مخرج‌مشترکی که، همهٔ مخرج‌های مشترك‌دیگر، بر آن بخش‌پذیر باشند، کوچکترین مخرج‌مشترك نامیده می‌شود. درمثال بالا، کوچکترین مخرج مشترك دو کسرعبارت است از $x^۲-۴$.

برای این‌که چند کسر جبری را، با کوچکترین مخرج مشترك، دردامنهٔ آن‌ها، بنویسیم، باید ابتدا همهٔ مخرج‌ها را تجزیه کرد و، سپس، صورت و مخرج هر کسر را درعامل‌هایی ازمخرج‌ها ضرب کرد که درمخرج این کسر وجود ندارند.

مثال ۱. کسرهای زیر را، باکوچکترین مخرج مشترك خود بنویسید:

a) $\frac{b}{۳x^۲}, \frac{cx}{۴a^۲x}, \frac{۷c}{۶ax^۳};$ b) $\frac{۵x}{۴-a^۲}, \frac{۱۳}{۶+۳a}, \frac{ax}{۱۰-۵a};$

c) $\frac{۱}{x-y}, \frac{۱}{x^۲-y^۲}, \frac{۱}{x^۳-y^۳};$

d) $\frac{۴c+d}{۲a^۴x}, \frac{۲}{ax^۳b}, \frac{a+۱}{۲a^۲-۴a+۲}, \frac{۳}{-a^۲b+ab}$

حل. a) صورت ومخرج کسر اول را در $۴a^۲x$، صورت ومخرج کسر

دوم را در $۳x^۲$ و صورت ومخرج کسر سوم را در $۲a$ ضرب می کنیم، به‌این کسرها می‌رسیم

$$\frac{۴a^۲bx}{۱۲a^۲x^۳}, \frac{۳cx^۳}{۱۲a^۲x^۳}, \frac{۱۴ac}{۱۲a^۲x^۳}$$

b) مخرج هر کسر را، به‌ضرب عامل‌ها تجزیه می کنیم

$$۴-a^۲=(۲-a)(۲+a); \qquad ۶+۳a=۳(۲+a);$$
$$۱۰-۵a=۵(۲-a)$$

صورت و مخرج عدد کسر اول را در ۱۵، کسر دوم را در $۵(۲-a)$، کسر سوم را در $۳(۲+a)$ ضرب می کنیم، این کسرها به‌دست می آید:

$$\frac{۷۵x}{۱۵(۴-a^۲)}, \frac{۶۵(۲-a)}{۱۵(۴-a^۲)}, \frac{۳ax(۲+a)}{۱۵(۴-a^۲)}$$

c) مخرج هر کسر را تجزیه می کنیم:

$$x^۲-y^۲=(x-y)(x+y); \quad x^۳-y^۳=(x-y)(x^۲+xy+y^۲)$$

صورت ومخرج کسر اول را در $(x+y)(x^۲+xy+y^۲)$، کسردوم را در $x^۲+xy+y^۲$، کسر سوم را در $x+y$ ضرب می کنیم، به‌دست می آید:

$$\frac{(x+y)(x^۲+xy+y^۲)}{(x-y)(x+y)(x^۲+xy+y^۲)}, \frac{x^۲+xy+y^۲}{(x-y)(x+y)(x^۲+xy+y^۲)},$$
$$\frac{x+y}{(x-y)(x+y)(x^۲+xy+y^۲)}$$

d) مخرج‌ها را تجزیه می کنیم:

$$۲a^۲-۴a+۲=۲(a-۱)^۲; \quad -a^۲b+ab=-ab(a-۱)$$

که اگر صورت ومخرج‌را در کسرهای اول ودوم، سوم وچهارم را، به‌ترتیب در

$$-x^۲b(a-۱)^۲, \quad -۲a^۳(a-۱)^۲, \quad -a^۴x^۳b, \quad ۲a^۳x^۳(a-۱)$$

ضرب کنیم، به‌کسرهای زیر می‌رسیم:

$$\frac{-(۳c+d)x^۲b(a-۱)^۲}{-۲a^۴x^۳b(a-۱)^۲}, \frac{-۴a^۳(a-۱)^۲}{-۲a^۴x^۳b(a-۱)^۲},$$
$$\frac{-a^۴x^۳b(a+۱)}{-۲a^۴x^۳b(a-۱)^۲}, \frac{۶a^۳x^۳(a-۱)}{-۲a^۴x^۳b(a-۱)^۲}$$

مجموع (یا تفاضل) دو کسر جبری که مخرج‌هایی برابر داشته باشند، برابر کسری است با همان مخرج مشترک دو کسر، و با صورتی برابر مجموع (یا تفاضل) صورت‌ها:

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\ \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C};$$

$$\frac{x-y}{۲a}-\frac{x+y}{۲a}+\frac{x}{۲a}=\frac{(x-y)-(x+y)+x}{۲a}=\frac{x-۲y}{۲a}(a\neq ۰);$$

$$\frac{۲y}{a-b}+\frac{x-y}{a-b}-\frac{۲x-y}{a-b}=\frac{۲y-x}{a-b}(a\neq b)$$

برای محاسبهٔ مجموع (یا تفاضل) دو کسر با مخرج‌های مختلف، ابتدا آن‌ها را با کوچکترین مخرج مشترک می‌نویسیم و، سپس، آن‌ها را باهم جمع (یا ازهم کم) می‌کنیم:

مثال ۲. این عمل‌ها را انجام دهید:

a) $\frac{۳a}{۵x^۲y}+\frac{۵b}{۴xy^۲};$ b) $\frac{۱۳}{۲x-۶}-\frac{۲x}{x^۲-۹};$

c) $\frac{۵-x}{x-y}+\frac{۶-x}{x^۲-y^۲}-\frac{۴-x}{x+y}$

حل. به‌ترتیب داریم:

a) $$\frac{۳a}{۵x^۲y}+\frac{۵b}{۴xy^۲}=\frac{۱۲ay}{۲۰a^۲y^۲}+\frac{۲۵bx}{۲۰x^۲y^۲}=\frac{۱۲ay+۲۵bx}{۲۰x^۲y^۲},$$
$$(xy\neq ۰);$$

b) $$\frac{۱۳}{۲x-۶}-\frac{۲x}{x^۲-۹}=\frac{۱۳}{۲(x-۳)}-\frac{۲x}{(x-۳)(x+۳)}=$$
$$=\frac{۱۳(x+۳)-۲x\times ۲}{۲(x-۳)(x+۳)}=\frac{۳(۳x+۱۳)}{۲(x^۲-۹)},\ (x^۲-۹\neq ۰);$$

c) $$\frac{۵-x}{x-y}+\frac{۶-x}{x^۲-y^۲}-\frac{۴-x}{x+y}=$$

$$=\frac{(۵-x)(x+y)+(۶-x)-(۴-x)(x-y)}{(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{۹y-۲xy+۶}{x^۲-y^۲},\ (x^۲-y^۲\neq ۰)$$

حاصل‌ضرب دوکسر برابراست با کسری که صورت آن‌ها، ومخرج آن برابر حاصل‌ضرب مخرج‌ها باشد، یعنی $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$؛

مثال ۳. این عمل‌ها را انجام دهید:

a) $\frac{۴ab}{۱۵dcy}\cdot\frac{۵xy}{۸ab^۲}\cdot\frac{۲by}{۳ab},\ (abcdy\neq ۰);$

b) $\frac{x^۲-y^۲}{ab}\cdot\frac{b}{x-y}\cdot\frac{a}{x+y},\ (ab(x^۲-y^۲)\neq ۰);$

c) $\frac{x^۲+yx}{۵x^۲-۵y^۲}\cdot\frac{۳x^۳-۳y^۳}{x^۲-xy},\ (x(x^۲-y^۲)\neq ۰)$

حل. به‌ترتیب داریم:

a) $\frac{۴ab}{۱۵dcy}\cdot\frac{۵xy}{۸ab^۲}\cdot\frac{۲by}{۳ab}=\frac{۴ab\cdot ۵xy\cdot ۲by}{۱۵dcy\cdot ۸ab^۲\cdot ۳ab}=\frac{xy}{۹abcd};$

b) $\frac{x^۲--y^۲}{ab}\cdot\frac{b}{x-y}\cdot\frac{a}{x+y}=\frac{(x^۲-y^۲)ab}{ab(x-y)(x+y)}=۱;$

c) $\frac{x^۲+yx}{۵x^۲-۵y^۲}\cdot\frac{۳x^۳-۳y^۳}{x^۲-xy}=\frac{x(x+y)\cdot ۳(x^۳-y^۳)}{۵(x^۲-y^۲)\cdot x(x-y)}=$

$$=\frac{۳x(x+y)(x-y)(x^۲+xy+y^۲)}{۵x(x-y)^۲(x+y)}=\frac{۳(x^۲+xy+y^۲)}{۵(x-y)}$$

برای تقسیم کسر $\frac{A}{B}$ بر کسر $\frac{C}{D}$، باید کسر $\frac{A}{B}$ را در معکـوس کسر $\frac{C}{D}$ ضرب کرد، یعنی $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$.

توجه کنیم، عمل تقسیم $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}$، تنها وقتی ممکن است که هیچ کدام از چندجمله‌ای‌های B، C و برابر صفر نباشند.

مثال ۴. این عمل‌ها را انجام دهید:

$$\text{a)}\quad \frac{a+b}{a^۲bc}:\frac{۲(a-b)}{abc},\ (abc\neq ۰،\ \ a\neq b);$$

$$\text{b)}\quad \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}:(x+y)،\ \ (x+y\neq ۰);$$

$$\text{c)}\quad \frac{m^۳-n^۳}{(mn-n^۲)^۲}:\frac{mn+m^۲}{m^۲-n^۲}،\ (mn\neq ۰،\ m\neq \pm n)$$

حل. به ترتیب داریم:

$$\text{a)}\quad \frac{a+b}{a^۲bc}:\frac{۲(a-b)}{abc}=\frac{(a+b)abc}{a^۲bc\cdot ۲(a-b)}=\frac{a+b}{۲a(a-b)}؛$$

$$\text{b)}\quad \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}:(x+y)=\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}\cdot\frac{۱}{x+y}=$$

$$=\frac{x^۲-y^۲}{(x^۲+y^۲)(x+y)}=\frac{x-y}{x^۲+y^۲}؛$$

$$\text{c)}\quad \frac{m^۳-n^۳}{(mn-n^۲)^۲}:\frac{mn+m^۲}{m^۲-n^۲}=\frac{(m^۳-n^۳)(m^۲-n^۲)}{(mn-n^۲)^۲(mn+m^۲)}=$$

$$=\frac{(m-n)(m^۲+mn+n^۲)(m-n)(m+n)}{n^۲(m-n)^۲\cdot m(n+m)}=\frac{m^۲+mn+n^۲}{n^۲m}$$

برای کسر جبری $\frac{A}{B}$ و عدد طبیعی n داریم: $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$؛ و در حالت $A\neq ۰$ و $B\neq ۰$، همیشه داریم:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\frac{۱}{\left(\frac{A}{B}\right)^n}=\frac{B^n}{A^n}؛\ \ \left(\frac{A}{B}\right)^۰=۱$$

ویژگی‌های توان‌های درست کسرهای جبری، شبیه ویژگی‌های توان‌های

درست عددها است. مثلاً

$$\text{a)}\quad \left(\frac{a^۲}{c+d}\right)^۲=\frac{a^۴}{(c+d)^۲},\ (c+d\neq ۰);$$

$$\text{b)}\quad \left(\frac{mn}{k}\right)^۵\left(\frac{bk^۲}{m^۳}\right)^۲=\frac{(mn)^۵\cdot(bk^۲)^۲}{k^۵\cdot(m^۳)^۲}=$$

$$=\frac{m^۵\cdot n^۵\cdot b^۲\cdot k^۴}{b^۵\cdot m^۶}=\frac{n^۵b^۲}{km},\ (km\neq ۰);$$

$$\text{c)}\quad \left(\frac{ab}{(a+b)^۲}\right)^{-۳}=\left(\frac{(a+b)^۲}{ab}\right)^۳=\frac{(a+b)^۶}{a^۳b^۳},\ (ab\neq ۰);$$

$$\text{d)}\quad \left(\frac{a^۲+۱}{c}\right):\frac{c+d}{k}=\frac{k}{c+d},\ (c\neq ۰,\ k\neq ۰,\ c+d\neq ۰)$$

مثال ۵. درحوزهٔ مقدارهای قابل قبول عبارت جبری، عمل کنید:

$$A=a:\frac{a-۱}{۲}-\frac{a^۳+۳a(a-۱)-۱}{۲a^۲+۲a}\cdot\frac{-۴a}{a^۲+۱-۲a}-\frac{۴a^۲}{a^۲-۱}$$

حل. حوزهٔ تعریف عبارت مفروض، عبارت است از همهٔ مقدارهای a، با شرط

$$a-۱\neq ۰,\ a^۲+a\neq ۰,\ a^۲-۱\neq ۰,\ a^۲+۱-۲a\neq ۰$$

یعنی $a\neq \pm ۱$ و $a\neq ۰$. درحوزهٔ تعریف این عبارت داریم:

$$a:\frac{a-۱}{۲}=\frac{۲a}{a-۱};$$

$$\frac{a^۳+۳a(a-۱)-۱}{۲a^۲+۲a}\cdot\frac{-۴a}{a^۲+۱-۲a}=$$

$$=\frac{[(a^۳-۱)+۳a(a-۱)](-۴a)}{۲a(a+۱)(a-۱)^۲}=$$

$$=\frac{(a-۱)(a^۲+a+۱+۳a)(-۴a)}{۲a(a+۱)(a-۱)^۲}=\frac{-۲(a^۲+۴a+۱)}{a^۲-۱}$$

وبنابراین

$$A=\frac{۲a}{a-۱}+\frac{۲(a^۲+۴a+۱)}{a^۲-۱}-\frac{۴a^۲}{a^۲-۱}=$$

$$=\frac{۲a(a+۱)+۲(a^۲+۴a+۱)-۴a^۲}{a^۲-۱}=\frac{۱۰a+۲}{a^۲-۱}$$

مثال ۶. عددهای a، b و c را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، برابری زیر برقرار باشد:

$$\frac{۱}{(x^۲+۱)(x+۱)}=\frac{ax+b}{x^۲+۱}+\frac{c}{x+۱}$$

حل. اگر کسرهای سمت‌راست برابری را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{ax+b}{x^۲+۱}+\frac{c}{x+۱}=\frac{(b+c)x^۲+(a+b)x+(b+c)}{(x^۲+۱)(x+۱)}$$

برابری فرض مساله، باید برای هرمقدار $x\neq-۱$ برقرار باشد؛ مثلاً* برای $x=۰$، $x=۱$ و $x=۲$ هم برقراراست. اگر این مقدارها را درآن قراردهیم (در سمت راست، مجموع دوکسر را، که محاسبه کرده‌ایم، درنظر بگیرید)، به‌دستگاه زیرمی‌رسیم:

$$b+c=۱,\qquad ۲a+۲b+۲c=۱,\qquad ۶a+۳b+۵c=۱$$

که ازآن‌جا $a=-\frac{۱}{۲}$، $b=\frac{۱}{۲}$ و $c=\frac{۱}{۲}$. آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که، به‌ازای این عددها، شرط مساله برقراراست.

تکلیف ۱.

۱. حوزهٔ تعریف (دامنهٔ) این عبارت‌ها را پیدا کنید:

۱) $\frac{۱}{bc}-\frac{۱}{a-۱}$؛ ۲) $\frac{a^۳-۱}{a^۲-۱}\frac{b}{a}$؛ ۳) $\frac{a}{b+c}-\frac{d}{b^۲c+c^۲b}$؛

۴) $\frac{(b+c)(a+c)}{ab+cd+cb+ad}$؛ ۵) $\frac{ab}{c-d}:\frac{c+d}{a}$؛

۶) $\frac{۱}{a}\cdot\frac{a^۲-a}{a-a^۲}:(a+۱)$.

۲. این کسرهای جبری را، به‌یک مخرج تبدیل کنید:

۱) $\frac{۲a}{cd^{۲}}, \frac{b^{۲}}{ac}, \frac{c}{۳ab^{۲}d^{۳}};$ ۲) $\frac{۱}{a-b}, \frac{۱}{ab+b^{۲}}, \frac{۱}{a^{۳}-b^{۳}};$

۳) $\frac{a^{۲}}{b(a-۱)}, \frac{۱}{۲a^{۲}-۶a+۴}, \frac{b}{(a-۲)^{۲}};$

۴) $\frac{۱}{a^{۲}+ba}, \frac{۱}{b^{۲}+ab}, \frac{۱}{a^{۳}b-b^{۳}a}, \frac{۱}{a^{۴}-b^{۴}}$

۳. این عمل‌ها را انجام دهید:

۱) $\frac{۲p+۳}{p+۱}+\frac{۲-p}{p+۱};$ ۶) $\frac{b^{۲}a-a^{۳}}{ba^{۲}}\cdot\frac{b^{۲}a}{b^{۲}-ab};$

۲) $\frac{۲-۳k}{۲a+۱}-\frac{۱+۲k}{۲a+۱};$ ۷) $\frac{x^{۲}+xy}{x^{۲}-y^{۲}}\left(\frac{x^{۲}-xy}{x^{۳}+y^{۳}}\right)^{-۱};$

۳) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+y};$ ۸) $\frac{m^{۳}-n^{۳}}{m^{۳}+n^{۳}}\left(\frac{(m-n)^{۲}}{m^{۲}-n^{۲}}\right)^{-۱}\frac{m^{۲}-mn+n^{۲}}{m^{۲}+mn+n^{۲}};$

۴) $\frac{۱}{p-q}-\frac{۱}{p+q};$ ۹) $\left(\frac{x^{۲}}{x-y}-y\right)\left(x+\frac{y^{۲}}{x+y}\right)^{-۱};$

۵) $\frac{a^{۲}-۱}{a}\cdot\frac{a^{۳}}{a-۱}\cdot\frac{۱}{a+۱};$ ۱۰) $\left(\frac{p-q}{p+q}+\frac{p+q}{p-q}\right)\left(\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\right)^{-۱};$

۱۱) $\left(\frac{n}{m-n}+\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m+n}{m^{۲}+n^{۲}}\right)\cdot\left(\frac{m-n}{m+n}\right);$

۱۲) $\left(\left(\frac{a}{۸}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶a}\right)\left(\frac{a+۲}{۱۲a}\right)^{-۱}\right)\cdot\frac{۱}{۳a+۲}.$

۴. عددهای a و b و c را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

۱) $\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+۱}+\frac{c}{x+۲};$

۲) $\frac{۱}{(x+۱)^{۲}(x+۲)}=\frac{a}{x+۱}+\frac{b}{(x+۱)^{۲}}+\frac{c}{x+۲};$

۳) $\frac{۱}{(x^{۲}+۱)(x-۱)}=\frac{ax+b}{x^{۲}+۱}+\frac{c}{x-۱}.$

تکلیف ۲.

۱. حوزهٔ تعریف این عبارت‌ها را پیدا کنید:

۱) $\frac{c}{b^۲+۱}\cdot\frac{۱}{ab}$; ۴) $\frac{a^۲b-ab}{b(a+۱)}\left(\frac{a+۱}{a-۱}\right)^{-۱}$;

۲) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}-\frac{۱}{a+c}$; ۵) $\frac{۱}{۲a+۳}-\frac{۱}{۲a-۳}+\frac{a-۲}{۲a^۲-a-۳}$;

۳) $\frac{(c+d)(a+b)}{ac-bd+ad-bc}$; ۶) $\frac{x+۲}{x^۳+x^۲+x+۱}-\frac{۱}{x-۱}$

۲. کسرها را، با کوچکترین مخرج مشترک خود بنویسید:

۱) $\frac{۱+d}{a^۲-۴}, \frac{b}{a^۲+۳a+۲}, \frac{۱}{a^۲+۲a}$;

۲) $\frac{۱}{a^۳-b^۳}, \frac{۱}{a^۲-b^۲}, \frac{۱}{a^۲+ab+b^۲}$;

۳) $\frac{۱}{a^۳+b^۳}, \frac{۱}{a^۲-b^۲}, \frac{۱}{a^۲-ab+b^۲}, \frac{۱}{۲a+۲b}$;

۴) $\frac{b}{x-۱}, \frac{d+۱}{x^۲-۱}, \frac{l}{x^۳-۱}, \frac{m}{x^۴-۱}$;

۵) $\frac{a}{a^۲b-bc^۲}, \frac{۱}{ac+a-c^۲-c}, \frac{۱}{a^۲+۲a+ac+۲c}$;

۶) $\frac{۱}{x^۲-y^۲-z^۲-۲yz}, \frac{۱}{x+y+z}, \frac{-x+y}{x-y-z}$.

۳. این عمل‌ها را انجام دهید:

۱) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$; ۲) $\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m-n}$;

۳) $\frac{۱}{x-y}-\frac{۱}{y-x}-\frac{۲x}{x^۲-y^۲}$; ۴) $\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^۲-yx}{۲x^۲-۲y^۲}$

۵) $\frac{p^۲-q^۲}{۲p^۲}\cdot\frac{pq+q^۲}{(p+q)^۲}$; ۶) $\frac{m^۳+n^۳}{m}\cdot\frac{mn}{m^۲-mn+n^۲}$;

۷) $\left(\frac{۲a}{x^۲-a^۲}+\frac{۱}{a-x}\right)\frac{x^۲-a^۲}{a+x}$; ۸) $\frac{a}{a^۳-b^۳}\left(\frac{ab^۲}{a^۲-b^۲}\right)^{-۱}$;

۹) $\frac{p^۲-۴q^۲}{(p+۲q)^۲}\left(\frac{p^۳-۸q^۳}{p^۲+۲pq+۴q^۲}\right)^{-۱}$;

۱۰) $\frac{r^۲-p^۲}{r^۲p^۲}\left(\frac{ar+ap}{rq}\right)^{-۱}\frac{rq}{a(r-p)}$;

۱۱) $\left(\frac{a+x}{a}-\frac{x-y}{x}\right)\frac{a^۲}{x^۲+ay}$;

۱۲) $\left(۱-a+\frac{a^۲-۳}{a-۱}\right)(۱-a^۲)$;

۱۳) $\frac{۱-a^۲}{۱+b}\cdot\frac{۱-b^۲}{a+a^۲}\left(۱+\frac{a}{۱-a}\right)$;

۱۴) $\frac{۱-a^۲}{(۱+ax)^۲-(a+x)^۲}\cdot\frac{x+x^۲}{۱-x}$;

۱۵) $\left(\left(\frac{x^۲}{x-y}-y\right)\left(x-\frac{y^۲}{x-y}\right)^{-۱}\right)\frac{x^۲-xy-y^۲}{x^۳+y^۳}$;

۱۶) $\frac{a^۲-b^۲}{a^۲-ax}\cdot\frac{a^۲-x^۲}{a-b}\left(x-\frac{ax}{a+x}\right)$.

۴. عددهای a و b و c را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها داشته باشیم:

۱) $\frac{۱}{x(x-۱)(x+۲)}=\frac{a}{x}=\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{x+۲}$;

۲) $\frac{۱}{(x-۱)^۲(x-۲)}=\frac{a}{x-۱}+\frac{b}{(x-۱)^۲}+\frac{c}{x-۲}$;

۳) $\frac{۱}{(x^۲+۱)x}=\frac{ax+b}{x^۲+۱}+\frac{c}{x}$; ۴) $\frac{۱}{x^۳+۱}=\frac{ax+b}{x^۲-x+۱}+\frac{c}{x+۱}$

تکلیف ۳. ساده کنید:

۱) $\frac{x^۲+xy}{x^۲+y^۲}\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$;

۲) $\left(\frac{x^۲}{a^۲}-\frac{x}{a}+۱\right)\left(\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{x}{a}+۱\right)\cdot\frac{a}{x^۴+x^۲a^۲+a^۴}$;

۳) $\frac{a+۲x}{۳a-۳x}-\frac{۳c-a}{۲a-۲c}+\frac{a^۲-cx}{a^۲-ac+cx-ax};$

۴) $\frac{۱}{a^۲+۳a+۲}+\frac{۲a}{a^۲+۴a+۳}+\frac{۱}{a^۲+۵a+۶};$

۵) $\left(\frac{m-n}{m+n}-\frac{m^۳-n^۳}{m^۳+n^۳}\right)\left(\frac{m-n}{m+n}+\frac{m^۲+n^۲}{m^۲-n^۲}\right);$

۶) $\frac{\frac{x+۱}{y}}{\frac{x+z}{yz+۱}}-\frac{۱}{y(xyz+x+z)};$

۷) $\frac{abc}{bc+ac-ab}-\frac{\frac{a-۱}{a}+\frac{b-۱}{b}-\frac{c-۱}{c}}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}-\frac{۱}{c}}.$

تکلیف ۴. ساده کنید:

۱) $\left[\left(\frac{a^۲+b^۲}{b}-a\right)\left(\frac{۱}{b}-\frac{۱}{a}\right)^{-۱}\right]\frac{a^۲-b^۲}{a^۳+b^۳};$

۲) $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{۲x}{x-y}\right)\frac{y-x}{x^۲+y^۲};$

۳) $\frac{۴xy((x+z)^۲-y^۲)}{z^۲-x^۲-y^۲+۲xy}\left(۱-\frac{۲x}{x+y+z}\right);$

۴) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)^{-۱};$

۵) $\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\right)[(x-y)^۲+xy]+\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}\right)[(x+y)^۲-xy];$

۶) $\frac{y-\frac{۱}{z}}{y-\frac{x}{xz-۱}}-\frac{۱}{z(xyz-y-x)};$

۷) $\frac{۳xyz}{xy+yz+zx}+\frac{\frac{۱-x}{x}+\frac{۱-y}{y}+\frac{۱-z}{z}}{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}}$;

۸) $\frac{۱+x}{(x-y)(x-z)}+\frac{۱+y}{(y-z)(y-x)}+\frac{۱+z}{(z-x)(z-y)}$;

۹) $\frac{a-c}{a^۲+ab+b^۲}\cdot\frac{a^۳-b^۳}{a^۲b-bc^۲}\left(۱+\frac{c}{a-c}-\frac{۱+c}{c}\right):\frac{c(۱+c)-a}{bc}$.

تمرین‌ها

۱. این کسرها را با کوچکترین مخرج مشترک خود بنویسید:

۱) $\frac{۱}{x+y}, \frac{۱}{x^۳+y^۳}, \frac{۱}{x(x^۲-xy+y^۲)}$;

۲) $\frac{۱}{a^۲-۴}, \frac{۱}{a^۳-۸}, \frac{۱}{a+۲}$;

۳) $\frac{۱}{x^۲+x+۱}, \frac{۱}{x^۲-x+۱}, \frac{۱}{x^۳+۱}, \frac{۱}{x^۳-۱}$;

۴) $\frac{۱}{۲x-۳}, \frac{۱}{۳+۲x}, \frac{۱}{۹-۴x^۲}$;

۵) $\frac{۱}{x^۲+۲x+۴}, \frac{۱}{x^۳-۸}, \frac{۱}{x^۲-۴x+۴}$;

۶) $\frac{۱}{۵x^۲-۵}, \frac{۱}{۳x^۲-۶x+۳}, \frac{۱}{۲+۴x+۲x^۲}$;

۷) $\frac{۱}{۱-۳x}, \frac{۱}{۹x^۲-۱}, \frac{۱}{۱-۶x+۹x^۲}$;

۸) $\frac{۱}{x^۲+۳x+۲}, \frac{۱}{x^۲+۵x+۶}, \frac{۱}{x^۲+۷x+۱۰}$;

۹) $\frac{۱}{۲x-۱}, \frac{۱}{۴x-۴x^۲-۱}, \frac{۱}{۸x^۳-۱۲x^۲+۶x-۱}$;

۱۰) $\frac{۱}{x^۲-۱}, \frac{۱}{x^۳-x^۲+x-۱}, \frac{۱}{x^۳+x^۲+x+۱}, \frac{۱}{x^۴-۱};$

۱۱) $\frac{۱}{۱-۴x+۳x^۲}, \frac{۱}{x^۲-۵x^۳+۴x^۴}, \frac{۱}{۱۲x^۲-۷x+۱}.$

۲. عددهای a، b و c را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم

۱) $x^۴-۲x^۳+۲x^۲-۲x+a=(x^۲-۲x+۱)(x^۲+bx+c);$

۲) $x^۳+۳x^۲-x-۳=(x-۲)(x^۲+bx+c)+a;$

۳) $۴x^۳+۷x^۲+۷x-۶=(ax+b)(x^۲+x+۱)+c;$

۴) $۴x^۴+۲۱x^۲+۵x-۹=(x^۲-x+a)(۴x^۲+bx+۱۷)+$
$+۱۴x+c;$

۵) $\frac{۱}{x^۲-۴}=\frac{a}{x-۲}+\frac{b}{x+۲};$

۶) $\frac{x+۵}{(x-۱)(x+۲)(x+۳)}=\frac{a}{x-۱}+\frac{b}{x+۲}+\frac{c}{x+۳};$

۷) $\frac{۱}{x^۳+۱}=\frac{a}{x+۱}+\frac{bx+c}{x^۲-x+۱};$

۸) $\frac{x^۲+۱}{x^۳-۱}=\frac{a}{x-۱}+\frac{bx+c}{x^۲+x+۱};$

۹) $\frac{۲x+۱}{(x^۲+۱)(x+۲)}=\frac{a}{x+۲}+\frac{bx+c}{x^۲+۱};$

۱۰) $\frac{۲x^۲-x+۱}{(x+۱)(x-۲)^۲}=\frac{a}{x+۱}+\frac{b}{x-۲}+\frac{c}{(x-۲)^۲};$

۱۱) $\frac{۳x+x^۲}{(x-۱)(۴x^۲+۸x+۱)}=\frac{a}{x-۱}+\frac{bx+c}{۴x^۲+۸x+۱}$

۳. ساده کنید:

۱) $\frac{۱۴a^۲b^۲}{۵xy}\cdot\frac{۱۰x^۲y^۳}{۲۱a^۳b^۳};$ ۲) $\frac{۹cx^۳}{۱۶ab}\cdot\frac{۲ab^۲}{c۰y}\cdot\frac{۴by^۲}{۳a۰^۲};$

۳) $\frac{x^۲y^۲-۴y^۲}{۴xy}\cdot\frac{x^۲y}{۲xy-x^۲y};$ ۴) $\frac{۲x^۳-۲y^۳}{۳x+۳y}\cdot\frac{۱۵x^۲-۱۵y^۲}{x^۲+xy+y^۲};$

۵) $\frac{a^۲-b^۲}{a^۲+b^۲}\cdot\frac{a^۴-b^۴}{a^۲-۲ab+b^۲};$ ۶) $\frac{x^۳+y^۳}{x-y}\left(\frac{x+y}{x^۳-y^۳}\right)^{-۱};$

۷) $\frac{a^۲+ab}{a^۲-b^۲}\cdot\frac{a^۳-b^۳}{ab(a+b)}$ ۸) $\frac{(x^۲+y(x+y))(x^۲-y^۲)}{(x^۳+۳xy(x+y)+y^۳)(x^۳-y^۳)};$

۹) $\frac{a^۲-۲ab+b^۲}{a^۲-ab+b^۲}\cdot\frac{a^۳+b^۳}{a-b};$

۱۰) $\frac{m^۲+m(a+b)+ab}{m^۲-(a-c)m-ac}\cdot\frac{m^۲-c^۲}{m^۲-a^۲};$

۱۱) $\frac{ac+m^۲-m(a+c)}{bc+m^۲+m(b+c)}\cdot\frac{b^۲-m^۲}{a^۲-m^۲};$ ۱۲) $\frac{ab-ad}{bc+cd}\cdot\frac{ba+ad}{bc-cd};$

۱۳) $\frac{a^۲+۲ab+b^۲}{a^۲-b^۲}\cdot\frac{a^۳-b^۳}{a^۲+b^۲+ab},$

۱۴) $\frac{x^۴-y^۴}{x^۲+y^۲-۲xy}\cdot\frac{x-y}{xy+x^۲};$

۱۵) $\frac{a^۲+b^۲-ab}{x^۲-y^۲}\cdot\frac{x^۲+y^۲-۲xy}{a^۳+b^۳};$

۱۶) $\left(\frac{۲x}{۱-۳y}+\frac{۲x}{۳y+۱}\right)\left(\frac{۴x^۲+۱۴x}{۹y^۲+۱-۶y}\right)^{-۱};$

۱۷) $\frac{۳y^۲}{x^۴-xy^۳}+\frac{y}{x^۳+x^۲y+y^۲x}-\frac{۱}{x^۲-xy},$

۱۸) $\frac{x^۳-y^۳}{۲y}\left(\frac{۲y}{۴-۲y-۲x+xy}+\frac{۲xy+۴y}{(x-y)(x^۲-۴)}\right);$

۱۹) $\frac{\frac{۱}{a+b}-\frac{۱}{a-b}}{\frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{a-b}}\cdot\frac{a}{b},$

۲۰) $\frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b+c}}{\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b+c}}\left(۱+\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\right);$

۲۱) $\dfrac{\dfrac{۱}{x-y}+\dfrac{۱}{a}}{\dfrac{۱}{x-y}-\dfrac{۱}{a}}\left(۱-\dfrac{x^{۲}+y^{۲}-a^{۲}}{۲xy}\right)^{-۱};$

۲۲) $\dfrac{۲}{۴x-x^{۲}}+\left(\dfrac{۱}{x^{۲}-۴x}+\dfrac{۲}{۱۶-x^{۲}}+\dfrac{۱}{۱۶+۴x}\right)\left(\dfrac{x+۴}{x-۴}\right)^{۲};$

۲۳) $\dfrac{\left(\dfrac{(a+b)^{۲}}{۴ab}-۱\right)\left(\dfrac{(a-b)^{۲}}{۴ab}+۱\right)}{(a+b)^{۳}-۳ab(a+b)}\times$

$\times\dfrac{((ab+(a-b)^{۲})((a+b)^{۲}-ab)}{(a-b)^{۳}+۳ab(a-b)};$

۲۴) $\dfrac{\left(۱+\dfrac{(a-b)^{۲}}{ab}\right)\left(\dfrac{(a+b)^{۲}}{ab}-۱\right)}{a^{۴}-a^{۳}b+ab^{۳}-b^{۴}}\times$

$\times\left(\dfrac{a^{۴}+a^{۳}b-ab^{۳}-b^{۴}}{((a+b)^{۳}-a^{۳}-b^{۳})(a^{۳}-b^{۳}-(a-b)^{۳})}\right)^{-۱};$

۲۵) $\left(\dfrac{۱}{a^{۲}}+\dfrac{۱}{b^{۲}}+\dfrac{۲}{a+b}\left(\dfrac{۱}{a}+\dfrac{۱}{b}\right)\right)\left(\dfrac{(a+b)^{۲}}{ab}\right)^{-۱};$

۲۶) $\left(\dfrac{۱+n}{n^{۲}-mn}-\dfrac{۱-m}{m^{۲}-mn}\right)\left(\dfrac{m+n}{m^{۲}n-n^{۲}m}\right)^{-۱};$

۲۷) $\left(\dfrac{y^{۲}-x^{۲}}{m^{۲}-n^{۲}}\cdot\dfrac{m+n}{x-y}-\dfrac{x}{n-m}\right)\cdot\dfrac{m-n}{۲y};$

۲۸) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\left(\dfrac{xy}{x^{۲}-y^{۲}}\right)^{-۱};$

۲۹) $\dfrac{x^{۳}-۹y^{۲}x}{۹y^{۲}+x^{۲}}\left(\dfrac{x+۳y}{x^{۲}-۳xy}+\dfrac{x-۳y}{۳xy+x^{۲}}\right);$

۳۰) $\left(\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{a^{۲}+b^{۲}}{b^{۲}-a^{۲}}+\dfrac{a}{a+b}\right)\dfrac{a^{۲}-b^{۲}}{۵}\left(\dfrac{a+b}{۱۵}\right)^{-۱}\cdot\dfrac{۱}{a-b};$

۳۱) $\left(\dfrac{۲-n}{n+۲}-\dfrac{n+۲}{n-۲}\right)\left(\dfrac{۲+n}{۲-n}+\dfrac{n-۲}{n+۲}\right)^{-۱};$

۳۲) $\left(\frac{x}{x^۲-y^۲}-\frac{x}{(x-y)^۲}\right)\frac{y^۲-۲xy+x^۲}{۲x}+\frac{y}{x+y};$

۳۳) $\frac{(a-b)^۲}{a}\left(\frac{a}{(a-b)^۲}+\frac{a}{b^۲-a^۲}\right)+\frac{۳a+b}{a+b};$

۳۴) $\frac{۲x}{b+x}+\left(\frac{۲y}{(x-b)^۲}-\frac{۲y}{x^۲-b^۲}\right)\left(\frac{y}{(x-b)^۲}\right)^{-۱};$

۳۵) $\left(\frac{x+y}{x-y}\left(۱-\frac{x}{x+y}\right)^{-۱}\right)\left(۱+\frac{y}{x-y}\right);$

۳۶) $\left(\frac{b}{a^۲+ab}-\frac{b-a}{b^۲+ab}\right)\left(\frac{a^۲}{b^۳-ba^۲}+\frac{۱}{a+b}\right)^{-۱};$

۳۷) $\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{۲ab}{b^۲-a^۲}\right)\frac{a}{a-b}+\left(\frac{b}{b-a}+\frac{۲ab}{a^۲-b^۲}\right);$

۳۸) $\left(\frac{y+۱}{y^۲+۱-۲y}+\frac{۱}{y-۱}\right)\left(\frac{y}{y-۱}\right)^{-۱}-\frac{۲}{y-۱};$

۳۹) $\left(\frac{n}{m-n}+\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m^۲}{n^۲}+\frac{n^۲}{m^۲}-۲\right)\left(\frac{m^۴-n^۴}{m^۲n^۲}\right)^{-۱};$

۴۰) $\left(\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-۲\right)^{-۱}\right)\left(\left(۱+\frac{y}{x}\right)\frac{x}{x-y}\right)^{-۱};$

۴۱) $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^۲}{a^۲-b^۲}+\frac{۱}{\left(\frac{a}{b}\right)^۲-۱}\right)^{-۱};$

۴۲) $\left(\frac{x-y}{y}-\frac{۴x}{x+y}\right)\left(۱+\frac{y+۱}{x}+\frac{y}{x^۲}\right)\left(\frac{x^۲+y^۲}{۲x^۲y}\right)^{-۱};$

۴۳) $\left(\frac{a^۲-ba}{b^۲+ab}-\frac{a^۲-۲ab+b^۲}{a^۲+ab}\right)\left(\frac{b^۲}{a^۳-ab^۲}+\frac{۱}{a+b}\right)^{-۱};$

۴۴) $\left(a^۲-b^۲-\frac{۴a^۲b-۴ab^۲}{a+b}\right)\times$

$$\times\left(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b-a}-\frac{۲ab}{a^۲-b^۲}\right)^{-۱};$$

۴۵) $\left(\frac{m+۱}{m}-\frac{۱}{m-m^۲}\right)\left(m-\frac{m^۲}{m-۱}\right)^{-۱}$;

۴۶) $\frac{۱}{x}\left(\frac{y^۲-xy}{x+y}\right)^۲\left(\frac{x+y}{(x-y)^۲}+\frac{x+y}{xy-y^۲}\right)+\frac{x}{x+y}$;

۴۷) $$\frac{x-۲}{۵}+\left(\frac{۱}{۲x-۱}\right)^۲\left(\frac{۲-x}{۱-۸x^۳}\cdot\frac{۱+۴x^۲+۲x}{۲x^۲+x}-\right.$$
$$\left.-\frac{۲+x}{x+۴x^۳-۴x^۲}\right)^{-۱};$$

۴۸) $\frac{x+۷}{x+۹}+\left(\frac{x+۷}{x^۲+۸۱-۱۸x}+\frac{x+۵}{x^۲-۸۱}\right)\left(\frac{x+۳}{x-۹}\right)^{-۲}$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) $\{(a، b، c): b\neq ۰، c\neq ۰، a\neq ۱\}$; ۲) $\{(a، b): a\neq ۰، a\neq -۱، a\neq ۱\}$; ۳) $\{(a، b، c، d): b\neq ۰، c\neq ۰، b\neq -c\}$; ۴) $\{(a، b، c، d): a\neq -c، b\neq -d\}$; ۵) $\{(a، b، c، d): c\neq d، c\neq -d، a\neq ۰\}$; ۶) $\{a: a\neq ۰، a\neq ۱، a\neq -۱\}$.

۲. ۱) $\frac{۶a^۲b^۲d}{۳ab^۲cd^۳}, \frac{۳b^۴d^۳}{۳ab^۲cd^۳}, \frac{c^۲}{۳ab^۲ca^۳}$;

۲) $\frac{b(a+b)(a^۲+ab+b^۲)}{b(a+b)(a^۳-b^۳)}, \frac{a^۳-b^۳}{b(a+b)(a^۳-b^۳)},$

$\frac{b(a+b)}{b(a+b)(a^۳-b^۳)}$; ۳) $\frac{۲a^۲(a-۲)^۲}{۲b(a-۱)(a-۲)^۲},$

$\frac{b(a-۲)}{۲b(a-۱)(a-۲)^۲}, \frac{۲b^۲(a-۱)}{۲b(a-۱)(a-۲)^۲}$;

۴) $\frac{b(a-b)(a^۲+b^۲)}{ab(a+b)(a-b)(a^۲+b^۲)}, \frac{a(a-b)(a^۲+b^۲)}{ab(a+b)(a-b)(a^۲+b^۲)},$

$\frac{a^۲+b^۲}{ab(a+b)(a-b)(a^۲+b^۲)}, \frac{ab}{ab(a^۴-b^۴)}$ **۳.** ۱) $\frac{p+۵}{p+۱}$;

۲) $\frac{۱-۵k}{۲a+۱}$; ۳) $\frac{۲x+y}{x(x+y)}$; ۴) $\frac{۲q}{p^{۲}-q^{۲}}$; ۵) $a^{۲}$، $\{a: a\neq ۰،\ a\neq ۱،\ a\neq -۱\}$; ۶) $(b+a)$، $\{(a، b): ab\neq ۰،\ b\neq a\}$;

۷) $\frac{x^{۳}+y^{۳}}{(x-y)^{۲}}$، $\{(x، y): x\neq x،\ x\neq -y\}$;

۸) ۱) $\{(m، n): m\neq n، m\neq -n\}$; ۹) $\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x^{۳}-y^{۳}}$، $\{(x، y): x\neq -y\}$; ۱۰) $\frac{۲pq}{p^{۲}-q^{۲}}$، $\{(p، q): p\neq ۰، q\neq ۰\}$;

۱۱) $\frac{۱}{m+n}$، $\{(m، n): m\neq n\}$; ۱۲) $\frac{۱}{۲}$، $\left\{a: a\neq -۲، a\neq -\frac{۲}{۳}، a\neq ۰\right\}$. ۴۰. ۱) $a=\frac{۱}{۲}$، $b=-۱$، $c=\frac{۱}{۲}$; ۲) $a=-۱$، $b=۱$، $c=۱$; ۳) $a=-\frac{۱}{۲}$، $b=-\frac{۱}{۲}$، $c=\frac{۱}{۲}$.

تکلیف ۲.

۱۰. ۱) $\{(a، b، c): a\neq ۰، b\neq ۰\}$; ۲) $\{(a، c): a\neq ۰، c\neq ۰، a\neq -c\}$; ۳) $\{(a، b، c، d): a\neq b، d\neq -c\}$; ۴) $\{(a، b): b\neq ۰، a\neq ۱، a\neq -۱\}$; ۵) $\left\{a: a\neq -۱، a\neq -\frac{۳}{۲}، a\neq \frac{۳}{۲}\right\}$; ۶) $\{x: x\neq ۱، x\neq -۱\}$.

۲۰. ۱) $\frac{(۱+d)(a^{۲}+a)}{a(a+۱)(a^{۲}-۴)}$، $\frac{ab(a-۲)}{a(a+۱)(a^{۲}-۴)}$، $\frac{(a+۱)(a-۲)}{a(a+۱)(a^{۲}-۴)}$;

۲) $\frac{a+b}{(a+b)(a^{۳}-b^{۳})}$، $\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{(a+b)(a^{۳}-b^{۳})}$، $\frac{a^{۲}-b^{۲}}{(a+b)(a^{۳}-b^{۳})}$;

۳) $\frac{۲(a^{۲}-b^{۲})}{۲(a^{۳}+b^{۳})(a-b)}$، $\frac{۲(a^{۲}-ab+b^{۲})}{۲(a-b)(a^{۳}+b^{۳})}$، $\frac{۲(a^{۲}-b^{۲})}{۲(a^{۳}+b^{۳})(a-b)}$،

$\frac{(a-b)(a^{۲}-ab+b^{۲})}{۲(a-b)(a^{۳}+b^{۳})}$;

۴) $\frac{b(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۲}+x+۱)}{(x-۱)(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۲}+x+۱)}$,

$\frac{(d+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۲}+x+۱)}{(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۳}-۱)}$, $\frac{l(x+۱)(x^{۲}+۱)}{(x+۱)(x^{۲}+۱)(x^{۳}+۱)}$,

$\frac{m(x^{۲}+x+۱)}{(x^{۴}-۱)(x^{۲}+x+۱)}$; ۵) $\frac{a(a+۲)(c+۱)}{b(a^{۲}-c^{۲})(c+۱)(a+۲)}$,

$\frac{b(a+c)(c+۲)}{b(a^{۲}-c^{۲})(c+۱)(a+۲)}$, $\frac{b(a-c)(c+۱)}{b(a^{۲}-c^{۲})(c+۱)(a+۲)}$;

۶) $\frac{۱}{(x+y+z)(x-y-z)}$, $\frac{x-y-z}{(x+y+z)(x-y-z)}$,

$\frac{(-x+y)(x+y+z)}{(x+y+z)(x-y-z)}$. ۳۰. ۱) $\frac{a^{۲}+۲ab-b^{۲}}{a^{۲}-b^{۲}}$; ۲) $\frac{m^{۲}+n^{۲}}{m^{۲}-n^{۲}}$;

۳) $\frac{۲y}{x^{۲}-y^{۲}}$; ۴) $\frac{x}{۲(x-y)}$ $\{(x، y): x\neq -y\}$; ۵) $\frac{q(p-q)}{۲p^{۲}}$,

$\{(p، q): p\neq -q\}$; ۶) $n(m+n)$، $\{(m، n): m\neq ۰\}$;

۷) $\frac{a-x}{a+x}$, $\{(a، x); x\neq a\}$; ۸) $\frac{a+b}{b^{۲}(a^{۲}+ab+b^{۲})}$, $\{(a، b):$

$a\neq ۰، a\neq b\}$; ۹) $\frac{۱}{p+۲q}$, $\{(p، q): p\neq ۲q\}$; ۱۰) $\frac{q^{۲}}{a^{۲}p^{۲}}$,

$\{(p، q، r، a): r\neq -p، r\neq ۰\}$; ۱۱) $\frac{a}{x}$, $\{(a، x، y): a\neq ۰،$

$x^{۲}+ay\neq ۰\}$; ۱۲) $۲(۱+a)(۲-a)$، $\{a: a\neq ۱\}$;

۱۳) $\frac{۱-b}{a}$, $\{(a،b): a\neq ۱،a\neq -۱،b\neq -۱\}$; ۱۴) $\frac{x}{(۱-x)^{۲}}$,

$\{(a، x): x\neq -۱، a\neq ۱، a\neq -۱\}$; ۱۵) $\frac{۱}{x+y}$, $\{(x،y):$

$x\neq y\}$; ۱۶) $\frac{x^{۲}(a+q)}{a}$، $\{(a، b، x): a\neq -x، a\neq b، a\neq x\}$.

۴. ۱) $a=-\frac{۱}{۲}$، $b=\frac{۱}{۳}$، $c=\frac{۱}{۶}$; ۲) $a=-۱، b=-۱، c=۱$

۳) $a=-۱، b=۰، c=۱$; ۴) $a=-\frac{۱}{۳}، b=\frac{۲}{۳}، c=\frac{۱}{۳}$.

تکلیف ۳.

۱) $\frac{x}{x-y}$، $\{(x، y): x\neq y\}$; ۲) $\frac{۱}{a^{۲}}$; ۳) $\frac{۱۱a-x}{۶(a-x)}$،
$\{(a، c، x): a\neq c\}$; ۴) $\frac{۲}{a+۳}$، $\{a: a\neq -۱، a\neq -۲\}$;
۵) $\frac{-۴mn}{(m+n)^{۲}}$، $\{(m، n): m\neq n\}$; ۶) ۱، $\{(x، y، z): y\neq ۰،$
$yz+۱\neq ۰، xyz+x+z\neq ۰\}$; ۷) ۱، $\{(a، b، c): a\neq ۰.$
$b\neq ۰، c\neq ۰، bc+ac-ab\neq ۰\}$.

تکلیف ۴.

۱) a، $\{(a، b): a\neq b، a\neq -b، a\neq ۰، b\neq ۰\}$; ۲) $\frac{۱}{x}$،
$\{(x، y): x\neq y\}$; ۳) $۴xy$، $\{(x، y، z): z\neq -x-y،$
$z^{۲}\neq (x-y)^{۲}\}$; ۴) $\frac{۲xy}{x^{۲}+y^{۲}}$، $\{(x، y): x\neq y، x\neq -y\}$;
۵) $\frac{۲y^{۲}}{x}$، $\{(x، y): y\neq ۰\}$; ۶) ۱، $\{(x، y، z): z\neq ۰،$
$xz-۱\neq ۰، xyz^{۲}-y-x\neq ۰\}$; ۷) ۱، $\{(x، y، z): x\neq ۰،$
$y\neq ۰، z\neq ۰، xy+xz+zy\neq ۰\}$; ۸) ۰، $\{(x، y، z): x\neq y،$
$x\neq z، z\neq y\}$; ۹) $\frac{a-b}{a^{۲}-c^{۲}}$، $\{(a، b، c): b\neq ۰، c\neq ۰\}$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\frac{x(x^۲-xy+y^۲)}{x(x^۳+y^۳)}$, $\frac{x}{x(x^۳+y^۳)}$, $\frac{x+y}{x(x^۳+y^۳)}$,

۲) $\frac{a^۲+۲a+۴}{(a+۲)(a^۳-۸)}$, $\frac{a+۲}{(a+۲)(a^۳-۸)}$, $\frac{a^۳-۸}{(a+۲)(a^۳-۸)}$;

۳) $\frac{(x^۳+۱)(x-۱)}{x^۶-۱}$, $\frac{(x^۳-۱)(x+۱)}{x^۶-۱}$, $\frac{x^۳-۱}{x^۶-۱}$, $\frac{x^۳-۱}{x^۶-۱}$;

۴) $\frac{-(۳+۲x)}{۹-۴x^۲}$, $\frac{۳-۲x}{۹-۴x^۲}$, $\frac{۱}{۹-۴x^۲}$; ۵) $\frac{(x-۲)^۲}{(x^۳-۸)(x-۲)}$,

$\frac{x-۲}{(x^۳-۸)(x-۲)}$, $\frac{x^۲+۲x+۴}{(x^۳-۸)(x-۲)}$;

۶) $\frac{۶(x^۲-۱)}{۳۰(x^۲-۱)^۲}$, $\frac{۱۰(x+۱)^۲}{۳۰(x^۲-۱)^۲}$, $\frac{۱۵(x-۱)^۲}{۳۰(x^۲-۱)^۲}$;

۷) $\frac{-(۹x^۲-۱)}{(۳x-۱)^۲(۳x+۱)}$, $\frac{۳x-۱}{(۳x-۱)^۲(۳x+۱)}$,

$\frac{۳x+۱}{(۳x-۱)^۲(۳x+۱)}$; ۸) $\frac{(x+۳)(x+۵)}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۵)}$,

$\frac{(x+۱)(x+۵)}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۵)}$,

$\frac{(x+۱)(x+۳)}{(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۵)}$; ۹) $\frac{(۲x-۱)^۲}{(۲x-۱)^۳}$, $\frac{-(۲x-۱)}{(۲x-۱)^۳}$,

$\frac{۱}{(۲x-۱)^۳}$; ۱۰) $\frac{x^۲+۱}{x^۴-۱}$, $\frac{x+۱}{x^۴-۱}$, $\frac{x-۱}{x^۴-۱}$, $\frac{۱}{x^۴-۱}$;

۱۱) $\frac{x^۲(۴x-۱)}{x^۲(۴x-۱)(x-۱)(۳x-۱)}$,

$\frac{۳x-۱}{x^۲(۴x-۱)(x-۱)(۳x-۱)}$, $\frac{x^۲(x-۱)}{x^۲(۴x-۱)(x-۱)(۳x-۱)}$.

۲. ۱) $a=۱$، $b=۰$، $c=۱$; ۲) $a=۱۵$، $b=۵$، $c=۹$;

۳) $a=۴، b=۳، c=-۹$; ۴) $a=۲، b=۴، c=-۴۳$;

۵) $a=\frac{۱}{۴}، b=-\frac{۱}{۴}$; ۶) $a=\frac{۱}{۲}، b=-۱، c=\frac{۱}{۲}$;

۷) $a=\frac{۱}{۳}، b=-\frac{۱}{۳}، c=\frac{۲}{۳}$; ۸) $a=\frac{۲}{۳}، b=\frac{۱}{۳}، c=-\frac{۱}{۳}$;

۹) $a=-\frac{۳}{۵}، b=\frac{۳}{۵}، c=\frac{۴}{۵}$; ۱۰) $a=-\frac{۱}{۳}، b=\frac{۷}{۳}، c=۷$;

۱۱) $a=\frac{۴}{۱۳}، b=-\frac{۳}{۱۳}، c=\frac{۴}{۱۳}$. ۳۰. ۱) $\frac{۴}{۳}\cdot\frac{a^{۲}xy^{۲}}{b}$،

$\{(a، b، x، y): a\neq ۰، b\neq ۰، y\neq ۰\}$; ۲) $\frac{۳}{۲}\cdot\frac{yb^{۲}}{a}$،

$\{(a، b، c، x، y): a\neq ۰، b\neq ۰، c\neq ۰، x\neq ۰، y\neq ۰\}$;

۳) $-\frac{(x+۲)xy}{۴}$، $\{(x، y): x\neq ۰، y\neq ۰، x\neq ۲\}$; ۴) $۱۰(x^{۲}-$
$-y^{۲})$، $\{(x، y): x\neq -y\}$; ۵) $(a+b)^{۲}$، $\{(a، b): a\neq ۰،$
$b\neq ۰، a\neq b\}$; ۶) $x^{۴}+x^{۲}y^{۲}+y^{۴}$، $\{(x، y): x\neq y، x\neq -y\}$;

۷) $\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{b(a+b)}$، $\{(a، b): a\neq ۰، q\neq ۰\}$; ۸) $\frac{۱}{(x+y)^{۲}}$،
$\{(x، y): x\neq y\}$; ۹) $a^{۲}-b^{۲}$، $\{(a، b): a\neq b\}$;

۱۰) $\frac{(m+b)(m-c)}{(m-a)^{۲}}$، $\{(a، b، c، m): m\neq -c، m\neq -a\}$;

۱۱) $\frac{(m-c)(m-b)}{(m+c)(m+a)}$، $\{(a، b، c، m): m\neq -b، m\neq a)$;

۱۲) $\frac{a^{۲}}{c^{۲}}$، $\{(a، b، c، d): b\neq d، b\neq -d\}$; ۱۳) $a+b$، $\{(a، b):$
$a\neq b)، a\neq -b\}$; ۱۴) $\frac{x^{۲}+y^{۲}}{x}$، $\{(x، y): x\neq y، x\neq -y\}$;

۱۵) $\frac{x-y}{(x+y)(a+b)}\{(a، b، x، y): x\neq y\}$;

۱۶) $\frac{۲(۱-۳y)}{(۳y+۱)(۲x+۷)}$، $\left\{(x، y):\ x\neq ۰، y\neq \frac{۱}{۳}\right\}$;
۱۷) $\frac{y+x}{x(x^۲+xy+y^۲)}$، $\{(x، y): x\neq y\}$; ۱۸) $\frac{x^۲+xy+y^۲}{y-۲}$،
$\{(x، y): x\neq y، x\neq ۲، x\neq -۲، y\neq ۰\}$; ۱۹) -۱، $\{(a، b):$
$ab\neq ۰، a^۲\neq b^۲\}$; ۲۰) $\frac{(b+c+a)^۲}{۲bc}$، $\{(a، b، c): b\neq -c،$
$a\neq ۰، a\neq b+c\}$; ۲۱) $\frac{۲xy}{(a-x+y)^۲}$، $\{(a، x، y): x\neq y،$
$a\neq ۰، xy\neq ۰، a\neq y-x\}$; ۲۲) $\frac{۱}{۴x}\{x: x\neq ۴، x\neq -۴\}$;
۲۳) $\frac{a^۲-b^۲}{۱۶a^۲b^۲}$، $\{(a، b): a\neq b، a\neq -b\}$; ۲۴) $\frac{۹}{a^۲-b^۲}$،
$\{(a، b): a\neq ۰، b\neq ۰\}$; ۲۵) $\frac{۱}{ab}$، $\{(a، b): a\neq -b\}$;
۲۶) -۱، $\{(m، n): m\neq ۰;\ n\neq ۰، m\neq n، m\neq -n\}$;
۲۷) $-\frac{۱}{۲}$، $\{x، y، m، n): y\neq ۰، x\neq y، n\neq m، n\neq -m\}$;
۲۸) ۴، $\{(x، y): x\neq ۰، y\neq ۰، x\neq y، x\neq -y\}$، ۲۹) ۲،
$\{(x، y): x\neq ۰، x\neq ۳y، x\neq -۳y\}$; ۳۰) ۳، $\{(a، b): a\neq b،$
$a\neq -b\}$; ۳۱) $\frac{۴+n^۲}{۴n}$، $\{(n، m): n\neq ۲، n\neq -۲\}$; ۳۲) ۰،
$\{(x، y): x\neq ۰، x\neq y، x\neq -y\}$; ۳۳) ۳، $\{(a، b): a\neq ۰،$
$a\neq b، a\neq -b\}$; ۳۴) ۴، $\{(b، x، y): y\neq ۰، x\neq b، x\neq -b\}$;
۳۵) $\frac{x}{y}$، $\{(x، y): x\neq y، x\neq -y\}$; ۳۶) $\frac{b-a}{a}$، $\{(a،b):$
$b\neq ۰، a\neq \pm b\}$; ۳۷) ۱، $\{(a، b): a\neq b، a\neq -b\}$; ۳۸) ۰،
$\{y: y\neq ۰; y\neq ۱\}$; ۳۹) ۱، $\{(m، n): m\neq ۰، n\neq ۰، m\neq n،$

$m\neq -n\}$; ۴۰) ۱، $\{(x، y): x\neq ۰، y\neq ۰، x\neq y، x\neq -y\}$; ۴۱) ۲، $\{(a، b): b\neq ۰، a\neq b، a\neq -b\}$; ۴۲) $۲(x+۱)$، $\{(x، y): x\neq ۰، y\neq ۰، x\neq -y\}$; ۴۳) $\frac{(a-b)^۲}{b}$، $\{(a، b): b\neq ۰، b\neq a، a\neq ۰، b\neq -a\}$; ۴۴) $(a-b)^۲$، $\{(a، b): a\neq b، a\neq -b\}$; ۴۵) -۱، $\{m: m\neq ۰، m\neq ۱\}$; ۴۶) ۱، $\{(x، y): x\neq ۰، y\neq ۰، x\neq y، x\neq -y\}$; ۴۷) $-\frac{۱}{۲}$، $\left\{x: x\neq ۰، x\neq \frac{۱}{۲}، x\neq -\frac{۱}{۲}\right\}$; ۴۸) ۱، $\{x: x\neq -۹، x\neq ۹، x\neq -۳\}$.

§۵. عبارت‌های شامل رادیکال‌ها

عمل روی عبارت‌های جبری شامل رادیکال‌ها، با همان قانون‌های کلی عمل با عددهای جبری و قانون‌های عمل با رادیکال‌ها، انجام می‌شود.

به‌یاد بیاوریم که، برای عددهای طبیعی $m\geqslant ۲$ و $n\geqslant ۲$ و عددهای مثبت a و b، این ویژگی‌ها برقرارند:

۱) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[nm]{a^{n+m}}$; ۲) $\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$;

۳) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$; ۴) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

۵) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a^{m-n}}$; ۶) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$;

۷) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

مثلاً، اگر $a>۰$ و $b>۰$، آن‌وقت

a) $\sqrt[۳]{a+b}\cdot\sqrt{a+b}=\sqrt[۶]{(a+b^{۵})}$; b) $\sqrt[۶]{(۲a+b)^{۳}}=\sqrt{۲a+b}$;

c) $\sqrt[۳]{a(a+b)}=\sqrt[۳]{a}\cdot\sqrt[۳]{a+b}$; d) $\dfrac{\sqrt{a+b+۱}}{\sqrt[۳]{a+b+۱}}=\sqrt[۶]{a+b+۱}$;

e) $\sqrt[۴]{\dfrac{b^{۴}c^{۲}}{(a+۲b)^{۴}}}=\dfrac{b\sqrt{c}}{a+۲b}$; f) $(\sqrt[۱۲]{(a^{۲}+b^{۴})^{۲}})^{۳}=\sqrt{a^{۲}+b^{۴}}$;

g) $\sqrt{\sqrt[۵]{۲a+b+۵}}=\sqrt[۱۰]{۲a+b+۵}$

درضمن، برای $a<۰$ و $b<۰$، این دستورها درست‌اند:

۱) $\sqrt{ab}=\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$;

۲) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{-a}{-b}}=\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$;

۳) $\sqrt[۲mn]{a^{۲m}}=\sqrt[۲mn]{(-a)^{۲m}}=\sqrt[n]{-a}$، $m\in\mathbf{N}$، $n\in\mathbf{N}$، $n\geqslant ۲$

از برخی اتحادهای جبری، می‌توان برای رادیکال‌ها هم استفاده کرد:

$$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})،\qquad a\geqslant ۰،\ b\geqslant ۰;$$

$$a-b=(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})، a\leqslant ۰،\ b\leqslant ۰;$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b})(\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{b})،\qquad a\geqslant ۰،\ b\geqslant ۰;$$

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=(\sqrt[۲n]{a}-\sqrt[۲n]{b})(\sqrt[۲n]{a}+\sqrt[۲n]{b})،\qquad a\geqslant ۰،\ b\geqslant ۰;$$

$$a-b=(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}});$$

$$a+b=(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^{۲}}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^{۲}});$$

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=(\sqrt[۳n]{a}-\sqrt[۳n]{b})(\sqrt[۳n]{a^{۲}}+\sqrt[۳n]{ab}+\sqrt[۳n]{b^{۲}})،\qquad a\geqslant ۰،\ b\geqslant ۰;$$

$$\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}=(\sqrt[۳n]{a}+\sqrt[۳n]{b})(\sqrt[۳n]{a^{۲}}-\sqrt[۳n]{ab}+\sqrt[۳n]{b^{۲}})،\qquad a\geqslant ۰،\ b\geqslant ۰$$

به‌جای $\sqrt[n]{A}$ از نماد $A^{\frac{۱}{n}}$ وبه‌جای $\sqrt[۲n+۱]{-A}$ ازنماد $-A^{\frac{۱}{۲n+۱}}$ هم‌استفاده می‌کنند.

همهٔ دستورها وویژگی‌های مربوط به‌ریشه‌ها و توان‌های بانمای گویا برای عددها، در مورد عبارت‌های جبری A و B هم درست‌اند، به‌شرطی‌که A و B درمجموعه همهٔ مقدارهای خود، مثبت باشند:

$$\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}};\ \sqrt{AB}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{B}\qquad \sqrt[۴]{A^۲}=\sqrt{A}، \dots$$

مثال ۱. مخرج کسر $\frac{۱-a^۲}{۱-\sqrt{a}}$ را گویا کنید.

حل. روش اول. حوزهٔ تعریف این عبارت، ازهمهٔ عددهای حقیقی $a\geqslant ۰$ و $a\neq ۱$ تشکیل شده‌است. چون دراین‌حوزه $۱+\sqrt{a}\neq ۰$، بنابراین می‌توانیم صورت ومخرج کسر را در $۱+\sqrt{a}$ ضرب کنیم. به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱-a^۲}{۱-\sqrt{a}}\cdot\frac{۱+\sqrt{a}}{۱+\sqrt{a}}=\frac{(۱-a)(۱+a)(۱+\sqrt{a})}{۱-a}$$

وچون درحوزهٔ تعریف ما $۱-a\neq ۰$، بنابراین

$$\frac{۱-a^۲}{۱-\sqrt{a}}=(۱+a)(۱+\sqrt{a})$$

روش دوم. درحوزهٔ تعریف عبارت، داریم:

$$۱-a^۲=(۱+a)(۱-a)=(۱+a)(۱+\sqrt{a})(۱-\sqrt{a})$$

بنابراین $\frac{۱-a^۲}{۱-\sqrt{a}}=(۱+a)(۱+\sqrt{a})$.

مثال ۲. مخرج کسر $\frac{۱}{۱+\sqrt{y}-\sqrt{u}}$ را گویا کنید.

حل. حوزهٔ تعریف این‌عبارت، شامل زوج عددهایی از $(y، u)$ است که، برای آن‌ها داشته باشیم: $y\geqslant ۰$، $u\geqslant ۰$ و $۱+\sqrt{y}-\sqrt{u}\neq ۰$. اگر صورت ومخرج این کسر را، در $۱+\sqrt{y}+\sqrt{u}\neq ۰$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{y}-\sqrt{u}}=\frac{۱+\sqrt{y}+\sqrt{u}}{(۱+\sqrt{y}-\sqrt{u})(۱+\sqrt{y}+\sqrt{u})}=$$

$$=\frac{۱+\sqrt{y}+\sqrt{u}}{۱+y-u+۲\sqrt{y}}$$

اگر $۱+y-u=۲\sqrt{y}$، آن‌گاه نتیجهٔ کسر مفروض برابر $\frac{۱+\sqrt{y}+\sqrt{u}}{۲(۱+y-u)}$ می‌شود.

اگر $۱+y-u\neq ۲\sqrt{y}$، آن‌وقت صورت و مخرج کسر اخیر را، درعبارت $۱+y-u-۲\sqrt{y}$ ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱+\sqrt{y}+\sqrt{u}}{۱+y-u+۲\sqrt{y}}=\frac{(۱+\sqrt{y}+\sqrt{u})(۱+y-u-۲\sqrt{y})}{(۱+y-u)^{۲}-۴y}$$

مثال ۳. این عبارت را ساده کنید:

$$A=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^{۲}}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

حل. حوزهٔ تعریف این عبارت، شامل زوج عددهای $(a،b)$ است که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $ab\geqslant ۰$ و $b\neq ۰$، یعنی همهٔ زوج عددهایی که برای آن‌ها یا $a\geqslant ۰$ و $b>۰$ و یا $a\leqslant ۰$ و $b<۰$ باشد.

اگر برای $(a،b)$ فرض کنیم $a\geqslant ۰$ و $b>۰$، آن‌وقت

$$A=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}\cdot\sqrt{q}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}-\sqrt{\frac{a}{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-۱-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-۱$$

اگر برای $(a،b)$ داشته باشیم $a\leqslant ۰$ و $b<۰$، آن‌گاه

$$A=\frac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}-\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}\cdot\sqrt{-b}}-\sqrt{\frac{a}{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}}-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=۱-\frac{۲\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=۱-۲\sqrt{\frac{a}{b}}$$

حاصل این عبارت را درحالت اخیر، به‌ترتیب زیرهم می‌توان به‌دست آورد:

$$A=\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^۲}}{-\sqrt{b^۲}}-\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}+۱-\sqrt{\frac{a}{b}}=۱-۲\sqrt{\frac{a}{b}}$$

به‌این‌ترتیب، حاصل عبارت A را می‌توان این‌طور نوشت:

$$A=\begin{cases}-۱ & (a\geqslant ۰،\ b>۰)\\ ۱-۲\sqrt{\dfrac{a}{b}} & (a\leqslant ۰،\ b<۰)\end{cases}$$

مثال ۴. این عبارت را ساده کنید:

$$A=\frac{\sqrt{(x+۲)^۲-۸x}}{\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}}$$

حل. حوزهٔ تعریف این عبارت را، باید با توجه به‌شرط‌های زیر پیدا کرد:

$$(x+۲)^۲-۸x\geqslant x،\ x>۰،\ \sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}\neq ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $۰>۰$ و $۲\neq ۰$. دراین حوزه داریم:

$$A=\frac{\sqrt{(x+۲)^۲-۸x}}{\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{(x-۲)^۲}\cdot\sqrt{x}}{x-۲}=\frac{|x-۲|\cdot\sqrt{x}}{x-۲}$$

اگر داشته باشیم $۰<x<۲$، آن‌وقت $|x-۲|=-(x-۲)$ و $A=-\sqrt{x}$؛ و اگر داشته باشیم $x>۲$، آن‌وقت $|x-۲|=x-۲$ و $A=\sqrt{x}$.

مثال ۵. این عبارت را ساده کنید:

$$A=\frac{\sqrt{x-\sqrt{۴(x-۱)}}+\sqrt{x+\sqrt{۴(x-۱)}}}{\sqrt{x^۲-۴(x-۱)}}\left(۱-\frac{۱}{x-۱}\right)$$

حل. حوزهٔ تعریف این عبارت، از دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$x-\sqrt{۴(x-۱)}\geqslant ۰،\quad x+\sqrt{۴(x-۱)}\geqslant ۰،$$

$$x^{۲}-۴(x-۱)>۰،\quad x-۱\neq ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $\{x:۱<x<۲، x>۲\}$.

در بازهٔ $۱<x<۲$ داریم:

$$\sqrt{x-\sqrt{۴(x-۱)}}=\sqrt{x-۱-۲\sqrt{x-۱}+۱}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۱)^{۲}}=|\sqrt{x-۱}-۱|=۱-\sqrt{x-۱};$$

$$\sqrt{x+\sqrt{۴(x-۱)}}=|۱+\sqrt{x-۱}|=۱+\sqrt{x-۱};$$

$$\sqrt{x^{۲}-۴(x-۱)}=\sqrt{(x-۲)^{۲}}=|x-۲|=۲-x;$$

$$۱-\frac{۱}{x-۱}=\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{۲-x}{۱-x};$$

$$A=\frac{۱-\sqrt{x-۱}+۱+\sqrt{x-۱}}{۲-x}\cdot\frac{۲-x}{۱-x}=\frac{۲}{۱-x}$$

ودر بازهٔ $x>۲$:

$$\sqrt{x-\sqrt{۴(x-۱)}}=|\sqrt{x-۱}-۱|=\sqrt{x-۱}-۱;$$

$$\sqrt{x+\sqrt{۴(x-۱)}}=|\sqrt{x-۱}+۱|=\sqrt{x-۱}+۱;$$

$$۱-\frac{۱}{x-۱}=\frac{x-۲}{x-۱};\quad \sqrt{x^{۲}-۴(x-۱)}=|x-۲|=x-۲;$$

$$A=\frac{\sqrt{x-۱}-۱+\sqrt{x-۱}+۱}{x-۲}\cdot\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{۲\sqrt{x-۱}}{x-۱}=\frac{۲}{\sqrt{x-۱}}$$

به‌این ترتیب

$$A=\begin{cases}\dfrac{۲}{۱-x} & (۱<x<۲)\\[2ex] \dfrac{۲}{\sqrt{x-۱}} & (x>۲)\end{cases}$$

درجریان تبدیل عبارت‌های شامل رادیکال، گاهی بهتر است رادیکال‌ها (یا برخی عبارت‌های شامل آن‌ها را) با حروف‌های جدیدی نشان دهیم و مساله را به‌تبدیل عبارتی گویا منجر کنیم.

مثال ۶. عبارت را ساده کنید:

$$\text{a)}\quad A=\frac{\sqrt[۳]{a^۴}+\sqrt[۳]{a^۲b^۲}+\sqrt[۳]{b^۴}}{\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}};$$

$$\text{b)}\quad B=\left(\frac{a+a^{\frac{۳}{۴}}\sqrt{b}+\sqrt[۴]{a}\cdot b^{\frac{۳}{۲}}+b^۲}{\sqrt{a}+۲a^{۰/۲۵}\sqrt{b}+b}\,(a^{\frac{۱}{۴}}+\sqrt{b})+\right.$$

$$\left.+\frac{۳b^{۰/۵}(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{a^{-۰/۵}}(\sqrt[۴]{a}-\sqrt{b})}\right)^{-۰/(۳)}:(\sqrt[۴]{a}+\sqrt{b})^{-۱};$$

$$\text{c)}\quad C=$$

$$=\frac{[(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(x-۲)^{۰/۵}]^{-۱}+[\sqrt{(x+۲)^{-۱}}-(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}]^{-۱}}{[(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(x-۲)^{-۰/۵}]^{-۱}-[\sqrt{(x+۲)^{-۱}}-(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}]^{-۱}}$$

$$\text{d)}\quad D=\left(\frac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}-\frac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-x^۲}-۱+x}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-۱}-\frac{۱-x}{x}\right)\frac{x}{۱-x+\sqrt{۱-x^۲}}$$

حل. a) حوزهٔ تعریف عبارت، شامل همهٔ مقدارهای عددی a و q، با شرط $a^۲+b^۲\neq x$ است. $\sqrt[۳]{a}=x$ و $\sqrt[۳]{b}=y$ می گیریم، به‌دست می‌آید:

$$A=\frac{x^۴+x^۲y^۲+y^۴}{x^۲+xy+y^۲}=\frac{(x^۲+y^۲)^۲-x^۲y^۲}{x^۲+xy+y^۲}=$$

$$=\frac{(x^۲+y^۲+xy)(x^۲+y^۲-xy)}{x^۲+xy+y^۲}=x^۲-xy+y^۲$$

بنا بر این درمجموعهٔ $\{(a، b):a^۲+b^۲\neq ۰\}$ داریم:

$$A=\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲}$$

b) حوزهٔ تعریف این عبارت، باشرط‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$a>۰، \ b\geqslant ۰، \quad \sqrt[۴]{a}-\sqrt{b}\neq ۰$$

وبنا بر این، درمجموعهٔ $\{(a، b):a>۰، b\geqslant ۰، a\neq b^۲\}$ معین است.

$\sqrt[۴]{a}=x$ و $\sqrt{b}=y$ می‌گیریم، به‌دست می‌آید:

$$B=\Bigg(\frac{x^۴+x^۳y+xy^۳+y^۴}{x^۲+۲xy+y^۲}(x+y)+$$

$$+\frac{۳y(x^۲-y^۲)}{x^{-۱}(x-y)}\Bigg)^{-\frac{۱}{۳}}:(x+y)^{-۱}=\Bigg(\frac{(x^۳+y^۳)(x+y)^۲}{(x+y)^۲}+$$

$$+۳xy(x+y)\Bigg)^{-\frac{۱}{۳}}\cdot(x+y)=[(x+y)^۳]^{-\frac{۱}{۳}}\cdot(x+y)=\frac{x+y}{x+y}=۱$$

c) حوزهٔ تعریف عبارت مفروض، بااین شرط‌ها به‌دست می‌آید:

$$x-۲>۰، \ x+۲>۰، \ \sqrt{(x+۲)^{-۱}}-(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}\neq ۰،$$

$$(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(x-۲)^{-۰/۵})^{-۱}-((\sqrt{(x+۲)^{-۱}}-(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}})^{-۱}\neq ۰$$

که‌از آن‌جا، برای‌حوزهٔ تعریف‌عبارت، به‌شرط $x>۲$ می‌رسیم. فرض‌می کنیم:

$$(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(x-۲)^{-۰/۵}=a، \ \sqrt{(x+۲)^{-۱}}-(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}=b$$

درنتیجه خواهیم داشت

$$C=\frac{a^{-۱}+b^{-۱}}{a^{-۱}-b^{-۱}}=\frac{ab(a^{-۱}+b^{-۱})}{ab(a^{-۱}-b^{-۱})}=\frac{b+a}{b-a}$$

ازطرف دیگر داریم:

$$a+b=(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}+(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}+$$

$$+(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}-(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}=۲(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}};$$

$$a-b=۲(۰-۲)^{-\frac{۱}{۲}};$$

بنابراین سرانجام به‌دست می‌آید:

$$C=\frac{۲(x+۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{-۲(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}}=-\left(\frac{x-۲}{x+۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}=-\sqrt{\frac{x-۲}{x+۲}}$$

d) برای پیدا کردن حوزهٔ تعریف عبارت داریم:

$$۱+x\geqslant ۰،\ ۱-x\geqslant ۰،\ \sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}\neq ۰،$$

$$\sqrt{۱-x^۲}-۱+x\neq ۰،\ \sqrt{۱-x^۲}-x+۱\neq ۰،\ x\neq ۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $-۱\leqslant x<۰$ و $۰<x<۱$.

دربازهٔ $-۱\leqslant x<۰$ داریم:

$$\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-۱}=\sqrt{\frac{۱-x^۲}{x^۲}}=\frac{\sqrt{۱-x}\cdot\sqrt{۱+x}}{-x};\ ۱-x=(\sqrt{۱-x})^۲$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{x+۱}=a$ و $\sqrt{۱-x}=b$ به‌دست می‌آید:

$$D=\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b^۲}{ba-b^۲}\right)\left(\frac{-ab}{x}-\frac{b^۲}{x}\right)\left(\frac{x}{b^۲+ab}\right)=$$

$$=\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}\right)\cdot\frac{-b(a+b)}{x}\cdot\frac{x}{b(a+b)}=$$

$$=\frac{a-b}{a-b}\cdot\frac{-b(a+b)}{b(a+b)}=-۱$$

و در بازهٔ $۰<x<۱$:

$$\sqrt{\frac{۱}{x^۲}-۱}=\frac{\sqrt{۱-x}\cdot\sqrt{۱+x}}{x};\ ۱-x=(\sqrt{۱-x})^۲$$

دوباره فرض می‌کنیم $\sqrt{۱+x}=a$ و $\sqrt{۱-x}=b$، به‌دست می‌آید:

$$D=\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b^۲}{ba-b^۲}\right)\left(\frac{ab}{x}-\frac{b^۲}{x}\right)\left(\frac{x}{b^۲+ab}\right)=$$

$$=\frac{a-b}{a-b}\cdot\frac{b(a-b)}{x}\cdot\frac{x}{b(a+b)}=\frac{(a-b)^۲}{a^۲-b^۲}=\frac{a^۲+b^۲-۲ab}{a^۲-b^۲}$$

از طرف دیگر داریم:

$$a^۲+b^۲-۲ab=۱+x+۱-x-۲\sqrt{۱-x^۲}=۲-۲\sqrt{۱-x^۲};$$
$$a^۲-b^۲=۱+x-(۱-x)=۲x،$$

بنابراین

$$D=\frac{۲-۲\sqrt{۱-x^۲}}{x}=\frac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{x},\ (۰<x<۱)$$

به‌این ترتیب دربازهٔ $-۱\leqslant x<۰$ داریم: $D=-۱$ و دربازهٔ $۰<x<۱$ داریم: $D=\dfrac{۱-\sqrt{۱-x^۲}}{x}$.

تکلیف ۱.

۱. مخرج کسر را گویا کنید:

$$۱)\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}};\quad ۲)\ \frac{۱}{\sqrt{x}\sqrt[۳]{y}};\quad ۳)\ \frac{۱}{\sqrt{x}-۲};\quad ۴)\ \frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{y}};$$

$$۵)\ \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱};\qquad ۶)\ \frac{۱}{a^{\frac{۱}{۲}}+b^{\frac{۱}{۴}}a^{\frac{۱}{۴}}+b^{\frac{۱}{۲}}}.$$

۲. ساده کنید:

$$۱)\ (x-\sqrt{y})(x+\sqrt{y});\qquad ۲)\ (\sqrt{a}+۲b)(a-۲b\sqrt{a}+۴b^۲);$$

$$۳)\ (p^{\frac{۱}{۴}}+q^{\frac{۱}{۲}})^۲-(۱۶pq)^{\frac{۱}{۴}};$$

$$۴)\ \frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{x}-۶}-\frac{۳}{\sqrt{x}+۶}+\frac{x}{۳۶-x};$$

$$۵)\ \frac{a-۱}{a^{\frac{۳}{۴}}+a^{\frac{۱}{۲}}}\cdot\frac{a^{\frac{۱}{۲}}+a^{\frac{۱}{۴}}}{a^{\frac{۱}{۴}}+۱}\cdot a^{\frac{۱}{۴}}-\sqrt{a};$$

$$۶)\ \frac{b-۱}{b+\sqrt{b}+۱}\left(\frac{b^{\frac{۱}{۲}}+۱}{\sqrt{b^۳}-۱}\right)^{-۱}+\frac{۲}{(\sqrt{b})^{-۱}}-b;$$

$$۷)\ \left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{۲}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{۲}\right)\left(\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۴ab}\right)^{-۱};$$

۸) $$\frac{x^{\frac{۳}{۲}}}{x^{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{a}}-\frac{xa^{\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۲}}-\sqrt{x}}+\frac{۲x^{۲}-۴xa}{x-a};$$

۹) $$\frac{\sqrt[۳]{a}-a^{\frac{۷}{۳}}}{a^{\frac{۱}{۳}}-\sqrt[۳]{a^{۴}}}+\frac{a^{-\frac{۱}{۳}}-(\sqrt[۳]{a})^{۵}}{a^{\frac{۲}{۳}}-(\sqrt[۳]{a})^{-۱}};$$

۱۰) $$\left(\frac{\left(b^{\frac{۲}{۳}}\sqrt[۳]{a\sqrt{b}}-a^{\frac{۱}{۲}}\sqrt[۳]{ab}\right)^{۲}}{\sqrt[۳]{a^{۳}\sqrt{ab}}\sqrt[۶]{b}}+۴\right)\left(\frac{\sqrt{a^{۲}b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-۱};$$

۱۱) $$\frac{\sqrt{\left((x\sqrt[۳]{xy^{۲}z})^{۹}(y\sqrt{x^{۳}yz})^{۶}\right)^{۲}}}{x^{۲}y^{۶}\sqrt{z^{۶}x^{۱۲}}}\left(x^{۲}\sqrt{x}\frac{y^{۲}\sqrt{x}}{\sqrt{z^{-۱}}}\right)^{-۲}$$

تکلیف ۲.

۱. کسر را به‌صورتی بنویسید که مخرجی گویا داشته باشد:

۱) $\frac{۲}{\sqrt{a}};$

۲) $\frac{b}{\sqrt{x}+۱};$

۳) $\frac{-۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}+y};$

۴) $\frac{a}{\sqrt{x}-۲\sqrt{y}};$

۵) $\frac{a+b}{۱+\sqrt[۳]{x^{۲}}+\sqrt[۳]{x}};$

۶) $\frac{۳}{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{xy}+\sqrt{y}}.$

۲. این عبارت‌ها را ساده کنید:

۱) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y);$

۲) $(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y})((\sqrt[۳]{x})^{۲}+\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}});$

۳) $(x^{\frac{۱}{۲}}y^{۰/۵})^{۲}+(\sqrt[۳]{x}\cdot y^{\frac{۱}{۴}})^{۴}+(\sqrt{x}.\sqrt{y})^{۲};$

۴) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y^{\frac{۳}{۲}}}{x-y};$

۵) $\dfrac{۱-a^{-\frac{۱}{۲}}}{۱+(\sqrt{a})^{-۱}}+\dfrac{۱+\sqrt{a^{-۱}}}{۱-a^{-\frac{۱}{۲}}};$

۶) $\left(\sqrt{ab}-\dfrac{\sqrt{(ba)^{۲}}}{a+(ab)^{\frac{۱}{۲}}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}\right)^{-۱}+\sqrt{ab}-a;$

۷) $\dfrac{۲}{۵\sqrt[۳]{x}-۵\sqrt[۳]{y}}\left(\dfrac{x-y}{\sqrt[۳]{x^{۲}}-x^{\frac{۱}{۳}}y^{\frac{۱}{۳}}+(\sqrt[۳]{y})^{۲}}-\right.$

$\left.-\dfrac{x-y}{x^{\frac{۲}{۳}}+\sqrt[۳]{xy}+\sqrt[۳]{y^{۲}}}-\dfrac{x^{\frac{۲}{۳}}-\sqrt[۳]{y^{۲}}}{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y}}\right);$

۸) $\left(\dfrac{a^{۱\frac{۱}{۲}}-b^{۱/۵}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{a\sqrt[۳]{a}\sqrt{b^{۲}}+ab^{\frac{۴}{۳}}}{a^{\frac{۱}{۳}}+b^{\frac{۱}{۳}}}}\right)\dfrac{۱۳}{a+b}.$

تکلیف ۳. ساده کنید:

۱) $\left(\sqrt{m+\dfrac{۲mn}{۱+n^{۲}}}+\sqrt{m-\dfrac{۲mn}{۱+n^{۲}}}\right)(۱+n^{-۲})^{۰/۵};$

۲) $\left(\dfrac{a\sqrt[۳]{a}-۲ab^{\frac{۱}{۳}}+a^{\frac{۲}{۳}}(\sqrt[۳]{b})^{۲}}{\sqrt[۳]{a^{۲}}-a^{\frac{۱}{۳}}\sqrt[۳]{b}}+\dfrac{\sqrt[۳]{a^{۲}b}-(ab^{۲})^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}\right)(a^{\frac{۱}{۳}})^{-۲};$

۳) $\left(\dfrac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}}+\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}-۱+x}\right)\times$

$\times\left(\sqrt{(x^{۲})^{-۱}-۱}+\sqrt{\dfrac{۱}{x^{۲}}}\right)^{-۱};$

۴) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{a}-۱}-\frac{(a^{\frac{۳}{۹}}+۱)^{۲}(a^{\frac{۲}{۶}}-۱)^{-۲}+۳}{\left(\frac{\sqrt[۳]{a}-۱}{a^{\frac{۱}{۳}}+۱}\right)^{۲}+۳}\cdot\frac{a-۱}{(\sqrt{a})^{۲}+۱}$;

۵) $\left(\frac{b}{b+۸}-\frac{۴b}{(\sqrt[۳]{b}+۲)^{۳}}\right)\left(\frac{۱+۲\sqrt[۳]{b^{-۱}}}{۱-۲b^{-\frac{۱}{۳}}}\right)^{۲}-\frac{۲۴}{b+۸}$;

۶) $\left(\frac{\sqrt[۶]{a^{۲}}-\sqrt[۶]{a^{۲}\sqrt{b^{۶}}}}{(a^{\frac{۱}{۲}}-b^{\frac{۱}{۲}})\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{a^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\frac{(a-b)^{-۱}}{\sqrt[۶]{a^{-۵}}}\right)^{-۱}$;

۷) $\frac{۳a}{b}((\sqrt{\sqrt{ab}+a})^{-۱}\sqrt{(b+\sqrt{ab})^{-۱}}+(a-\sqrt{ab})^{-\frac{۱}{۲}}\times$

$$\times(\sqrt{ab}-b)^{-\frac{۱}{۲}})^{-۲}((\frac{a+\sqrt{ab}}{(\sqrt{ab}+b)^{-۱}})^{-\frac{۱}{۲}}-$$

$$-(\frac{\sqrt{ab}-b)}{(a-\sqrt{ab})^{-۱}})^{-\frac{۱}{۲}})^{-۱}$$

تکلیف ۴. ساده کنید:

۱) $\left(\frac{\sqrt{a}+۱}{\sqrt{a}-۱}-\frac{\sqrt{a}-۱}{\sqrt{a}+۱}+۴\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-\frac{۱}{\sqrt{a}}\right)$;

۲) $\sqrt{\frac{a+x^{۲}}{x}-۲\sqrt{a}}+\sqrt{\frac{x^{۲}+a}{x}+۲\sqrt{a}}$;

۳) $\left(\frac{a-x}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{x}}-\frac{x+a}{\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{a}}\right)۲a^{-\frac{۱}{۳}}\sqrt[۳]{x^{-۱}}$;

۴) $\left(\frac{۲+\sqrt{a}}{a+۲\sqrt{a}+۱}-\frac{\sqrt{a}-۲}{a-۱}\right)\frac{a\sqrt{a}+a-\sqrt{a}-۱}{a^{\frac{۱}{۲}}}$;

$$۵)\ \left(\frac{a^{\frac{۱}{۴}}\sqrt[۳]{x^{۳}}-x^{\frac{۱}{۴}}(\sqrt[۳]{a})^{۳}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{ax}+۱}{\sqrt{\sqrt{ax}}}\right)^{-۲}\times$$

$$\times\frac{\left(۱+\frac{a}{x}+\frac{۲\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{۱}{۲}}}{۳a+\sqrt{۹ax}};$$

$$۶)\ \left(\frac{\sqrt{\sqrt[۳]{y^{۴}}}}{x^{\frac{۱}{۲}}-y}+\frac{\sqrt[۶]{x}+y^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt[۳]{x}+x^{\frac{۱}{۶}}\sqrt[۳]{y}+y^{\frac{۲}{۳}}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x^{\frac{۱}{۱۲}}(y^{-۱})^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۱}{۴}}-\sqrt{y}}\right)^{-۱}+\frac{\sqrt[۳]{y^{۲}\sqrt{y}}}{\sqrt[۳]{x}+y^{\frac{۱}{۲}}};$$

$$۷)\ \left(\frac{x^{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}-\frac{(x+y)^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{x}+y^{\frac{۱}{۲}}}\right)^{-۲}-\frac{x+y}{۲x^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{(x+y)^{۴}}}{۴xy}.$$

تمرین‌ها

۰۱ مخرج هریك ازاین کسرها را ساده کنید:

$$۱)\ \frac{۲}{\sqrt{a}},\frac{۳۶}{\sqrt{x+۲}};\quad ۲)\ \frac{a-۱}{\sqrt{a-۱}-\sqrt{a+۲}};\ ۳)\ \frac{۳a\left(b+\frac{۱}{۲}\right)}{\sqrt{b+۲}+\sqrt{۱-b}};$$

$$۴)\ \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[۳]{ab})};\quad ۵)\ \frac{۲}{\sqrt{۲x}-\sqrt{x+۱}-\sqrt{۱-x}};$$

$$۶)\ \frac{۴(a^{۲}-x^{۲})}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{x}};\quad ۷)\ \frac{۳\left(a+\frac{b}{۲}\right)}{\sqrt[۳]{۲a}+\sqrt[۳]{b}};\quad ۸)\ \frac{۴(a-b)^{۲}}{a+b-۲\sqrt{ab}};$$

$$۹)\ \frac{(a-b)c}{\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{a^{۲}}+(\sqrt[۳]{b})^{۲}};\quad ۱۰)\ \frac{a+b}{(\sqrt[۳]{a})^{۲}+\sqrt[۳]{b^{۲}}-\sqrt[۳]{ab}}.$$

۲. ساده کنید:

۱) $\frac{a^۲+۴}{a\sqrt{\left(\frac{a^۲-۴}{۲a}\right)^۲+۴}}$; ۲) $\frac{\left(m^۲-\frac{۱}{n^۲}\right)^m\left(n+\frac{۱}{m}\right)^{n-m}}{\frac{۱}{m^۲}\left(n^۲-\frac{۱}{m^۲}\right)^n\left(m-\frac{۱}{n}\right)^{m-n}}$;

۳) $(p(p^۲-۴)^{-۱}+۲(۲-p)^{-۱}+(p+۲)^{-۱})\times$
$\times(p-۲+(۱۰-p^۲)(p+۲)^{-۱})^{-۱}$;

۴) $\frac{a+b}{۴ab}\cdot\frac{a^{-۲}+b^{-۲}}{a^{-۱}+b^{-۱}}\left(\frac{a^{-۴}-b^{-۴}}{a^{-۲}-b^{-۲}}\right)^{-۱}$;

۵) $\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-۲n}-b^{-۲n}}\left(\frac{۱}{b^{-n}}-\frac{۱}{a^{-n}}\right)^{-۱}$;

۶) $\left[\frac{(\sqrt{a}+۱)^۲-\frac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+۱)^۳-a\sqrt{a}+۲}\right]^{-۳}$;

۷) $\frac{a^{-۲n}-b^{-۲n}}{a^{-n}-b^{-n}}\left(\frac{۱}{a^{-n}}+\frac{۱}{b^{-n}}\right)^{-۱}$;

۸) $\frac{a^{-۲}+b^{-۲}}{a^{-۱}+b^{-۱}}\left(\frac{a^۲+b^۲}{ab}\right)^{-۱}\left(\frac{۱}{۳(a+b)}\right)^{-۱}$;

۹) $\left(\frac{۱}{b-\sqrt{a}}+\frac{۱}{b+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{۱}{۹}a^{-۲}b^{-۱}}}{a^{-۲}-a^{-۱}b^{-۲}}\right)^{-۱}$;

۱۰) $\frac{\frac{\sqrt{۲}}{(۱-x^۲)^{-۱}}+\frac{۲^{\frac{۳}{۲}}}{x^{-۲}}}{\left(\frac{x^{-۲}}{۱+x^{-۲}}\right)^{-۱}}$;

۱۱) $\frac{a-b}{a+b+۲\sqrt{ab}}\left(\frac{\sqrt{a^{-۱}}-b^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۲}}+(\sqrt{b})^{-۱}}\right)^{-۱}$;

۱۲) $$\frac{۵b}{\sqrt{a-b}}\left(\frac{۱}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\frac{۱}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right)\times$$
$$\times\left(۱+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^{-۱};$$

۱۳) $$\left((a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right)\frac{۱}{۶b}\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-۱\right);$$

۱۴) $$\frac{۴}{\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{b}}(a^{۲}\sqrt{b})^{-\frac{۱}{۲}}\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt[۴]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-۱};$$

۱۵) $$\frac{۳}{۷a^{۲}}\left(\sqrt{x^{۴}-a^{۴}}-\frac{x\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}}{\sqrt{۱-a^{۲}x^{-۲}}}\right)\frac{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}}{\sqrt{x^{۲}+a^{۲}}};$$

۱۶) $$\frac{a-۵}{۶-۳a}+\frac{۴(a+۱)}{a^{۲}+۲a}\left(\frac{۹a}{a^{۲}-۱۶}-\frac{a+۴}{a^{۲}-۴a}\right)^{-۱};$$

۱۷) $$\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\frac{\sqrt[۴]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-۱}\left(\frac{\sqrt[۴]{a}+\sqrt[۴]{b}}{\sqrt[۴]{b^{۳}}}\right)^{-۱};$$

۱۸) $$\left(\left(۱+\frac{۴}{a-۲}\right)(a-۴+۴a^{-۱})-۳\right)\left(\frac{a^{-\frac{۱}{۲}}-۲a^{-۱}}{(\sqrt{a}+۲)^{-۱}}\right)^{-۱};$$

۱۹) $$\left(\frac{\sqrt{a}}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+۱}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-۱}\right);$$

۲۰) $$\frac{a-۴b}{a+\sqrt{ab}-۶b}-\frac{a-۹b}{a+۶\sqrt{ab}+۹b}\Bigg)\frac{b^{-\frac{۱}{۲}}(a-۹b)}{\sqrt{a}-۳b^{\frac{۱}{۲}}};$$

۲۱) $$\left(\frac{a^{\frac{۱}{۲}}+۱}{a^{\frac{۱}{۲}}-۱}+\frac{a^{\frac{۱}{۲}}-۱}{\sqrt{a}+۱}-\frac{۴}{a-۱}\right)^{-۳};$$

۲۲) $$\sqrt{(۱-a)^{-۱}}\,(\sqrt{۱+a})^{-۱}-$$
$$-\frac{a\sqrt{a^{۲}-a^{۳}}\cdot\sqrt{۱+a}+(۱-a^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}{۱-a^{۴}};$$

۲۳) $\left(\frac{a+\sqrt{a^{۲}-۴}}{a-\sqrt{a^{۲}-۴}}-\frac{a-\sqrt{a^{۲}-۴}}{a+\sqrt{a^{۲}-۴}}\right)\left(\frac{a\sqrt{a-۲}\sqrt{a+۲}}{۴}\right)^{-۱}$;

۲۴) $\left(\sqrt{a}+\frac{c-\sqrt{ac}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{ac}+c}+\frac{c}{\sqrt{ac}-a}-\frac{a+c}{\sqrt{ac}}\right)^{-۱}$;

۲۵) $\left(\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۴}+۲}{x-\sqrt{x^{۲}-۴}+۲}+\frac{۲-\sqrt{x^{۲}-۴}+x}{۲+\sqrt{x^{۲}-۴}+x}\right)x^{-۱}$;

۲۶) $\left[\frac{\frac{۱}{۴}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{-\frac{۳}{۴}}\frac{۲a}{(a-x)^{۲}}}{(a+x)^{\frac{۱}{۴}}(a-x)^{-\frac{۱}{۴}}}-\frac{۱}{۲a}\cdot\frac{۱}{۱+x^{۲}a^{-۲}}\right]\cdot\frac{a^{۴}-x^{۴}}{ax^{۲}}$;

۲۷) $\left((\sqrt{c^{۲}+cd})^{\frac{۱}{۲}}\cdot(\sqrt{c^{۲}-cd})^{-\frac{۱}{۲}}+\sqrt{\frac{\sqrt{c-d}}{\sqrt{c+d}}}\right)\times$

$$\times\frac{(\sqrt{c^{۲}-d^{۲}})^{\frac{۱}{۲}}}{(c+d)^{\frac{۱}{۲}}+(c-d)^{\frac{۱}{۲}}};$$

۲۸) $\left(\frac{۲a}{a^{۲}-۴x^{۲}}+\frac{۱}{۲x^{۲}+۶x-ax-۳a}\cdot\left(x+\frac{۳x-۶}{x-۲}\right)\right)\frac{a+۲x}{۴}$;

۲۹) $\left(\frac{x^{\frac{۱}{۲}}-y^{\frac{۱}{۲}}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy^{\frac{۱}{۲}}-yx^{\frac{۱}{۲}}}\right)\frac{x\sqrt{x}y^{\frac{۱}{۲}}}{x+y}-\frac{۲y}{x-y}$;

۳۰) $\left(\left(\frac{\sqrt[۳]{bx^{۳}}+\sqrt[۳]{ba^{۲}x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{۲}+bx-۲\right)(\sqrt{bx}+۲)^{-۱}-۲-\sqrt{bx}$;

۳۱) $\frac{(a-b)\cdot(\sqrt[۸]{ab})^{-۲}}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}\left[\sqrt[۸]{\left(\frac{a\sqrt[۳]{b}}{b\sqrt[۳]{a}}\right)^{۳}}+\left(\frac{\sqrt{ab^{۲}}}{\sqrt[۸]{a^{۵}b^{۷}}}\right)^{۲}\right]^{-۱}$;

۳۲) $\left(\frac{m^{\frac{۱}{۲}}+n^{\frac{۱}{۲}}}{m^{\frac{۱}{۲}}-n^{\frac{۱}{۲}}}-\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)\left(\frac{(m^{\frac{۱}{۲}}-n^{\frac{۱}{۲}})^{-۱}}{\sqrt{(m)^{-۱}+(\sqrt{n})^{-۱}}}\right)^{-۱}$;

۳۳) $\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}\right)\cdot\frac{a^{\frac{۳}{۲}}b^{\frac{۱}{۲}}}{a+b}-\frac{۲b}{a-b};$

۳۴) $\frac{a-x}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[۳]{ax^{۲}}}{\sqrt{a}+\sqrt[۳]{ax}}-\sqrt[۳]{ax}\right);$

۳۵) $\frac{a^{\frac{۴}{۳}}-۸a^{\frac{۱}{۳}}b}{a^{\frac{۲}{۳}}+۲\sqrt[۳]{ab}+۴b^{\frac{۲}{۳}}}\cdot\left(۱-۲\sqrt[۳]{\frac{b}{a}}\right)^{-۱};$

۳۶) $\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۳}+۲a^{\frac{۳}{۲}}+b\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۳\sqrt{ab}-۳b}{a-b}\right)^{-۲};$

۳۷) $\sqrt{a}-\frac{a-a^{-۲}}{\sqrt{a}-(\sqrt{a})^{-۱}}+\frac{۱-a^{-۲}}{\sqrt{a}+\sqrt{a^{-۱}}}+\frac{۲}{a\sqrt{a}};$

۳۸) $\left(\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\frac{x-a}{\sqrt{x^{۲}-a^{۲}}-x+a}\right)\sqrt{\left(\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-۱\right)^{-۱}};$

۳۹) $\left(\frac{۱}{a+\sqrt{۲}}-\frac{a^{۲}+۲}{a^{۳}+۲\sqrt{۲}}\right)^{-۱}\left(\frac{a}{۲}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{a}\right)^{-۱}\frac{\sqrt{۲}}{a+\sqrt{۲}};$

۴۰) $\frac{b^{\frac{۳}{۲}}-c^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{bc}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}-\frac{b-c}{b^{\frac{۱}{۲}}c^{\frac{۱}{۲}}+c}\cdot\left(\frac{b^{\frac{۱}{۲}}+\sqrt{c}}{bc^{\frac{۱}{۲}}-c\sqrt{b}}-\frac{۴}{b-c}\right)^{-۱};$

۴۱) $\left(\frac{(a^{\frac{۳}{۴}}-b^{\frac{۳}{۴}})(a^{\frac{۳}{۴}}+b^{\frac{۳}{۴}})}{a^{\frac{۱}{۲}}-b^{\frac{۱}{۲}}}-\sqrt{ab}\right)\frac{۲\sqrt{۲/۵}(a+b)^{-۱}}{۱۰^{-\frac{۱}{۲}}};$

۴۲) $\frac{۲}{\sqrt[۳]{xy}}\left((y-x)(y^{\frac{۱}{۳}}-x^{\frac{۱}{۳}})^{-۱}-\frac{y+x}{\sqrt[۳]{y}+\sqrt[۳]{x}}\right);$

۴۳) $(\sqrt[۳]{a^{۲}\sqrt{a}})^{-۱}\left(\frac{a^{\frac{۱}{۲}}+ab^{-۱}}{a^{-\frac{۱}{۳}}-a^{-\frac{۱}{۶}}b^{-\frac{۱}{۳}}+b^{-\frac{۱}{۳}}}-\frac{a}{\sqrt[۳]{b}}\right);$

$$۴۴)\quad \frac{۲x^{-\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۲}{۳}}-۳x^{-\frac{۱}{۳}}}-\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}}}{x^{\frac{۵}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}}-\frac{x+۱}{x^{۲}-۴x+۳};$$

$$۴۵)\quad \left(\frac{m-n}{m^{\frac{۱}{۳}}-n^{\frac{۱}{۳}}}-(m+n)(\sqrt[۳]{m}+\sqrt[۳]{n})^{-۱}\right)\frac{۶}{(mn)^{\frac{۱}{۳}}};$$

$$۴۶)\quad \left(\frac{x-۱}{x+x^{\frac{۱}{۲}}+۱}\left(\frac{x^{۰/۵}+۱}{x^{۱/۵}-۱}\right)^{-۱}+\frac{۲}{x^{۰/۵}}\right)\sqrt{(x+۱)^{-۲}};$$

$$۴۷)\quad \frac{۵a}{b-a}\cdot\left(\frac{\sqrt[۳]{a^{۲}b^{۲}}+a\sqrt[۳]{b}}{a\sqrt[۳]{b}+b\sqrt[۳]{a}}-۱\right)\times$$
$$\times\left(۱+\sqrt[۳]{\left(\frac{b}{a}\right)^{-۱}}+\sqrt[۳]{\left(\frac{a}{b}\right)^{۲}}\right);$$

$$۴۸)\quad \left(\frac{x-۹}{x+۳\sqrt{x}+۹}\cdot\left(\frac{x^{۰/۵}+۳}{x^{۱/۵}-۲۷}\right)^{-۱}\right)^{۰/۵}-x^{۰/۵};$$

$$۴۹)\quad \left(\frac{x^{۱/۵}+y^{-۱/۵}}{x^{۰/۵}+y^{-۰/۵}}-x^{۰/۵}y^{-۰/۵}\right)\Bigg((x-y^{-۱})+$$
$$+\frac{۲y^{-۰/۵}}{x^{۰/۵}+y^{-۰/۵}}\Bigg)^{-۱};$$

$$۵۰)\quad \left[\frac{bx+۴+\frac{۴}{bx}}{۲b+(b^{۲}-۴)x-۲bx^{۲}}+\frac{(۴x^{۲}-b^{۲})\frac{۱}{b}}{(b+۲x)^{۲}-۸bx}\right]\frac{b^{۲}x-۲bx^{۲}}{۴x^{۲}-۴};$$

$$۵۱)\quad \frac{۶\sqrt{a}-۳}{۸}\cdot\left[\frac{۲a^{-۲}+\frac{a^{-۳}}{۲}}{a^{-۲/۵}-\frac{۱}{۲}a^{-۳}}+\frac{\sqrt{a^{-۱}}-a^{-۲}}{a^{-۱}+a^{-۱/۵}+a^{-۲}}-۳\sqrt{a}\right];$$

$$۵۲)\quad \overset{۷}{a}{}^{۲}\cdot\left(\left(\frac{۲\sqrt{۲}+۲۷a^{\frac{۳}{۵}}}{\sqrt{۲}+۳\sqrt[۵]{a}}+۳\sqrt[۱۰]{۳۲a^{۲}}-۲\right)^{۳^{-۲}}\right)^{۵};$$

۵۳) $$\left(\frac{۲}{a^{۰/۵}-b^{۰/۵}}-\frac{۲a^{۰/۵}}{a^{۱/۵}+b^{۱/۵}}\cdot\frac{a-a^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{b}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\left(\frac{۲\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-۱};$$

۵۴) $$\left(\frac{۳a^{\frac{۱}{۶}}-۲b^{\frac{۱}{۶}}}{\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b}}-\frac{۳}{a^{\frac{۱}{۶}}+b^{\frac{۱}{۶}}}\right)\left(\frac{۳b(a^{\frac{۲}{۳}}+\sqrt[۳]{ab}+b^{\frac{۲}{۳}})}{b^{\frac{۵}{۶}}(a-b)}\right)^{-۱};$$

۵۵) $$\frac{۵((a-b)^۲+ab)}{(b-a)((a+b)^۲-ab)}\left(\frac{a^۵+b^۵+a^۲b^۳+a^۳b^۲}{(a^۳+b^۳+a^۲b+ab^۲)(a^۳-b^۳)}\right)^{-۱};$$

۵۶) $$\left[\frac{\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^۳+۲a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{۳a^۲+۳b\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}+a+b}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}\right]\times$$
$$\times\left(\frac{۳\sqrt{ab}}{b^{\frac{۳}{۲}}-a\sqrt{b}}\right)^{-۱};$$

۵۷) $$\sqrt{\left(\frac{a^۲+b^۲}{a^۳-ab^۲}+\frac{۲b}{a^۲-b^۲}\right)(a^۲+ab)}-$$
$$-\sqrt{(a+b)\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{۲ab}{b^۲-a^۲}\right)};$$

۵۸) $$۲(xy)^{\frac{۱}{۲}}(x+y)^{-۱}\left(۱+\frac{۱}{۴}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱۰. ۱) $\frac{\sqrt{xy}}{y}$، $\{(x، y): x \geqslant ۰، y > ۰\}$; ۲) $\frac{\sqrt{x}\sqrt[۳]{y^۲}}{xy}$، $\{(x، y): x > ۰، y \neq ۰)$; ۳) $\frac{\sqrt{x}+۲}{x-۲}$، $\{x: x \geqslant ۰، x \neq ۲\}$;

۴) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$، $\{(x، y): x\geqslant ۰، y\geqslant ۰، x\neq y\}$، $\frac{\sqrt{x}}{۲x}\{(x، y): x>۰، x=y\}$; ۵) $\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x+۱}$، $\{x: x\neq -۱\}$، $\frac{۱}{۳}$، $\{x: x=۱\}$;

۶) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt[۴]{ab})(a+b-\sqrt{ab})}{a^{۲}+b^{۲}+ab}$، $\{(a، b): a\geqslant ۰، b\geqslant ۰، a^{۲}+b^{۲}\neq ۰\}$. ۲۰. ۱) $x^{۲}-y$، $\{(x، y): x\in \mathbf{R}، y\geqslant ۰\}$;
۲) $a\sqrt{a}+۸b^{۳}$، $\{(a، b): b\in \mathbf{R}; a\geqslant ۰\}$; ۳) $(\sqrt{p}-\sqrt{q})^{۲}$، $\{(p، q): p\geqslant ۰، q\geqslant ۰\}$; ۴) $\frac{۳}{\sqrt{x}-۶}$، $\{x: x\geqslant ۰، x\neq ۳۶\}$;
۵) -۱، $\{a: a>۰\}$; ۶) ۱، $\{b: b>۰، b\neq ۱\}$; ۷) ۴، $\{(a، b): ab>۰\}$; ۸) $۳x$، $\{(a، x): x\geqslant ۰، a\geqslant ۰، a\neq x\}$; ۹) ۰، $\{a: a>۰، a\neq ۱\}$; ۱۰) $\frac{a-b}{ab}$، $\{(a، b): a>۰، b>۰، a\neq b\}$;
۱۱) ۱، $\{(x، y، z): x>۰، z>۰، y>۰\}$.

تکلیف ۲.

۱۰. ۱) $\frac{۲\sqrt{a}}{a}$، $\{a: a>۰\}$; ۲) $\frac{b(\sqrt{x}-۱)}{x-۱}$، $\{(b، x): b\in \mathbf{R}، x\geqslant ۰، x\neq ۱\}$، $\frac{b}{۲}$، $\{(b، x): b\in \mathbf{R}، x=۱\}$; ۳) $\frac{\sqrt[۳]{x^{۲}y}-x\sqrt[۳]{x}-y^{۲}}{x^{۲}+y^{۳}}$، $\{(x، y): x\in \mathbf{R}، y\in \mathbf{R}، x^{۲}\neq -y^{۳}\}$; ۴) $\frac{a(\sqrt{x}+۲\sqrt{y})}{x-۴y}$، $\{(a، x، y): a\in \mathbf{R}، x\geqslant ۰، y\geqslant ۰، x\neq ۴y\}$; ۵) $\frac{(a+b)(\sqrt[۳]{x}-۱)}{x-۱}$، $\{(a، b، x): a\in \mathbf{R}، b\in \mathbf{R}، x\neq ۱\}$، $\frac{a+b}{۳}$، $\{(a، b، x): a\in \mathbf{R}، b\in \mathbf{R}،$

$x=۱\}$; ۶) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt[۳]{xy}+\sqrt{y})(x+y-\sqrt{xy})}{x^{۲}+y^{۲}+xy}$, $\{(x, y): x \geqslant ۰, y \geqslant ۰, x^{۲}+y^{۲} \neq ۰\}$. **۲۰.** ۱) $x^{۲}-y^{۲}$, $\{(x, y): x \geqslant ۰, y \geqslant ۰\}$; ۲) $x-y$, $\{(x, y): x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$; ۳) $۳xy$, $\{(x, y): x \geqslant ۰, y \geqslant ۰\}$; ۴) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $\{(x, y): x \geqslant ۰, y \geqslant ۰, y \neq x\}$; ۵) $\dfrac{۲(a+۱)}{a-۱}$, $\{a: a > ۰, a \neq ۱\}$; ۶) ۰, $\{(a, b): ab > ۰, a \neq b\}$; ۷) $-\frac{۲}{۵}$, $\{(x, y): x \geqslant ۰, y \geqslant ۰, x \neq y\}$; ۸) ۱۳, $\{(a, b): a \geqslant ۰, b \geqslant ۰, a \neq b\}$.

تکلیف ۳.

۱) ۰, $\{(m, n): m = ۰, n \neq ۰\}$; $-۲\sqrt{m}$, $\{(m, n): m > ۰, n \leqslant -۱\}$; $-\dfrac{۲\sqrt{m}}{n}$, $\{(m, n): m > ۰, -۱ \leqslant n < ۰\}$; $\dfrac{۲\sqrt{m}}{n}$, $\{(m, n): m > ۰, ۰ < n \leqslant ۱\}$; $۲\sqrt{m}$, $\{(m, n): m > ۰, n \geqslant ۱\}$; ۲) ۱, $\{(a, b): a > ۰, b \geqslant ۰, a \neq b\}$; ۳) -۱, $\{x: -۱ < x < ۰\}$; ۱, $\{x: ۰ < x < ۱\}$; ۴) -۱, $\{a: a \geqslant ۰, a \neq ۱\}$; ۵) -۳, $\{b: b > ۰, b \neq ۸\}$; ۶) ۲, $\{(a, b): a > ۰, b \geqslant ۰, a \neq b\}$; ۷) ۳, $\{(a, b): a > b > ۰\}$.

تکلیف ۴.

۱) $۴a$, $\{a: a > ۰, a \neq ۱\}$; ۲) $۲\sqrt{x}$, $\{(a, x): a \geqslant ۰, x > \sqrt{a}\}$; $\dfrac{۲\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, $\{(a, x): x > ۰; x \leqslant \sqrt{a}\}$; ۳) ۴, $\{(a, x): a > x, x \neq x, x^{۲} \neq a^{۲}\}$; ۴) ۲, $\{a: a > ۰ \cdot a \neq ۱\}$; ۵) $\frac{۱}{۳}$,

$\{(a، x): a>۰، x>۰ \; x\neq a\};$ ۶) $\sqrt[۳]{y}$، $\{(x، y): x>۰، y>۰، y\neq\sqrt{x}\};$ ۷) ۰، $\{(x، y): x>۰، y>۰\}.$

تمرین‌ها

۱۰ ۱) $\dfrac{۲\sqrt{a}}{a}$، $\{a: a>۰\};$ $\dfrac{۳۶\sqrt{x+۲}}{x+۲}$، $\{x: x>-۲\};$

۲) $(۱-a)\times\dfrac{(\sqrt{a+۲}+\sqrt{a-۱})}{۳}$، $\{a: a\geqslant ۱\};$

۳) $\dfrac{۳a(\sqrt{۲+b}-\sqrt{۱-b})}{۲}$، $\{(a،b): a\in\mathbf{R}،$
$b\in[-۲،-۰/۵)\bigcup(-۰/۵،۱]\};$ ۰، $\{(a،b): a\in\mathbf{R}، b=-۰/۵\};$

۴) $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt[۳]{ab})(a+b-\sqrt{ab})\sqrt{c}}{((a^۲+b^۲+ab)c)}$،
$\{(a، b، c): a\geqslant ۰، b\geqslant ۰، c>۰، a^۲+b^۲\neq ۰\}$،

۵) $\dfrac{(\sqrt{۲x}+\sqrt{۱-x}+\sqrt{x+۱})(x-۱+\sqrt{۱-x^۲})}{۲x(x-۱)}$،
$\{x: ۰<x<۱\};$ -۱، $\{x: x=۰\};$ ۶) $۴(a+x)(\sqrt[۳]{a^۲}+$
$+\sqrt[۳]{ax}+\sqrt[۳]{x^۲})$، $\{(a، x): a\in\mathbf{R}، x\in\mathbf{R}، a\neq x\};$ ۷) $\frac{۳}{۲}(\sqrt[۳]{b^۲}-$
$-\sqrt[۳]{۲ab}+\sqrt[۳]{۴a^۲})$، $\{(a، b): a\in\mathbf{R}، b\in\mathbf{R}، b\neq -۲a\};$ ۸) $۴(a+$
$+b+۲\sqrt{ab})$، $\{(a، b): ab\geqslant ۰، a\neq b\};$ ۰، $\{(a، b): a<۰، a=b\};$
۹) $c(\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})$، $\{(a، b، c): a\in\mathbf{R}، b\in\mathbf{R}، c\in\mathbf{R}، a^۲+b^۲\neq ۰\};$
۱۰) $\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}$، $\{(a، b): a\in\mathbf{R}، b\in\mathbf{R}، a^۲+b^۲\neq ۰\}.$

۲۰ ۱) ۲، $\{a: a>۰\};$ (-۲)، $\{a: a<۰\};$ ۲) $\left(\dfrac{m}{n}\right)^{n+m}$،
$\{(m، n): mn>۱، n>۰، m>۰\};$ ۳) $\dfrac{۱}{۲-p}$، $\{p: p\in\mathbf{R}، p^۲\neq ۴\};$

۴) $\frac{۱}{۴}$، $\{(a، b): ab\neq ۰، b^۲\neq a^۲\}$؛ ۵) $(ab)^n$، $\{(a، b، n):$
$ab\neq ۰، a^۲\neq b^۲، n\in\mathbf{N}\}$؛ ۶) ۱، $\{(a، x): a\geqslant ۰، x\geqslant ۰، x\neq a\}$؛
۷) $(ab)^{-n}$، $\{(a، b، n): a^۲\neq b^۲، ab\neq ۰، n\in\mathbf{N}\}$؛
۸) ۳، $\{(a، b): a\neq ۰،$
$b\neq ۰، a\neq -b\}$؛ ۹) ۶، $\{(a، b): a>۰، b\neq ۰، b^۲\neq a\}$؛
۱۰) $\sqrt{۳}$، $\{x: x\neq ۰، x^۲\neq ۱\}$؛ ۱۱) -۱، $\{(a، b): a>۰،$
$b>۰، a\neq b\}$؛ ۱۲) ۵، $\{(a، b): a>۰، -a<b<a، b\neq ۰\}$؛
۱۳) $\frac{۱}{۳}$، $\{(a، b): a>b>۰، a<-b<۰، a<b<۰،$
$a>-b>۰\}$؛ ۱۴) ۴، $\{(a، b): a>۰، b>۰، a\neq b\}$؛
۱۵) $-\frac{۳}{۷}$، $\{(a، x): x>a>۰، ۰<-a<x\}$؛ $\frac{۶x^۲-۳a^۲}{۷a^۲}$،
$\{(a، x): x<a<۰ \quad \text{یا} \quad x<-a<۰\}$؛ ۱۶) $\frac{۱}{۶}$، $\{a: a\neq ۰،$
$a\neq -۱، a\neq ۲، a^۲\neq ۱۶\}$؛ ۱۷) ab، $\{(a، b): a>۰، b>۰، a\neq b\}$؛
۱۸) $(a+۱)$، $\{a: a>۰، a\neq ۲\}$؛ ۱۹) $-۲\sqrt{a}$، $\{a: a>۰، a\neq ۱\}$
۲۰) ۵، $\{(a، b): a\geqslant ۰، b>۰\ a\neq ۹b، a\neq ۴b\}$؛ ۲۱) $\frac{۱}{۸}$،
$\{a: a\geqslant ۰، a\neq ۱\}$؛ ۲۲) ۰، $\{a: ۰\leqslant a<۱\}$؛ $۲\overset{-۲}{\sqrt{۱-a^۲}}$،
$\{a: -۱<a<۰\}$؛ ۲۳) ۴، $\{a: a>۲\}$؛ ۲۴) $\sqrt{c}-\sqrt{a}$،
$\{(a، c): a>۰، c>۰، a\neq c\}$؛ ۲۵) ۱، $\{x: x>۲\}$؛ -۱،
$\{x: x<-۲\}$؛ ۲۶) ۱، $\{(a، x): a>۰، -a<x<a، x\neq ۰\}$؛
۲۷) ۱، $\{(c، d): c>d\geqslant ۰، c>-d>۰\}$؛
۲۸) $\frac{۱}{۴}$، $\{(a، x): x\neq ۲،$
$x\neq ۳، a^۲\neq ۴x^۲\}$؛ ۲۹) ۲، $\{(x، y): x>۰، y>۰، y\neq x\}$؛
۳۰) -۳، $\{(a، b، x): a\geqslant ۰، x\geqslant ۰، a^۲+x^۲\neq ۰، b\geqslant ۰\}$؛
۳۱) $\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}$، $a>۰، b>۰، a\neq b$؛ ۳۲) ۴، $\{(m، n): n>۰،$

$m>۰، m\neq n\}$; $۰، \{(m، n): n=۰، m>۰;\ m=۰، n>۰\}$; ۳۳) $۲، \{(a، b): a>۰، b>۰، a\neq b\}$; ۳۴) $۲\sqrt[۳]{ax}، \{(a، x): a>۰، x>۰، a\neq x\}$; ۳۵) $a^{\frac{۲}{۳}}، \{(a، b): a>۰، b\geqslant ۰، a\neq ۸b\}$; ۳۶) $\frac{۱}{۹}، \{(a، b): a\geqslant ۰، b\geqslant ۰، a\neq b\}$; ۳۷) $۰، \{a: a>۰، a\neq ۱\}$; ۳۸) $۱، \{(a، b): x\geqslant a>۰، -x\leqslant a<۰\}$; ۳۹) $-۱، \{a: a\neq ۰، a\neq -\sqrt{۲}\}$; ۴۰) $۰، \{(b، c): c>۰، b>۰، b\neq c\}$; ۴۱) $۱۰، \{(a، b): a\geqslant ۰، b\geqslant ۰، a\neq b\}$; ۴۲) $۴، \{(x، y): x>۰، y>۰، x\neq y\}$; ۴۳) $۱، \{(a، b): a>۰، b>۰\}$; ۴۴) $۰، \{x: x>۰، x\neq ۳، x\neq ۱\}$; ۴۵) $۱۲، \{(m، n): m>۰، n>۰، m^۲\neq n^۲\}$; ۴۶) $۱، \{x: x>۰، x\neq ۱\}$; ۴۷) $-۵، \{(a، b): a\neq ۰، b\neq ۰، a\neq b\}$; ۴۸) $-۳، \{x: x>۹\}; ۳-۲\sqrt{x}، \{x: ۰\leqslant x<۹\}$; ۴۹) $۱، \{(x، y): x\geqslant ۰، y>۰\}$; ۵۰) $-\frac{۱}{۲}، \{(b، x): x^۲\neq ۱، bx\neq ۰، b\neq ۲x، bx\neq ۲\}$; ۵۱) $\frac{۳}{۴}، \left\{a: a>۰، a\neq \frac{۱}{۴}\right\}$; ۵۲) $۷، \left\{a: a\neq ۰، a\neq -\frac{۲\sqrt{۲}}{۲۴۳}\right\}$; ۵۳) $۱، \{(a، b): a\neq b، a\geqslant ۰، b>۰\}$; ۵۴) $\frac{۱}{۳}، \{(a، b): a\geqslant ۰، b>۰، a\neq b\}$; ۵۵) $-۵، \{(a، b): a^۲\neq b^۲\}$; ۵۶) $-\frac{۲}{۳}، \{(a، b): a>۰، b>۰; a\neq b\}$; ۵۷) $۰، \{(a، b): a\neq ۰، a\neq -b، a>b\}$; ۵۸) $۱، \{(x، y): x>۰، y>۰\}; -۱، \{(x، y): x<۰، y<۰\}$.

§۶. مقایسهٔ عبارت‌های جبری

دوعبارت جبری A و B را درمجموعهٔ M متحد گویند، وقتی که برای

هر انتخاب عددی از مجموعهٔ M، مقدارهای عددی متناظر این عبارت‌ها، باهم برابر باشند. در این حالت می‌گویند که، اتحاد $A=B$، درمجموعهٔ M برقرار است و می‌نویسند:

$$A\overset{M}{=}B$$

درحالتی‌که ذکری ازمجموعهٔ M نرود، به‌این معناست که اتحاد را درحوزهٔ تعریف این عبارت‌ها درنظر گرفته‌اند.

مثلاً عبارت‌های $a^۲+۲ab+b^۲$ و $(a+b)^۲$ درحوزهٔ تعریف این دوعبارت، یعنی برای همهٔ مقدارهای a و b، متحد یکدیگرند؛ همچنین عبارت $\frac{۱}{a+۲}:\frac{۱}{(a+۲)a}$ با عبارت $\frac{۱}{a}$، به‌ازای $a\neq ۰$ و $a\neq -۲$، متحد یکدیگرند.

اگر به‌جای عبارت A، عبارت B را که با A در مجموعهٔ M متحد است، درنظر بگیریم، به‌معنای آن است که عبارت A را، درمجموعهٔ M، تبدیل اتحادی کرده‌ایم. وقتی که، ضمن تبدیل اتحادی عبارت A، نامی از مجموعهٔ M نبریم، به‌معنای آن است که تبدیل اتحادی را، درحوزهٔ تعریف این عبارت انجام داده‌ایم.

ویژگی‌های برابری‌های اتحادی

A، B، C و D را عبارت‌های جبری مفروض و، مجموعهٔ M را، متعلق به‌حوزهٔ تعریف این عبارت‌ها می‌گیریم.

۱. اگر $A\overset{M}{=}B$، آن‌وقت $B\overset{M}{=}A$.

۲. اگر $A\overset{M}{=}B$، آن‌گاه $A-B\overset{M}{=}۰$.

۳. اگر $A\overset{M}{=}B$ و $B\overset{M}{=}C$، آن‌وقت $A\overset{M}{=}C$.

۴. اگر $A\overset{M}{=}B$، آن‌گاه $A+C\overset{M}{=}B+C$ و $A-C\overset{M}{=}B-C$.

۵. اگر $A\overset{M}{=}B$ واگر C درمجموعهٔ M برابرصفر نشود، آن‌وقت

$$\frac{A}{C}\overset{M}{=}\frac{B}{C} \text{ و } AC\overset{M}{=}BC$$

۶. اگر $A\overset{M}{=}B$ و $C\overset{M}{=}D$، آن‌گاه

$$A+C\overset{M}{=}B+D \quad \text{و} \quad A-C\overset{M}{=}B-D$$

۷. اگر $A\overset{M}{=}B$ و $C\overset{M}{=}D$، آن‌گاه $AC\overset{M}{=}BD$.

۸. اگر $A\overset{M}{=}B$ و $C\overset{M}{=}D$ و، درضمن، CD درمجموعهٔ M صفر نباشد، آن‌گاه

$$\frac{A}{C}\overset{M}{=}\frac{B}{D}$$

۹. اگر $A\overset{M}{=}B$ و $n\in\mathbf{N}$، آن‌گاه $A^n\overset{M}{=}B^n$.

۱۰. اگر $A^n\overset{M}{=}B^n$، درضمن، هریک ازعبارت‌های A و B تنها مقدارهای غیرمنفی را درمجموعهٔ M قبول کنند، آن‌وقت $A\overset{M}{=}B$ $(n\in\mathbf{N})$.

۱۱. اگر $A^{۲n+۱}\overset{M}{=}B^{۲n+۱}$ $(n\in\mathbf{N})$، آن‌وقت $A\overset{M}{=}B$.

۱۲. اگر $A\overset{M}{=}B$ و $n\in\mathbf{N}$، آن‌گاه $\sqrt[۲n+۱]{A}\overset{M}{=}\sqrt[۲n+۱]{B}$.

۱۳. اگر $A\overset{M}{=}B$ وهریک ازعبارت‌های A و B، در مجموعهٔ M، تنها مقدارهای غیرمنفی را قبول کنند، آن‌وقت $\sqrt[n]{A}\overset{M}{=}\sqrt[n]{B}$ $(n\in\mathbf{N})$.

فرض کنید، درمجموعهٔ M که به‌حوزهٔ تعریف عبارت‌های A و B تعلق دارد، برای هرانتخاب عددی از M، مقدارعددی عبارت A از مقدارعددی متناظر B بزرگتر (یاکوچکتر) باشد، دراین‌صورت گویند، نابرابری اتحادی $A>B$ (یا $A<B$) درمجموعهٔ M برقرار است ومی‌نویسند:

$$A\overset{M}{>}B \quad (\text{یا}\ A\overset{M}{<}B)$$

مثلاً، درمجموعهٔ عددهای حقیقی، نابرابری‌های اتحادی زیر برقرارند:

$$a^۲+۱>a^۲,\quad a<a^۲+۱$$

درحالتی که از مجموعهٔ M نامی برده نشده باشد، فرض براین است

که، نابرابری اتحادی را، درحوزهٔ تعریف همهٔ عبارت‌های وارد درنابرابری، درنظر گرفته‌اند.

به‌جز نابرابری‌های $A \overset{M}{>} B$ و $A \overset{M}{<} B$، نابرابری‌های غیراکید $A \overset{M}{\geqslant} B$ و $A \overset{M}{\leqslant} B$ را هم، مورد بررسی قرارمی‌دهند.

منظور ازنابرابری $A \overset{M}{\geqslant} B$ (یا $A \leqslant B$) این‌است که، برای هرانتخاب عددی از مجموعهٔ M، یا مقدارهای متناظر عبارت‌های A و B برابرند و یا مقدار عبارت A، ازمقدارعبارت B بزرگتر (یاکوچکتر) است.

ویژگی‌های نابرابری‌های اتحادی

A، B، C و D را، عبارت‌های جبری مفروض و M را مجموعهٔ مفروضی ازحوزهٔ تعریف این عبارت‌ها می‌گیریم.

۱. اگر $A \overset{M}{>} B$، آن‌وقت $B \overset{M}{<} A$.

۲. اگر $A \overset{M}{>} B$، آن‌وقت $A - B \overset{M}{>} 0$.

۳. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $B \overset{M}{>} C$، آن‌وقت $A \overset{M}{>} C$.

۴. اگر $A \overset{M}{>} B$، آن‌گاه $A + C \overset{M}{>} B + C$ و $A - C \overset{M}{>} B - C$.

۵. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $C \overset{M}{>} D$، آن‌گاه $A + C \overset{M}{>} B + D$.

۶. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $C \overset{M}{<} D$، آن‌وقت $A - C \overset{M}{>} B - D$.

۷. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $C \overset{M}{>} 0$، آن‌گاه $AC \overset{M}{>} BC$.

۸. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $C \overset{M}{<} 0$، آن‌وقت $AC \overset{M}{<} BC$.

۹. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $C \overset{M}{>} D$ و $D \overset{M}{>} 0$، آن‌گاه $AC \overset{M}{>} BD$.

۱۰. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $n \in \mathbf{N}$، آن‌گاه $A^{2n+1} \overset{M}{>} B^{2n+1}$.

۱۱. اگر $A \overset{M}{>} B$ و $B \overset{M}{>} 0$، آن‌گاه $A^n \overset{M}{>} B^n$ $(n \in \mathbf{N})$.

۱۲. اگر $A^{۲n+۱}\overset{M}{>}B^{۲n+۱}$ و $n\in\mathbf{N}$، آن‌گاه $A\overset{M}{>}B$.

۱۳. اگر $A^{n}\overset{M}{>}B^{n}$ و $A\overset{M}{>}۰$ و $B\overset{M}{>}۰$، آن‌گاه $A\overset{M}{>}B$ $(n\in\mathbf{N})$.

۱۴. اگر $A\overset{M}{>}B$ و $n\in\mathbf{N}$، آن‌گاه $\sqrt[۲n+۱]{A}\overset{M}{>}\sqrt[۲n+۱]{B}$.

۱۵. اگر $A\overset{M}{>}B$، $B\overset{M}{>}۰$ و $n\in\mathbf{N}$، آن‌گاه $\sqrt[n]{A}\overset{M}{>}\sqrt[n]{B}$.

۱۶. ویژگی‌های مشابهی، برای نابرابری‌های اتحادی $A\overset{M}{<}B$، $A\overset{M}{\geqslant}B$ و $A\overset{M}{\leqslant}B$ وجود دارد.

برای اثبات درستی برابری‌ها و نابرابری‌های عبارت‌های جبری، از روش‌های مختلفی استفاده می‌کنند: الف) آزمایش همهٔ حالت‌های ممکن؛ ب) به‌کاربردن قانون‌های عمل درعبارت‌های جبری و استفاده ازویژگی‌های برابری ونابرابری‌ها؛ ج) استفاده از نابرابری‌های معلوم؛ د) اثبات باروش استقرای ریاضی؛ ه) عبورازبرابری یا نابرابری درست، به‌کمک تبدیل‌های لازم، بدون این‌که به‌درستی آن لطمه‌ای وارد آید، ورسیدن به‌نابرابری موردنظر؛ و) استفاده از برهان خلف وغیره.

مثال ۱. درستی این برابری اتحادی را ثابت کنید:

$$(۱+ab+a+b)^{۲}-(۱-ab+a-b)^{۲}=۴b(۱+a)^{۲}$$

حل. با استفاده از اتحاد $A^{۲}-B^{۲}=(A+B)(A-B)$ داریم:

$$(۱+ab+a+b)^{۲}-(۱-ab+a-b)^{۲}=[(۱+ab+a+b)+$$
$$+(۱-ab+a-b)][(۱+ab+a+b)-(۱-ab+a-b)]=$$
$$=(۲+۲a)(۲ab+۲b)=۴b(a+۱)^{۲}$$

مثال ۲. ثابت کنید، برای هرعددطبیعی n، این برابری اتحادی برقرار است:

$$\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۵\times۷}+\frac{۱}{۷\times۹}+\dots+\frac{۱}{(۲n+۱)(۲n+۳)}=\frac{n}{۳(۲n+۳)}$$

حل. داریم:

$$\frac{۱}{(۲n+۱)(۲n+۳)}=\frac{(۲n+۳)-(۲n+۱)}{۲(۲n+۱)(۲n+۳)}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n+۱}-\frac{۱}{۲n+۳}\right)$$

بنابراین، سمت‌چپ برابری موردنظر را می‌توان، به‌ترتیب، این‌طور نوشت:

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۹}\right)+\dots+$$
$$+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲n+۱}-\frac{۱}{۲n+۳}\right)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲n+۳}\right)=\frac{n}{۳(۲n+۳)}$$

مثال ۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$(x_۱^۲+x_۲^۲)(a_۱^۲+a_۲^۲)-(x_۱a_۱+x_۲a_۲)^۲=(x_۱a_۲-a_۱x_۲)^۲$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$(x_۱^۲+x_۲^۲)(a_۱^۲+a_۲^۲)-(x_۱a_۱+x_۲a_۲)^۲=x_۱^۲a_۱^۲+x_۲^۲a_۱^۲+x_۱^۲a_۲^۲+$$
$$+x_۲^۲a_۲^۲-x_۱^۲a_۱^۲-۲x_۱a_۱x_۲a_۲-x_۲^۲a_۲^۲=x_۱^۲a_۲^۲-۲x_۱a_۲\cdot x_۲a_۱+$$
$$+x_۲^۲a_۱^۲=(x_۱a_۲-x_۲a_۱)^۲$$

یادآوری می‌کنیم که، برابری اتحادی ۳، حالت خاصی از برابری اتحادی لاگرانژ است. برابری اتحادی لاگرانژ چنین است:

$$(x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲)(a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲)-(a_۱x_۱+a_۲x_۲+\dots+$$
$$+a_nx_n)^۲=(x_۱a_۲-x_۲a_۱)^۲+(x_۱a_۳-x_۳a_۱)^۲+\dots+$$
$$+(x_{n-۱}a_n-x_na_{n-۱})^۲$$

که در آن $x_۱$، ...، x_n و $a_۱$، ...، a_n، عددهایی حقیقی و دلخواه هستند.

از اتحاد لاگرانژ می‌توان نتیجه گرفت که، برابری

$$(x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲)(a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲)=x(x_۱a_۱+\dots+x_na_n)^۲$$

تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{x_۱}{a_۱}=\frac{x_۲}{a_۲}=\frac{x_۳}{a_۳}=\dots=\frac{x_n}{a_n},\ a_i\neq ۰$$

مثال ۴. ثابت کنید، برای عددهای مثبت ودلخواه a و b داریم:

$$۴(a^۳+b^۳)\geqslant(a+b)^۳$$

حل. عبارت $۴(a^۳+b^۳)-(a+b)^۳$ را درنظر می‌گیریم و آن را، به‌صورت زیر، تبدیل می‌کنیم:

$$۴(a^۳+b^۳)-(a+b)^۳=۴a^۳+۴b^۳-a^۳-۳a^۲b-۳ab^۲-b^۳=$$
$$=۳[(a^۳-a^۲b)+(b^۳-b^۲a)]=۳[a^۲(a-b)-b^۲(a-b)]=$$
$$=۳(a-b)(a^۲-b^۲)=۳(a-b)^۲(a+b)$$

چون $(a-b)^۲\geqslant ۰$ و $a+b>۰$، پس $۴(a^۳+b^۳)-(a+b)^۳\geqslant ۰$ و

$$۴(a^۳+b^۳)\geqslant(a+b)^۳$$

از شیوهٔ استدلال روشن است که، علامت برابری، برای حالت $a=b$ پیش می‌آید.

مثال ۵. درستی نابرابری زیر را، برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\dots+\frac{۱}{n^۲}<۲$$

حل. برای هرعدد طبیعی $۲\leqslant k\leqslant n$ داریم: $\frac{۱}{k^۲}<\frac{۱}{k(k-۱)}$؛ پس

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\dots+\frac{۱}{n^۲}\leqslant ۱+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\dots+$$
$$+\frac{۱}{n(n-۱)}=۱+\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\dots+$$
$$+\left(\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n}\right)=۲-\frac{۱}{n}<۲$$

مثال ۶. ثابت کنید، برای‌هر عدد حقیقی x، نابرابری زیر برقرار است:

$$x^۸-x^۷+x^۵-x^۳+۱>۰$$

حل. محورعددی را به بازه‌های $x\leqslant ۰$، $۰<x<۱$ و $x\geqslant ۱$ تقسیم و ثابت می‌کنیم، نابرابری مساله، درهر یك ازاین بازه‌ها درست است.

اگر $x\leqslant ۰$، آن وقت $-x^۳\geqslant ۰$ و $(x^۴-x^۲+۱)>۰$؛ بنابراین

$$-x^۳(x^۴-x^۲+۱)\geqslant ۰$$

که ازاین‌جا نتیجه می‌شود:

$$x^۸-x^۷+x^۵-x^۳+۱=x^۸-x^۳(x^۴-x^۲+۱)+۱\geqslant ۱>۰$$

اگر $۰<x<۱$، آن‌گاه بنابرویژگی توان‌ها داریم: $x^۵>x^۷$ و $x^۳<۱$؛ درنتیجه $x^۵-x^۷>۰$ و $۱-x^۳>۰$ و بنابراین

$$x^۸-x^۷+x^۵-x^۳+۱=x^۸+(x^۵-x^۷)+(۱-x^۳)>۰$$

اگر $x\geqslant ۱$، آن‌وقت با توجه به‌ویژگی توان‌ها $x^۸\geqslant x^۷$ و $x^۵\geqslant x^۳$؛ بنابراین $(x^۸-x^۷)\geqslant ۰$ و $(x^۵-x^۳)\geqslant ۰$؛ یعنی

$$x^۸-x^۷+x^۵-x^۳+۱=(x^۸-x^۷)+(x^۵-x^۳)+۱\geqslant ۱>۰$$

مثال ۷. ثابت کنید، برای عددهای غیرمنفی و دلخواه a و b، این نابرابری برقرار است (نابرابری بین‌واسطهٔ هندسی و واسطهٔ حسابی دوعدد):

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}$$

درضمن علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که داشته‌باشیم: $a=b$.

حل. برای هر $a\geqslant ۰$ و هر $b\geqslant ۰$، نابرابری $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geqslant ۰$ برقرار است؛ ازاین نابرابری نتیجه می‌شود $a-۲\sqrt{ab}+b\geqslant ۰$ و ازآن به‌دست می‌آید:

$$\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که

$$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{۲}\Longleftrightarrow a=b$$

درواقع، ازیك طرف

$$\sqrt{ab}=\frac{a+b}{۲}\Rightarrow ۲\sqrt{ab}=a+b\Rightarrow(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲=۰\Rightarrow a=b$$

وازطرف دیگر

$$a=b\Rightarrow\sqrt{ab}=a \text{ و } \frac{a+b}{۲}=a\Rightarrow\sqrt{ab}=\frac{a+b}{۲}$$

مثلاً در مورد عددهای $\log_۲\frac{۳}{۲}$ و $\log_{\frac{۳}{۲}}۲$ داریم:

$$\log_{۲}\frac{۳}{۲}+\log_{\frac{۳}{۲}}۲\geqslant ۲\sqrt{\log_{۲}\frac{۳}{۲}\cdot\log_{\frac{۳}{۲}}۲}=۲$$

و چون $\log_{۲}\frac{۳}{۲}\neq\log_{\frac{۳}{۲}}۲$، بنابراین $\log_{۲}\frac{۳}{۲}+\log_{\frac{۳}{۲}}۲>۲$.

گاهی برای اثبات نابرابری $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}$ این‌طور استدلال می‌کنند:

اگر داشته باشیم $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}$، آن‌وقت داریم $a+b-۲\sqrt{ab}\geqslant ۰$.

نابرابری اخیر هم درست است، زیرا $a+b-۲\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲}\geqslant ۰$.

در این استدلال، یك اشتباه منطقی وجود دارد: ازاین مطلب که، درنتیجهٔ تبدیل‌ها، به‌یك نابرابری درست رسیده‌ایم، نمی‌توان نتیجه گرفت‌که نابرابری نخستین هم درست است.

درواقع، تبدیل‌های نابرابری نخستین، اغلب به‌ما کمك می‌کنند تا به چنان نابرابری درستی دست پیدا کنیم که بتوانیم، با آغاز از آن، استدلال خود را انجام دهیم: از یك نابرابری درست، ضمن تبدیل‌هایی‌که به‌درستی آن لطمه‌ای نزنند، می‌توان نابرابری موردنظر را به‌دست‌آورد.

بااستفاده ازنابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی، می‌توان اثبات نابرابری‌های بسیاردیگری را به‌دست آورد.

مثال ۸. ثابت کنید، برای هر عدد مثبت a، نابرابری $a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲$ برقرار است.

حل. با استفاده ازنابرابری بین واسطه‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲\sqrt{a\cdot\frac{۱}{a}}=۲$$

درضمن، برابری، تنها برای $a=۱$ پیش می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که، درحالت $a<۰$، نابرابری $a+\frac{۱}{a}\leqslant -۲$ برقرار است و، برابری، تنها برای $a=-۱$ برقرار است.

مثال ۹. ثابت کنید، برای عددهای غیرمنفی a، b، c و d داریم:

$$\frac{a+b+c+d}{۴}\geqslant\sqrt[۴]{abcb}$$

حل. چون $\frac{a+b}{۲}\geqslant\sqrt{ab}$ و $\frac{c+d}{۲}\geqslant\sqrt{cd}$، بنابراین

$$\frac{a+b+c+d}{۴}=\left(\frac{a+b}{۲}+\frac{c+d}{۲}\right):۲\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{۲}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[۴]{abcd}$$

وعلامت برابری، تنها وقتی پیش می‌آید که $a=b=c=d$.

مثال ۱۰. درستی این نابرابری را، برای عددهای غیرمنفی a، b و c ثابت کنید:

$$\frac{a+b+c}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{abc}$$

حل. چهار عدد غیر منفی a، b، c و $d=\frac{a+b+c}{۳}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت با توجه به مثال ۹ داریم:

$$d=\frac{a+b+c}{۳}=\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{۳}}{۴}=$$

$$=\frac{a+b+c+d}{۴}\geqslant\sqrt[۴]{abcd}$$

یعنی $d\geqslant\sqrt[۴]{abcd}$ یا $d^۴\geqslant abcd$.

اگر $d=۰$، آن‌وقت $a=b=c=۰$ (زیرا این‌عددها، غیرمنفی‌اند)، ودرستی نابرابری موردنظر روشن است.

اگر $d\neq۰$، آن‌وقت از نابرابری $d^۴\geqslant abcd$، به‌دست می‌آید:

$$d^۳\geqslant abc\Rightarrow d\geqslant\sqrt[۳]{abc}\Rightarrow\frac{a+b+c}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{abc}$$

مثال ۱۱. درستی این نابرابری را، برای عددهای غیرمنفی a، b و c ثابت کنید:

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$$

حل. با توجه به نابرابری واسطه‌ها، داریم:

$$a+b\geqslant ۲\sqrt{ab}،\quad b+c\geqslant ۲\sqrt{bc}،\quad a+c\geqslant ۲\sqrt{ac}$$

واز مجموع آن‌ها، به‌سادگی، نتیجه می‌شود:

$$a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$$

مثال ۱۲. درستی این نابرابری را، برای $b\geqslant ۰$ ثابت کنید:

$$\frac{a^۶+b^۹}{۴}\geqslant ۳a^۲b^۳-۱۶$$

حل. نابرابری را می‌توان این‌طور نوشت:

$$a^۶+b^۹+۶۴\geqslant ۱۲a^۲b^۳$$

برای اثبات درستی این نابرابری، از نابرابری واسطه‌ها، درمورد عددهای $(a^۲)^۳$، $(b^۳)^۳$ و $۴^۳$ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(a^۲)^۳+(b^۳)^۳+۴^۳}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{(a^۲)^۳\,(b^۳)^۳\cdot۴^۳}=۴a^۲b^۳$$

یعنی $a^۶+b^۹+۶۴\geqslant ۱۲a^۲b^۳$ واز آن‌جا

$$a^۶+b^۹\geqslant ۱۲a^۲b^۳-۶۴\Rightarrow\frac{a^۶+b^۹}{۴}\geqslant ۳a^۲b^۳-۱۶$$

مثال ۱۳. درستی این نابرابری را ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{n+۱}{۲}،\quad n\in\mathbf{N}$$

حل. از نابرابری واسطه‌ها، دربارهٔ عددهای ۱، ۲، ...، n استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{۱\times۲\times\cdots\times n}<\frac{۱+۲+\cdots+n}{n}=\frac{n(n+۱)}{۲n}=\frac{n+۱}{۲}$$

نابرابری اکید است، زیرا عددهای ۱، ۲، ...، n، باهم برابر نیستند.

مثال ۱۴. ثابت کنید، اگر مخرج کسرهای $\frac{a_۱}{b_۱}$، $\frac{a_۲}{b_۲}$، ...، $\frac{a_n}{b_n}$، عددهای مثبت باشند، این نابرابری‌ها درست‌اند:

$$\min_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i}\leqslant\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{b_۱+b_۲+\cdots+b_n}\leqslant\max_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i}$$

حل. فرض می کنیم:

$$m=\min_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i} \quad \text{و} \quad M=\max_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{a_i}{b_i}$$

در این صورت، خواهیم داشت:

$$mb_{۱}\leqslant a_{۱}\leqslant Mb_{۱}،$$
$$mb_{۲}\leqslant a_{۲}\leqslant Mb_{۲}،$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$mb_n\leqslant a_n\leqslant Mb_n$$

که ازمجموع آن‌ها به‌دست می آید:

$$m(b_{۱}+b_{۲}+\dots+b_n)\leqslant a_{۱}+a_{۲}+\dots+a_n\leqslant$$
$$\leqslant M(b_{۱}+b_{۲}+\dots+b_n)$$

وازآن‌جا

$$m\leqslant\frac{a_{۱}+a_{۲}+\dots+a_n}{b_{۱}+b_{۲}+\dots+b_n}\leqslant M$$

درحالت‌خاص، برای عددهای مثبت ودلخواه $k_{۱}$، $k_{۲}$، ...، k_n داریم:

$$\min_{۱\leqslant i\leqslant n} a_i\leqslant\frac{k_{۱}a_{۱}+k_{۲}a_{۲}+\dots+k_na_n}{k_{۱}+k_{۲}+\dots+k_n}\leqslant\max_{۱\leqslant i\leqslant n} a_i$$

و به‌ازای $k_{۱}=k_{۲}=\dots=k_n=۱$:

$$\min_{۱\leqslant i\leqslant n} a_i\leqslant\frac{a_{۱}+a_{۲}+\dots+a_n}{n}\leqslant\max_{۱\leqslant i\leqslant n} a_i \qquad (۱)$$

واین، به‌معنای آن‌است که، واسطهٔ حسابی n عدد $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، a_n، بین کوچکترین و بزرگترین این عـددها واقع است. در (۱)، علامت برابری وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a_{۱}=a_{۲}=\dots=a_n$.

وهمچنین، از (۱) می‌توان نتیجه گرفت که‌واسطهٔ توافقی عددهای‌مثبت $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، a_n، بین کوچکترین وبزرگترین این عددها قراردارد. درواقع، ازنابرابری‌های (۱) به‌دست می آید:

$$\min_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{۱}{a_i}\leqslant\frac{\frac{۱}{a_{۱}}+\frac{۱}{a_{۲}}+\dots+\frac{۱}{a_n}}{n}\leqslant\max_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{۱}{a_i}$$

وچون $\min\limits_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{۱}{a_i}=\frac{۱}{\max\limits_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i}$ و $\max\limits_{۱\leqslant i\leqslant n}\frac{۱}{a_i}=\frac{۱}{\min\limits_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i}$ پس

$$\frac{۱}{\max\limits_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i}\leqslant\frac{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}{n}\leqslant\frac{۱}{\min\limits_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i}$$

واز آن جا

$$\max_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i\geqslant\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}\geqslant\min_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i$$

به‌این ترتیب، می‌توان نوشت:

$$\min_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i\leqslant\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}\leqslant\max_{۱\leqslant i\leqslant n}a_i$$

یعنی واسطهٔ هندسی n عدد مثبت، بین واسطهٔ توافقی و واسطهٔ حسابی آن‌ها قرار دارد.

از نابرابری $\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}\leqslant\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}\right)\geqslant n^۲$$

که درحالت‌های خاص، به‌ازای $n=۲$ و $n=۳$، داریم:

$$(a_۱+a_۲)\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}\right)\geqslant ۴،\quad (a_۱+a_۲+a_۳)\left(\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\frac{۱}{a_۳}\right)\geqslant ۹$$

مثال ۱۵. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، داریم:

$$۱+\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times n}<۳$$

حل. چون برای $k\geqslant ۳$ داریم: $\frac{۱}{۱\times ۲\times \cdots \times k}<\frac{۱}{۲^{k-۱}}$،
بنابراین برای $n\geqslant ۳$ خواهیم داشت:

$$۱+\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳}+\cdots+\frac{۱}{۱\times ۲\times \cdots\times n}<$$

$$<۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}=۱+\frac{۱-\frac{۱}{۲^{n}}}{۱-\frac{۱}{۲}}=۳-\frac{۱}{۲^{n-۱}}<۳$$

درستی نابرابری را، به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ می‌توان به‌طور مستقیم به‌دست آورد.

نابرابری زیر، که برای هر عدد طبیعی n درست است، نتیجه‌ای است از نابرابری فوق:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<۳$$

درواقع، با توجه به بسط دوجمله‌ای، داریم:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}=۱+۱+\frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}\cdot\frac{۱}{n^{۲}}+\cdots+$$

$$+\frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)}{۱\times ۲\times \cdots\times k}\cdot\frac{۱}{n^{k}}+\cdots+\frac{n(n-۱)\cdots ۲\times ۱}{۱\times ۲\times \cdots\times n}\cdot\frac{۱}{n^{n}}=$$

$$=۲+\frac{۱}{۱\times ۲}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)+\cdots+\frac{۱}{۱\times ۲\times \cdots\times k}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{k-۱}{n}\right)+$$

$$+\cdots+\frac{۱}{۱\times ۲\times \cdots\times n}\left(۱-\frac{۱}{n}\right)\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\cdots\left(۱-\frac{n-۱}{n}\right)<$$

$$<۲+\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳}+\cdots+\frac{۱}{۱\times ۲\times \cdots\times n}<۳$$

مثال ۱۶. نابرابری برنولی را، برای $\alpha>۰$ و عدد گویای $r>۱$ ثابت کنید:

$$(۱+\alpha)^{r}>۱+r\alpha$$

حل. $r=\frac{p}{q}>۱$ را، کسری ساده‌نشدنی می‌گیریم. از نابرابری بین

واسطهٔ هندسی و واسطهٔ حسابی، برای عددهای

$$\underbrace{(۱+r\alpha), (۱+r\alpha), \ldots, (۱+r\alpha)}_{\text{عدد } q}, \qquad \underbrace{۱, ۱, \ldots, ۱}_{\text{عدد } (p-q)}$$

استفاده می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\sqrt[p]{(۱+r\alpha)^q} < ۱+\frac{qr\alpha}{p} = ۱+\alpha$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود $۱+r\alpha < (۱+\alpha)^{\frac{p}{q}}$، یعنی

$$(۱+\alpha)^r > ۱+r\alpha$$

مثال ۱۷. نابرابری کوشی ـ بونیا کوسکی را، برای عددهای حقیقی $a_۱$، $a_۲$، …، a_n و $b_۱$، $b_۲$، …، b_n ثابت کنید:

$$(a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n)^۲ \leqslant$$
$$\leqslant (a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)(b_۱^۲+b_۲^۲+\cdots+b_n^۲) \qquad (۲)$$

حل. در حالت $a_۱ = a_۲ = \ldots = a_n = ۰$، نابرابری (۲) به‌برابری تبدیل می‌شود. درحالتی‌که، دست‌کم یکی ازعددهای $a_۱$، $a_۲$، …، a_n مخالف صفر باشد، داریم:

$$a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲ > ۰$$

سه‌جمله‌ای‌درجه دوم زیر را درنظر می‌گیریم:

$$ax^۲+۲bx+c$$

که در آن، برای ضریب‌ها، داشته باشیم:

$$a = a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲, \quad b = a_۱b_۱+a_۲b_۲+\cdots+a_nb_n,$$
$$c = b_۱^۲+b_۲^۲+\cdots+b_n^۲$$

توجه می‌کنیم که

$$ax^۲+۲bx+c = (a_۱x+b_۱)^۲+(a_۲x+b_۲)^۲+\cdots+(a_nx+b_n)^۲$$

چون $(a_i+b_i)^۲ \geqslant ۰$، بنابراین $ax^۲+۲bx+c \geqslant ۰$ (برای هرعدد حقیقی x) و، درنتیجه، مبین این عبارت درجهٔ دوم، منفی است، یعنی $b^۲ \leqslant ac$ و

$$(a_۱b_۱+\cdots+a_nb_n)^۲ \leqslant (a_۱^۲+\cdots+a_n^۲)(b_۱^۲+\cdots+b_n^۲)$$

علامت برابری در (۲)، تنها وقتی برقرار است که، عددهای α و β با شرط $\alpha^۲+\beta^۲ \neq ۰$ وجود داشته باشندکه، برای هر k ازعددهای ۱، ۲، …، n، برابری $\alpha a_k+\beta b_k = ۰$ برقرار باشد.

نابرابری (۲) را، به‌صورت کوتاه، می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\right)^۲ \leqslant \sum_{i=۱}^{n} a_i^۲ \sum_{i=۱}^{n} b_i^۲$$

نابرابری‌هایی که اغلب به‌کار می‌آیند

۱. برای عددهای حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n داریم:

$$\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲} \leqslant |a_۱|+|a_۲|+\dots+|a_n|$$

ودرحالت $n=۲$ به‌صورت $\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}\leqslant|a_۱|+|a_۲|$ درمی‌آید که تعبیر هندسی جالبی دارد: اگر $|a_۱|$ و $|a_۲|$، طول ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند، $\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$ طول وتراین مثلث می‌شود، یعنی طول وتر، ازمجموع طول‌های دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه کوچکتر است.

۲. برای عددهای حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n داریم:

$$\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲}-\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲} \leqslant$$
$$\leqslant |a_۱-b_۱|+|a_۲-b_۲|+\dots+|a_n-b_n|$$

۳. برای عددهای حقیقی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n داریم:

$$\sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲+\dots+(a_n-b_n)^۲} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲}+\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲}$$

این نابرابری، به‌ازای $n=۲$، به‌صورت

$$\sqrt{(a_۱-b_۱)^۲+(a_۲-b_۲)^۲} \leqslant \sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}+\sqrt{b_۱^۲+b_۲^۲}$$

درمی‌آید که می‌توان، آن را، به‌صورت زیر تعبیر هندسی کرد: اگر $A(a_۱, a_۲)$ و $B(b_۱, b_۲)$ دونقطه ازصفحه باشند، آن‌وقت این نابرابری به‌معنای آن است که، طول پاره‌خط راست AB، ازمجموع طول پاره‌خط‌های راست OA و OB تجاوز نمی‌کند.

۴. برای عددهای غیرمنفی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n داریم:

$$\sqrt[n]{a_۱ a_۲ \cdots a_n} \leqslant \frac{a_۱+a_۲+\dots+a_n}{n}$$

(نابرابری بین واسطه‌های حسابی وهندسی n عدد غیرمنفی).

۵. $a_{۱}$، $a_{۲}$، …، a_n را عددهایی مثبت می‌گیریم و واسطه‌های حسابی، هندسی، توافقی و توانی این عددها را، به‌ترتیب با A_n، G_n، H_n، $S_n(m)$ نشان می‌دهیم:

$$A_n=\frac{a_{۱}+a_{۲}+\cdots+a_n}{n}, \quad G_n=\sqrt[n]{a_{۱}a_{۲}\cdots a_n},$$

$$H_n=\frac{n}{\frac{۱}{a_{۱}}+\frac{۱}{a_{۲}}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}, \quad S_n(m)=\sqrt[m]{\frac{a_{۱}^m+a_{۲}^m+\cdots+a_n^m}{n}}$$

دراین صورت، برای A_n، G_n، H_n و $S_n(۲)$ داریم:

$$A_n\geqslant G_n, \quad A_n\leqslant S_n(۲), \quad H_n\leqslant G_n$$

یعنی

$$S_n(۲)\geqslant A_n\geqslant G_n\geqslant H_n$$

۶. نابرابری چه‌بی‌شف. اگر $a_{۱}$، $a_{۲}$، …، a_n و $b_{۱}$، $b_{۲}$، …، b_n دو دنبالهٔ عددی غیرنزولی (یاغیرصعودی) باشند، آن‌وقت

$$\frac{a_{۱}+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_{۱}+\cdots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_{۱}b_{۱}+\cdots+a_nb_n}{n}$$

۷. اگر $a_{۱}^{۲}+a_{۲}^{۲}+\cdots+a_n^{۲}=۱$ و $b_{۲}^{۲}+b_{۲}^{۲}+\cdots+b_n^{۲}=۱$، آن وقت

$$|a_{۱}b_{۱}+a_{۲}b_{۲}+\cdots+a_nb_n|\leqslant ۱$$

کاربرد نابرابری‌ها درجست‌وجوی حداکثر وحداقل مقدارها

ازنابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وهندسی نتیجه می‌شود:

۱. اگرمجموع عددهای مثبت $a_{۱}$، $a_{۲}$، …، a_n برابر a باشد، آن‌وقت حاصل‌ضرب این عددها، وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد که داشته‌باشیم:

$$a_{۱}=a_{۲}=\cdots=a_n=\frac{a}{n}$$

واین مقدار حداکثر برابر است با $\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

۲. اگرحاصل‌ضرب‌عددهای‌مثبت $a_{۱}$، $a_{۲}$، …، a_n برابر b باشد، آن‌وقت

مجموع آن‌ها وقتی به‌حداقل مقدار خود می‌رسدکه داشته باشیم:

$$a_۱=a_۲=\dots=a_n=\sqrt[n]{b}$$

و این حداقل مقدار، برابر است بـا $n\sqrt[n]{b}$.

مثال ۱۸. حداقل مقدار این‌تابع را پیداکنید:

$$f(x)=x+\frac{a}{x},\ x\in(۰، +\infty)،\ a>۰$$

حل. حاصل‌ضرب جمله‌هـای مثبت x و $\frac{a}{x}$، برابراست با مقدار ثابت a و، بنابراین، مجموع آن‌هـا، زمانی حداقل مقدار ممکن است که $x=\frac{a}{x}$، یعنی $x=\sqrt{a}$؛ این مقدارحداقل برابر $۲\sqrt{a}$ است.

مثال ۱۹. حداقل مقداراین تابع را پیداکنید:

$$f(x)=\frac{x^۳+x+۲}{x},\ x\in(۰، +\infty)$$

حل. چون

$$\frac{x^۳+x+۲}{x}=x^۲+۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x}$$

وحاصل‌ضرب جمله‌های $x^۲$، ۱، $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{x}$، برابراست با مقدارثابت۱، بنابراین مجموع آن‌ها، به‌ازای $\frac{۱}{x}=۱=x^۲$، یعنی به‌ازای $x=۱$ به‌حداقل مقدارخود می‌رسد و، این حداقل مقدار، برابر است با ۴.

مثال ۲۰. حداکثر مقداراین تابع را پیدا کنید:

$$f(x)=(۱-x)^۳(۱+۳x),\quad \left(-\frac{۱}{۳}<x<۱\right)$$

حل. تابع $f(x)$ را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$(۱-x)^۳(۱+۳x)=(۱-x)(۱-x)(۱-x)(۱+۳x)$$

چون در بازهٔ $-\frac{۱}{۳}<x<۱$ داریم: $۱-x>۰$ و $۱+۳x>۰$ و

$$(۱-x)+(۱-x)+(۱-x)+(۱+۳x)=۴$$

بنابراین، حداکثر مقدار $f(x)$، وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم:

$$۱-x=۱+۳x \Rightarrow x=۰$$

و این مقدار حداکثر، برابر است با ۱.

مثال ۲۱. حداکثر مقدار تابع $y(x)=x^۲\sqrt{۴-x^۲}$ را، در بازهٔ $-۲\leqslant x\leqslant ۲$ پیدا کنید.

حل. تابع‌های $y(x)$ و $\frac{۱}{۴}y^۲(x)$، به‌ازای یک مقدار x، به حداکثر خود می‌رسند (زیرا $y(x)>۰$). عبارت $\frac{۱}{۴}y^۲(x)=\frac{x^۴}{۴}(۴-x^۲)$ را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{x^۴}{۴}(۴-x^۲)=\frac{۱}{۲}x^۲\cdot\frac{۱}{۲}x^۲\cdot(۴-x^۲)$$

مجموع $\frac{۱}{۲}x^۲+\frac{۱}{۲}x^۲+۴-x^۲$ برابر مقدار ثابت ۴ است؛ بنابراین تابع $\frac{۱}{۴}y^۲(x)$ وهمراه با آن، تابع $y(x)$، وقتی به‌حداکثرمقدار خودمی‌رسد که داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۴}x^۲=۴-x^۲\Rightarrow x=\pm\frac{۲}{۳}\sqrt{۶}$$

یعنی $y\left(\frac{۲}{۳}\sqrt{۶}\right)=\frac{۱۶}{۹}\sqrt{۳}$، حداکثر مقدار تابع است.

مثال ۲۲. مطلوب است حداکثر وحداقل مقدار $A=x_۱y_۱+x_۲y_۲$، به‌شرطی که بدانیم: $x_۱^۲+x_۲^۲\leqslant ۲$ و $y_۱^۲+y_۲^۲\leqslant ۴$.

حل. با توجه به‌نابرابری کوشی ـ بونیاکووسکی داریم:

$$A^۲=(x_۱y_۱+x_۲y_۲)^۲\leqslant(x_۱^۲+x_۲^۲)(y_۱^۲+y_۲^۲)$$

که از آن‌جا، با توجه به‌شرط مساله، به‌دست می‌آید:

$$A^{۲}\leqslant ۸،\ |A|\leqslant\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

توجه کنیم: مثلاً به‌ازای $x_{۱}=x_{۲}=۱$ و $y_{۱}=y_{۲}=\sqrt{۲}$، عبارت $x_{۱}y_{۱}+x_{۲}y_{۲}$ دارای حداکثر مقداری برابر $\sqrt{۸}$ و به‌ازای $x_{۱}=x_{۲}=-۱$ و $y_{۱}=y_{۲}=\sqrt{۲}$، دارای حداقل مقداری برابر $-\sqrt{۸}$ خواهد بود.

مثال ۲۳. می‌دانیم، معادلهٔ

$$x^{۴}-۴x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱=۰$$

دارای چهار ریشهٔ مثبت است. ضریب‌های a و b را پیدا کنید.

حل. اگر ریشه‌های معادله را $x_{۱}$، $x_{۲}$، $x_{۳}$ و $x_{۴}$ بگیریم، با توجه به‌قضیهٔ ویت باید داشته باشیم:

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}=۴،\ x_{۱}x_{۲}x_{۳}x_{۴}=۱$$

نابرابری مربوط به‌واسطه‌های حسابی وهندسی، به‌ما می‌دهد:

$$۱=\sqrt[۴]{x_{۱}x_{۲}x_{۳}x_{۴}}\leqslant\frac{x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}}{۴}=۱$$

و بنا براین

$$\sqrt[۴]{x_{۱}x_{۲}x_{۳}x_{۴}}=\frac{x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}}{۴}=۱$$

چون برابری بین واسطه‌های حسابی و هندسی چهارعدد، تنها وقتی پیش‌می‌آید که، این چهارعدد، باهم برابرباشند، باید داشته باشیم:

$$x_{۱}=x_{۲}=x_{۳}=x_{۴}=۱$$

و از آن‌جا

$$x^{۴}-۴x^{۳}+ax^{۲}+bx+۱=(x-۱)^{۴}$$

که درنتیجه: $a=۶$ و $b=-۴$.

مثال ۲۴. می‌دانیم، معادلهٔ

$$x^{۶}-۶x^{۵}+۱۵x^{۴}+ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d=۰$$

دارای شش ریشهٔ حقیقی است. عددهای a، b، c و d را پیدا کنید.

حل. ریشه‌های معادله را $x_{۱}$، $x_{۲}$، $x_{۳}$، $x_{۴}$، $x_{۵}$ و $x_{۶}$ می‌گیریم. با توجه

به قضیهٔ ویت باید داشته باشیم:

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۶،$$

$$x_۱x_۲+x_۱x_۳+\dots+x_۱x_۶+x_۲x_۳+\dots+x_۲x_۶+\dots+x_۵x_۶=۱۵$$

ثابت می‌کنیم، اگر عددهای $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n چنان باشند که مجموع آن‌ها، برابر n شود، آن‌وقت مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی آن‌ها، از $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ تجاوز نمی‌کند؛ درضمن علامت برابری وقتی پیش مـی‌آید که همهٔ b_i ها برابر واحد باشند.

درواقع، داریم:

$$۲(b_۱b_۲+b_۱b_۳+\dots+b_{n-۱}b_n)=(b_۱+b_۲+\dots+b_n)^۲-$$
$$-(b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲)=n^۲-(b_۱^۲+\dots+b_n^۲)$$

اگر از نـابرابری کوشی ـ بونیاکووسکی برای عددهای $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n و $a_۱=a_۲=\dots=a_n=۱$ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲)\cdot n\geqslant(b_۱+b_۲+\dots+b_n)^۲ \qquad (۳)$$

درضمن، علامت برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$b_۱=b_۲=\dots=b_n$$

از (۳) به‌دست می‌آید:

$$-(b_۱^۲+b_۲^۲+\dots+b_n^۲)\leqslant-\frac{۱}{n}(b_۱+b_۲+\dots+b_n)^۲$$

$$n^۲-(b_۱^۲+\dots+b_n^۲)\leqslant n^۲-\frac{۱}{n}(b_۱+\dots+b_n)^۲=n^۲-n=n(n-۱)$$

و $b_۱b_۲+b_۱b_۳+\dots+b_۱b_n+b_۲b_۳+\dots+b_{n-۱}b_n\leqslant\frac{n(n-۱)}{۲}$.

به‌این ترتیب، گزارهٔ موردنظر ثابت شد.

چون به‌ازای $n=۶$ داریم $\frac{n(n-۱)}{۲}=۱۵$، بنا براین با توجه به گزارهٔ فوق، باید داشته باشیم:

$$x_۱=x_۲=\dots=x_۶=۱$$

و $x^۶-۶x^۵+۱۵x^۴+ax^۳+bx^۲+cx+d=(x-۱)^۶$ که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$a=-۲۰،\ b=۱۵،\ c=-۶،\ d=۱$$

تکلیف ۱.

۰۱ آیا عبارت‌های A و B، درمجموعهٔ M، متحدند؟

$$۱)\quad A=\frac{۱}{x^۲-۱}+\frac{۱}{x+۱},\ B=\frac{۱}{x-\frac{۱}{x}},\quad M=\{x: x>۰\};$$

$$۲)\quad A=x\sqrt{x^۲+۱}،\quad B=-\sqrt{x^۴+x^۲},\quad M=\{x: x\leqslant ۰\};$$

$$۳)\quad A=x\sqrt{x^۲+۱}، B=\sqrt{x^۲+x^۴},\qquad M=\{x: x\geqslant ۰\}.$$

۰۲ مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی را پیدا کنیدکه، در آن، عبارت‌های جبری A و B متحدباشند:

$$۱)\quad A=\frac{a+۱}{(a+۱)^۲},\ B=\frac{۱}{a+۱};$$

$$۲)\quad A=\sqrt{x^۲-۱}،\ B=\sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱};$$

$$۳)\quad A=\sqrt{x^۲-۱}،\ B=\sqrt{۱-x}\sqrt{-۱-x};$$

$$۴)\quad A=۱-۲x^۲,\ B=(\sqrt{۱-x^۲}-x)(\sqrt{۱-x^۲}+x);$$

$$۵)\quad A=۱-۲x^۲,\ B=-(\sqrt{x^۲-۱})^۲-x^۲.$$

۰۳ حوزهٔ تعریف دوعبارت جبری A و B را پیدا کنید وثابت کنید، دراین حوزه، برابری اتحادی $A=B$ برقراراست:

$$۱)\quad A=\frac{a^۲-۱۶}{a^۲-۸a+۱۶}\left(\frac{۲a+۸}{۳a-۹}\right)^{-۱}،\ B=\frac{۳}{۲}\cdot\frac{a-۳}{a-۴};$$

$$۲)\quad A=\frac{۴x}{x^۲-۱},\ B=\frac{۲}{x-۱}+\frac{۲}{x+۱};$$

$$۳)\quad A=\left(\frac{m+۵}{m+۱}+\frac{۵+m}{۵m-۱}\right)\left(\frac{m^۲+۵m}{۱-۵m}\right)^{-۱}،\ B=m-۱-\frac{۵+m^۲}{m+۱}.$$

۰۴ درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱)\quad \left(\frac{a-۳}{۷a-۴}-\frac{a-۳}{a-۴}\right)\frac{۷a-۴}{۹a-۳a^{۲}}=\frac{۱۴-a^{۲}}{۴-a}-a-۴;$$

$$۲)\quad \left(\frac{۱}{x^{۲}+۵x+۶}+\frac{۱}{x^{۲}+۳x+۲}+\frac{۲x}{x^{۲}+۴x+۳}\right)^{۲}\times$$
$$\times\frac{(x-۳)^{۲}+۱۲x}{۴}=۱;$$

$$۳)\quad \frac{(x-y)^{۲}+xy}{(x+y)^{۲}-xy}\left(\frac{x^{۵}+y^{۵}+x^{۳}y^{۲}+x^{۲}y^{۳}}{(x^{۳}-y^{۳})(x^{۳}+y^{۳}+x^{۲}y+xy^{۲})}\right)^{-۱}=$$
$$=x-y;$$

$$۴)\quad \left(\frac{۵x^{۲}-۶x+۳}{x-۱}+۴x^{۲}-x+۲\right)\left(۲x+۳+\frac{۲}{x-۱}\right)^{-۱}=$$
$$=۲x-۱;$$

$$۵)\quad \left(\frac{۳+x}{(۳-x)^{۲}}-\frac{۶}{۹-x^{۲}}+\frac{۳-x}{(x+۳)^{۲}}\right)\left(\frac{۲۴x^{۲}}{-۸۱+x^{۴}}+۱\right)^{-۱}=$$
$$=\frac{-۲x^{۲}}{۹-x^{۲}}.$$

تکلیف ۲.

۱. آیا عبارت‌های جبری A و B، درمجموعهٔ M، متحد یکدیگرند؟

$$۱)\quad A=(\sqrt{۱-x^{۲}}+۱)\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+x}}+\sqrt{۱-x}\right),$$
$$B=\sqrt{۱+x},\quad M=\{x:\ -۱<x\leqslant ۱\};$$

$$۲)\quad A=\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{ab(a-b)^{۲}},$$
$$B=\frac{۱}{ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})},\quad M=\{(a, b):\ a>۰,\ b>۰\};$$

$$۳)\quad A=\frac{a-\sqrt{۳}}{\sqrt{\left(\frac{a^{۲}+۳}{۲a}\right)^{۲}-۳}},\quad B=\frac{۲a}{a+\sqrt{۳}},\quad M=\{a:\ a>\sqrt{۳}\}.$$

۲. مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی را پیدا کنید که، در آن، عبارت‌های جبری A و B، متحد با یکدیگر باشند:

$$۱)\quad A=\frac{\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}}{\sqrt{x-۱}-۱},\ B=۱;$$

$$۲)\quad A=\frac{\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}}{\sqrt{x-۱}-۱},\ B=-۱;$$

$$۳)\quad A=\sqrt[۳]{(۱-۲a+a^۲)(a^۲-۱)(a-۱)}\left(\frac{a^۲+۲a-۳}{\sqrt[۳]{a+۱}}\right)^{-۱},$$

$$B=\frac{-\sqrt{a+۱}}{a+۳}.$$

۳. حوزهٔ تعریف عبارت‌های جبری A و B را پیدا کنید و ثابت کنید، در این حوزه، برابری اتحادی $A=B$ برقرار است:

$$۱)\quad A=\sqrt[۳]{۲a+۲\sqrt{a^۲-۱}}\left(\sqrt[۳]{\frac{\sqrt{a-۱}}{\sqrt{a+۱}}+\frac{\sqrt{a+۱}}{\sqrt{a-۱}}+۲}\right)^{-۱},$$

$$B=\sqrt[۶]{a^۲-۱};$$

$$۲)\quad A=\left(\frac{\sqrt{a}}{۲}-\frac{۱}{۲\sqrt{a}}\right)^۲\left(\frac{\sqrt{a}-۱}{\sqrt{a}+۱}-\frac{\sqrt{a}+۱}{\sqrt{a}-۱}\right),\ B=\frac{۱-a}{\sqrt{a}};$$

$$۳)\quad A=\frac{\sqrt{۲x+۲\sqrt{x^۲-۴}}}{\sqrt{x^۲-۴}+x+۲},\ B=\frac{۱}{\sqrt{x+۲}}.$$

۴. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱)\quad \left(\frac{۱+۶ac}{۸c^۳-a^۳}-\frac{۱}{۲c-a}\right)\left(\frac{۱}{a^۳-۸c^۳}-\frac{۱}{a^۲+۲ac+۴c^۲}\right)^{-۱}=$$
$$=۲c-a-۱;$$

$$۲)\quad \left(\frac{x^۲-۲x+۴}{۴x^۲-۱}\ \frac{۲x^۲+x}{x^۳+۸}-\frac{x+۲}{۲x^۲-x}\right)\left(\frac{۴(x+۱)}{x^۲+۲x}\right)^{-۱}-$$

$$-\frac{۶-۶x}{۳-۶x}=-۱;$$

$$۳)\ \left(\frac{۱}{a^{۲}-۴a}+\frac{۲}{۱۶-a^{۲}}+\frac{۱}{۴a+۱۶}\right)\left(\frac{a-۴}{۲a+۸}\right)^{-۲}+\frac{۱۶+۴a}{۴a^{۲}-a^{۳}}=$$
$$=\frac{a+۴}{a^{۲}};$$

$$۴)\ \left(\left(\left(\frac{x+۱}{x-۱}\right)^{۲}+۳\right)\left(\left(\frac{x-۱}{x+۲}\right)^{۲}+۳\right)^{-۱}\right)\left(\frac{x^{۳}+۱}{x^{۳}-۱}\right)^{-۱}-$$
$$-\frac{۲x}{x-۱}=-۱;$$

$$۵)\ \frac{x-۴}{x-۲}\left(\frac{۸۰x}{x^{۳}-۸}+\frac{۲x}{x^{۲}+۲x+۴}-\frac{x-۱۶}{۲-x}\right)^{-۱}-\frac{۴}{(۴-x)^{۲}}=$$
$$=\frac{x}{x-۴}.$$

تکلیف ۳.

۱. آیا نابرابری اتحادی $A>B$ درمجموعهٔ M برقرار است؟

$$۱)\ A=\frac{۱}{۳x-۲-x^{۲}},\ B=\frac{۳}{۷x-۴-۳x^{۲}},M=\{x:x<۱\};$$

$$۲)\ A=\frac{۲۵x-۲\frac{۱}{۲}}{۱۰x-۱۵}-\frac{۱}{۳x+۴},\ B=\frac{۳}{۶x^{۲}-x-۱۲},M=\{x:x>۲\};$$

$$۳)\ A=\sqrt{x^{۲}-۴x},\ B=x-۳;\ M=\{x:x\leqslant ۰\};$$

$$۴)\ A=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۲},\ B=\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۳}{۴}},\ M=\left\{x:۱<x\leqslant\frac{۲}{\sqrt{۳}}\right\}.$$

۲. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

$۱)\ x^{۲}+۲xy+۴y^{۲}\geqslant ۰;$ $۲)\ ۴a^{۴}-۴a^{۳}+۵a^{۲}-۲a+۱\geqslant ۰;$

$۳)\ \frac{x^{۲}}{۱+x^{۴}}\leqslant\frac{۱}{۲};$ $۴)\ a^{۴}+b^{۴}\geqslant a^{۳}b+ab^{۳};$

۵) $x^{۸}-x^{۵}+x^{۲}-x+۱>۰;$

۶) $(x+y+z)^{۲}\leqslant ۳(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲});$

۷) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z)\geqslant ۹\sqrt{xyz}.$

تکلیف ۴.

۱. آیا نابرابری اتحادی $A<B$ درمجموعهٔ M برقرار است؟

۱) $A=\frac{x-a}{۲}، B=\frac{x+a}{۲}-\frac{۲}{x+a}،$

$M=\left\{(a، x): a<۰، \frac{۲}{a}-a<x<-a\right\};$

۲) $A=\frac{۲x-۳}{m+۱}، B=\frac{۲x-۱}{m+۱}-\frac{x+۱}{۲(m-۱)}،$

$M=\left\{(m، x): m<۱، x>\frac{۳m-۱}{m+۱}\right\};$

۳) $A=a+\frac{۱}{a}، B=x+\frac{۱}{x}، M=\{(a، x): ۰<x<a<۱\};$

۴) $A=\frac{x-۱}{a-۱}-\frac{a}{۱-a}، B=۱-x،$

$M=\{(a، x): ۰<a<۱، x>۰\}.$

۲. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $x^{۱۰}-x^{۷}+x^{۴}-x^{۲}+۱>۰;$ ۲) $a\sqrt{a}-a+۳\sqrt{a}+۵>۰;$

۳) $\left(\frac{x+۵}{x^{۲}-۸۱}+\frac{x+۷}{x^{۲}-۱۸x+۸۱}\right)\left(\frac{x+۳}{x-۹}\right)^{-۲}+\frac{۷+x}{۹+x}\leqslant ۱;$

۴) $\frac{۱۸-۳x+۲x^{۲}}{(۳-x)^{۲}}-\left(\frac{x}{x-۳}+\frac{۱۲x^{۲}-۹x}{۲۷-x^{۳}}+\right.$

$\left.+\frac{۹}{x^{۲}+۳x+۹}\right)^{-۱}\geqslant ۱;$

۵) $x\sqrt{x}+۳x-۱۳\sqrt{x}+۱۵>۰;$

۶) $x^۳+x^۲\sqrt{x}+x^۲-۶x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+۱\geqslant ۰;$

۷) $\dfrac{۲x^۲+۱}{\sqrt{۴x^۲+۱}}\geqslant ۱;$

۸) $a+b+۲a^۲+۲b^۲\geqslant ۲ab+۲b\sqrt{a}+۲a\sqrt{b}.$

تمرین‌ها

۱. حوزهٔ تعریف عبارت‌های جبری A و B را پیدا کنید و برابری اتحادی $A=B$ را، در این حوزه ثابت کنید:

۱) $A=(x-y):(x^۲-y^۲),\quad B=\dfrac{۱}{x+y};$

۲) $A=(x^۳+y^۳):(x+y),\quad B=x^۲-xy+y^۲;$

۳) $A=\dfrac{x^۴-y^۴}{x^۲-y^۲},\ B=x^۲+y^۲;$ ۴) $A=\dfrac{a^۲+b^۲}{a^۴-b^۴},\ B=\dfrac{۱}{a^۲-b^۲};$

۵) $A=\dfrac{(m^۲+۴mn+۴n^۲)(m^۲-۴mn+۴n^۲)}{m^۲-۴n^۲},\ B=m^۲-۴n^۲;$

۶) $A=\dfrac{a^۶-b^۶}{((a+b)^۲-ab)((a-b)^۲+ab)},\ B=a^۲-b^۲;$

۷) $A=\dfrac{(a^۳+۳a^۲b+۳b^۲a+b^۳)(a^۲-۲ab+b^۲)}{(a^۳-۳a^۲b+۳b^۲a-b^۳)(a^۲+۲ab+b^۲)},\ B=\dfrac{a+b}{a-b};$

۸) $A=\dfrac{x^۸-y^۸}{(x^۲+y^۲)^۳-۲x^۴y^۲-۲x^۲y^۴},\ B=(x-y)(x+y);$

۹) $A=\dfrac{x^۳-(a+b+c)x^۲+(ab+ac+bc)x-abc}{(x^۲-a^۲)(x^۲-b^۲)},$

$B=\dfrac{x-c}{(x+a)(x+b)};$

۱۰) $A=\dfrac{(x^۲-(a+b)x+ab)(x^۲-c^۲)(x^۲-d^۲)}{x^۴-\alpha x^۳+\beta x^۲-\gamma x+abcd},$

$B=x^۲+(c+d)x+cd;$

که درآن داریم:

$$\alpha=a+b+c+d،$$
$$\beta=ab+ac+ad+bc+bd+cd،$$
$$\gamma=abc+abd+acd+bcd.$$

۲. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $x^۴+x^۲y^۲+y^۴=(x^۲+y^۲+xy)(x^۲-xy+y^۲);$

۲) $(x+y)^۴+x^۴+y^۴=۲(x^۲+xy+y^۲)^۲;$

۳) $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)+۱=(x^۲+۵x+۵)^۲;$

۴) $[a(x+y)+b(x-y)]^۲-[a(x-y)+b(x+y)]^۲=$
$=۴a^۲xy-۴b^۲xy;$

۵) $(ax+by+cz+dt)^۲+(bx-ay+dz-ct)^۲+$
$+(cx-dy-az+bt)^۲+(dx+cy-bz-at)^۲=$
$=(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲)(x^۲+y^۲+z^۲+t^۲);$

۶) $(a^۲+ab+b^۲)(a^۲-ab+b^۲)(a^۲-b^۲+۱)=$
$=a^۶-b^۶+a^۴+a^۲b^۲+b^۴;$

۷) $(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c)=$
$=۲(a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۲c^۲)-(a^۴+b^۴+c^۴);$

۸) $(x+y)^۵-x^۵-y^۵=۵xy(x+y)(x^۲+xy+y^۲);$

۹) $(x+y-۱)(x^۲-xy+y^۲+x+y+۱)=$
$=x^۳+۳xy+y^۳-۱;$

۱۰) $(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳=۳(a-b)(b-c)(c-a);$

۱۱) $(a+b+c)^۲+(a-b-c)^۲+(۲c-b)^۲=۲a^۲+۳b^۲+۶c^۲;$

۱۲) $(a+b+c+d)^۲+(a-b-c+d)^۲+(a-b+c-d)^۲+$
$+(a+b-c-d)^۲=۴(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲);$

۱۳) $(x+y+z)(x^۲+y^۲+z^۲-xy-xz-yz)=$
$=x^۳+y^۳+z^۳-۳xyz;$

۱۴) $(a+b+c)^۳-(a^۳+b^۳+c^۳)=۳(a+b)(b+c)(c+a);$

۱۵) $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(a+b)(b+c)(c+a);$

۱۶) $a(b-c)^{۳}+b(c-a)^{۳}+c(a-b)^{۳}=$
$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c);$

۱۷) $(bc+ac+ab)^{۲}+(a^{۲}-bc)^{۲}+(b^{۲}-ca)^{۲}+(c^{۲}-ab)^{۲}=$
$=(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})^{۲};$

۱۸) $(۱+ab+a+b)^{۲}-(۱-ab+a-b)^{۲}=۴b(۱+a)^{۲};$

۱۹) $(۲a^{۲}+۳ab-b^{۲})^{۲}-۴(a+b)^{۲}(a^{۲}+ab-۲b^{۲})=$
$=b^{۲}(a+۳b)^{۲};$

۲۰) $(a-b+c+d)^{۲}+(a+b-c+d)^{۲}=$
$=۲[(a+d)^{۲}+(b-c)^{۲}];$

۲۱) $(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+bc+ca+ab)^{۲}-$
$-(a+b+c)^{۲}(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})=(bc+ca+ab)^{۲};$

۲۲) $a(b+c-a)^{۲}+b(c+a-b)^{۲}+c(a+b-c)^{۲}+$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=۴abc;$

۲۳) $(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx)=$
$=x^{۳}y^{۲}+y^{۳}z^{۲}+z^{۳}x^{۲}-x^{۲}y^{۳}-y^{۲}z^{۳}-z^{۲}x^{۳};$

۲۴) $(a+b+c)^{۳}-(b+c-a)^{۳}-(c+a-b)^{۳}-(a+b-c)^{۳}=$
$=۲۴abc;$

۲۵) $(a+b+c)^{۴}-(a+b)^{۴}-(b+c)^{۴}-(c+a)^{۴}+a^{۴}+b^{۴}+$
$+c^{۴}=۱۲abc(a+b+c);$

۲۶) $(b-c)(b+c)^{۴}+(c-a)(c+a)^{۴}+(a-b)(a+b)^{۴}=$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)[۳(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})+۵(ab+bc+ca)];$

۲۷) $x^{۳}+y^{۳}+z^{۳}-۳xyz=$

$$=\frac{۱}{۲}(x+y+z)([(x-y)^{۲}+(x-z)^{۲}+(y-z)^{۲}].$$

۳. درستی برابری را، با توجه به‌شرط آن، ثابت کنید:

۱) $x^{۳}+y^{۳}=۱-۳xy,\qquad x+y=۱;$

۲) $x^{۳}-y^{۳}=۱+۳xy,\qquad x-y=۱;$

۳) $(x^۲+y^۲)\left(\frac{۱}{x^۳}+\frac{۱}{y^۳}\right)=\frac{۶a^۲-۵a+۱}{a^۳}$، $x+y=۱$، $xy=a$;

۴) $\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{۲}$، $x>y>۰$ و $x^۲+y^۲=۶xy$;

۵) $(x+y+z)^۲=x^۲+y^۲+z^۲$، $xy+yz+zx=۰$;

۶) $(x^۲+y^۲+z^۲)^۲=۲(x^۴+y^۴+z^۴)$، $x+y+z=۰$;

۷) $\frac{x}{y^۳-۱}-\frac{y}{x^۳-۱}=\frac{۲(y-x)}{x^۲y^۲+۳}$، $x+y=۱$ و $x\neq ۱$، $y\neq ۱$;

۸) $x+y+z=\frac{۱}{z}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{x}$، $y(x^۲-yz)(۱-xz)=$

$=x(y^۲-xz)(۱-yz)$ و $xyz\neq ۰$;

۹) $(x^۲+y^۲+z^۲)(a^۲+b^۲+c^۲)=(ax+by+cz)^۲$،

$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$;

۱۰) $x^۳+y^۳+z^۳=۳xyz$، $x+y+z=۰$;

۱۱) $\frac{x^۵+y^۵+z^۵}{۵}=\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{۳}\cdot\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۲}$،

$x+y+z=۰$.

۴. درستی این نابرابری‌ها را، برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

۱) $۱<\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\frac{۱}{n+۳}+\dots+\frac{۱}{۳n+۱}<۲$;

۲) $\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\dots+\frac{۱}{n^۲}<۲$; ۳) $\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۵}+\dots+\frac{۱}{(۲n+۱)^۲}<\frac{۱}{۴}$;

۴) $۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$;

۵) $\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\dots\cdot\frac{۲n-۱}{۲n}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۲n+۱}}$;

۶) $۱+\frac{۱}{۱\cdot۲}+\frac{۱}{۱\cdot۲\cdot۳}+\dots+\frac{۱}{n!}<۲$; ۷) $\sqrt{n}\leqslant\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{n+۱}{۲}$.

۵. درستی این نابرابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $(x+y)^۲\geqslant ۴xy$; ۲) $a^۲+\frac{۱}{a^۲+۱}\geqslant ۱$;

۳) $\frac{x^۲}{۱+x^۴}\leqslant\frac{۱}{۲}$; ۴) $\frac{a^۲+۳}{\sqrt{a^۲+۲}}>۲$;

۵) $۲a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۲a(b+c)$; ۶) $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ab+bc+ac$;

۷) $a^۲+b^۲+۱\geqslant ab+b+a$;

۸) $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۲(a+b+c)-۳$;

۹) $a^۴+a^۳b+ab^۳+b^۴\geqslant ۰$;

۱۰) $a^۴-۲a^۳b+۲a^۲b^۲-۲ab^۳+b^۴\geqslant ۰$;

۱۱) $(a+b+c)^۲\leqslant ۳(a^۲+b^۲+c^۲)$;

۱۲) $a^۴+b^۴+c^۴\geqslant abc(a+b+c)$; ۱۳) $۸(a^۴+b^۴)\geqslant(a+b)^۴$

۱۴) $(a^۲+b^۲)(a^۴+b^۴)\geqslant(a^۳+b^۳)^۲$;

۱۵) $(a+b+c+d)^۲\leqslant ۴(a^۲+b^۲+c^۲+d^۲)$;

۱۶) $a^۲(۱+b^۴)+b^۲(۱+a^۴)\leqslant(۱+a^۴)(۱+b^۴)$;

۱۷) $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}\leqslant|a|+|b|+|c|$;

۱۸) $|a|^۳+|b|^۳+|c|^۳\geqslant ۳|abc|$;

۱۹) $(|a|+|b|)(|b|+|c|)(|a|+|c|)\geqslant ۸|abc|$;

۲۰) $a^۶+b^۶+۱\geqslant ۲a^۲b^۲$; ۲۱) $\frac{a^۶+b^۶}{۲}\geqslant ۳a^۲b^۲-۴$

۶. ثابت کنید، برای عددهای مثبت a و b و c، این نابرابری‌ها برقرارند:

۱) $ca+\frac{b}{c}\geqslant ۲\sqrt{ab}$; ۲) $\frac{a+bc^۴}{۲c^۲}\geqslant\sqrt{ab}$;

۳) $۲a^۳+۲a^۲+۱>a$; ۴) $a^۳+۲\geqslant a^۲+۲\sqrt{a}$;

۵) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geqslant ۶abc$;

۶) $(a+b+c)^۳-(a^۳+b^۳+c^۳)\geqslant ۲(a+b)(b+c)(c+a)$;

۷) $a+b+c\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$;

۸) $ab(a+b-۲c)+bc(b+c-۲a)+ac(a+c-۲b)\geqslant ۰$;

۹) $\frac{a^۳+b^۳}{۲}\geqslant\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۳$; ۱۰) $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$;

۱۱) $a^n+b^n\leqslant(a+b)^n$، $n\in\mathbf{N}$; ۱۲) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant ۳$;

۱۳) $(a+b+c)^۳\leqslant ۹(a^۳+b^۳+c^۳)$;

۱۴) $\frac{۲}{b+c}+\frac{۲}{c+a}+\frac{۲}{a+b}\geqslant\frac{۹}{a+b+c}$;

۱۵) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geqslant ۶$;

۱۶) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^۸\geqslant ۶۴ab(a+b)^۲$;

۱۷) $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\geqslant\frac{۱}{\sqrt{bc}}+\frac{۱}{\sqrt{ca}}+\frac{۱}{\sqrt{ab}}$.

۷. ثابت کنید:

۱) اگر $|a|<۱$ و $|b|<۱$، آن‌گاه $|a+b|<|۱+ab|$؛

۲) اگر $a+b+c=۰$، آن‌گاه $ab+bc+ca\leqslant ۰$؛

۳) اگر $a^۲+b^۲=۱$، آن‌وقت $|a+b|\leqslant\sqrt{۲}$؛

۴) اگر $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ و $b+c=a+d$، آن‌گاه $bc\geqslant ad$؛

۵) اگر $ab>۰$، آن‌وقت $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant ۲$؛

۶) اگر $ab<۰$، آن‌وقت $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leqslant -۲$؛

۷) اگر $a>۰$، $b>۰$ و $ab=۱$، آن‌گاه $(۱+a)(۱+b)\geqslant ۴$؛

۸) اگر $a+b+c\geqslant ۳$، آن‌وقت $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۳$؛

۹) اگر $a+b\geqslant c\geqslant ۰$، آن‌وقت $a^۲+b^۲\geqslant\frac{۱}{۲}c^۲$؛

۱۰) اگر $a+b\geqslant c\geqslant ۰$، آن‌گاه $a^۴+b^۴\geqslant\frac{۱}{۸}c^۴$؛

۱۱) اگر $a+b\geqslant c\geqslant ۰$، آن‌گاه $a^۸+b^۸\geqslant \frac{۱}{۱۲۸}c^۸$؛

۱۲) اگر $a+b=۱$، $a>۰$ و $b>۰$، آن‌گاه $\sqrt{۴a+۱}+\sqrt{۴b+۱}\leqslant ۵$؛

۱۳) اگر عددهای مثبت $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n به‌تصاعد حسابی باشند، آن‌گاه

$$\sqrt{a_۱a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}\leqslant\frac{a_۱+a_n}{۲};$$

۱۴) اگر a، b و c، طول ضلع‌های یك مثلث باشند، آن‌وقت

$$\frac{(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{abc}\leqslant ۱;$$

۱۵) اگر $a>۰$، $b>۰$ و $a+b>۲$، آن‌وقت $a^۲+b^۲>۲$؛

۱۶) اگر $x_۱+x_۲+\dots+x_n=۱$، آن‌گاه $x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲\geqslant\frac{۱}{n}$؛

۱۷) اگر $a_۱+a_۲+\dots+a_n=۰$، آن‌وقت

$$a_۱a_۲+a_۱a_۳+\dots+a_ia_{i+۱}+\dots+a_{n-۱}a_n\leqslant ۰,\quad i=۱,۲,\dots,n-۱;$$

۱۸) اگر $a+b=c$، $a>۰$ و $b>۰$، آن‌وقت $a^{\frac{۲}{۳}}+b^{\frac{۲}{۳}}>c^{\frac{۲}{۳}}$؛

۱۹) اگر هریك ازعددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_۱a_۲}+\sqrt{a_۱a_۳}+\dots+\sqrt{a_ia_{i+۱}}+\dots+\sqrt{a_{n-۱}a_n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n-۱}{۲}(a_۱+a_۲+\dots+a_n),\quad i=۱,۲,\dots,n-۱$$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) نه؛ ۲) بله؛ ۳) بله. ۲. ۱) $\{a: a\neq-۱\}$؛ ۲) $\{x: x\geqslant ۱\}$؛ ۳) $\{x: x\leqslant-۱\}$؛ ۴) $\{x: -۱\leqslant x\leqslant ۱\}$؛ ۵) $\{x: x\leqslant-۱$ یا $x\geqslant ۱\}$. ۳. ۱) $\{a: a\neq-۴, a\neq ۳, a\neq ۴\}$؛ ۲) $\{x: x\neq-۱, x\neq ۱\}$؛ ۳) $\Big\{m: m\neq-۵, m\neq-۱;$

$m\neq\frac{۱}{۵},\ m\neq ۰\Big\}$ ۴. ۱) $\Big\{a:\ a\neq ۴,\ a\neq\frac{۴}{۷},\ a\neq ۳,\ a\neq ۰\Big\}$; ۲) $\{x:\ x\neq -۲,\ x\neq -۳,\ x\neq -۱\}$; ۳) $\{(x,\ y):\ x\neq y,\ y\neq -x\}$; ۴) $\Big\{x:\ x\neq -۱,\ x\neq\frac{۱}{۲},\ x\neq ۱\Big\}$; ۵) $\{x:\ x\neq -۳,\ x\neq ۰,\ x\neq ۳\}$.

تکلیف ۲.

۱. ۱) نه؛ ۲) بله؛ ۳) نه. ۲. ۱) $\{x:\ x>۱,\ x\neq ۲\}$; ۲) $\{x:\ ۱\leqslant x<۲\}$; ۳) $\{a:\ -۱<a<۱\}$.
۳. ۱) $\{a: a>۱\}$; ۲) $(a: ۰<a<۱,\ a>۱\}$; ۳) $\{x: x\geqslant ۲\}$.
۴. ۱) $\{(a,\ c): a\neq ۲c, a\neq -۲c, a\neq ۱+۲c\}$; ۲) $\{x: x\neq -۲,\ x\neq -۰/۵,\ x\neq ۰/۵,\ x\neq ۰\}$; ۳) $\{a:\ a\neq -۴, a\neq ۰, a\neq ۴\}$; ۴) $\{x:\ x\neq -۱,\ x\neq ۱\}$; ۵) $\{x:\ x\neq ۲,\ x\neq ۴\}$.

تکلیف ۳.

۱. ۱) بله؛ ۲) نه؛ ۳) بله؛ ۴) نه. ۲. راهنمائی:
۱) $(x+y)^۲+۳y^۲\geqslant ۰$; ۲) $۴a^۲(a^۲-a+۱)+(a-۱)^۲\geqslant ۰$;
۳) $-\frac{(x^۲-۱)^۲}{(x^۴+۱)}\leqslant ۰$; ۴) $(a-b)^۲(a^۲+ab+b^۲)\geqslant ۰$;
۵) $x^۵(x^۳-۱)+(x^۲-x+۱)>۰,\qquad (x\leqslant ۰,\ x>۱)$;
$x^۸+(۱-x)+(۱-x)(۱+x+x^۲)x^۲\quad (۰<x\leqslant ۱)$; ۶) $(x-y)^۲+(x-z)^۲+(y-z)^۲\geqslant ۰$; ۷) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geqslant ۳\sqrt[۶]{xyz},$
$x+y+z\geqslant ۳\sqrt[۳]{xyz},\qquad (x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰,\ z\geqslant ۰)$.

تکلیف ۴.

۱. ۱) بله ؛۲) بله؛ ۳) بله؛ ۴) بله. ۲. راهنمائی:
۱) $x^۷(x^۳-۱)+(x^۴-x^۲+۱)>۰\qquad (x\leqslant ۰,\ x>۱)$;
$x^{۱۰}+x^۴(۱-x^۳)+(۱-x^۲)>۰\qquad (۰<x\leqslant ۱)$;

۲) $(\sqrt{a}+۱)(a-۲\sqrt{a}+۵)>۰ \qquad (a\geqslant ۰);$

۳) $۱\leqslant ۱، (x\neq -q، \ x\neq ۳، \ x\neq ۹); \quad$ ۴) $۱\geqslant ۱ \qquad (x\neq ۳);$

۵) $x-\sqrt{۳}+۳\left(\sqrt{x}-\frac{۱۳}{۶}\right)^{۲}+\frac{۱۱}{۱۲}>۰ \qquad (x\geqslant ۰);$

۶) $(\sqrt{x}+۱)^{۲}(x^{۲}+۳x\sqrt{x}+۶x+۳\sqrt{x}+۱)>۰ \qquad (x\geqslant ۰);$

۷) $\sqrt{۱+\frac{۴x^{۴}}{۴x^{۲}+۱}}\geqslant ۱، \qquad (x\in\mathbf{R});$

۸) $(a-b)^{۲}+(b-\sqrt{a})^{۲}+(a-\sqrt{b})^{۲}\geqslant ۰ \qquad (a\geqslant ۰، \ b\geqslant ۰).$

تمرین‌ها

۱۰. ۱) $\{(x، y): x\neq y، y\neq -x\};$ ۲) $\{(x، y): y\neq -x\};$

۳) $\{(x، y): x\neq y، \ y\neq -x\};$ ۴) $\{(a، b): a\neq b، \ a\neq -b\};$

۵) $\{(m، n): m\neq -۲n، \ m\neq ۲n\};$ ۶) $\{(a، b): a^{۲}+b^{۲}\neq ۰\};$

۷) $\{(a، b): a\neq -b، \ a\neq b\};$ ۸) $\{(x، y): x^{۲}+y^{۲}\neq ۰\};$

۹) $\{(a، b، c، x): x\neq -a، \ x\neq +a، x\neq -b، \ x\neq b\};$

۱۰) $\{(a، b، c، d، x): x\neq a، x\neq b، x\neq c، x\neq d\}.$

فصل سوم

ورودی به آنالیز ترکیبی
روش استقرای ریاضی

§۱. روش استقرای ریاضی

برای اثبات بعضی از گزاره‌هایی که به عدد طبیعی n مربوط می‌شوند، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنند.

برای اثبات یک گزاره با روش استقرای ریاضی، به این ترتیب عمل می‌کنند:

۱. درستی گزاره به ازای $n = ۱$ مورد تحقیق قرار می‌گیرد.

۲. فرض می‌شود که گزاره، برای $n = k$ درست باشد و، سپس، با این فرض ثابت می‌شود که گزاره، برای $n = k + ۱$ هم درست است.

مثال ۱. ثابت کنید، عدد $a_n = n^۳ + ۳n^۲ + ۵n$، به ازای هر عدد طبیعی n، بر ۳ بخش‌پذیر است.

حل. از نظام استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

۱. اگر $n = ۱$، آن گاه $a_۱ = ۱ + ۳ + ۵ = ۹$ و، بنابراین $a_۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است، یعنی گزاره به ازای $n = ۱$ درست است.

۲. فرض می‌کنیم، گزارهٔ مفروض به ازای $n = k$ درست باشد $(k \geqslant ۱)$، یعنی عدد $a_k = k^۳ + ۳k^۲ + ۵k$ بر ۳ بخش‌پذیر است و ثابت می‌کنیم، در این صورت، به ازای $n = k + ۱$، عدد $a_{k+۱}$ هم بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود. در واقع

$$a_{k+۱} = (k+۱)^۳ + ۳(k+۱)^۲ + ۵(k+۱) =$$
$$= (k^۳ + ۳k^۲ + ۵k) + ۳(k^۲ + ۳k + ۳) = a_k + ۳(k^۲ + ۳k + ۳)$$

چون هر یك از جمله‌های سمت راست برابری بر ۳ بخش‌پذیر است (a_k طبق فرض استقرا، و $۳(k^۲+۳k+۳)$ به‌عنوان عددی طبیعی که شامل عامل ۳ است)، بنا براین، مجموع آن‌ها، یعنی $a_{k+۱}$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

به‌این ترتیب، بـا توجه به ۱ و ۲ و نظام استقرای ریاضی، عدد a_n، برای هرعدد طبیعی n، بر ۳ بخش‌پذیر است.

مثال ۲. ثابت کنید، مجموع n عدد فرد اولیه $(n\in\mathbf{N})$، برابر است با مجذور تعداد آن‌ها، یعنی

$$۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)=n^۲ \qquad (۱)$$

حل. از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

۱. درستی گزاره را بـه‌ازای $n=۱$ آزمایش می‌کنیم. اگر $n=۱$، آن‌وقت $۱^۲=۱$، یعنی برابری (۱) برای $n=۱$ درست است.

۲. فرض می‌کنیم، مجموع k عدد فرد اولیه برابر مجذور تعدادآن‌ها باشد، یعنی فرض می‌کنیم

$$۱+۳+۵+\dots+(۲k-۱)=k^۲ \qquad (۲)$$

و ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، مجموع $(k+۱)$ عدد فرد نخستین، برابر است بامجذور تعداد آن‌ها، یعنی

$$۱+۳+۵+\dots+(۲k-۱)+(۲k+۱)=(k+۱)^۲;$$

اگر از (۲) استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&۱+۳+۵+\dots+(۲k-۱)+(۲k+۱)=\\&=k^۲+(۲k+۱)=(k+۱)^۲\end{aligned}$$

به این ترتیب با توجه به ۱ و ۲ و بـراساس نظام استقرای ریاضی، مجموع n عدد فرد نخستین، برابر است با $n^۲$.

مثال ۳. ثابت کنید، به‌شرط $\sin\alpha\neq ۰$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، این اتحاد برقرار است:

$$\cos\alpha\cdot\cos ۲\alpha\cdot\cos ۴\alpha\cdots\cos ۲^n\alpha=\frac{\sin ۲^{n+۱}\alpha}{۲^{n+۱}\sin\alpha} \qquad (۳)$$

حل. برای اثبات درستی برابری، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

۱. به‌ازای $n=۱$، برابری (۳) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\cos\alpha\cos ۲\alpha=\frac{\sin ۴\alpha}{۴\sin\alpha}$$

که درستی آن، به‌سادگی قابل تحقیق است. در واقع

$$\frac{\sin ۴\alpha}{۴\sin\alpha}=\frac{۲\sin ۲\alpha\cos ۲\alpha}{۴\sin\alpha}=\frac{۴\sin\alpha\cos\alpha\cos ۲\alpha}{۴\sin\alpha}=\cos\alpha\cos ۲\alpha$$

۲. فرض می‌کنیم، برابری (۳)، برای $n=k$ درست باشد، یعنی

$$\cos\alpha\cos ۲\alpha\cdots\cos ۲^{k}\alpha=\frac{\sin ۲^{k+۱}\alpha}{۲^{k+۱}\sin\alpha} \qquad (۴)$$

و با استفاده از (۴)، ثابت می‌کنیم

$$\cos\alpha\cos ۲\alpha\ldots\cos ۲^{k}\alpha\cos ۲^{k+۱}\alpha=\frac{\sin ۲^{k+۲}\alpha}{۲^{k+۲}\sin\alpha} \qquad (۵)$$

اگر از اتحاد $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha$، که برای هر مقدار α درست است، و برابری (۴) استفاده کنیم، داریم

$$(\cos\alpha\cos ۲\alpha\cdots\cos ۲^{k}\alpha)\cos ۲^{k+۱}\alpha=\frac{\sin ۲^{k+۱}\alpha}{۲^{k+۱}\sin\alpha}\cdot\cos ۲^{k+۱}\alpha=$$

$$=\frac{۲\sin ۲^{k+۱}\alpha\cos ۲^{k+۱}\alpha}{۲^{k+۲}\sin\alpha}=\frac{\sin(۲\times ۲^{k+۱})\alpha}{۲^{k+۲}\sin\alpha}=\frac{\sin ۲^{k+۲}\alpha}{۲^{k+۲}\sin\alpha}$$

که به‌معنای درستی برابری (۵) است.

از روش استقرای‌ریاضی، برای اثبات برخی نابرابری‌هاهم، می‌توان استفاده کرد.

مثال ۴. ثابت کنید، برای $a\geqslant -۱$ و هرعدد طبیعی n، همیشه‌داریم:

$$(۱+a)^{n}\geqslant ۱+na \qquad (۶)$$

این نابرابری، به‌نابرابری برنولی مشهور است (مثال ۳۳ از ۲§ همین‌فصل را هم ببینید).

حل. ۱. به‌ازای $n=۱$، این نابرابری بـه‌صورت $۱+a\geqslant ۱+a$ درمی‌آید، که درست است.

۲. فرض می‌کنیم، نابرابری (۶)، به‌ازای $n=k$ درست باشد:

$$(۱+a)^k \geqslant ۱+ka \qquad (۷)$$

و ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت، به‌ازای $n=k+۱$ هم درست است:

$$(۱+a)^{k+۱} \geqslant ۱+(k+۱)a \qquad (۸)$$

ابتدا توجه‌می‌کنیم که، نابرابری(۶)، به‌ازای $a=-۱$ برقراراست؛ بنابراین کافی است درستی آن را برای $a>-۱$، یعنی $a+۱>۰$ ثابت کنیم. دراین‌حالت، اگر دوطرف نابرابری (۷) را در $(۱+a)$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(۱+a)^{k+۱} \geqslant (۱+ka)(۱+a)=$$
$$=۱+(k+۱)a+ka^۲ \geqslant ۱+(k+۱)a$$

یعنی، با توجه به‌درستی (۷)، درستی نابرابری (۸) ثابت می‌شود.

در استدلال استقرایی، گاهی نمی‌توان حلقهٔ نخستین را $n=۱$ گرفت و ناچاریم از جایی مثل $n=p$ $(p\geqslant ۲)$ آغاز کنیم در این‌گونه موردها، اگر درستی حکم را برای $n=p$ تحقیق کنیم و، سپس، با فرض درستی آن برای $n=k$، درستی آن را برای $n=k+۱$ به اثبات برسانیم، به‌معنای آن است که، حکم موردنظر، برای هر $n\geqslant p$ درست است.

مثال ۵. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n\geqslant ۲$، داریم:

$$\frac{۴^n}{n+۱}<\frac{(۲n)!}{(n!)^۲} \qquad (۹)$$

حل. ۱. نابرابری (۹) را، به‌ازای $n=۲$، موردتحقیق قرارمی‌دهیم. داریم:

$$\frac{۴^۲}{۲+۱}=\frac{۱۶}{۳}<\frac{۱۸}{۳}=۶=\frac{۶\times ۴}{۴}=\frac{۴!}{۲^۲}=\frac{(۲\times ۲)!}{(۲!)^۲}$$

یعنی، نابرابری (۹)، برای $n=۲$ درست است.

۲. فرض می‌کنیم، نابرابری $n=k$ $(k\geqslant ۲)$ درست باشد:

$$\frac{۴^k}{k+۱}<\frac{(۲k)!}{(k!)^۲} \qquad (۱۰)$$

و ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت داریم:

$$\frac{۴^{k+۱}}{k+۲}<\frac{[۲(k+۱)]!}{[(k+۱)!]^۲} \qquad (۱۱)$$

عبارت $\frac{۴^{k+۱}}{k+۲}$ را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\frac{۴^{k+۱}}{k+۲}=\frac{۴^k}{k+۱}\cdot\frac{۴(k+۱)}{k+۲}$$

اکنون، با استفاده از نابرابری (۱۰)، به‌ترتیب داریم:

$$\frac{۴^{k+۱}}{k+۲}=\frac{(۲k)!}{(k!)^۲}\cdot\frac{۴(k+۱)}{k+۲}=$$

$$=\frac{(۲k)!(۲k+۱)(۲k+۲)۴(k+۱)^۳}{(۲k+۱)(۲k+۲)(k!)^۲(k+۱)^۲(k+۲)}=$$

$$=\frac{[۲(k+۱)]!}{[(k+۱)!]^۲}\cdot\frac{۲(k+۱)^۲}{(۲k+۱)(k+۲)} \qquad (۱۲)$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{۲(k+۱)^۲}{(۲k+۱)(k+۲)}=\frac{۲k^۲+۴k+۲}{۲k^۲+۵k+۲}=\frac{۲k^۲+۴k+۲}{(۲k^۲+۴k+۲)+k}<۱$$

بنابراین، با توجه به (۱۲) به‌دست می‌آید:

$$\frac{۴^{k+۱}}{k+۲}<\frac{[۲(k+۱)]!}{[(k+۱)!]^۲}$$

اثبات استقرایی کامل شد.

در برخی مساله‌ها، حکم، به‌صورتی‌روشن تنظیم نشده‌است در این گونه موردها، ابتدا باید قانون‌مندی مورد نظر را حدس زد و، با این حدس، فرضیه‌ای‌ساخت و، سپس، درستی یا نادرستی فرضیهٔ خودرا با روش‌استقرای ریاضی ثابت کرد.

مثال ۶. این مجموع را محاسبه کنید:

$$S_n=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\dots+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

حل. $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$ و $S_۴$ را محاسبه می‌کنیم:

$$S_۱=\frac{۱}{۱\times۲}=\frac{۱}{۲},\qquad S_۲=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۲}{۳},$$

$$S_۳=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}=\frac{۳}{۴},\qquad S_۴=\frac{۴}{۵}$$

در هر یك از این مجموع‌ها، با کسری سر و کار داریم که، مخرج آن، یك واحد از صورت آن، بزرگتر است. این وضع به‌ما امکان می‌دهد تا فرضیهٔ خود را بسازیم و، حدس بزنیم، برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$S_n=\frac{n}{n+۱} \qquad (۱۳)$$

برای اینکه درستی این فرضیه را آزمایش کنیم، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم.

۱. به‌ازای $n=۱$، فرضیه درست است: $S_۱=\frac{۱}{۲}$.

۲. فرض می‌کنیم، فرضیهٔ ما برای $n=k$ $(k\geqslant ۱)$ درست باشد:

$$S_k=\frac{k}{k+۱} \qquad (۱۴)$$

و ثابت می‌کنیم که، دراین‌صورت، برای $n=k+۱$ هم درست است، یعنی

$$S_{k+۱}=\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\dots+\frac{۱}{k(k+۱)}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}$$

در واقع داریم:

$$S_{k+۱}=S_k+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k}{k+۱}+\frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}=$$

$$=\frac{k^۲+۲k+۱}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{(k+۱)^۲}{(k+۱)(k+۲)}=\frac{k+۱}{k+۲}$$

درستی فرضیهٔ ما، با روش استقرای ریاضی، ثابت شد.

مثال ۷. به‌ازای چه‌مقدارهایی از عدد طبیعی n، این نابرابری برقرار است:

$$۲^n>n^۲ \qquad (۱۵)$$

حل. نابرابری را، برای از $n=۱$ تا $n=۶$ آزمایش می‌کنیم:

$$۲^{۱}>۱^{۲},\ ۲^{۲}=۲^{۲},\ ۲^{۳}<۳^{۲},\ ۲^{۴}=۴^{۲},\ ۲^{۵}>۵^{۲},\ ۲^{۶}>۶^{۲}$$

بنابراین، می‌توان پیش‌بینی کرد که، نابرابری (۱۵)، به‌ازای $n\geqslant ۵$ برقرار است. برای اثبات درستی این فرضیه، به‌روش استقرای ریاضی متوسل می‌شویم.

۱. دیدیم که، فرضیه، به‌ازای $n=۵$ درست است.

۲. فرض می‌کنیم، برای $n=k$ $(k\geqslant ۵)$ داشته باشیم:

$$۲^{k}>k^{۲} \tag{۱۶}$$

و ثابت می‌کنیم که، در این‌صورت، خواهیم داشت:

$$۲^{k+۱}>(k+۱)^{۲}$$

از (۱۶) نتیجه می‌شود

$$۲^{k+۱}=۲\times ۲^{k}>۲k^{۲} \tag{۱۷}$$

از طرف دیگر، به‌ازای $k\geqslant ۵$ داریم:

$$۲k^{۲}>(k+۱)^{۲}$$

زیرا این نابرابری، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$k^{۲}-۲k-۱>۰ \Rightarrow (k-۱)^{۲}-۲>۰ \tag{۱۸}$$

که به‌ازای هر $k\geqslant ۵$ برقرار است. به این ترتیب، از (۱۷) و (۱۸) نتیجه می‌شود:

$$۲^{k+۱}>(k+۱)^{۲}$$

به‌این نکته توجه کنیم که، نتیجه‌های ناشی از مشاهده، ممکن است ما را گمراه کنند و به‌فرضیهٔ نادرستی بکشانند. بـه مثالی‌که بـه اولر تعلق دارد، توجه کنیم.

مقدارهای سه‌جمله‌ای $n^{۲}+n+۴۱$ را به‌ازای بعضی از مقدارهای n محاسبه می‌کنیم:

n :	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n^{۲}+n+۴۱$:	۴۳	۴۷	۵۳	۶۱	۷۱	۸۳	۹۷	۱۱۳

همه جا، عددی اول به دست می‌آید. اگر مقدارهای عبارت مفروض را تـا $n=۳۹$ محاسبه کنید، بازهم، همه‌جا عددهای اول را می‌دهد. ولی به‌ازای

$n=۴۰$ به‌عدد ۱۶۸۱ می‌رسیم که عددی‌مرکب و برابر $۴۱^۲$ است. بنابراین، فرضیه‌ای که در این‌جا، در بدو امر به نظر می‌رسد، یعنی اول بودن $n^۲+n+۴۱$، به‌ازای هر مقدار طبیعی n، فرضیه‌ای نادرست است.

تکلیف ۱.

۱. ثابت کنید، برای جملهٔ nام تصاعد هندسی $\{b_n\}$ با قدرنسبت q، دستور $b_n=b_۱q^{n-۱}$ $(n\in\mathbf{N})$ درست است.

۲. ثابت کنید، برای هرعددطبیعی n، عدد $n^۳+۱۱n$ بر ۶ بخش‌پذیر است

۳. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، داریم:

$$۱+۲+۳+\dots+(n-۱)+n=\frac{۱}{۲}n(n+۱)$$

۴. برای دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌دانیم:

$$a_۱=۲،\ a_۲=۳ \quad و \quad a_{n+۱}=۳a_n-۲a_{n-۱}(n\geqslant ۲)$$

ثابت کنید: $a_n=۲^{n-۱}+۱$ $(n\in\mathbf{N})$.

تکلیف ۲.

۱. ثابت کنید، برای جملهٔ nام تصاعد حسابی $\{a_n\}$ با قدرنسبت d، داریم:

$$a_n=a_۱+(n-۱)d،\ (n\in\mathbf{N})$$

۲. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$b^n-a^n=(b-a)(b^{n-۱}+b^{n-۲}a+b^{n-۳}a^۲+\dots+ba^{n-۲}+a^{n-۱})$$

۳. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، $۷^n-۱$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۴. ثابت کنید، عدد $\frac{n}{۳}+\frac{n^۲}{۲}+\frac{n^۳}{۶}$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، عددی درست است.

۵. دنبالهٔ $\{a_n\}$ به ترتیب زیر، تعریف شده است:

$$a_{n+۱}=۳a_n-۲a_{n-۱}،\ a_۱=۰،\ a_۲=۱$$

ثابت کنید: $a_n=۲^{n-۱}-۱$ $(n\in\mathbf{N})$.

۶. درستی این برابری را، برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)$$

تکلیف ۳.

۱. این برابری را، برای هر عدد طبیعی n، ثابت کنید:

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)^۲=a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲+۲a_۱(a_۲+\cdots+a_n)+$$
$$+۲a_۲(a_۳+a_۴+\cdots+a_n)+\cdots+۲a_{n-۲}(a_{n-۱}+a_n)+۲a_{n-۱}a_n$$

۲. ثابت کنید عدد $۴^n+۱۵n-۱$، برای هر عدد طبیعی n، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳. همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید که، به‌ازای هر یك از آن‌ها داشته باشیم:

$$۳^n\geqslant ۲(n+۱)^۲$$

۴. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، نابرابری $۲^n\geqslant n+۱$ برقرار است.

۵. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی $n\geqslant ۲$، داریم:

$$۱\times۲+۲\times۳+\cdots+n(n+۱)=\frac{۱}{۳}n(n+۱)(n+۲)$$

۶. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\frac{۱}{۱\times۳}+\frac{۱}{۳\times۵}+\frac{۱}{۵\times۷}+\cdots+\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)}$$

تکلیف ۴.

۱. ثابت کنید، برای عددهای دلخواه $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n داریم:

$$|a_۱+a_۲+\cdots+a_n|\leqslant|a_۱|+|a_۲|+\cdots+|a_n|$$

۲. ثابت کنید، عدد $۱۰^n-۴^n+۳n$، به‌ازای هر عدد طبیعی n، بر۹ بخش‌پذیر است.

۳. همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنیدکه، برای آن‌ها داشته باشیم:

$$۵^n \geqslant ۵n^۳+۲$$

۴. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$\frac{n}{۲}<۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۲^n-۱}\leqslant n$$

۵. برای هر عدد طبیعی n، این مجموع را محاسبه کنید:

$$S_n=۱\times ۱!+۲\times ۲!+۳\times ۳!+\dots+n.n!$$

تمرین‌ها

۱. ثابت کنید، برای هر عدد طبیعی n، عدد a_n بر b بخش‌پذیر است:

۱) $a_n=n^۳+۵n$، $b=۶$؛ ۲) $a_n=۲n^۳+۳n^۲+۷n$، $b=۶$؛

۳) $a_n=n^۵-n$، $b=۳۰$؛ ۴) $a_n=n^۲(n^۴-۱)$، $b=۶۰$؛

۵) $a_n=۲^{۲n}-۱$، $b=۳$؛ ۶) $a_n=۱۱^{۶n+۳}+۱$، $b=۱۴۸$؛

۷) $a_n=۲^{۲n+۱}+۱$، $b=۳$؛ ۸) $a_n=۱۰^n+۱۸n-۲۸$، $b=۲۷$؛

۹) $a_n=۵^{n+۳}+۱۱^{۳n+۱}$، $b=۱۷$؛

۱۰) $a_n=۱۱^{n+۲}+۱۲^{۲n+۱}$، $b=۱۳۳$؛

۱۱) $a_n=۷^{۲n}-۴^{۲n}$، $b=۳۳$؛ ۱۲) $a_n=۷^{۲n}-۱$، $b=۴۸$؛

۱۳) $a_n=۶^{۲n}+۱۹^n-۲^{n+۱}$، $b=۱۷$؛

۱۴) $a_n=۶^{۲n}+۳^{n+۲}+۳^n$، $b=۱۱$؛

۱۵) $a_n=۷.۵^{۲n}+۱۲.۶^n$، $b=۱۹$؛

۱۶) $a_n=۵^{۲n+۱}+۳^{n+۲}۲^{n-۱}$، $b=۱۹$؛

۱۷) $a_n=۹^{n+۱}-۱۸n-۹$، $b=۱۸$؛

۱۸) $a_n=۵^{۲+n}+۲۶.۵^n+۸^{۲n+۱}$، $b=۵۹$؛

۱۹) $a_n=۵^{n+۳}۲^n-۱۲۵$، $b=۴۵$.

۲. ثابت کنید، مجموع مکعب‌های هر سه عدد طبیعی متوالی، بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید، عدد $\frac{n^۴}{۲۴}+\frac{n^۳}{۴}+\frac{۱۱n^۲}{۲۴}+\frac{n}{۴}$، به‌ازای هر عدد طبیعی

n، یك عدد طبیعی است.

۴. ثابت کنید، عدد $۱+۲^{۲^n}$، برای هر عدد طبیعی $n>۱$، به‌رقم ۷ ختم می‌شود.

۵. ثابت کنید، اگر p عددی اول باشد، آن‌وقت عدد n^p-n، به‌ازای هر عدد طبیعی n بر p بخش‌پذیر است.

۶. ثابت کنید که

$$۳+۳۳+۳۳۳+\dots+\underbrace{۳۳\,\dots\,۳}_{n\ \text{بار}}=\frac{۱۰^{n+۱}-۹n-۱۰}{۲۷}$$

۷. ثابت کنید، هر عدد طبیعی m را که از ۸ بزرگتر باشد، می‌توان به‌صورت

$$m=۳k+۵l$$

نشان داد که، در آن، k و l، عددهایی طبیعی‌اند.

۸. درستی برابری را، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

۱) $۱+۲+۳+\dots+n=\frac{n(n+۱)}{۲};$

۲) $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶};$

۳) $۱^۳+۲^۳+۳^۳+\dots+n^۳=\frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴};$

۴) $۱^۴+۲^۴+۳^۴+\dots+n^۴=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^۲+۳n-۱)}{۳۰};$

۵) $(n+۱)(n+۲)\dots(n+n)=۲^n\cdot۱\cdot۳\cdot۵\dots(۲n-۱);$

۶) $۱\cdot۴+۲\cdot۷+۳\cdot۱۰+\dots+n(۳n+۱)=n(n+۱)^۲;$

۷) $۱\cdot۲+۲\cdot۳+\dots+(n-۱)n=\frac{(n-۱)n(n+۱)}{۳};$

۸)
$$۱\cdot۲\cdot۳+۲\cdot۳\cdot۴+\ldots+n(n+۱)(n+۲)=\\=\frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۴};$$

۹)
$$\frac{۱}{۱\cdot۵}+\frac{۱}{۵\cdot۹}+\ldots+\frac{۱}{(۴n-۳)(۴n+۱)}=\frac{n}{۴n+۱};$$

۱۰)
$$۱\cdot۲^{۲}+۲\cdot۳^{۲}+\ldots+(n-۱)n^{۲}=\frac{n(n^{۲}-۱)(۳n+۲)}{۱۲};$$

۱۱)
$$۱^{۲}-۲^{۲}+۳^{۲}-۴^{۲}+\ldots+(-۱)^{n-۱}n^{۲}=(-۱)^{n-۱}\frac{n(n+۱)}{۲};$$

۱۲)
$$\frac{۱^{۲}}{۱\cdot۳}+\frac{۲^{۲}}{۳\cdot۵}+\ldots+\frac{n^{۲}}{(۲n-۱)(۲n+۱)}=\frac{n(n+۱)}{۲(۲n+۱)};$$

۱۳)
$$۱+۳+۶+۱۰+\ldots+\frac{(n-۱)n}{۲}+\frac{n(n+۱)}{۲}=\\=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶};$$

۱۴)
$$۲+۷+۱۴+\ldots+(n^{۲}+۲n-۱)=\frac{n(۲n^{۲}+۹n+۱)}{۶};$$

۱۵)
$$\frac{۱}{۴\cdot۵}+\frac{۱}{۵\cdot۶}+\frac{۱}{۶\cdot۷}+\ldots+\frac{۱}{(n+۳)(n+۴)}=\frac{n}{۴(n+۴)};$$

۱۶)
$$\frac{۷}{۱\cdot۸}+\frac{۷}{۸\cdot۱۵}+\frac{۷}{۱۵\cdot۲۲}+\ldots\\\ldots+\frac{۷}{(۷n-۶)(۷n+۱)}+\frac{۱}{۷n+۱}=۱;$$

۱۷)
$$\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\left(۱-\frac{۱}{۹}\right)\ldots\left(۱-\frac{۱}{(n+۱)^{۲}}\right)=\frac{n+۲}{۲n+۲};$$

۱۸)
$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\ldots+\frac{۱}{۲n-۱}-\frac{۱}{۲n}=\\=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\ldots+\frac{۱}{۲n};$$

$$۱۹)\quad ۱+\frac{۳}{۲}+\frac{۷}{۴}+\frac{۱۵}{۸}+\dots+\frac{۲^n-۱}{۲^{n-۱}}=۲^{۱-n}+۲(n-۱);$$

$$۲۰)\quad \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۲^۲}+\frac{۳}{۲^۳}+\dots+\frac{n}{۲^n}=۲-\frac{n+۲}{۲^n};$$

$$۲۱)\quad \frac{۱}{۱\cdot۲\cdot۳}+\frac{۱}{۲\cdot۳\cdot۴}+\dots+\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right);$$

$$۲۲)\quad \frac{۱}{۱\cdot۳\cdot۵}+\frac{۲}{۳\cdot۵\cdot۷}+\frac{۳}{۵\cdot۷\cdot۹}+\dots$$
$$\dots+\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)(۲n+۳)}=\frac{n(n+۱)}{۲(۲n+۱)(۲n+۳)}.$$

پاسخ‌ها و راهنمایی‌ها

تکلیف ۳.

۳. $n\geqslant ۴$؛ ۶. $\frac{n}{۲n+۱}$.

تکلیف ۴.

۳. $n\geqslant ۴$؛ ۶. $(n+۱)!-۱$.

§۲. ورودی به‌نظریهٔ آنالیز ترکیبی. بسط دوجمله‌ای

گسترده‌ترین مساله‌ها در آغاز نظریهٔ آنالیز ترکیبی عبارتند از مساله‌های دربارهٔ تعداد ترتیب‌ها (یا آرایش‌ها)، تعداد تبدیل‌ها، تعداد ترکیب‌ها و مساله‌های مربوط به‌بسط دوجمله‌ای.

یکی از قانون‌های اصلی در آنالیز ترکیبی، قانون ضرب است. اگر $A_۱$ را بتوان به $k_۱$ طریق انتخاب کرد، سپس برای هریک از این

انتخاب‌های A_1، بتوان A_2 را به k_2 طریق انتخاب کرد، سپس به‌ازای هریك ازاین انتخاب‌هـای A_1 و A_2، بتوان A_3 را به k_3 طریق انتخاب کرد، ...، وسرانجام A_m را، برای‌هریك ازانتخاب‌های قبلی بتوان به k_m طریق درنظر گرفت، آن‌وقت، برای انتخاب همهٔ این A_i ها، یعنی «A_1 و A_2 و A_3 و... و A_m»، تعداد $k_1k_2k_3 \ldots k_m$ طریق وجود دارد.

مثال ۱. بـا رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ چند عـدد سه رقمی زوج می‌توان درست کرد، به‌شرطی که رقم‌ها قابل تکرارهم باشند؟

حل. برای تشکیل عدد سه‌رقمی $\overline{A_1A_2A_3}$، بـه‌جای A_1 می‌توان هریك ازرقم‌های‌مفروض، به‌جزصفررا قرارداد (۶ امکان)، به‌جای A_2 می‌توان هریك ازرقم‌هـای مفروض را گذاشت (۷ امکان) و، سرانجام، به‌جای A_3 می‌توان هریك از رقم‌های ۰، ۲، ۴ یا ۶ را قرارداد (۴ امکان).

به‌این ترتیب، با توجه به‌قانون ضرب، برای تشکیل عدد سه‌رقمی‌زوج، به‌تعداد ۱۶۸ = ۴ × ۷ × ۶ امکان وجود دارد: بارقم‌های مفروض، می‌توان ۱۶۸ عدد سه‌رقمی زوج مختلف درست کرد.

مثال ۲. چند عدد چهاررقمی بارقم‌های ۱، ۵، ۶، ۷ می‌توان ساخت؟

حل. هزارگان، صدگان، دهگان ویکان عـدد را می‌توان هریك ازاین چهار رقم انتخاب کرد، یعنی برای هر مرتبهٔ عدد چهاررقمی، ۴ امکان وجود دارد. بنا بـرایـن، تعـداد عـددهـای چهار رقـمـی بـرابـر است بـا ۲۵۶ = (۴ × ۴ × ۴ × ۴).

مثال ۳. چند عدد دو رقمی وجود دارد که هردو رقم هریك ازآن‌ها، زوج باشند؟

حل. رقم دهگان‌عدد می‌تواندیکی ازرقم‌های ۲، ۴، ۶ یا ۸ (۴امکان) ورقم یکان آن یکی از رقم‌های ۰، ۲، ۴، ۶ یـا ۸ (۵ امکان) باشد. بنا براین روی هم، به‌تعداد ۵ × ۴ یعنی ۲۰ عدد دورقمی با رقم‌ها زوج وجود دارد.

مثال ۴. چند عدد پنج رقمی وجود دارد، به‌نحوی که اگر آن‌ها را از راست به‌چپ بخوانیم، همان‌عددی به‌دست آید که ازچپ به‌راست می‌خوانیم؟

حل. دورقم یکان ودههزارگان باهم برابرند ومی‌توانند هررقمی به‌جز

صفر باشند (۹ امکان)، دو رقم دهگان و هزارگان باهم برابرند و می‌توانند هر رقمی باشند (۱۰ امکان)، رقم صدگان می‌تواند هر رقم دلخواهی باشد (۱۰ امکان). بنابراین از این گونه عددهای پنج رقمی، به‌تعداد $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$ عدد وجود دارد.

مثال ۵. چند عدد شش‌رقمی بخش‌پذیر بر ۵ وجود دارد؟

حل. چون عدد بر ۵ بخش‌پذیر است، بنابراین رقم یکان آن یا ۰ است یا ۵ (دو امکان) هر یك از رقم‌های دهگان، صدگان، هزارگان و ده‌هزارگان می‌تواند هر رقم دلخواهی باشد (برای هر کدام، ۱۰ امکان). رقم صدهزارگان می‌تواند هر رقمی به‌جز صفر باشد (۹ امکان) به‌این ترتیب، به‌تعداد $۹ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۲$، یعنی ۱۸۰۰۰۰ عدد از این گونه وجود دارد.

مثال ۶. در یك مسابقهٔ فوتبال، ۱۸ تیم شرکت کرده‌اند. به‌چند طریق ممکن است مدال‌های طلا، نقره و برنز بین این تیم‌ها تقسیم شود، به‌شرطی که هر مدال تنها به‌یك تیم تعلق گیرد؟

حل. یکی از مدال‌ها، ومثلاً برنز را در نظر می‌گیریم. این مدال می‌تواند به‌هر یك از ۱۸ تیم داده شود (۱۸ امکان). سپس، مدال نقره به‌یکی از ۱۷ تیم باقی‌مانده تعلق می‌گیرد (۱۷ امکان) و، سرانجام، مدال طلا به‌یکی از ۱۶ تیم دیگر (۱۶ امکان). بنابراین، برای تقسیم مدال‌ها، روی هم $۱۶ \times ۱۷ \times ۱۸$، یعنی ۴۸۰۶ امکان وجود دارد.

برای هر عدد طبیعی n، حاصل‌ضرب $۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$ را با نماد $n!$ نشان می‌دهند و آن را «فاکتوریل n» می‌خوانند؛ درضمن $۰! = ۱$ به‌حساب می‌آورند. مثلاً

$$۳! = ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶، \qquad ۲! = ۱ \times ۲ = ۲، \qquad ۱! = ۱،$$

$$۵!۶! = ۱۲۰ \times ۷۲۰ = ۸۶۴۰۰ \qquad ۴! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴،$$

مثال ۷. این عبارت عددی را ساده کنید:

$$B = \frac{۷!۴!}{۱۰!}\left(\frac{۸!}{۳!۵!} - \frac{۹!}{۲!۷!}\right)$$

حل. چون $۱۰!=۷!\times۸\times۹\times۱۰$ و $۲۴=۴!$، بنابراین

$$\frac{۷!۴!}{۱۰!}=\frac{۷!\times۲۴}{۷!\times۸\times۹\times۱۰}=\frac{۱}{۳۰};$$

$$\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۵!\times۶\times۷\times۸}{۱\times۲\times۳\times۵!}=۵۶;\quad \frac{۹!}{۲!۷!}=\frac{۷!\times۸\times۹}{۲\times۷!}=۳۶$$

به‌این ترتیب

$$B=\frac{۱}{۳۰}(۵۶-۳۶)=\frac{۱}{۳۰}\times۲۰=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۸. این عبارت را ساده کنید:

$$D=\frac{۵!}{m(m+۱)}\cdot\frac{(m+۱)!}{(m-۱)!۳!},\ m\geqslant ۱،\ m\in\mathbf{N}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$D=\frac{۳!\times۴\times۵}{m(m+۱)}\cdot\frac{(m-۱)!m(m+۱)}{(m-۱)!\,۳!}=۲۰$$

مثال ۹. این عبارت را ساده کنید $(m\geqslant۵)$:

$$K=\frac{۶!}{(m-۲)(m-۳)}\left[\frac{۱}{(m+۱)(m-۴)}\cdot\frac{(m+۱)!}{(m-۵)!۵!}-\right.$$
$$\left.-\frac{m(m-۱)!}{۱۲(m-۴)!۳!}\right]$$

حل. چون $(m-۴)!=(m-۵)!(m-۴)$، بنابراین

$$\frac{۱}{(m+۱)(m-۴)}\cdot\frac{(m+۱)!}{(m-۵)!۵!}=\frac{m!(m+۱)}{(m+۱)(m-۴)!۵!}=$$
$$=\frac{m!}{(m-۴)!۴!\times۵}$$

وچون $m(m-۱)!=m!$ و $۱۴\times۳!=۳\times۴!$، بنابراین

$$\frac{m(m-۱)!}{۱۲(m-۴)!۳!}=\frac{m!}{(m-۴)!۴!\times۳}$$

و در نتیجه

$$K=\frac{۶!}{(m-۲)(m-۳)}\left[\frac{۱}{۵}\cdot\frac{m!}{۴!(m-۴)!}-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{m!}{۴!(m-۴)!}\right]=$$

$$=\frac{۶!}{(m-۳)(m-۲)}\cdot\frac{m!}{۴!\,(m-۴)!}\left(-\frac{۲}{۱۵}\right)=$$

$$=\frac{۴!\times ۵\times ۶(m-۲)!(m-۱)m(-۲)}{۴!(m-۲)!\times ۵\times ۳}=-۴(m-۱)m$$

مثال ۱۰. این معادله را حل کنید:

$$\frac{m!-(m-۱)!}{(m+۱)!}=\frac{۱}{۶},\ m\geqslant ۱،\ m\in\mathbf{N}$$

حل. کسر سمت چپ برابری را می‌توان تبدیل کرد:

$$\frac{m!-(m-۱)!}{(m+۱)!}=\frac{(m-۱)!m-(m-۱)!}{(m-۱)!m(m-۱)}=\frac{(m-۱)!(m-۱)}{(m-۱)!m(m+۱)}$$

$m=۱$ ریشهٔ معادله نیست، زیرا به‌ازای $m=۱$ به‌صورت $\frac{۰!\times ۰}{۰!\times ۱\times ۲}=\frac{۱}{۶}$ درمی‌آید، یعنی $\frac{۱}{۶}=۰$ که درست نیست. برای $m\geqslant ۲$، خواهیم داشت:

$$\frac{m-۱}{m(m+۱)}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow m_۱=۲،\ m_۲=۳$$

مثال ۱۱. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{m-۲}\left(\frac{۵}{m+۱}\cdot\frac{(m+۱)!}{(m-۳)!۴!}-\frac{m(m-۱)!}{۱۲(m-۳)(m-۴)!۲!}\right)\leqslant ۵$$

حل. ازشرط مساله نتیجه می‌شود $m\geqslant ۴$ و $m\in\mathbf{N}$. داریم:

$$\frac{۵}{m+۱}\cdot\frac{(m+۱)!}{(m-۳)!۴!}=\frac{۵(m-۳)!(m-۲)(m-۱)m(m+۱)}{(m-۳)!۴!(m+۱)}=$$

$$=\frac{۵(m-۲)(m-۱)m}{۴!};$$

$$\frac{m(m-۱)!}{۱۲(m-۳)(m-۴)!\,۲!}=\frac{(m-۳)!(m-۲)(m-۱)m}{(m-۴)!۴!}=$$

$$=\frac{(m-۲)(m-۱)m}{۴!}$$

بنا براین، عبارت سمت‌چپ نامعادله، چنین می‌شود:

$$\frac{۱}{m-۲}\left(\frac{۵(m-۲)(m-۱)m}{۴!}-\frac{(m-۲)(m-۱)m}{۴!}\right)=$$

$$=\frac{۴(m-۲)(m-۱)m}{(m-۲)\cdot ۱\times ۲\times ۳\times ۴}=\frac{(m-۱)m}{۶}$$

به‌این ترتیب، با شرط $m\geqslant ۴$، به‌این نامعادله می‌رسیم:

$$\frac{(m-۱)m}{۶}\leqslant ۵\Rightarrow (m-۶)(m+۵)\leqslant ۰$$

که با توجه به‌شرط‌های $m\in\mathbf{N}$ و $m\geqslant ۴$ به‌دست می‌آید:

$$m_۱=۴،\ m_۲=۵،\ m_۳=۶$$

اگر m عنصر را از n عنصر مختلف انتخاب کنیم، گوییم m عنصر را از n عنصر هم‌گیری کرده‌ایم. بسته به این که ردیف عنصرهای یك هم‌گیری برای ما اهمیت داشته‌باشد یا بی‌اهمیت باشد و، همچنین، بسته‌به‌این‌که‌تمامی n عنصر درهم‌گیری واردشده باشند یا تنها بخشی ازآن‌ها، با سه‌نوع هم‌گیری روبه‌رو می‌شویم. هم‌گیری را آرایش هم می‌گویند.

گونه‌های مختلف هم‌گیری

۱. هم‌گیری‌هایی‌که درعنصرهای خود یا در ردیف‌عنصرها باهم‌تفاوت داشته باشند، در هر کدام از آن‌ها m عنصر از n عنصر $(m\leqslant n)$ انتخاب شده باشد، ترتیب‌های n عنصر m به m یا ترتیب‌های m عنصری از n عنصر نامیده می‌شوند. مثلاً همهٔ ترتیب‌های دو عنصری از چهار عنصر a، b، c و d چنین‌اند:

$$ab،\ ba،\ ac،\ ca،\ ad،\ da،\ bc،\ cb،\ bd،\ db،\ cd،\ dc$$

۲. هم‌گیری‌ها یا آرایش‌هایی که، هرکدام از آن‌ها، شامل n عنصر مختلف در ردیف معینی باشد، تبدیل‌های n عنصر نامیده می‌شوند. مثلاً، همهٔ

تبدیل‌های سه عنصر a و b و c چنین‌اند:

$$abc،\ acb،\ bac،\ bca،\ cab،\ cba$$

۳. هم‌گیری‌هایی که، دست‌کم در یك‌عنصر با هم اختلاف داشته‌باشند و، هر کدام از آن‌ها، شامل m عنصر باشد، ترکیب‌های m به m از n عنصر یا ترکیب‌های m عنصری از n عنصر نامیده می‌شوند. مثلاً همهٔ ترکیب‌های سه عنصری از پنج عنصر a، b، c، d و e چنین‌اند:

$$abc،\ abd،\ abe،\ acd،\ ace،\ ade،\ bcd،\ bce،\ bde،\ cde$$

مسألهٔ مربوط به‌تعداد ترتیب‌ها. به چند طریق می‌توان m عنصر را، با توجه به‌ردیف آن‌ها، از بین n عنصر انتخاب کرد؟ تعداد همهٔ این طریق‌ها را با نماد A_n^m نشان می‌دهند (و می‌خوانند: «تعداد ترتیب‌های m تایی از n عنصر»).

روشن است که، اگر بخواهیم عنصرها را یك به‌یك انتخاب کنیم، یعنی در هر ترتیب یك عنصر داشته باشیم، می‌توانیم این انتخاب را به n طریق انجام دهیم:

$$A_n^{۱}=n$$

وقتی ترتیب‌های یك به‌یك را در اختیار داشته باشیم، با قرار دادن هر یك از $(n-۱)$ عنصر باقی‌مانده، در سمت راست هر یك از آن‌ها، ترتیب‌های دو به‌دو از n عنصر به‌دست می‌آید، یعنی

$$A_n^{۲}=n(n-۱)$$

به‌همین ترتیب، اگر درسمت راست هریك از ترتیب‌های دوعنصری، هر یك‌از $(n-۲)$ عنصر دیگر را قرار دهیم، ترتیب‌های سه‌به‌سه از n عنصر به‌دست می‌آید، یعنی

$$A_n^{۳}=n(n-۱)(n-۲)$$

اگر استدلال را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، به‌دست می‌آید:

$$A_n^{۴}=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)،$$

$$A_n^{۵}=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)،$$

. . . .

$$A_n^m=n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-(m-۲))(n-(m-۱))$$

و روشن است که می‌توان آن را به این صورت نوشت:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال ۱۲. چند عدد دو رقمی وجود دارد که، در آن‌ها، دو رقم یکان و دهگان متفاوت و درضمن فرد باشند؟

حل. پنج رقم فرد داریم (۱، ۳، ۵، ۷ و ۹). بنا بر این مساله منجر به انتخاب دو رقم از پنج رقم با رعایت ترتیب آن‌ها، یعنی به ترتیب‌های دو به دوی پنج رقم می‌شود و

$$A_۵^۲=۵\times۴=۲۰$$

مثال ۱۳. چند شمارهٔ تلفن هفت‌رقمی وجود دارد که، در هیچ کدام از آن‌ها، هیچ رقمی تکرار نشده باشد؟

حل. این مساله، منجر به انتخاب‌های ممکن هفت‌رقم مختلف از ده‌رقم ممکن، یعنی به ترتیب‌های هفت به‌هفت از ده عنصر می‌شود و

$$A_{۱۰}^{۷}=\frac{۱۰!}{(۱۰-۷)!}=۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴=۶۰۴۸۰۰$$

مثال ۱۴. این عبارت را ساده کنید:

$$M=\frac{A_n^۶+A_n^۵}{A_n^۴}،\ n\geqslant۶،\ n\in\mathbf{N}$$

حل. داریم:

$$A_n^۶=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)(n-۵)،$$
$$A_n^۵=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)،$$
$$A_n^۶+A_n^۵=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)^۲،$$
$$A_n^۴=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)،$$
$$M=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)(n-۴)^۲}{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}=(n-۴)^۲$$

مثال ۱۵. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{A^{۴}_{n+۴}}{(n+۲)!}<\frac{۱۵}{(n-۱)!}$$

حل. ازصورت مساله معلوم می‌شود که $n\geqslant ۱$ و $n\in\mathbf{N}$. داریم:

$$A^{۴}_{n+۴}=(n+۴)(n+۳)(n+۲)(n+۱),$$

$$(n+۲)!=(n-۱)!\,n(n+۱)(n+۲),$$

$$\frac{A^{۴}_{n+۴}}{(n+۲)!}=\frac{(n+۴)(n+۳)(n+۲)(n+۱)}{(n-۱)!n(n+۱)(n+۲)}=\frac{(n+۴)(n+۳)}{(n-۱)!n},$$

بنابراین، نامعادلهٔ مفروض، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{(n+۴)(n+۳)}{(n-۱)!\,n}<\frac{۱۵}{(n-۱)!}$$

$n=۱$ جواب نامعادله نیست، زیرا به‌ازای $n=۱$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{۵\times۴}{۰!\times۱}<\frac{۱۵}{۰!}\Longleftrightarrow ۲۰<۱۵$$

که ممکن نیست. برای $n\neq۱$ داریم:

$$\frac{(n+۴)(n+۳)}{n}<۱۵\Longleftrightarrow n^{۲}-۸n+$$

$$+۱۲<۰\Longleftrightarrow(n-۲)(n-۶)<۰$$

ازاین‌جا نتیجه‌می‌شود که، نابرابری، برای $n_{۱}=۳$، $n_{۲}=۴$ و $n_{۳}=۵$ برقرار است.

مثال ۱۶. ثابت کنید:

$$A^{n+۲}_{n+k}+A^{n+۱}_{n+k}=k^{۲}A^{n}_{n+k}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A^{n+۲}_{n+k}=(n+k)(n+k-۱)\ldots(n+k-n)(n+k-(n+۱))=$$
$$=(n+k)(n+k-۱)\ldots k(k-۱),$$

$$A^{n+۱}_{n+k}=(n+k)(n+k-۱)\ldots(n+k-(n-۱))(n+k-n)=$$
$$=(n+k)(n+k-۱)\ldots(k+۱)k,$$

$$A^{n+۲}_{n+k}+A^{n+۱}_{n+k}=(n+k)(n+k-۱)\ldots(k+۱)k((k-۱)+۱)=$$

$$=(n+k)(n+k-۱)\ldots(k+۱)k^۲=$$
$$=(n+k)(n+k-۱)\ldots(k+۲)(k+۱+n-n)k^۲=$$
$$=k^۲(n+k)(n+k-۱)\ldots((n+k)-(n-۲))((n+k)-$$
$$-(n-۱))=k^۲A_{n+k}^n$$

قبلاً دیدیم که $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$. در حالت خاص به‌ازای $m=n$ و با توجه به‌قرارداد $۰!=۱$، به‌دست می‌آید:

$$A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{۰!}=n!$$

اگر طبق تعریف فرض کنیم $A_n^۰=۱$، بازهم بادستورما درست‌درمی‌آید:

$$۱=A_n^۰=\frac{n!}{(n-۰)!}=\frac{n!}{n!}=۱$$

بنابراین، برای همهٔ مقدارهای m از ۰ تا n، این‌دستور درست است:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

مثال ۱۷. درستی این برابری را ثابت کنید:

$$A_n^k=A_{n-۱}^k+kA_{n-۱}^{k-۱}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$A_{n-۱}^k=\frac{(n-۱)!}{(n-۱-k)!}=\frac{(n-۱)!}{(n-(k+۱))!}=$$

$$=\frac{(n-۱)!(n-k)}{(n-(k+۱)!(n-k))}=\frac{(n-k)(n-۱)!}{(n-k)!},$$

$$kA_{n-۱}^{k-۱}=k\frac{(n-۱)!}{((n-۱)-(k-۱))!}=\frac{k(n-۱)!}{(n-k)!},$$

$$A_{n-۱}^k+kA_{n-۱}^{k-۱}=\frac{(n-۱)!}{(n-k)!}\cdot n=\frac{n!}{(n-k)!}=A_n^k$$

مثال ۱۸. این عبارت را ساده کنید:

$$F=\frac{A_{۴۹}^{۱۲}+A_{۴۹}^{۱۱}}{A_{۴۹}^{۱۰}}-\frac{A_{۱۷}^{۱۰}+A_{۱۷}^{۹}}{A_{۱۷}^{۸}}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{A_{۴۹}^{۱۲}+A_{۴۹}^{۱۱}}{A_{۴۹}^{۱۰}}=(A_{۴۹}^{۱۲}+A_{۴۹}^{۱۱})\frac{۱}{A_{۴۹}^{۱۰}}=\left(\frac{۴۹!}{۳۷!}+\frac{۴۹!}{۳۸!}\right)\frac{۳۹!}{۴۹!}=$$

$$=\frac{۳۹!}{۳۷!}+\frac{۳۹!}{۳۸!}=۳۹\times ۳۸+۳۹=۳۹(۳۸+۱)=۳۹^{۲};$$

$$\frac{A_{۱۷}^{۱۰}+A_{۱۷}^{۹}}{A_{۱۷}^{۸}}=\left(\frac{۱۷!}{۷!}+\frac{۱۷!}{۸!}\right)\frac{۹!}{۱۷!}=\frac{۹!}{۷!}+\frac{۹!}{۸!}=۹^{۲},$$

$$F=۳۹^{۲}-۹^{۲}=(۳۹-۹)(۳۹+۹)=۳۰\times ۴۸=۱۴۴۰$$

مسالهٔ مربوط به‌تعداد تبدیل‌ها. به‌چند طریق می‌توان k عنصر مختلف را پهلوی هم چید؟ تعداد همهٔ این گونه طریق‌ها را با P_k نشان می‌دهند (و می‌خوانند: «تعداد تبدیل‌های از k عنصر»).

این مساله، در واقع، همان تعداد ترتیب‌های «عنصر k به k» است که به $k!$ طریق ممکن است. به‌این‌ترتیب، تعداد تبدیل‌ها را می‌توان با این دستور نشان داد:

$$P_k=k!$$

تبدیل را جای‌گشت یا جابه‌جایی هم گفته‌اند.

مثال ۱۹. چند عدد شش رقمی زوج می‌توان با رقم‌های ۱، ۳، ۴، ۵، ۷ و ۹ ساخت، به‌شرطی که درهرعدد، هیچ رقمی تکرار نشده باشد؟

حل. شرط لازم و کافی برای بخش‌پذیری یك عدد بر ۲، بخش‌پذیر‌بودن رقم یکان آن بر ۲ است. بنابراین، در بین رقم‌های مفروض، تنها ۴ می‌تواند به‌جای رقم یکان قرار گیرد و پنج رقم دیگر، می‌توانند به‌دلخواه مرتبه‌های دیگر را اشغال کنند. بنابراین، مساله به‌این‌جا منجر می‌شود که تعداد تبدیل‌های این پنج رقم را پیدا کنیم. داریم $P_{۵}=۵!=۱۲۰$، یعنی روی هم ۱۲۰ عدد موردنظر وجود دارد.

مثال ۲۰. هفت کتاب با مولفان مختلف را، به‌چندطریق می‌توان در

یك ردیف درقفسه‌ای قرار دارد؟

حل. پاسخ روشن است: $P_{۷}=۷!=۵۰۴۰$.

مثال ۲۱. هشت نامه را بـه‌چند طریق می‌توان در هشت صندوق پست انداخت، به‌شرطی که درهر صندوق، تنها **یك** نامه قرار گیرد؟

حل. تعداد روش‌های ممکن، برای انداختن هشت‌نامه درهشت‌صندوق پست، برابراست با تعداد تبدیل‌های هشت‌عنصر؛ وچون

$$P_{۸}=۸!=۴۰۳۲۰$$

بنابراین هشت نامه را به ۴۰۳۲۰ طریق می‌توان درهشت صندوق قرارداد.

مسالهٔ مربوط به‌تعداد ترکیب‌ها. به چند طریق می‌توان m عنصر را از بین n عنصر مختلف جدا کرد؟ تعداد همهٔ این ترکیب‌ها را با C_n^m نشان‌می‌دهند (ومی‌خوانند: «تعداد ترکیب‌های m تایی از n»).

از بین n عنصر به C_n^m طریق می‌توان m عنصر را جدا کرد؛ درضمن، درهریك از این ترکیب‌ها، m عنصر را بـه $m!$ طریق می‌توان ردیف کرد. بنابراین، طبق قانون ضرب، $m!C_n^m$ طریق ممکن، برای ترتیب‌های m بـه m از n عنصر وجود دارد، یعنی

$$A_n^m=m!\,C_n^m$$

ازاین‌جا، تعداد ترکیب‌های مختلف m تایی از n عنصر به‌دست می‌آید:

$$C_n^m=\frac{n(n-۱)\cdots(n-(m-۱))}{m!}$$

مثال ۲۲. معلم بـه‌چند طریق می‌تواند دو کتاب را از بین پنج کتاب انتخاب کند؟

حل. تعداد مورد نظر، برابر است با تعداد ترکیب‌های دوتایی ازپنج عنصر و چون داریم: $C_{۵}^{۲}=\frac{۵\times۴}{۲!}=۱۰$، بنابرایـن معلم، انتخاب خود را به ۱۰ طریق می‌تواند انجام دهد.

مثال ۲۳. ۱۲ ورزشکار می‌خواهند از بین‌خود، ۴ نفر را برای‌شرکت در مسابقه انتخاب کنند. به‌چند طریق، این انتخاب ممکن است؟

حل. پاسخ روشن است: $C_{۱۲}^{۴}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}=۴۹۵$.

مثال ۲۴. در یك هفت‌ضلعی محدب، همهٔ قطرها را رسم کرده‌ایم و می‌دانیم که، هیچ سه قطری، در یك نقطه به‌هم نمی‌رسند. تعداد نقطه‌های برخورد این قطرها را پیدا کنید.

حل. هر نقطهٔ برخورد قطرها، متناظر با ۴ راس هفت‌ضلعی و، برعکس، هر ۴ راس هفت ضلعی متناظر با یکی از نقطه‌های برخورد قطرهاست. بنابراین، تعداد برخورد قطرها، برابر است با تعداد روش‌های ممکن برای انتخاب ۴ راس از بین ۷ راس، یعنی

$$C_{۷}^{۴}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}=۳۵$$

به‌این ترتیب، قطرهای این هفت‌ضلعی محدب، در ۳۵ نقطه به‌هم می‌رسند.

مثال ۲۵. برای تعیین برندهٔ نهائی، ۱۶ تیم فوتبال باهم مسابقه‌داده‌اند؛ در ضمن، هر دو تیم، تنها یك‌بار باهم روبه‌رو شده‌اند. روی‌هم چند بازی انجام شده است؟

حل. مساله، چیزی جز، پیدا کردن تعداد انتخاب‌های ممکن دو تیم از بین ۱۶ تیم نیست، و چون

$$C_{۱۶}^{۲}=\frac{۱۶\times ۱۵}{۱\times ۲}=۱۲۰$$

بنابراین روی‌هم، ۱۲۰ بازی انجام شده است.

مثال ۲۶. پنج عدد مختلف α، β، γ، λ و μ داده‌شده است. به‌چندطریق می‌توان حاصل‌ضربی از این عددها را به‌دست آورد که

الف) شامل دو عامل مختلف باشد؛

ب) سه عامل مختلف داشته باشد؛

ج) دارای چهار عامل مختلف باشد؛

د) از پنج عامل تشکیل شده باشد؟

در هرحالت، این حاصل‌ضرب‌ها را بنویسید.

حل. این مساله، عبارت است از پیدا کردن ترکیب‌های دوتایی، سه‌تایی، چهارتایی و پنج‌تایی از بین پنج عنصر.

الف) $C_{۵}^{۲}=\frac{۵\times ۴}{۱\times ۲}=۱۰$؛ یعنی از بین ۵ عدد، به ۱۰ طریق می‌توان ضربی از دو عدد را به‌دست آورد. آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\alpha\beta،\ \alpha\gamma،\ \alpha\lambda،\ \alpha\mu،\ \beta\gamma،\ \beta\lambda،\ \beta\mu،\ \gamma\lambda،\ \gamma\mu،\ \lambda\mu$$

ب) $C_{۵}^{۳}=\frac{۵\times ۴\times ۳}{۱\times ۲\times ۳}=۱۰$، یعنی به ۱۰ طریق می‌توان ضرب سه عدد از بین پنج عدد را به دست آورد. آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\alpha\beta\gamma،\ \alpha\beta\lambda،\ \alpha\beta\mu،\ \alpha\gamma\lambda،\ \alpha\gamma\mu،\ \alpha\lambda\mu،\ \beta\gamma\lambda،\ \beta\gamma\mu،\ \beta\lambda\mu،\ \gamma\lambda\mu$$

ج) $C_{۵}^{۴}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}=۵$؛ پنج ضرب چهارتایی از بین پنج عدد می‌توان انتخاب کرد. این ضرب‌ها چنین‌اند:

$$\alpha\beta\gamma\lambda،\ \alpha\beta\gamma\mu،\ \alpha\beta\lambda\mu،\ \alpha\gamma\lambda\mu،\ \beta\gamma\lambda\mu$$

د) $C_{۵}^{۵}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵}=۱$؛ تنها به‌یك طریق می‌توان ضرب پنج عاملی از بین پنج عدد به‌دست آورد: $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$.

یادآوری می‌کنیم که

$$C_n^m=\frac{n(n-۱)\cdots(n-(m-۱))}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

بنابراین، برای محاسبهٔ تعداد ترکیب‌های m تایی از بین n عنصر، می‌توان از دستور $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ استفاده کرد. درحالت خاص $m=n$ داریم:

$$C_n^n=\frac{n!}{n!\,۰!}=۱، \quad (\text{طبق تعریف } ۰!=۱)$$

همچنین، بنا بر تعریف می‌پذیریم: $C_n^۰=۱$، داریم:

$$۱=C_n^۰=\frac{n!}{۰!(n-۰)!}=\frac{n!}{۱\times n!}=۱$$

به‌این ترتیب، دستور $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$ به‌ازای همهٔ مقدارهای m از $m=۰$ تا $m=n$ درست است.

با استفادهٔ از این دستور، به‌سادگی، به‌برابری زیر می‌رسیم:

$$C_n^m=C_n^{n-m}$$

که آن‌را قانون تقارن هم می‌نامند. در واقع

$$C_n^{n-m}=\frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!}=\frac{n!}{(n-m)!m!}=C_n^m$$

قانون تقارن به‌این معناست که: مسالهٔ مربوط به‌تعداد ترکیب‌هایی m تایی از n عنصر، با مسالهٔ مربوط به تعداد ترکیب‌های $(n-m)$ تایی از n عنصر، یکی است.

مثال ۲۷. محاسبه کنید: $E=C_{۲۵}^{۲۳}-C_{۱۵}^{۱۳}-۳C_{۱۰}^{۷}$.

حل. به‌ترتیب داریم:

$$C_{۲۵}^{۲۳}=C_{۲۵}^{۲}=\frac{۲۵\times ۲۴}{۱\times ۲}=۳۰۰;\quad C_{۱۵}^{۱۳}=C_{۱۵}^{۲}=\frac{۱۵\times ۱۴}{۱\times ۲}=۱۰۵;$$

$$۳C_{۱۰}^{۷}=۳C_{۱۰}^{۳}=\frac{۳\times ۱۰\times ۹\times ۸}{۱\times ۲\times ۳}=۳۶۰;$$

$$E=۳۰۰-۱۰۵-۳۶۰=-۱۶۵$$

مثال ۲۸. نینا هفت کتاب‌مختلف ریاضی و توکا نه‌کتاب‌مختلف‌فیزیك دارد. به‌چند طریق می‌توانند پنج کتاب را باهم معاوضه‌کنند؟

برای انتخاب ۵ کتاب، تعداد امکان‌ها برابر است با

$$C_{۷}^{۵}=C_{۷}^{۲}=\frac{۷\times ۶}{۱\times ۲}=۲۱ \quad (\text{برای نینا})$$

$$C_{۹}^{۵}=C_{۹}^{۴}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}=۱۲۶ \quad (\text{برای توکا})$$

بنابراین، تعداد روش‌های ممکن معاوضه (بنا بر قانون ضرب)، برابر است با

$$C_{۷}^{۵}\cdot C_{۹}^{۱۵}=۲۱\times ۱۲۶=۲۶۴۶$$

اکنون به‌توضیح قانون دیگری از آرایش‌ها، یعنی قانون جمع می‌پردازیم.

m عمل $A_۱$، $A_۲$، ...، A_m را در نظر می‌گیریم، به‌نحوی که انجام

هر یك از آن‌ها، هیچ‌گونه بستگی به‌انجام عمل‌های دیگر نداشته باشد. اگر

عمل $A_۱$ را بتوان به $K_۱$ طریق انجام داد؛

عمل $A_۲$ را بتوان به $K_۲$ طریق انجام داد؛

. . . .

عمل A_m را بتوان به K_m طریق انجام داد؛

آن‌وقت، برای انجام یکی از عمل‌ها، $K_۱+K_۲+\dots+K_m$ طریق ممکن، وجود دارد.

مثال ۲۹. ثابت کنید:

$$C_n^k=C_{k-۱}^{k-۱}+C_k^{k-۱}+C_{k+۱}^{k-۱}+\dots+C_{n-۲}^{k-۱}+C_{n-۱}^{k-۱}$$

حل. n عنصر $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، …، α_n را مفروض می‌گیریم و، آن‌ها را، با اندیس‌هایشان تمیز می‌دهیم.

تعداد همهٔ ترکیب‌های k تائی که شامل عنصر α_k باشند، ولی شامل عنصری با اندیس بزرگتر از k نباشند، برابر است با $C_{k-۱}^{k-۱}$.

تعداد همهٔ ترکیب‌های k عنصری که شامل عنصر $\alpha_{k+۱}$ باشند، ولی شامل عنصری با اندیس بزرگتر نباشند، برابر است با $C_k^{k-۱}$.

همهٔ ترکیب‌های k عنصری را که شامل عنصر $\alpha_{k+۲}$ باشند، ولی‌شامل عنصری با اندیس بالاتر نباشند، به $C_{k+۱}^{k-۱}$ طریق می‌توان انتخاب کرد وغیره. سرانجام، همهٔ ترکیب‌های k به k را که شامل عنصر α_n باشند، می‌توان به $C_{n-۱}^{k-۱}$ طریق انتخاب کرد. بنابر قانون جمع، تعداد ترکیب‌های k به k از عنصرهای $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، …، α_n، برابر می‌شود با

$$C_{k-۱}^{k-۱}+C_k^{k-۱}+C_{k+۱}^{k-۱}+\dots+C_{n-۱}^{k-۱}$$

از طرف دیگر، تعداد همین ترکیب‌ها، برابر است با C_n^k. در نتیجه

$$C_{k-۱}^{k-۱}+C_k^{k-۱}+C_{k+۱}^{k-۱}+\dots+C_{n-۱}^{k-۱}=C_n^k$$

مثال ۳۰. از دو ریاضی‌دان و ده اقتصاددان می‌خواهیم کمیسیونی شامل هشت نفر تشکیل دهیم، به‌نحوی که دست کم یك ریاضی‌دان در آن شرکت داشته باشد. این کمسیون را به‌چند طریق می‌توان تشکیل داد؟

حل. این کمسیون را می‌توان از هفت اقتصاددان و یك ریاضی‌دان یا

از شش اقتصاددان و دو ریاضی‌دان تشکیل داد. یك ریاضی‌دان را از بین دو ریاضی‌دان به $C_{۲}^{۱}=۲$ طریق و هفت اقتصاددان از بین ده نفر به $C_{۱۰}^{۷}=C_{۱۰}^{۳}=۱۲۰$ طریق می‌توان انتخاب کرد. بنابراین، کمسیونی را که شامل یك ریاضی‌دان و هفت اقتصاددان باشد، بنابر قانون ضرب به $C_{۱۰}^{۷}\cdot C_{۲}^{۱}$، یعنی ۲۴۰ طریق می‌توان تشکیل داد.

دو ریاضی‌دان را از بین دو نفر به $C_{۲}^{۲}=۱$ طریق و شش اقتصاددان را از بین ده نفر به $C_{۱۰}^{۶}=C_{۱۰}^{۴}=۲۱۰$ طریق می‌توان انتخاب کرد. بنابراین، تشکیل کمسیون شامل دو ریاضی‌دان و شش اقتصاددان، بنابرقانون ضرب، به $C_{۲}^{۲}\cdot C_{۱۰}^{۶}$، یعنی ۲۱۰ طریق ممکن است.

به‌این ترتیب، تعداد کل کمیسیون‌ها، که دست‌کم شامل یك ریاضی‌دان باشد، بنابه قانون جمع، برابر است با

$$C_{۲}^{۱}C_{۱۰}^{۷}+C_{۲}^{۲}C_{۱۰}^{۶}=۲۴۰+۲۱۰=۴۵۰$$

راه‌حل دیگری برای این مساله می‌دهیم.

برای تشکیل یك کمسیون هشت نفری از بین دوازده نفر، می‌توان به

$$C_{۱۲}^{۸}=C_{۱۲}^{۴}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۱\times۲\times۳\times۴}=۴۹۵$$

کمیسیون مختلف رسید. این کمیسیون‌ها را به‌دو نوع می‌توان تقسیم کرد:

الف) کمیسیون‌هایی که تنها شامل اقتصاددان‌ها هستند؛

ب) کمیسیون‌هایی که، در آن‌ها، دست کم یك ریاضی‌دان وجود دارد.

چون تعداد روش‌های انتخاب کمسیون شامل هشت اقتصاددان از بین ده نفر برابر است با

$$C_{۱۰}^{۸}=C_{۱۰}^{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۱\times۲}=۴۵$$

بنابراین، تعداد کمیسیون‌های ممکنی که شامل لااقل یك ریاضی‌دان باشند، چنین می‌شود:

$$۴۹۵-۴۵=۴۵۰$$

مثال ۳۱. عدد ۲۱۰ چند مقسوم‌علیه دارد؟

حل. عدد مفروض را به‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$۲۱۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷$$

تعداد مقسوم‌علیه‌هایی که از حاصل‌ضرب دو عامل اول به‌دست آمده‌اند، برابر است با

$$C_۴^۲ = ۶، \quad (۶، ۱۰، ۱۴، ۱۵، ۲۱، ۳۵)$$

تعداد مقسوم‌علیه‌هایی که از ضرب سه عامل اول به دست می‌آیند:

$$C_۴^۳ = C_۴^۱ = ۴، \quad (۳۰، ۴۲، ۷۰، ۱۰۵)$$

عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ (۴ عدد) هم مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۱۰ هستند. علاوه براین‌ها، عدد ۲۱۰، بر ۱ و ۲۱۰ هم بخش‌پذیر است. بنابراین‌تعداد کل مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۱۰ چنین است:

$$۶ + ۴ + ۴ + ۱ + ۱ = ۱۶$$

مثال ۳۲. درکوپهٔ قطار، دو نیمکت روبه‌روی هم قرار دارند که در هرکدام چهار نفر می‌توانند بنشینند. ازهشت مسافر، سه‌نفر می‌خواهندطوری بنشینند که رو به‌جهت حرکت قطار داشته باشند و دو نفر می‌خواهد پشت به‌حرکت قطار بنشینند. باتوجه به‌این‌موقعیت، به‌چند طریق می‌توان‌مسافرها را درکوپه جا داد؟

حل. M، N و P را مسافرانی می‌گیریم که ما را در جای نشستن‌خود آزادگذاشته‌اند. اگر M روبه‌جهت حرکت‌قطار بنشینند، آن‌وقت سه‌مسافری که می‌خواهند روبه‌جهت حرکت قطار داشته باشند، با M، به ۴! طریق می‌توانندبنشینند. بقیهٔ مسافران‌هم، روی‌نیمکت روبه‌رو، به‌۴! طریق‌می‌توانند جا بگیرند. بنابراین، اگر M روی نیمکتی قرارگیردکه رو به‌جهت‌حرکت قطار دارد، به‌ازای هر یك ۴! طریق این نیمکت، در نیمکت روبه‌رو به ۴! طریق می‌توانند جا بگیرند، بنابراین دراین‌حالت، بنابه‌قانون ضرب، به‌تعداد ۴!.۴!، یعنی ۵۷۶ طریق برای نشستن مسافرها وجود دارد.

همین تعداد هم برای حالت‌هایی به‌دست می‌آیدکه N یا P روی این نیمکت (که رودرجهت حرکت قطار دارد) بنشینند.

به‌این‌ترتیب، تعدادکل روش‌های جاگیری مسافرها، بنابه قانون‌جمع، برابر است با

$$(۴!)^۲+(۴!)^۲+(۴!)^۲=۳\times ۵۷۶=۱۷۲۸$$

یکی ازقانون‌های مهم مربوط به‌تعداد ترکیب‌ها را ثابت می‌کنیم که به قانون پاسکال معروف است:

$$C_{n+۱}^m=C_n^{m-۱}+C_n^m$$

اثبات قانون پاسکال را به‌کمك دستور $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ می‌دهیم:

$$C_n^{m-۱}+C_n^m=\frac{n!}{(m-۱)!(n+۱-m)!}+\frac{n!}{m!(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!}{m!(n+۱-m)!}(m+n-m+۱)=\frac{(n+۱)!}{m!((n+۱)-m)!}=C_{n+۱}^m$$

اثبات دیگری برای‌قانون پاسکال می‌دهیم‌که، در آن، ازقانون مجموع استفاده شده است.

تعداد همهٔ ترکیب‌های m به‌m از n عنصر را به‌دو گروه تقسیم می‌کنیم: دریکی ازگروه‌ها، همهٔ ترکیب‌های m بـه m از n عنصر را قرارمی‌دهیم که شامل یکی ازعنصرها (ومثلاً عنصر f) نباشد؛ و درگروه دوم، ترکیب‌هایی را که شامل f هستند. تعداد ترکیب‌های گروه اول، بـرابـر است با $C_{n-۱}^m$ (زیرا عنصر f را از n عنصر کنارگذاشته‌ایم)، اگر همهٔ ترکیب‌های $(m-۱)$ تایی از $n-۱$ عنصر (بدون f) را تشکیل دهیم و، سپس، به‌هرکدام ازاین ترکیب‌ها، عنصر f را اضافه کنیم، آن‌وقت $C_{n-۱}^{m-۱}$ معرف تعداد همهٔ ترکیب‌های گروه دوم خواهد بود، یعنی ترکیب‌هایی که شامل f هستند. دراین صورت، بنا به‌قانون جمع، داریم:

$$C_n^m=C_{n-۱}^{m-۱}+C_{n-۱}^m$$

قانون پاسکال این امکان را به مـا می‌دهد که با دردست داشتن تعداد همهٔ ترکیب‌های ممکن از n عنصر، تعداد همهٔ تـرکیب‌های ممکن از $n+۱$ عنصر را پیدا کنیم.

مقدارهای C_n^m را می‌توان، پشت سرهم، به‌صورتی کـه درزیر می‌بینید و به مثلث پاسکال معروف است، نوشت:

C_n^m	n
۱	۰
۱ ۱	۱
۱ ۲ ۱	۲
۱ ۳ ۳ ۱	۳
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	۴
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	۵
۱ ۶ ۱۵ ۳۰ ۱۵ ۶ ۱	۶
۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱	۷

درسطر n ام، از چپ به‌راست، مقدارهای $C_n^۰$، $C_n^۱$، $C_n^۲$، ...، C_n^n قرار گرفته‌اند. چون $C_n^۰=C_n^n=۱$، بنابراین مقدارهای مرزی معلوم‌اند. هرعضو C_n^m جدول، برابراست بـامجموع دوعضوی که در بالای آن، درسمت‌چپ و سمت‌راست، قراردارند.

برای عددهای دلخواه x و a، همیشه داریم:

$$(x+a)^{۱}=x+a،$$
$$(x+a)^{۲}=x^{۲}+۲ax+a^{۲}،$$
$$(x+a)^{۳}=x^{۳}+۳ax^{۲}+۳a^{۲}x+a^{۳}،$$

توجه کنیم که:

$C_۱^m$، ضریب $x^{۱-m}a^m$ به‌ازای $m=۰، ۱$ است؛

$C_۲^m$، ضریب $x^{۲-m}a^m$ برای $m=۰، ۱، ۲$ است؛

$C_۳^m$، ضریب $x^{۳-m}a^m$ برای $m=۰، ۱، ۲، ۳$ است.

مثال دیگری می‌آوریم.

فرض کنید، باضرب پنج عامل دوجمله‌ای سروکارداشته باشیم:

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\lambda)(x+\mu)$$

پرانتزها را باز و $۲^{۵}$ جملهٔ حاصل را گروه‌بندی می‌کنیم، به نحوی که ضریب هریك ازتوان‌های $x^{۵}$، $x^{۴}$، $x^{۳}$، $x^{۲}$، $x^{۱}$، ومقدار آزاد به‌دست آید؛

به‌این عبارت می‌رسیم:

$$x^{5}+(\alpha+\beta+\gamma+\lambda+\mu)x^{4}+$$
$$+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\lambda+\alpha\mu+\beta\gamma+\beta\lambda+\beta\mu+\gamma\lambda+\gamma\mu+\lambda\mu)x^{3}+$$
$$+(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta\mu+\alpha\gamma\lambda+\alpha\gamma\mu+$$
$$+\alpha\lambda\mu+\beta\gamma\lambda+\beta\gamma\mu+\beta\lambda\mu+\gamma\lambda\mu)x^{2}+$$
$$+(\alpha\beta\gamma\lambda+\alpha\beta\gamma\mu+\alpha\beta\lambda\mu+\alpha\gamma\lambda\mu+\beta\gamma\lambda\mu)x+\alpha\beta\gamma\lambda\mu$$

دراین مجموع:

ضریب x^{4}، شامل C_{5}^{1} جمله است؛

ضریب x^{3}، شامل C_{5}^{2} جمله است؛

ضریب x^{2}، شامل C_{5}^{3} جمله است؛

ضریب x^{1}، شامل C_{5}^{4} جمله است.

اگر فرض کنیم: $\alpha=\beta=\gamma=\lambda=\mu=a$، آن‌وقت این ضرب شامل پنج جمله، به‌صورت $(x+a)^{5}$ در می‌آید. جملهٔ x^{5} را می‌توان به‌صورت $C_{5}^{0}x^{5}a^{0}$، جملهٔشامل x^{4} را به‌صورت $C_{5}^{1}x^{4}a^{1}$، جملهٔشامل x^{3} را به‌صورت $C_{5}^{2}x^{3}a^{2}$، جملهٔشامل x^{2} را به‌صورت $C_{5}^{3}x^{2}a^{3}$، جملهٔشامل x^{1} را به‌صورت $C_{5}^{4}x^{1}a^{4}$ و، بالاخره، جملهٔ آزاد $\alpha\beta\gamma\lambda\mu$ را به صورت $C_{5}^{5}x^{0}a^{5}$ نوشت.

به‌این برابری می‌رسیم:

$$(x+a)^{5}=C_{5}^{0}x^{5}a^{0}+C_{5}^{1}x^{4}a^{1}+C_{5}^{2}x^{3}a^{2}+C_{5}^{3}x^{2}a^{3}+C_{5}^{4}x^{1}a^{4}+$$
$$+C_{5}^{5}x^{0}a^{5}$$

در این برابری، عدد C_{5}^{m}، برای ۵ ،۴ ،۳ ،۲ ،۱ ،۰ $=m$، عبارت است ازضریب $x^{5-m}a^{m}$.

این طور به‌نظر می‌رسد که، عدد C_{n}^{m}، عبارت است ازضریب $x^{n-m}a^{m}$ (برای از $m=0$ تا $m=n$) در هرتوان طبیعی n ازدوجمله‌ای $x+a$.

ثابت می‌کنیم که، این قانون‌مندی، خصلتی کلی دارد.

برای هرعدد طبیعی n وعددهای دلخواه x و a، اگر با $(x+a)^{n}$ روبه‌رو باشیم، باید $x+a$ را n بار در خودش ضرب کنیم. دراین صورت 2^{n} جملهٔ $t_{1}t_{2}\dots t_{n}$ به‌دست می‌آید که، درآن، هریك از عامل‌های

$t_۱$، $t_۲$، ...، $t_{n-۱}$، t_n، یا x است و یا a. بین همهٔ این جمله‌ها، تعداد جمله‌هایی که، درهرکدام آن‌ها، m بار با a و $n-m$ بار با x برخورد می‌کنیم، برابر است با تعداد روش‌های انتخاب m عامل از n عامل $t_۱$، $t_۲$، ...، t_n، به‌نحوی که‌هرکدام ازاین‌عامل‌ها برابر a باشد، یعنی C_n^m. به‌این ترتیب، بین ۲^n جمله:

تعداد جمله‌های $x^n a^۰$ برابراست با $C_n^۰$؛

تعداد جمله‌های $x^{n-۱} a^۱$ برابراست با $C_n^۱$؛

. . . .

تعداد جمله‌های $x^۰ a^n$ برابراست با C_n^n.

درنتیجه، به‌این دستورمی‌رسیم:

$$(x+a)^n = C_n^۰ x^n a^۰ + C_n^۱ x^{n-۱} a^۱ + \dots + C_n^m x^{n-m} a^m + \dots + C_n^n x^۰ a^n$$

این برابری را دوجمله‌ای نیوتون، عبارت‌سمت‌راست را (درمجموع) بسط‌دوجمله‌ای، وضریب‌های $C_n^۰$، $C_n^۱$، $C_n^۲$، ...، C_n^n را ضریب‌های بسط دوجمله‌ای گویند.

ویژگی‌های بسط دوجمله‌ای

۱. تعداد همهٔ جمله‌های بسط، یك واحد از توان دوجمله‌ای بیشتر، یعنی برابراست با $n+۱$.

۲. درهر جمله، مجموع نماهای x و a برابراست با n: $(n-m)+m=n$.

۳. جملهٔ عمومی بسط (که آن را با $T_{m+۱}$ نشان‌می‌دهیم)، به‌این‌صورت است:

$$T_{m+۱} = C_n^m x^{n-m} a^m, \quad m = ۰, ۱, \dots, n$$

T به‌معنای جمله‌ای از بسط، واندیس $m+۱$ به‌معنای ردیف جمله، با درنظر گرفتن ازچپ به راست، می‌باشند. مناسب بودن جملهٔ $(m+۱)$ ام، به‌عنوان جملهٔ عمومی، به‌این علت است که، با تغییر m از ۰ تا n، همهٔ جمله‌های بسط به‌دست می‌آید و، درضمن، در جملهٔ $(m+۱)$ ام بسط، عدد m همان توان جملهٔ اول (عدد a) و، با توجه به ویژگی ۲، عدد $n-m$ توان جملهٔ دوم (یعنی عدد x) است. به‌این‌ترتیب

جملهٔ‌اول به‌ازای $m=۰$ به‌دست‌می‌آید: $T_۱=T_{۰+۱}=C_n^۰x^{n-۰}a^۰$؛
جملهٔ دوم به‌ازای $m=۱$ به‌دست می‌آید $T_۲=T_{۱+۱}=C_n^۱x^{n-۱}a^۱$
و غیره؛

جمله k ام $(m=k-۱)$: $T_k=C_n^{k-۱}x^{n-(k-۱)}a^{k-۱}$ وغیره؛
جملهٔ n ام $(m=n-۱)$: $T_n=C_n^{n-۱}x^{n-(n-۱)}a^{n-۱}$؛
جملهٔ $(n+۱)$ ام $(m=n)$: $T_{n+۱}=C_n^nx^{n-n}a^n$.

۴. ضریب‌های دوجمله‌ای از بسط، که از دوطرف به‌یك فاصله‌اند، باهم برابرند:

$$C_n^m=C_n^{n-m},\quad m=۰, ۱, \dots, n$$

ازآنجاکه

$$C_n^۰=C_n^n=۱,\ C_n^{n-۱}=C_n^۱=n,\ C_n^{n-۲}=C_n^۲=\frac{n(n-۱)}{۲},\dots$$

بنابراین، دستور بسط دوجمله‌ای را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$(x+a)^n=x^n+nx^{n-۱}a+\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}x^{n-۲}a^۲+\dots$$

$$\dots+\frac{n(n-۱)\dots(n-(m-۱))}{۱\times۲\times۳\times\dots\times(m-۱)m}x^{n-m}a^m+\dots+nxa^{n-۱}+a^n$$

۵. هر ضریب بسط دوجمله‌ای C_n^m، با آغاز از جملهٔ دوم، برابراست با ضریب جملهٔ قبل ضرب درکسر $\frac{n-(m-۱)}{m}$، یعنی

$$C_n^m=C_n^{m-۱}.\frac{n-(m-۱)}{m},\quad m=۱, ۲, \dots, n$$

در واقع، داریم:

$$C_n^m=\frac{n!}{n!(n-m)!}=\frac{n!(n-(m-۱))}{(m-۱)!m(n-m)!(n-(m-۱))}=$$

$$=\frac{n!}{(m-۱)!\,(n-(m-۱))!}.\frac{n-(m-۱)}{m}=C_n^{m-۱}.\frac{n-(m-۱)}{m}$$

۶. الف) اگر نمای دو جمله‌ای عددی زوج باشد: $n=۲l$، آن‌وقت

تعداد جمله‌های بسط برابر $۲l+۱$ می‌شود و، درضمن، ضریب‌های دوجمله‌ای در $(l+۱)$ جملهٔ اول بسط، مرتباً ترقی می‌کنند:

$$C_{۲l}^{۰}<C_{۲l}^{۱}<C_{۲l}^{۲}<\dots<C_{۲l}^{l-۱}<C_{۲l}^{l}$$

و با توجه به قانون تقارن، ضریب‌های دوجمله‌ای در $(l+۱)$ جملهٔ آخر نزولی‌اند:

$$C_{۲l}^{l}>C_{۲l}^{l+۱}>C_{۲l}^{l+۲}>\dots>C_{۲l}^{۲l-۱}>C_{۲l}^{۲l}$$

به این ترتیب، اگر $n=۲l$، آن‌وقت $C_{۲l}^{l}$، بزرگترین ضریب در بسط دوجمله‌ای است.

ب) اگر نمای دوجمله‌ای، عددی فرد باشد: $n=۲p+۱$، آن‌وقت تعداد جمله‌های بسط برابر $۲p+۲$ می‌شود و، درضمن، ضریب‌های $p+۱$ جمله نخستین بسط، صعودی‌اند.

$$C_{۲p+۱}^{۰}<C_{۲p+۱}^{۱}<C_{۲p+۱}^{۲}<\dots<C_{۲p+۱}^{p-۱}<C_{۲p+۱}^{p}$$

و با توجه به تقارن، ضریب‌های $p+۱$ جملهٔ آخر نزولی‌اند:

$$C_{۲p+۱}^{p+۱}>C_{۲p+۱}^{p+۲}>C_{۲p+۱}^{p+۳}>\dots>C_{۲p+۱}^{۲p}>C_{۲p+۱}^{۲p+۱}$$

بنابراین، اگر $n=۲p+۱$، آن‌وقت دوجمله از بسط، دارای بزرگترین ضریب هستند: $C_{۲p+۱}^{p}$ و $C_{۲p+۱}^{p+۱}$ و درضمن $C_{۲p+۱}^{p}=C_{۲p+۱}^{p+۱}$.

از خواننده می‌خواهیم، با توجه به برابری $C_n^m=\frac{n-(m-۱)}{m}.C_n^{m-۱}$، درستی گزاره‌های زیر را مورد تحقیق قرار دهد:

۱) برای هر عدد درست k، با شرط $۰\leqslant k<\frac{n+۱}{۲}$، داریم:

$$C_n^k>C_n^{k-۱}$$

۲) برای هر عدد درست k، با شرط $\frac{n+۱}{۲}<k\leqslant n$، داریم:

$$C_n^k<C_n^{k-۱}$$

۷. مجموع همهٔ ضریب‌های بسط دوجمله‌ای، برابر است با ۲^n.

در واقع، اگر در دستور بسط دوجمله‌ای $x=۱$ و $a=۱$ قراردهیم، داریم:

$$۲^n=(۱+۱)^n=C_n^۰+C_n^۱+\cdots+C_n^m+\cdots+C_n^n$$

۸. مجموع ضریب‌های جمله‌هایی از بسط دوجمله‌ای که در ردیف فرد قرار دارند، برابر است با مجموع ضریب‌های جمله‌های ردیف زوج و، درضمن، برابر $۲^{n-۱}$، یعنی

$$C_n^۰+C_n^۲+C_n^۴+\cdots=C_n^۱+C_n^۳+C_n^۵+\cdots=۲^{n-۱}$$

درواقع، اگر تفاضل $x-a$ را به‌صورت $x+(-a)$ درنظر بگیریم، داریم:

$$(x-a)^n=C_n^۰x^n-C_n^۱x^{n-۱}a+\cdots+(-۱)^mC_n^mx^{n-m}a^m+\cdots$$
$$\cdots+(-۱)^nC_n^na^n$$

اگر در این رابطه قرار دهیم $x=۱$ و $a=۱$، به‌دست می‌آید:

$$۰=(C_n^۰+C_n^۲+C_n^۴+\cdots)-(C_n^۱+C_n^۳+C_n^۵+\cdots)$$

که از آن‌جا، و با توجه به‌آن، ویژگی ۸ نتیجه می‌شود.

مثال ۳۳. ثابت کنید، برای هر $b>۱$ و هر عدد طبیعی $n>۱$، نابرابری برنولی برقرار است:

$$b^n>۱+n(b-۱)$$

اثبات. اگر $t=b-۱$ بگیریم، آن وقت $t>۰$ و $b=۱+t$. حکم قضیه را می‌توان به‌این ترتیب تنظیم کرد: برای هر مقدار مثبت t و هر عدد طبیعی $n>۱$ داریم:

$$(۱+t)^n>۱+nt$$

در واقع، بنابر دستور بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(۱+t)^n=۱+nt+\frac{n(n-۱)}{۲}t^۲+\cdots+C_n^mt^m+\cdots+C_n^nt^n$$

چون بنابر شرط $t>۰$، بنابراین در این بسط، همهٔ جمله‌ها مثبت‌اند. چون $n\geqslant ۲$، در نتیجه دست‌کم سه‌جمله در این بسط وجود دارد، یعنی

$$(۱+t)^n\geqslant ۱+nt+\frac{n(n-۱)}{۲}t^۲>۱+nt$$

نابرابری برنولی ثابت شد.

با استفاده از نابرابری برنولی، مثلاً به‌دست می‌آید:

$$(۱+۰/۰۳)^{۱۰۰۰}>۱+۱۰۰۰\times ۰/۰۳>۳۰$$

مثال ۳۴. ثابت کنید، برای هر عدد مثبت $b<۱$ و هر عدد طبیعی $n>۱$ داریم:

$$b^n<\frac{۱}{n(۱-b)}$$

اثبات. بنابر شرط $۰<b<۱$، بنابراین $\frac{۱}{b}>۱$. با توجه به‌نابرابری برنولی داریم:

$$\left(\frac{۱}{b}\right)^n>۱+n\left(\frac{۱}{b}-۱\right)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{b^n}>۱+n\left(\frac{۱}{b}-۱\right)>n\left(\frac{۱}{b}-۱\right)=n.\frac{۱}{b}(۱-b)>n(۱-b)$$

در نابرابری $\frac{۱}{b^n}>n(۱-b)$، هردوطرف مثبت‌است؛ بنابراین با نابرابری زیر هم‌ارز است

$$b^n<\frac{۱}{n(۱-b)}$$

مثلاً، با توجه به‌نابرابری مثال ۳۴، داریم:

$$(۱-۰/۰۱)^{۱۰۰۰}<\frac{۱}{۱۰۰۰\times ۰/۰۱}=۰/۱$$

مثال ۳۵. این مجموع را محاسبه‌کنید:

$$C_۵^۰+۲C_۵^۱+۲^۲C_۵^۲+۲^۳C_۵^۳+۲^۴C_۵^۴+۲^۵C_۵^۵$$

حل. با توجه به‌دستور بسط دوجمله‌ای، برای هر x داریم:

$$(x+۲)^۵=C_۵^۰x^۵+C_۵^۱x^۴.۲+C_۵^۲x^۳.۲^۲+C_۵^۳x^۲.۲^۳+C_۵^۴x.۲^۴+C_۵^۵۲^۵$$

که اگر درآن $x=۱$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$(۱+۲)^۵=C_۵^۰+C_۵^۱.۲+C_۵^۲.۲^۲+C_۵^۳.۲^۳+C_۵^۴.۲^۴+C_۵^۵.۲^۵$$

بنابراین، مجموع مورد نظر برابر است با $۳^{۵}$، یعنی ۲۴۳.

مثال ۳۶. مجموع جبری ضریب‌ها را در چندجمله‌ای که از بسط دوجمله‌ای زیر نسبت به x به‌دست می‌آید، پیدا کنید:

$$(۳x-۴)^{۱۷}$$

حل. در بسط دوجمله‌ای به‌یك عبارت درجهٔ ۱۷ می‌رسیم که برحسب توان‌های نزولی x منظم شده است. در این چندجمله‌ای در ردیف‌های فرد با ضریب‌های مثبت و در ردیف‌های زوج با ضریب‌های منفی سروکارداریم:

$$(۳x-۴)^{۱۷}=C_{۱۷}^{۰}۳^{۱۷}x^{۱۷}-C_{۱۷}^{۱}۳^{۱۶}x^{۱۶}.۴+\dots-C_{۱۷}^{۱۷}۴^{۱۷}$$

این برابری یك‌اتحاد است و، بنابراین، به‌ازای هرمقدار x، منجمله $x=۱$، درست‌است. به‌ازای $x=۱$، سمت‌چپ این اتحاد برابر $۱-$ و سمت‌راست آن برابر مجموع جبری ضریب‌ها می‌شود: یعنی مجموع جبری ضریب‌های این چندجمله‌ای برابر است با $۱-$.

دستور $T_{m+۱}=C_{n}^{m}x^{n-m}a^{m}$ برای جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای $(x+a)^{n}$، این امکان را به‌ما می‌دهد که، بدون پیداکردن همهٔ جمله‌های بسط هر جمله یا هر چندجملهٔ آن‌را بنویسیم.

مثال ۳۷. جملهٔ سیزدهم را در بسط این دوجمله‌ای پیدا کنید:

$$(\sqrt[۳]{۳}+\sqrt{۲})^{۱۵}$$

حل. با توجه به‌جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای داریم:

$$T_{۱۳}=T_{۱۲+۱}=C_{۱۵}^{۱۲}(\sqrt[۳]{۳})^{۳}(\sqrt{۲})^{۱۲}=C_{۱۵}^{۳}.۳.۲^{۶}=۸۷۳۶۰$$

مثال ۳۸. کدام جمله از بسط دوجمله‌ای $\left(\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{x}\right)^{۱۶}$ مستقل از x است؟

حل. برای جملهٔ عمومی بسط این دوجمله‌ای داریم:

$$T_{m+۱}=C_{۱۶}^{m}(\sqrt[۳]{x})^{۱۶-m}\left(\frac{۱}{x}\right)^{m}=C_{۱۶}^{m}x^{\frac{۱۶-m}{۳}}.x^{-m}=C_{۱۶}^{m}x^{\frac{۱۶-۴m}{۳}}$$

درجمله‌ای که به x بستگی نداشته‌باشد، باید برای توان x، عدد صفر به‌دست آید، یعنی

$$\frac{۱۶-۴m}{۳}=۰ \Rightarrow m=۴$$

به‌این ترتیب، جملهٔ پنجم بسط این دوجمله‌ای، مستقل از x است.

مثال ۳۹. جملهٔ پنجم بسط دوجمله‌ای

$$\left(\sqrt{a}+\frac{۱}{\sqrt{۳۵}}\right)^n$$

را پیدا کنید، به‌شرطی که نسبت ضریب‌های دوجمله‌ای، چهارم و سوم، برابر $\frac{۱۰}{۳}$ باشد.

حل. ضریب دوجمله‌ای، در جملهٔ چهارم برابر $C_n^۳$ و در جملهٔ سوم برابر $C_n^۲$ است و بنابر شرط مساله، باید داشته باشیم: $C_n^۳:C_n^۲=۱۰:۳$؛ یعنی

$$۳\times\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}=۱۰\times\frac{n(n-۱)}{۱\times۲}\Rightarrow n=۱۲$$

با در دست داشتن n، مقدار جملهٔ پنجم محاسبه می‌شود:

$$T_۵=T_{۴+۱}=C_{۱۲}^{۴}(\sqrt{a})^۸\left(\frac{۱}{\sqrt{۳a}}\right)^۴=۵۵a^۲$$

مثال ۴۰. مجموع ضریب‌های دوجمله‌ای زیر را که در ردیف فرد قرار دارند پیدا کنید:

$$(x+y)^n$$

به‌شرطی که ضریب دوجمله‌ای در جملهٔ سوم، ۹ واحد بیشتر از ضریب دوجمله‌ای در جملهٔ دوم باشد.

حل. با توجه به‌شرط مساله، باید داشته باشیم:

$$C_n^۲-C_n^۱=۹ \Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}-n=۹ \Rightarrow n=۶$$

و با توجه به‌ویژگی ۸ بسط دوجمله‌ای داریم:

$$C_۶^۰+C_۶^۴+C_۶^۶=۲^{۶-۱}=۲^۵=۳۲$$

مثال ۴۱. مطلوب است جملهٔ هفتم از بسط دوجمله‌ای

$$\left(a^{۲}\sqrt{a}+\frac{\sqrt[۳]{a}}{a}\right)^{n}$$

به‌شرطی که ضریب دوجمله‌ای در جملهٔ سوم، برابر ۳۶ باشد.

حل. بنابر شرط مساله باید داشته باشیم:

$$C_{n}^{۲}=۳۶ \Rightarrow \frac{۱}{۲}n(n-۱)=۳۶ \Rightarrow n=۹$$

اکنون، جملهٔ هفتم بسط دوجمله‌ای را پیدا می کنیم:

$$T_{۷}=C_{۹}^{۶}(a^{۲}\sqrt{a})^{۳}\left(\frac{\sqrt[۳]{a}}{a}\right)^{۶}=۸۴a^{۳}\sqrt{a}$$

مثال ۴۲. در بسط دوجمله‌ای

$$(\sqrt[۵]{۳}+\sqrt[۳]{۷})^{۳۶}$$

چند جمله از بسط، عددهایی درست‌اند؟

حل. برای جملهٔ عمومی بسط داریم:

$$T_{m+۱}=C_{۳۶}^{m}(\sqrt[۵]{۳})^{۳۶-m}.(\sqrt[۳]{۷})^{m}=C_{۳۶}^{m}.۳^{\frac{۳۶-m}{۵}}.۷^{\frac{m}{۳}}$$

$C_{۳۶}^{m}$ عددی درست است $(۰\leqslant m\leqslant ۳۶)$. بنابراین، برای این که این جمله از بسط، عددی درست باشد، باید $\frac{۳۶-m}{۵}$ و $\frac{m}{۳}$ عددهایی درست وغیرمنفی باشند.

$m=۳p$ می گیریم $(p\in\mathrm{N}$ و $۰\leqslant p\leqslant ۱۲)$. اکنون $۳p$ را به جای m در $\frac{۳۶-m}{۵}$ قرارمی‌دهیم، به‌دست می‌آید $\frac{۳(۱۲-p)}{۵}$، که باید عددی طبیعی یا برابر صفر باشد. به‌این ترتیب $۱۲-p$ می‌تواندبرابر یکی ازعددهای ۰، ۵ یا ۱۰ بشود کــه، دراین صورت، برای p به‌دست می‌آید: $p=۱۲$، $p=۷$، $p=۲$، مقدارهای نظیر m چنین می‌شوند:

$$m=۳۶،\quad m=۲۱،\quad m=۶$$

بنابراین، جمله‌هــای $T_{۷}$، $T_{۲۲}$ و $T_{۳۷}$، تنها همین جمله‌هــا، از بسط دوجمله‌ای، عددهایی درست‌اند.

مثال ۴۳. در بسط دوجمله‌ای

$$\left(\sqrt{y}+\frac{۱}{۲\sqrt[۴]{y}}\right)^{n}$$

سه‌ضریب اول، تشکیل یك تصاعد حسابی داده‌اند. همهٔ جمله‌هایی را پیدا کنید که، درهریك ازآن‌ها، توان y عددی طبیعی باشد.

حل. بنابر دستور مربوط به‌جملهٔ عمومی داریم:

$$T_{۱}=C_{n}^{۰}(\sqrt{y})^{n}=۱\times y^{\frac{n}{۲}};$$

$$T_{۲}=C_{n}^{۱}(\sqrt{y})^{n-۱}\left(\frac{۱}{۲\sqrt[۴]{y}}\right)=\frac{n}{۲}\cdot y^{\frac{۲n-۳}{۴}};$$

$$T_{۳}=C_{n}^{۲}(\sqrt{y})^{n-۲}\left(\frac{۱}{۲\sqrt[۴]{y}}\right)^{۲}=\frac{n(n-۱)}{۸}\cdot y^{\frac{n-۳}{۲}}$$

بنابر شرط مساله، باید عددهای ۱، $\frac{n}{۲}$ و $\frac{n(n-۱)}{۸}$ به تصاعد حسابی باشند. بسته به‌این که کدام یك ازاین سه‌عدد، جملهٔ دوم تصاعد باشد، سه‌حالت پیش می‌آید:

الف) عدد ۱، جملهٔ دوم تصاعد است. داریم:

$$۲\times ۱=\frac{۱}{۲}n+\frac{۱}{۸}n(n-۱)\Rightarrow n^{۲}+۳n-۱۶=۰$$

n عددی طبیعی است و $n\geqslant ۲$ (زیرا، باید دست‌کم سه جمله داشته باشیم) ولی معادلهٔ درجهٔ دوم اخیر، دارای ریشه‌های گنگ است؛ دراین حالت، مساله جواب ندارد.

ب) $\frac{۱}{۸}n(n-۱)$ را جملهٔ دوم تصاعد می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$$۲\times\frac{۱}{۸}n(n-۱)=۱+\frac{۱}{۲}n\Rightarrow(n-۴)(n+۱)=۰\Rightarrow n=۴$$

دراین حالت، جملهٔ عمومی بسط دوجمله‌ای چنین می‌شود:

$$T_{m+۱}=C_{۴}^{m}\left(y^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۴-m}\left(\frac{۱}{۲}y^{-\frac{۱}{۴}}\right)^{m}=\frac{C_{۴}^{m}}{۲^{m}}\cdot y^{\frac{۸-۳m}{۴}}$$

بنا بر شرط مساله $\frac{۱}{۴}(۸-۳m)>۰$، یعنی $m<\frac{۸}{۳}$ و، با توجه به‌این که $۰\leqslant m\leqslant ۴$ و $m\in\mathbf{N}$ به‌دست می‌آید: $m=۰$، $m=۱$ و $m=۲$.

بـه‌ازای $m=۱$ و $m=۲$، تـوان y، عددی طبیعی نمی‌شود، ولی به‌ازای $m=۰$، y توانی برابر ۲ پیدا می‌کند.

به‌ایـن تـرتیب، درحالت ب)، نمای دوجمله‌ای $n=۴$ و تنها یکی از جمله‌های بسط، نسبت به y، گویاست: $T_۱=y^۲$.

ج) جملهٔ دوم تصاعد را $\frac{n}{۲}$ می‌گیریم. دراین‌صورت

$$۲\times\frac{n}{۲}=۱+\frac{۱}{۸}n(n-۱)\Rightarrow(n-۸)(n-۱)=۰\Rightarrow n=۸$$

($n=۱$ به‌این جهت قابل قبول نیست که، بسط دوجمله‌ای باید دست‌کم سه جمله داشته باشد: $n\geqslant ۲$). دراین حالت، جملهٔ عمومی بسط چنین است:

$$T_{m+۱}=C_۸^m\left(y^{\frac{۱}{۲}}\right)^{۸-m}\left(\frac{۱}{۲}y^{-\frac{۱}{۴}}\right)^m=\frac{C_۸^m}{۲^m}y^{\frac{۱۶-۳m}{۴}}$$

با توجه به‌شرط $\frac{۱}{۴}(۱۶-۳m)>۰$ به‌دست می‌آید $m<\frac{۱۶}{۳}$؛ یعنـی مقدار m را باید دربین عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ جست‌وجو کرد.

اگر m را برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، یا ۵ بگیریم، برای نمای y عددی طبیعی به دست نمی‌آیـد؛ ولی به‌ازای $m=۰$ داریم $T_۱=y^۴$ و بـه‌ازای $m=۴$؛ $T_۵=\frac{۳۵}{۸}y$.

به‌این ترتیب، مساله‌دردوحالت مختلف جواب دارد:

۱) اگر $n=۴$، آن‌وقت $T_۱=y^۲$ جواب مساله است؛

۲) اگر $n=۸$، آن‌وقت $T_۱=y^۴$ یا $T_۵=\frac{۳۵}{۸}y$ جواب مساله است.

تا این‌جا با آرایش‌ها یا هم‌گیری‌هایی سروکار داشتیم که، درهرکدام از آن‌ها، هریك از n عنصر مختلف، تنها یك‌بار مورد استفاده قرار می‌گرفت

می‌توان آرایش‌های باتکرار را هم موردبررسی قرارداد، یعنی آرایش‌هایی که، درهر کدام از آن‌ها، هریك از n عنصرمختلف، بتواند بیش از یك‌بار واردشود.

ترتیب‌های n عنصر را که، درهر کدام از آن‌ها، m عنصرشرکت داشته باشندو، درضمن، هرعنصر بتواند درهرترتیب، هرچندبار (که‌البته، نمی‌تواند بیش از m بارباشد) تکرار شود، ترتیب‌های باتکرار m تایی از n عنصر می‌نامند. مثلاً، عددهای ۴۴۴، ۵۴۴، ۴۵۴، ۴۴۵، ۵۵۴، ۵۴۵، ۴۵۵ و ۵۵۵، عبارتند از ترتیب‌های باتکرار سه‌تایی ازدوعنصر.

مسالهٔ مربوط به تعداد ترتیب‌های باتکرار. به چند طریق می‌توان m شیء از n شیء موجود را در m مکان مختلف جا داد، به‌شرطی که هریك از آن‌ها بتواند هرچندبار (ونه بیشتر از m بار) تکرار شود؟ تعداد این‌طریق‌ها را با $A_n^m(\mathrm{r})$ نشان می‌دهند* (ومی‌خوانند: «تعداد ترتیب‌های با تکرار mتایی از n عنصر»).

برای هرعدد طبیعی n و هرعدد طبیعی m داریم:

$$A_n^m(\mathrm{r})=n^m$$

یعنی، تعداد همهٔ ترتیب‌های باتکرار m تایی از n عنصر، برابر است با n^m.

اثبات را باروش استقرای ریاضی، روی m، می‌دهیم.

فرض کنید $n=1$. درهر مکان می‌توان یکی از n عنصر مختلف را جا داد و، طبیعی است که، دراین حالت، تکرار معنی ندارد (هرحرف می‌تواند تنها یکبار «تکرار» شود؛ بنابراین، n امکان وجود دارد: $A_n^1(\mathrm{r})=n=n^1$. گزارهٔ بالا، به‌ازای $m=1$ درست است.

فرض می‌کنیم، به‌ازای $m=k$، برابری زیر برقرار باشد:

$$A_n^k(\mathrm{r})=n^k$$

$m=k+1$ می‌گیریم. بنابرفرض، n^k امکان برای جادادن k شیء از بین n شیء مختلف در k مکان مختلف وجود دارد، به‌نحوی که هریك از آن‌ها می‌توانند هرچندبار (که از k بیشتر نیست) تکرارشود. برای هریك ازاین

---

*) حرف r که درداخل پرانتز گذاشته شده است، حرف اول واژهٔ انگلیسی *repeat* به‌معنای «تکرارکردن» است.

امکان‌ها، درجای باقی‌ماندهٔ ($k+۱$) ام می‌توان هریك ازn شیء را قرارداد، یعنی برای هر n^k امکان قبلی، n امکان جدید وجود دارد. به‌این ترتیب، برای جا دادن $k+۱$ شیء از n شیء در $k+۱$ مکان مختلف، به‌نحوی که‌هرشیء، امکان تکرار تا $k+۱$ بار را داشته باشد، می‌توان از $n^k\cdot n$، یعنی $n^{k+۱}$ امکان استفاده کرد، یعنی

$$A_n^{k+۱}(\mathrm{r})=n^{k+۱}$$

به‌این ترتیب، دستور $A_n^m(\mathrm{r})=n^m$ با روش استقرای ریاضی ثابت شد. درضمن بنا برتعریف، قبول می‌کنند: $A_n^۰(\mathrm{r})=۱$.

مثال ۴۴. شمارهٔ هر تلفن شامل ۷ رقم است. چند شمارهٔ تلفن، تنها با رقم‌های ۲، ۳، ۵ و ۷ وجود دارد؟

حل. این مساله، عبارت است ازمحاسبهٔ تعداد ترتیب‌های هفت‌تایی با تکرار، ازچهارعنصر مختلف.

$$A_۴^۷(\mathrm{r})=۴^۷=۱۶\times۱۶\times۱۶\times۴=۲۵۶\times۶۴=۱۶۳۸۴$$

مثال ۴۵. به‌چند طریق می‌توان هشت مسافر را درسه واگن جا داد؟

حل. این مساله هم، به‌روشنی، به‌مسالهٔ مربوط به‌تعداد ترتیب‌های با تکرار مربوط می‌شود:

$$A_۳^۸(\mathrm{r})=۳^۸=۹\times۹\times۹\times۹=۸۱\times۸۱=۶۵۶۱$$

مثال ۴۶. هرحرف الفبا، درنمادگزاری «مورس» با نقطه‌ها وخط‌ها مشخص می‌شود. اگر هر حرف بیش ازپنج نماد (شامل نقطه وخط) نداشته باشد، چند حرف الفبا را می‌توان نشان داد؟

حل. تعداد همهٔ حرف‌هایی که تنها شامل یك نماد باشند، برابراست با

$$A_۲^۱(\mathrm{r})=۲^۱=۲$$

تعداد همهٔ حرف‌هایی که، شامل دونماد باشند، برابراست با

$$A_۲^۲(\mathrm{r})=۲^۲=۴$$

به‌همین ترتیب، تعدادحرف‌های شامل ۳، ۴ یا ۵ نماد، به‌ترتیب، چنین‌است:

$$A_۲^۳(\mathrm{r})=۲^۳=۸،\quad A_۲^۴(\mathrm{r})=۲^۴=۱۶،\quad A_۲^۵(\mathrm{r})=۲^۵=۳۲$$

درنتیجه، تعدادکل این‌گونه حرف‌ها، برابر ۶۲ می‌شود.

مثال ۴۷. می‌دانیم مجموعهٔ $X=\{x_{۱}, x_{۲}, \ldots, x_m\}$ که دارای m عضو مختلف است، حوزهٔ تعریف (دامنهٔ) یك تابع یك ارزشی را معین می‌کند؛ همچنین مقدارهای این تابع (برد آن)، زیرمجموعه‌ای ازمجموعهٔ $Y=\{y_{۱}, y_{۲}, \ldots, y_n\}$ است که از n عضو مختلف تشکیل شده است. چند تابع مختلف وجود دارد که دامنه‌ای برابر X و بردی برابر زیرمجموعه‌ای از Y داشته باشد؟

حل. بنا بر تعریف تابع یك ارزشی، هر عضو مجموعهٔ X متناظر است با عضو منحصر به‌فردی از مجموعهٔ Y، ولی ممکن است این وضع پیش آید که، عضوهای مختلفی از مجموعهٔ X، متناظر با یکی ازعضوهای مجموعهٔ Y باشند. بنا براین، این مساله، عبارت است ازمسالهٔ مربوط به توزیع m عضو دلخواه از n عضو مختلف مجموعهٔ Y بین m عضو مجموعهٔ X، به‌نحوی که هریك ازعضوهای مجموعهٔ Y، می‌توانند تکراری هم باشند. چون

$$A_n^m(\mathrm{r})=n^m$$

بنا براین، تعداد همهٔ تابع‌ها با دامنهٔ X و برد زیرمجموعه‌ای از Y، برابر است با n^m.

مثال ۴۸. واژه‌ای را k حرفی می‌نامیم، وقتی که از k حرف تشکیل شده باشد. چند واژهٔ مختلف ۱۰ حرفی، می‌توان با دو حرف a و b درست کرد؟

حل. باید تعداد امکان‌هایی را پیدا کنیم که بتوان ۱۰ حرف را که از دو حرف a و b انتخاب شده‌اند، در ۱۰ مکان مختلف قرارداد. روشن است که هریك ازحرف‌های a یا b می‌توانند تا حداکثر ۱۰ بار تکرار شوند. چون

$$A_{۲}^{۱۰}(\mathrm{r})=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

بنا براین، با دو حرف a و b، می‌توان ۱۰۲۴ واژهٔ ۱۰ حرفی ساخت.

تبدیل‌های n شیء که، در هر کدام از آن‌ها، $n_{۱}$ شیء یکسان ازیك نوع، $n_{۲}$ شیء یکسان از نوع دوم، ...، n_k شیء یکسان از نوع k ام وارد شده باشند، با شرط $n_{۱}+n_{۲}+\ldots+n_k=n$، تبدیل‌های با تکرار از n عنصر نامیده می‌شوند. مثلاً، عددهای ۴۴۵۵، ۵۵۴۴، ۵۴۵۴، ۴۵۴۵، ۴۵۵۴، ۵۴۴۵،

تبدیل‌های با تکرار رقم‌های ۴ و ۵ اند که، هر کدام از آن‌ها، دوبار انتخاب شده‌اند.

مسالهٔ مربوط به‌تعداد تبدیل‌های باتکرار. بــه چند طریق می‌توان n شیء از k نــوع مختلف را در n مکان مختلف جــا داد، به‌شرطی که ازاین k نوع، به‌ترتیب $n_۱$، $n_۲$، $n_۳$، ...، n_k شیء یکسان داشته باشیم؟

تعداد همهٔ این‌گونه تبدیل‌های با تکرار را، معمولاً با نماد

$$C_n(n_۱, n_۲, \ldots, n_k)$$

نشان می‌دهند و آن را می‌توان به‌کمک دستور زیر به‌دست آورد:

$$C_n(n_۱, n_۲, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_۱! n_۲! \ldots n_k!}$$

از بین همهٔ تبدیل‌های با تکرار $C_n(n_۱, n_۲, \ldots, n_k)$، یکی را انتخاب می‌کنیم. اگرعنصرهای نوع اول موجود در آن را مختلف فرض کنیم، آن‌وقت به تعداد $n_۱!$ تبدیل خواهد داشت؛ سپس اگر عنصرهای نوع دوم موجود در آن را مختلف بگیریم، تعداد همهٔ تبدیــل‌هــای ممکن آن، $n_۲!$ می‌شود؛ ...؛ وبالاخره اگــرعنصرهای نــوع k ام آن را مختلف به‌حساب آوریم، با $n_k!$ تبدیل سروکار پیدا خواهیم کرد. به‌این ترتیب، اگر درهمهٔ نوع‌ها، عنصرها را مختلف فرض کنیم، تعداد تبدیل‌ها $(n_۱! n_۲! \ldots n_k!)$ برابر می‌شود. از آن‌جا که‌تعداد کل تبدیل‌های n عنصر، وقتی همهٔ عنصرها باهم اختلاف داشته‌باشند، برابر $n!$ است، بنا براین باید داشته باشیم:

$$n_۱! n_۲! \ldots n_k! C_n(n_۱, n_۲, \ldots, n_k) = n!$$

که از آن‌جا، درستی دستور مربوط به‌تبدیل‌های با تکرار، به‌دست می‌آید.

مثال ۴۹. دو لامپ سبز و چهار لامپ قرمز را، به‌چند طریق می‌توان در ردیف‌هم قرار داد؟

حل. به $C_۶(۲, ۴) = \frac{۶!}{۲!۴!} = ۱۵$ طریق.

مثال ۵۰. تعداد همهٔ عددهای هفت رقمی را پیدا کنید که، درهرکدام از آن‌ها، سه بار با رقم ۶ و چهار بار با رقم ۵ برخورد کنیم.

حل. $C_{۷}(۳, ۴)=\frac{۷!}{۳!۴!}=۳۵$ عدد.

مثال ۵۱. به‌چندطریق می‌توان حرف‌های موجود در واژه را به‌ردیف نوشت:

الف) دارا؛ ب) آبانگان؛ ج) آبراکادابرا؟

حل. الف) $C_{۴}(۲, ۱, ۱)=\frac{۴!}{۲!۱!۱!}=۱۲$؛

ب) $C_{۷}(۳, ۲, ۱, ۱)=\frac{۷!}{۳!۲!۱!۱!}=۴۲۰$؛

ج) $C_{۱۱}(۵, ۲, ۲, ۱, ۱)=\frac{۱۱!}{۵!۲!۲!۱!۱!}=۸۳۱۶۰$.

مثال ۵۲. به‌چند طریق می‌توان n شیء مختلف را به k گروه به‌نحوی تقسیم کرد که، در گروه اول $n_۱$ شیء مختلف، در گروه دوم $n_۲$ شی مختلف، ...، در گروه kام n_k شیء مختلف وجود داشته باشد؛ درضمن درهیچ دو گروهی اشیاء یکسان پیدا نشود، یعنی

$$n_۱+n_۲+\dots+n_k=n$$

حل. تقسیم n شیء مختلف به k گروه موردنظر را، می‌توان به‌این ترتیب انجام داد: از n شیء مختلف، $n_۱$ شیء را برای گروه اول انتخاب می‌کنیم (این انتخاب را، به $C_n^{n_۱}$ طریق می‌توان انجام داد)؛ سپس از $n-n_۱$ شیء باقی‌مانده، $n_۲$ شیء مختلف‌را برای گروه دوم انتخاب‌می‌کنیم (که به $C_{n-n_۱}^{n_۲}$ طریق ممکن‌است)؛...؛ سرانجام $n-n_۱-n_۲-\dots-n_{k-۱}$ شیء باقی‌مانده، n_k شیء را برای گروه kام انتخاب می‌کنیم (به $C_{n-n_۱-\dots-n_{k-۱}}^{n_k}$ طریق).
در این‌صورت، بنابه قانون ضرب، تعداد همهٔ روش‌های انتخاب این k گروه چنین می‌شود:

$$C_n^{n_۱}C_{n-n_۱}^{n_۲}\dots C_{n-n_۱-\dots-n_{k-۲}}^{n_{k-۱}}C_{n-n_۱-\dots-n_{k-۱}}^{n_k}=$$

$$=\frac{n!}{n_۱!(n-n_۱)!}\cdot\frac{(n-n_۱)!}{n_۲!(n-n_۱-n_۲)!}\cdot\frac{(n-n_۱-n_۲)!}{n_۳!(n-n_۱-n_۲-n_۳)!}\dots$$

$$\dots\frac{(n-n_{۱}-n_{۲}-\dots-n_{k-۱})!}{n_k!(n-n_{۱}-n_{۲}-\dots-n_k)!}=\frac{n!}{n_{۱}!n_{۲}!\dots n_k!}=$$
$$=C_n(n_{۱}؛ n_{۲}، \dots، n_k)$$

مثال ۵۳. ده نفر را می‌خواهیم به‌سه گروه به‌ترتیب ۵ نفری، ۳نفری و ۲ نفری تقسیم کنیم. این‌کار را به‌چند طریق می‌توانیم انجام دهیم؟

حل. با توجه به‌جواب مسالهٔ قبل، تعداد روش‌های تقسیم، چنین است:

$$C_{۱۰}(۲، ۳، ۵)=\frac{۱۰!}{۲!۳!۵!}=\frac{۵!\times ۶\times ۷\times ۸\times ۹\times ۱۰}{۵!\times ۲\times ۳\times ۲}=۲۵۲۰$$

مثال ۵۴. ۹ کتاب مختلف را به چند طریق می‌توان در سه قفسه قرار داد، به‌نحوی که در یکی از قفسه‌ها ۲ کتاب، در دیگری ۳ کتاب و درسومی ۴ کتاب قرار گیرد؟

حل. به $C_{۹}(۲، ۳، ۴)=\frac{۹!}{۲!۳!۴!}=۱۲۶۰$ طریق.

مثال ۵۵. هفت‌متخصص جوان برای سه‌ماموریت درنظر گرفته‌شده‌اند. اگر برای ماموریت اول یك‌نفر، برای‌ماموریت دوم دونفر و برای‌ماموریت سوم چهار نفر لازم باشد، به چند طریق می‌توان این هفت متخصص را به‌ماموریت‌های خود فرستاد؟

حل. به $C_{۷}(۱، ۲، ۴)=\frac{۷!}{۱!۲!۴!}=۱۰۵$ طریق.

مثال ۵۶. در یك آسانسور ۸ نفر سوار شده‌اند. این آسانسور در هر یك از شش‌طبقه توقف می کند. مسافران در گروه‌های یك نفری، سه‌نفری و چهار نفری از آن خارج می‌شوند. این وضع، به‌چند طریق ممکن است پیش آید، به‌شرطی که در هر طبقه، تنها یك گروه ممکن است خارج شود؛ درضمن، ردیف خروج مسافرهای یك گروه، برای ما اهمیتی ندارد.

حل. ۸ مسافر را می‌توان به گروه‌های یك. سه و چهارنفری به

$$C_{۸}(۱، ۳، ۴)=\frac{۸!}{۱!۳!۴!}=۲۸۰$$

طریق تقسیم کرد. انتخاب سه طبقه از شش طبقه را، برای خروج گروه‌ها، می‌توان به

$$C_{۶}^{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۳!\times ۴\times ۵\times ۶}{۳!\times ۲\times ۳}=۲۰$$

طریق انجام داد. بنابراین، با توجه به‌قانون ضرب، تعداد همهٔ روش‌های ممکن، برای خروج گروه‌های مسافران از آسانسور، برابر است با

$$C_{۸}(۱، ۳، ۴)\cdot C_{۶}^{۳}=۲۸۰\times ۲۰=۵۶۰۰$$

ترکیب با تکرار m به m از n عنصر، بـه آرایشی از m عنصر (بدون توجه به‌ردیف آن‌ها) گفته می‌شود که، درضمن، هر عنصر بتواند هرچند بار (و حداکثر m بار) تکرار شود. مثلاً، ترکیب‌های با تکرار دو به‌دو از سه رقم ۳، ۴ و ۵، عبارتند از

۳۳، ۴۳، ۵۳، ۴۴، ۵۴، ۵۵ و یا ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۴۴، ۴۵، ۵۵،

یعنی عدد ۴۳ و عدد ۳۴، یک ترکیب به‌حساب می‌آیند.

مسالهٔ مربوط به‌ترکیب‌های با تکرار. اگر m شیء یکسان و هرکدام از n گونهٔ مختلف در اختیار داشته باشیم، آن‌وقت، به‌چند طریق می‌توان m شیء از این $m\cdot n$ شیء انتخاب کرد؟

تعداد همهٔ این‌گونه ترکیب‌های با تکرار را، معمولاً با نماد $C_{n}^{m}(\mathrm{r})$ نشان می‌دهند که با دستور زیر قابل محاسبه است:

$$C_{n}^{m}(\mathrm{r})=\frac{(m+n-۱)!}{m!(n-۱)!}=C_{m+n-۱}^{m}$$

این دستور را، با استدلال زیر می‌توان نتیجه گرفت. عنصرها را بـا $\alpha_{۱}$، $\alpha_{۲}$، ....، α_{n} نشان می‌دهیم؛ در ایـن‌صورت، تعداد همهٔ ترکیب‌هـای با تکرار mتایی از این n عنصر، برابر است با $C_{n}^{m}(\mathrm{r})$. هریک از این ترکیب‌ها، ممکن است شامل $\alpha_{۱}$ باشد یا شامل آن نباشد. تعداد ترکیب‌های باتکراری کـه شامل $\alpha_{۱}$ نیستند، برابر است با $C_{n-۱}^{m}(\mathrm{r})$ (این، تعداد ترکیب‌های بـا تکرار از عنصرهای $\alpha_{۲}$، $\alpha_{۳}$، ....، α_{n} است).

هر یک از ترکیب‌های بـا تکرار شامل $\alpha_{۱}$ را می‌توان به این ترتیب

به‌دست آورد که، $\alpha_۱$ را، به‌ترکیب با تکرار $(m-۱)$ تایی از n عنصر اضافه کنیم؛ تعداد ترکیب‌های با تکرار $(m-۱)$ عنصر از n عنصر، برابر است با $C_{n-۱}^{m}(\mathrm{r})$.

به‌این ترتیب، به‌رابطهٔ بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$C_n^m(\mathrm{r})=C_n^{m-۱}(\mathrm{r})+C_{n-۱}^m(\mathrm{r})$$

که از آن‌جا، به‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}C_n^m(\mathrm{r})&=C_n^{m-۱}(\mathrm{r})+(C_{n-۱}^{m-۱}(\mathrm{r})+C_{n-۲}^m(\mathrm{r}))=\\&=C_n^{m-۱}(\mathrm{r})+C_{n-۱}^{m-۱}(\mathrm{r})+C_{n-۲}^{m-۱}(\mathrm{r})+C_{n-۳}^m(\mathrm{r})=\\&=\dots=C_n^{m-۱}(\mathrm{r})+C_{n-۱}^{m-۱}(\mathrm{r})+\dots+C_۲^{m-۱}(\mathrm{r})+C_۱^m(\mathrm{r})\end{aligned}$$

چون $C_n^۱(\mathrm{r})+n$ و $C_۱^m(\mathrm{r})=۱$، بنابراین به‌ازای $m=۲$ داریم:

$$\begin{aligned}C_n^۲(\mathrm{r})&=C_n^۱(\mathrm{r})+C_{n-۱}^۱(\mathrm{r})+C_{n-۲}^۱(\mathrm{r})+\dots+C_۲^۱(\mathrm{r})+C_۱^۱(\mathrm{r})=\\&=n+(n-۱)+(n-۲)+\dots+۲+۱=\\&=\frac{n(n+۱)}{۲}=C_{n+۱}^۲=\frac{(n+۱)!}{۲!(n-۱)!}=C_{۲+n-۱}^۲\end{aligned}$$

و به‌ازای $m=۳$

$$\begin{aligned}C_n^۳(\mathrm{r})&=C_n^۲(\mathrm{r})+C_{n-۱}^۲(\mathrm{r})+C_{n-۲}^۲(\mathrm{r})+\dots+C_۲^۲(\mathrm{r})+C_۱^۲(\mathrm{r})=\\&=C_{n+۱}^۲+C_n^۲+C_{n-۱}^۲+\dots+C_۳^۲+C_۲^۲\end{aligned}$$

و چون (مثال ۲۹ را ببینید):

$$C_{n+۱}^۲+C_n^۲+C_{n-۱}^۲+\dots+C_۳^۲+C_۲^۲=C_{n+۲}^۳=\frac{(n+۲)!}{۳!(n-۱)!}$$

بنابراین $C_n^۳(\mathrm{r})=\frac{(۳+n-۱)!}{۳!(n-۱)!}=C_{۳+n-۱}^۳$.

اگر استدلال را به‌همین‌ترتیب ادامه‌دهیم، در گام $(m-۱)$ام به‌دست می‌آید:

$$C_n^m(\mathrm{r})=\frac{(m+n-۱)!}{m!(n-۱)!}=C_{m+n-۱}^m=C_{m+n-۱}^{n-۱}$$

مثال ۵۷. به‌چند طریق می‌توان چهار سکه از بین چهار سکهٔ ده‌ریالی

و چهار سکهٔ پنج ریالی انتخاب کرد؟

حل. باید تعداد ترکیب‌های با تکرار چهارتایی از دو عنصر را پیدا کنیم:

$$C_{۲}^{۴}(r)=C_{۴+۲-۱}^{۴}=C_{۵}^{۴}=۵$$

یعنی چهار سکهٔ موردنظرمساله را، به‌پنج طریق می‌توان انتخاب کرد.

مثال ۵۸. درسبدی پنج‌نوع پیراشکی‌مختلف وجود دارد. به‌چندطریق می‌توان چهار پیراشکی از بین آن‌ها انتخاب کرد؟

پاسخ: $C_{۵}^{۴}(r)=C_{۴+۵-۱}^{۴}=C_{۸}^{۴}=۷۰$.

مثال ۵۹. با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، چندعدد می‌توان درست کرد، به‌نحوی که رقم‌های هر یك، به‌ترتیب غیرنزولی باشد؟

حل. این مساله، منجر به‌پیدا کردن ترکیب‌های با تکرار یك‌به‌یك، دوبه‌دو، سه‌به‌سه، چهار به‌چهار و پنج به پنج از پنج رقم می‌شود. داریم:

$$C_{۵}^{۱}(r)=C_{۵+۱-۱}^{۱}=C_{۵}^{۱}=۵;\ \ C_{۵}^{۲}(r)=C_{۶}^{۲}=۱۵;$$

$$C_{۵}^{۳}(r)=C_{۷}^{۳}=۳۵;\ \ C_{۵}^{۴}(r)=C_{۸}^{۴}=۷۰;\ \ C_{۵}^{۵}(r)=C_{۹}^{۵}=۱۲۶$$

بنابراین به‌تعداد $۱۲۶+۷۰+۳۵+۱۵+۵$، یعنی ۲۵۱ عدد وجوددارد که با شرط مساله سازگارند.

مثال ۶۰. چند مهرهٔ دومینو وجود دارد، اگر در آن‌ها، از همهٔ رقم‌ها استفاده شده باشد؟

حل. تعداد مهره‌های دومینو را، می‌توان همچون تعداد ترکیب‌های با تکرار دو ریالی از بین ده عنصر در نظر گرفت. تعداد این ترکیب‌ها، چنین است:

$$C_{۱۰}^{۲}(r)=C_{۱۱}^{۲}=\frac{۱۱!}{۲!۹!}=۵۵$$

تکلیف ۱.

۱. محاسبه کنید:

$$۱)\ ۳!،\ ۵!،\ \frac{۷!-۵!}{۴!},\ \frac{۱۰!+۸!}{۸!};\qquad ۲)\ \frac{۱۰۰!}{۹۹!}-\frac{۹۹!}{۹۸!};$$

$$۳)\ \frac{(n-۲)!}{n!},\ \left[\frac{۱}{n!}-\frac{۱}{(n+۱)!}\right]n!;\quad ۴)\ P_۴,\ A_۴^۳,\ \frac{A_۵^۲}{P_۲}+\frac{A_{۱۰}^۵}{۷P_۵};$$

$$۵)\ P_۱A_۲^۱+P_۲A_۳^۲+P_۳A_۴^۳+P_۴A_۵^۴-P_۱P_۲P_۳P_۴$$

۲. عدد طبیعی n را پیدا کنید، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$۱)\ A_n^۲=۶;\qquad ۲)\ \frac{n!-(n-۱)!}{(n+۱)!}=\frac{۱}{۶};$$

$$۳)\ P_{n+۳}=۷۲۰A_n^۵P_{n-۵};\qquad ۴)\ \frac{P_{n+۵}}{A_{n+۲}^{k+۳}P_{n-k}}=۲۴۰$$

۳. شش کتاب با مولف‌های مختلف را، به‌چند طریق می‌توان دریك قفسه کنارهم چید؟

۴. با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، چند عدد پنج‌رقمی بدون تکرار رقم‌ها می‌توان ساخت؟ چندتا ازاین عددها، مضرب پنج نیستند؟

۵. ازبین ۲۰ دانش‌آموز، به‌چند طریق‌می‌توان یك مبصر، یك مسئول کتابخانه ویك مسئول موزه برای کلاس انتخاب کرد؟

۶. ۱۰ کتاب، ۷ کتاب بامولفان مختلف و۳ جلد ازکتابی بایك مولف را درقفسه‌ای چیده‌اند. به‌چند طریق می‌توان آن‌ها را ردیف کرد، به‌نحوی که سه کتاب متعلق به‌یك مولف درردیف هم باشند؟

۷. روی هم چند عدد چهاررقمی با رقم‌های فرد وجود دارد؟

تکلیف ۲.

۱. محاسبه کنید:

$$۱)\ ۴!,\ ۷!,\ \frac{۵!+۴!}{۳!},\ \frac{۹۹!-۹۸!}{۹۷!};\quad ۲)\ \frac{۵۰!}{۴۸!}-\frac{۳۰!}{۲۸!};$$

$$۳)\ \frac{(m+۲)!}{m!},\ \left[\frac{۱}{m!}+\frac{۱}{(m+۱)!}\right](m+۱)!;\quad ۴)\ P_۳P_۲,\ A_۳^۲+A_۴^۲,$$

$$\frac{A_۵^۳-A_۵^۲}{P_۲}+\frac{P_۵}{P_۲};\quad ۵)\ \left(\frac{P_۵}{A_۵^۴}+\frac{P_۴}{A_۵^۳}+\frac{P_۳}{A_۵^۲}+\frac{P_۲}{A_۵^۱}\right)A_۵^۲$$

۲. عدد طبیعی n را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $A_n^۲=۱۲$; ۳) $A_n^۳+۳A_n^۲=\frac{۱}{۲}P_{n+۱}$;

۲) $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۷۲$; ۴) $\frac{P_{n+۵}}{A_{n+۴}^k P_{n+۴-k}}=۱۵$

۳. پنج نفر را روی یك نیمکت به‌چند طریق می‌توان نشاند؟

۴. نام همت دانش‌آموز را به‌چند ردیف می‌توان نوشت؟

۵. پنج دانشجو و سه‌دانش‌آموز مـی‌خواهند مسابقهٔ شطرنج بدهند. مقام‌های دانش‌آموزان، به‌چند طریق ممکن است پیش آید، به‌شرطی که هیچ دونفری باهم مساوی نکرده باشند؟

۶. چند عدد چهاررقمی بخش‌پذیر بر ۲ وجود دارد؟

تکلیف ۳.

۱. محاسبه کنید:

۱) $C_۵^۳, C_۴^۲, C_{۲۵}^{۲۳}, C_{۱۰۰}^{۹۰}$; ۲) $C_۵^۳C_۴^۲+C_۴^۲C_۳^۱+C_۲^۱C_۳^۰$;

۳) $\left(\frac{۱}{۳}C_۶^۲-\frac{۱}{۲۸}C_۸^۳+\frac{۱}{۶۵}C_{۱۵}^۳\right):(P_۳A_۵^۳)$

۲. عدد طبیعی n را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $C_n^{n-۲}+۲n=۹,\ ۳C_{n+۱}^۲-۲A_n^۲=n$;

۲) $C_{۲n}^{n+۱}:C_{۲n+۱}^{n-۱}=۱۶:۲۹$; ۳) $C_n^۵<C_n^۳$;

۴) $\frac{A_{n+۲}^۴}{P_{n+۲}}-\frac{۱۴۳}{۴P_{n-۱}}<۰$

۳. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $C_۵^۰+C_۵^۱+C_۵^۲=C_۵^۳+C_۵^۴+C_۵^۵$;

۲) $kC_n^k=nC_{n-۱}^{k-۱},\ nC_{۲n}^n=(n+۱)C_{۲n}^{n+۱}$;

۳) $C_{n+۱}^{k+۱}=C_n^k+C_n^{k+۱}$;

۴) $C_n^۲+۲C_n^۳+\dots+(n-۱)C_n^n=(n-۲)۲^{n-۱}+۱$

۴. به‌چندطریق می‌توان ازبین ۲۰ نفر

الف) دونفر را با یك وظیفه برای نگهبانی نامزد کرد؛

ب) دو نفر را بـرای نگهبانی نـامزد کرد، به‌نحوی که یکی از آن‌ها مسئول دیگری باشد؟

۵. از بین ۳۰ سرباز و ۳ افسر، بـه‌چند طریق می‌توان یك گروه شامل سه سرباز و یك افسر درست کرد؟

۶. عدد ۱۰۵، روی هم چند مقسوم‌علیه دارد؟

تکلیف ۴.

۱. محاسبه کنید:

۱) $C_{۷}^{۳}, C_{۱۰}^{۸}, C_{۱۶}^{۱۵}, C_{۱۰۰۰}^{۹۹۸};$ ۲) $C_{۲۱}^{۴}:(C_{۱۹}^{۳}+C_{۱۹}^{۴}+C_{۲۰}^{۳});$

۳) $P_{n+۲}:(A_{n}^{k}P_{n-k})+(C_{۱۵}^{۸}+۲C_{۱۵}^{۹}+C_{۱۵}^{۱۰}):C_{۱۷}^{۱۰}$

۲. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

۱) $C_{۶}^{۰}+C_{۶}^{۱}+C_{۶}^{۲}=C_{۶}^{۴}+C_{۶}^{۵}+C_{۶}^{۶};$

۲) $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k};$ ۳) $C_{n+۱}^{k+۱}=\frac{n+۱}{k+۱}C_{n}^{k};$

۴) $C_{n}^{۰}+C_{n+۱}^{۱}+C_{n+۲}^{۲}+\cdots+C_{n+k}^{k}=C_{n+k+۱}^{k}$

۳. مطلوب است عدد طبیعی n، به‌شرطی که

۱) $C_{۲n}^{۷}>C_{۲n}^{۵}, C_{۱۳}^{n}<C_{۱۳}^{n+۲};$ ۲) $C_{n+۱}^{n-۱}=۶, C_{n-۱}^{n-۲}=n^{۲}-۱۳;$

۳) $A_{n-۱}^{۲}-C_{n}^{۱}=۷۹, C_{n+۱}^{۲}:C_{n}^{۳}=\frac{۴}{۵}$ ۴) $C_{n+۵}^{۴}-\frac{۱۴۳P_{n+۵}}{۹۶P_{n+۳}}<۰$

۴. از یك گروه ۲۰ نفری، بـه‌چند طریق می‌تـوان چهار نفر را برای شرکت در یك گردهم‌آیی انتخاب کرد؟

۵. از بین هفت‌دونـده و سه کوه‌نـورد، می‌خـواهیم یك گروه ۵ نفری تشکیل دهیم، به نحوی که دست‌کم یکی از آن‌ها کوه‌نورد باشد. به‌چندطریق می‌توان این گروه را تشکیل داد؟

۶. از هفت گل میخك و پنج گل لالـه، مـی‌خواهیم دسته گلی شامل سه میخك و دو لاله درست کنیم. به‌چند طریق ممکن است؟

تکلیف ۵.

۱. این دوجمله‌ای‌ها را بسط دهید و ساده کنید:

۱) $(a-b)^۴$; ۲) $(a+۲b)^۵$; ۳) $(a-\sqrt{۲})^۶$; ۴) $\left(a-\frac{۲}{b}\right)^۵$

۲. جملهٔ ششم بسط دوجمله‌ای را پیدا کنید:

۱) $\left(\sqrt{x}+\frac{۱}{x}\right)^{۱۵}$; ۲) $(۱-۲z)^{۲۱}$

۳. دوجملهٔ وسط در بسط دوجمله‌ای $(a^۳+ab)^{۲۱}$ را پیدا کنید.

۴. در بسط دوجمله‌ای $\left(x^۳+\frac{۱}{x^۳}\right)^{۱۸}$، جملهٔ مستقل از x را پیدا کنید.

۵. محاسبه کنید:

۱) $C_n^۰+۳C_n^۱+۳^۲C_n^۲+\dots+۳^nC_n^n$; ۲) $C_{۲n}^۲+C_{۲n}^۴+\dots+C_{۲n}^{۲n}$

۶. به‌چند طریق می‌توان ده اتوبوس وسه مینی‌بوس را ردیف کرد، به‌شرطی که همهٔ اتوبوس‌ها وهمهٔ مینی‌بوس‌ها یکسان باشند؟

تکلیف ۶.

۱. این دوجمله‌ای‌ها را بسط‌دهید وساده کنید:

۱) $(a+b)^۴$; ۲) $(a-۲b)^۵$; ۳) $(b+\sqrt{۲})^۶$; ۴) $\left(a-\frac{۱}{a}\right)^۵$

۲. پنجمین جملهٔ بسط را پیدا کنید:

۱) $(\sqrt{z}+z)^{۱۰}$; ۲) $\left(x-\frac{۱}{x}\right)^{۱۳}$

۳. دوجملهٔ وسط را در بسط $(a^۳-ab)^{۲۳}$ پیدا کنید.

۴. در بسط $\left(z+\frac{۱}{z^۳}\right)^{۱۶}$، جمله‌ای را پیدا کنید که به z بستگی نداشته باشد.

۵. محاسبه کنید:

۱) $C_n^۰+۲C_n^۱+۲^۲C_n^۲+\dots+۲^nC_n^n$;

۲) $۱-C_n^۱+C_n^۲-C_n^۳+\dots+(-۱)^nC_n^n$;

۳) $C_{۲n}^۱+C_{۲n}^۳+\dots+C_{۲n}^{۲n-۱}$

۶. با چهار رقم برابر ۲ و دو رقم برابر ۵، می‌خواهیم عدد شش رقمی بسازیم. به‌چند طریق ممکن است؟

تمرین‌ها

۱. محاسبه کنید:

$$۱)\ \ \frac{A_{۱۲}^{۴}-A_{۱۲}^{۱}}{A_{۱۰}^{۳}},\ \frac{A_{۱۲}^{۶}۵!}{A_{۱۱}^{۹}};\qquad ۲)\ \ \frac{C_{۱۰۰}^{۹۸}+C_{۱۰۰۰}^{۹۹۸}}{C_{۱۰۰۰}^{۲}+C_{۱۰۰}^{۲}},$$

$$\frac{۱+C_{۷}^{۴}+C_{۷}^{۳}-C_{۸}^{۴}}{۱+C_{۱۰}^{۵}+C_{۱۰}^{۶}-C_{۱۱}^{۶}}+\frac{A_{۳}^{۲}}{P_{۲}};\quad ۳)\ \ \frac{n!}{(n-۳)!\,A_{n}^{۲}}-\frac{P_{n+۱}}{(n+۲)!},$$

$$\frac{C_{n}^{۳}C_{n}^{۱}}{(C_{n}^{۲})^{۲}}+\frac{P_{n}P_{n+۱}(n^{۲}-n)^{۲}}{۴(C_{n}^{۲})^{۲}(n!)^{۲}};\quad ۴)\ \ \frac{۱}{n+۲}(C_{n+۳}^{۲}-۲C_{n+۲}^{۳}+C_{n+۲}^{۲}+$$

$$+\frac{n^{۲}-۵n}{۶}$$

۲. عدد طبیعی n را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$۱)\ \ C_{n+۱}^{۳}:C_{n}^{۴}=۶:۵،\ \ C_{۲n}^{n+۱}:C_{۲n+۱}^{n-۱}=۲:۳;$$

$$۲)\ \ C_{n+۱}^{n-۴}:A_{n+۱}^{۳}=۷:۱۵،\ \ ۱۲C_{n+۳}^{n-۱}=۵۵A_{n+۱}^{۲};$$

$$۳)\ \ A_{n}^{۳}+C_{n}^{n-۲}=۱۴n،\ \ A_{n+۱}^{۳}+C_{n+۱}^{n-۱}=۱۴(n+۱);$$

$$۴)\ \ C_{n+۱}^{n-۱}<۲۱:\ ۵C_{n}^{۳}<C_{n+۲}^{۴}،\ C_{n-۱}^{n-۳}:A_{n+۱}^{۴}<۱:۱۴P_{۴};$$

$$۵)\ \ C_{n-۱}^{۴}-C_{n-۱}^{۳}-\frac{۵}{۴}A_{n-۲}^{۲}<۰;$$

$$۶)\ \ C_{n+۱}^{n-۲}-C_{n+۱}^{n-۱}\leqslant ۱۰۰،\ C_{n+۵}^{۴}-\frac{۱۴۳}{۹۶}\cdot\frac{P_{n+۵}}{P_{n+۳}}<۰;$$

$$۷)\ \ A_{n}^{۲}+C_{n}^{۱}=۲۵۶،\ C_{۲n+۱}^{n-۱}:C_{۲n}^{n+۱}=\frac{۱۳}{۷},\ \frac{A_{n+۱}^{n}\cdot P_{n-۴}}{P_{n-۱}}=۱۵$$

۳. یك لیست ده‌نفری از ده‌نفر را به‌چند طریق می‌توان تهیه کرد؟

۴. در کلاس، هر روز ۱۰ موضوع و ۵ درس وجود دارد. برنامه را به‌چند طریق می‌توان تنظیم کرد؟

۵. چند عدد درست وجود دارد که، هر کدام از آن‌ها، دارای سه رقم

مختلف باشد؟

۶. هفت کتاب مختلف را به‌چند طریق می‌توان درقفسه چید؟

۷. چند عدد شش رقمی وجود دارد، به‌نحوی که در هرکدام از آن‌ها رقم ۵ وجود داشته باشد و پنج رقم دیگر آن مختلف و از بین رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸ و ۹ انتخاب شده باشد؟

۸. به‌چند طریق می‌توان سه کتاب را از بین چهار کتاب با مولفان مختلف انتخاب کرد؟

۹. تنها با سه رقم ۳ و ۵ و ۷، چند عدد هشت رقمی می‌توان درست کرد، به‌شرطی که در هر عدد دو بار با رقم ۵ برخورد داشته باشیم؟

۱۰. با رقم‌های از ۱ تا ۹، چند عدد نه رقمی می‌توان ساخت، به‌نحوی که هیچ رقمی در آن‌ها تکراری نباشد؟ دربین این عددها، چندعدد وجود دارد که، در هریك از آن‌ها، رقم‌های ۲ و ۵، ۱) در ردیف‌هم‌باشند؛ ۲) در ردیف‌هم نباشند؟

۱۱. مجموعه‌ای از چهارکتاب مربوط به‌یك مؤلف و شش کتاب مربوط به‌مؤلف دیگر را در اختیار داریم. به‌چند طریق می‌توان‌چهار کتاب انتخاب کرد، به‌نحوی که دو تا از آن‌ها متعلق به‌یك مؤلف و دوتای دیگر متعلق به‌مؤلف دیگر باشند؟

۱۲. با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، همهٔ‌عددهای $\overline{abcde}$ را، بدون‌تکرار رقم‌ها ساخته‌ایم. بین آن‌ها، چند عدد وجود دارد که در آن‌ها
۱) $a=۱$؛ ۲) $a\neq ۲$؛ ۳) $a=۳$، $b=۲$؛ ۴) $a=۳$، $b=۴$ و $c=۵$؟

۱۳. همان مسأله قبلی را برای همان ۴ حالت حل کنید، به‌شرطی که در ساختن عددهای پنج رقمی، تکرار رقم‌ها مجاز باشد.

۱۴. از بین یك گروه ۳۰ نفری، به‌چند طریق می‌توان رئیس، معاون و دبیر را انتخاب کرد؟

۱۵. به‌چند طریق می‌توان از بین ۲۰ نفر، ۷ نفر را انتخاب کرد؟

۱۶. چند قطر دارد: ۱) پنج‌ضلعی محدب؛ ۲) دوازده‌ضلعی محدب؛

۳) n ضلعی محدب.

۱۷. یك گروه ۱۵ نفری رامی‌خواهیم به‌دو گروه ۴ نفری و ۱۱ نفری تقسیم کنیم. به‌چند طریق ممکن است؟

۱۸. از هشت نوع گل مختلف، می‌خواهیم دسته‌گلی درست کنیم که، در آن، کمتر از دو نوع گل وجود نداشته باشد. به‌چند طریق ممکن است؟

۱۹. از پنج افسر و ده سرباز، می‌خواهیم گروهی شامل دو افسر و سه سرباز تشکیل دهیم. به‌چند طریق ممکن است؟

۲۰. درقفسه‌ای مجموعهٔ ۳۰جلدی آثارمؤلفی قرار دارد. به‌چند طریق می‌توان آن‌ها را چید، به‌نحوی که دو جلد اول و دوم: ۱) در ردیف‌هم باشند؛ ۲) در ردیف‌هم نباشند.

۲۱. ۸ مرد و ۸ زن را بـه‌چند طریق می‌توان پشت میز گردی نشاند، به‌نحوی که هیچ دو مردی و هیچ دو زنی درکنارهم نباشند؟

۲۲. می‌خواهیم از بین ۷ مرد و ۴ زن، یك گروه ۶نفری تشکیل‌دهیم، به‌نحوی که در آن، حداقل دو زن وجود داشته باشد. به‌چند طریق‌ممکن‌است؟

۲۳. ثابت کنید، برای عددهای طبیعی n و k و با شرط $۱ \leqslant k \leqslant n$:

۱) $P_k A_{n+۱}^{۲} A_{n+۳}^{۲} A_{n+۵}^{۲} = nk! A_{n+۵}^{۵}$;

۲) $C_{n-۱}^{۰} + C_{n}^{۱} + C_{n+۱}^{۲} + \dots + C_{n+k-۱}^{k} = C_{n+k}^{k}$;

۳) $C_n^k + ۲C_n^{k+۱} + C_n^{k+۲} = C_{n+۲}^{k+۲}$;

۴) $C_n^k + ۳C_n^{k+۱} + ۳C_n^{k+۲} + C_n^{k+۳} = C_{n+۳}^{k+۳}$;

۵) $C_n^{۰} + \frac{۱}{۲}C_n^{۱} + \dots + \frac{۱}{n+۱}C_n^n = \frac{۲^{n+۱}-۱}{n+۱}$;

۶) $C_n^{۱} - ۲C_n^{۲} + \dots + (-۱)^{n-۱} nC_n^n = ۰$;

۷) $C_n^{۱} + ۲C_n^{۲} + \dots + nC_n^n = n۲^{n-۱}$;

۸) $(C_n^{۰})^{۲} + (C_n^{۱})^{۲} + \dots + (C_n^n)^{۲} = C_{۲n}^n$;

۹) $C_n^n + C_{n+۱}^n + C_{n+۲}^n + \dots + C_{n+k}^n = C_{n+k+۱}^{n+۱}$;

۱۰) $C_n^{۰} + ۲C_n^{۱} + ۳C_n^{۲} + \dots + (n+۱)C_n^n = (n+۲)۲^{n-۱}$;

$$۱۱)\ \frac{۱}{۲}C_n^۱-\frac{۱}{۳}C_n^۲+\cdots+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n+۱}C_n^n=\frac{n}{n+۱};$$

$$۱۲)\ ۲C_n^۰+\frac{۲^۲}{۲}C_n^۱+\frac{۲^۳}{۳}C_n^۲+\cdots+\frac{۲^{n+۱}}{n+۱}C_n^n=\frac{۳^{n+۱}-۱}{n+۱}$$

۲۴. بسط دهید و ساده کنید:

$۱)\ \left(\frac{۱}{۲}a+b\right)^۷;$ $\quad ۲)\ (a-۲b)^۶;$ $\quad ۳)\ (۱+۲x)^۵;$

$۴)\ \left(x+\frac{۱}{۲x}\right)^۸;$ $\quad ۵)\ (۱+\sqrt{\ })^۵;$ $\quad ۶)\ (۱-\sqrt{۲})^۵;$

$۷)\ (\sqrt{۶}+\sqrt{۱۲})^۴;$ $\quad ۸)\ \frac{۱}{۲۷}(\sqrt{۳}-\sqrt{۱۵})^۶$

۲۵. دو جملهٔ وسط بسط را پیدا کنید:

$۱)\ (a^۳+ab)^{۳۱};$ $\quad ۲)\ (a^۳+ba)^{۳۰}$

۲۶. شمارهٔ بزرگترین جمله‌را، در بسط $(۱+۰/۰۰۱)^{۱۰۰۰}$ پیدا کنید.

۲۷. می‌دانیم $C_n^x=C_n^y$. آیا این برابری، تنها برای $x=y$ درست است؟

۲۸. در بسط دوجمله‌ای، چندجملهٔ گویا وجود دارد؟

$۱)\ (\sqrt{۳}+\sqrt[۳]{۵})^{۱۲۴};$ $\quad ۲)\ (\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳})^{۱۰۰}$

۲۹. همهٔ عددهای طبیعی n و m را پیدا کنید، به‌شرطی که

$$۱)\ C_{n+۱}^{m+۱}:C_{n+۱}^{m}:C_{n+۱}^{m-۱}=۵:۵:۳;$$

$$۲)\ C_{n+۲}^{m}:C_{n+۲}^{m+۱}:C_{n+۲}^{m+۲}=۰/۶:۱:۱;\quad ۳)\ \frac{C_{n-۱}^{m-۱}}{C_{n+۱}^{m+۱}}\cdot\frac{۲۰}{P_{m+۱}^{۲}}=۱$$

۳۰. ثابت کنید $\sqrt{۱۰}[(۱+\sqrt{۱۰})^{۱۰۰}-(۱-\sqrt{۱۰})^{۱۰۰}]$، عدد درستی است.

۳۱. ثابت کنید، عدد $۱۱^{۱۰}-۱$ بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۳۲. ثابت کنید، عدد $۱۰۱^{۱۰۰}-۱$ بر ۱۰۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۳۳. ثابت کنید $۱۱^{۱۰۰}-۱$ بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است.

۳۴. ضریب $a^{۸}$ را در بسط دوجمله‌ای $\left(a+\frac{۱}{a}\right)^{۱۲}$ پیدا کنید.

۳۵. ضریب $x^{۴}$ را در بسط دوجمله‌ای $\left(\frac{x}{۳}-\frac{۳}{x}\right)^{۱۲}$ پیدا کنید.

۳۶. اگر جملهٔ سوم در بسط $(x+x^{lg x})^{۵}$ برابر $۱۰^{۶}$ باشد، مقدار x را پیدا کنید.

۳۷. می‌دانیم $(x-۲)^{۱۰۰}=a_{۰}+a_{۱}x+\dots+a_{۱۰۰}x^{۱۰۰}$، مطلوب است:

۱) $a_{۹۷}$; ۲) $a_{۰}+a_{۱}+\dots+a_{۱۰۰}$; ۳) $a_{۱}+۲a_{۲}+\dots+۱۰۰a_{۱۰۰}$

۳۸. می‌دانیم $(۱+۲x+۳x^{۲})^{۱۰}=a_{۰}+a_{۱}x+\dots+a_{۲۰}x^{۲۰}$. مطلوب است $a_{۴}$.

۳۹. مطلوب است مقدار $a_{۱۰}$، به‌شرطی که بدانیم:

$$(۱+x^{۱}+x^{۲}+x^{۳})^{۵}=a_{۰}+a_{۱}x+\dots+a_{۱۵}x^{۱۵}$$

۴۰. برای هر عدد طبیعی n، محاسبه کنید:

۱) $C_n^{۰}+C_n^{۲}+C_n^{۴}+\dots+C_n^{۲[\frac{n}{۲}]}$;

۲) $C_n^{۱}+C_n^{۳}+C_n^{۵}+\dots+C_n^{۲[\frac{n}{۲}]-۱}$;

۳) $(C_n^{۰})^{۲}-(C_n^{۱})^{۲}+(C_n^{۲})^{۲}-\dots+(-۱)^{n}(C_n^{n})^{۲}$

۴۱. ثابت کنید:

۱) $۲<\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n}<۳$، $n\geqslant ۲$، $n\in\mathbf{N}$;

۲) $n^{n+۱}>(n+۱)^{n}$، $n\geqslant ۳$، $n\in\mathbf{N}$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) ۶، ۱۲۰، ۲۰۵، ۹۱، ۲) ۱; ۳) $\frac{۱}{n(n-۱)}$،

$\frac{n}{n+۱}$; ۴) ۲۴، ۲۴، ۴۶; ۵) ۲۷۵۰. ۲. ۱) ۳; ۲) ۲;
۳) ۷; ۵) ۱۱. ۳. $P_۶=۷۲۰$. ۴. $P_۵=۱۲۰$، $P_۵-P_۴=۹۶$.
۵. $A_{۲۰}^{۳}=۶۸۴۰$. ۶. $P_۳\cdot P_۸=۲۴۱۹۹۲۰$. ۷. $۵^۴$.

تکلیف ۲.

۱. ۱) ۲۴، ۵۰۴۰، ۲۴، ۹۶۰۴، ۲) ۱۵۸۰;
۳) $m^۲+۳m+۲$، $m+۲$; ۴) ۱۲، ۱۸، ۸۰; ۵) ۴۲.
۲. ۱) ۴; ۲) ۸; ۳) ۴; ۴) ۱۰. ۳. $۵!=۱۲۰$.
۴. $۷!=۵۰۴۰$. ۵. $A_۸^۳=۳۳۶$. ۶. ۴۵۰۰.

تکلیف ۳.

۱. ۱) ۱۰، ۶، ۳۰۰، ۱۰۰; ۲) ۸۱; ۳) $\frac{۱}{۳۶}$. ۲. ۱) ۳،
۵; ۲) ۱۴; ۳) $۵\leqslant n\leqslant ۷$، $n\in\mathbf{N}$; ۴) $۲\leqslant n\leqslant ۳۶$، $n\in\mathbf{N}$.
۴. ۱) $C_{۲۰}^{۲}=۱۹۰$; ۲) $A_{۲۰}^{۲}=۳۸۰$. ۵. $۳C_{۳۰}^{۳}=۱۲۱۸۰$.
۶. $C_۳^۱+C_۳^۲+C_۳^۳+۱=۸$.

تکلیف ۴.

۱. ۱) ۳۵، ۴۵، ۱۶، ۴۹۹۵۰۰; ۲) ۱; ۳) $n^۲+۳n+۳$.
۳. ۱) $n>۶$، $n\in\mathbf{N}$; $۱\leqslant n\leqslant ۵$، $n\in\mathbf{N}$; ۲) ۳، ۴; ۳) ۱۱،
۷; ۴) $۱\leqslant n\leqslant ۳$، $n\in\mathbf{N}$. ۴. $C_{۲۰}^{۴}=۴۸۴۵$. ۵. $C_۷^۴C_۳^۱+$
$+C_۷^۳C_۳^۲+C_۷^۲C_۳^۳=۲۳۱$. ۶. $C_۷^۳C_۵^۳=۳۵۰$.

تکلیف ۵.

۱. ۱) $a^۴-۴a^۳b+۶a^۲b^۲-۴ab^۳+b^۴$; ۲) $a^۵+۱۰a^۴b+$
$+۴۰a^۳b^۲+۸۰a^۲b^۳+۸۰ab^۴+۳۲b^۵$; ۳) $a^۶-۶\sqrt{۲}a^۵+۳۰a^۴-$
$-۴۰\sqrt{۲}a^۳+۶۰a^۲-۲۴\sqrt{۲}a+۸$; ۴) $a^۵-\frac{۱۰a^۴}{b}+\frac{۴۰a^۳}{b^۲}-$

$-\frac{۸۰a^{۲}}{b^{۳}}+\frac{۸۰a}{b^{۴}}-\frac{۳۲}{b^{۵}}$. **۲.** ۱) $C_{۱۵}^{۵}=۳۰۰۳$; ۲) $-۳۲C_{۲۱}^{۵}z^{۵}$.
۳. $C_{۲۱}^{۱۱}a^{۴۱}b^{۱۱}$ و $C_{۲۱}^{۱۰}a^{۴۳}b^{۱۰}$. **۴.** $T_{۱۰}=C_{۱۸}^{۹}$. **۵.** ۱) ۴^{n};
۲) $۲^{۲n-۱}$. **۶.** $C_{۱۳}(۱۰/۳)=\frac{۱۳!}{۱۰!۳!}=۲۸۶$.

تکلیف ۶.

۱. ۱) $a^{۴}+۴a^{۳}b+۶a^{۲}b^{۲}+۴ab^{۳}+b^{۴}$; ۲) $a^{۵}-۱۰a^{۴}b+$
$+۴۰a^{۳}b^{۲}-۸۰a^{۲}b^{۳}+۸۰ab^{۴}-۳۲b^{۵}$; ۳) $b^{۶}+۶\sqrt{۲}b^{۵}+$
$+۳۰b^{۴}+۴۰\sqrt{۲}b^{۳}+۶۰b^{۲}+۲۴\sqrt{۲}a+۸$; ۴) $a^{۵}-۵a^{۳}+$
$+۱۰a-\frac{۱۰}{a}+\frac{۵}{a^{۳}}-\frac{۱}{a^{۵}}$. **۲.** ۱) $C_{۱۰}^{۴}z^{۷}$; ۲) $C_{۱۳}^{۴}x^{۵}$;
۳. $C_{۲۳}^{۱۲}a^{۴۵}b^{۱۲}$ و $-C_{۲۳}^{۱۱}a^{۴۷}b^{۱۱}$. **۴.** $T_{۵}=C_{۱۶}^{۴}$. **۵.** ۱) ۳^{n}; ۲) ۰;
۳) $۲^{۲n-۱}$. **۶.** $C_{۶}(۴/۲)=\frac{۶!}{۴!۲!}=۱۵$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\frac{۱۱}{۲}$، ۴; ۲) ۱، ۴; ۳) $\frac{n^{۲}-۵}{n+۲}$، $\frac{۳n^{۲}+۲n-۷}{۳n-۳}$;
۴) ۲. **۲.** ۱) ۸، ۴; ۲) ۱۰، ۸; ۳) ۵، ۴; ۴) $۱\leqslant n\leqslant ۵$،
$n\in\mathbf{N}$; $n\geqslant ۱۴$، $n\in\mathbf{N}$; $n\geqslant ۷$، $n\in\mathbf{N}$; ۵) $۵\leqslant n\leqslant ۱۰$، $n\in\mathbf{N}$;
۶) $۲\leqslant n\leqslant ۹$، $n\in\mathbf{N}$; $-۱\leqslant n\leqslant ۳$، $n\in\mathbf{N}$; ۷) ۱۶، ۱۹، ۵.
۳. $۱۰!$. **۴.** $A_{۱۰}^{۵}$. **۵.** $A_{۱۰}^{۳}-A_{۹}^{۲}$. **۶.** $۷!$ **۷.** $۶A_{۸}^{۵}$. **۸.** $C_{۴}^{۳}$.
۹. $C_{۸}^{۲}\cdot ۲^{۶}$. **۱۰.** $۹!$; ۱) $۲\cdot ۸!$ ۲) $۹!-۲\cdot ۸!$. **۱۱.** $C_{۴}^{۲}C_{۶}^{۲}$.
۱۲. ۱) $۴!$; ۲) $۵!-۴!$; ۳) $۳!$; ۴) $۲!$. **۱۳.** ۱) $۵^{۴}$;
۲) $۵^{۵}-۵^{۴}$; ۳) $۵^{۳}$; ۴) $۵^{۲}$. **۱۴.** $A_{۳۰}^{۳}$. **۱۵.** $C_{۲۰}^{۷}$. **۱۶.** ۱) ۵;
۲) ۵۴; ۳) $\frac{n(n-۳)}{۲}$. **۱۷.** $C_{۱۵}^{۴}$. **۱۸.** $۲^{۸}-۹$. **۱۹.** $C_{۵}^{۲}C_{۱۰}^{۳}$.
۲۰. ۱) $۲\cdot ۲۹!$; ۲) $۳۰!-۲\cdot ۲۹!$. **۲۱.** $۲(۸!)^{۲}$. **۲۲.** $C_{۴}^{۲}C_{۷}^{۴}+$

$+C_{۴}^{۳}C_{۷}^{۳}+C_{۴}^{۴}C_{۷}^{۲}=۳۷۱$. **۲۴.** ۱) $\frac{a^{۷}}{۱۲۸}+\frac{۷a^{۶}b}{۶۴}+\frac{۲۱a^{۵}b^{۲}}{۳۲}+\frac{۳۵a^{۴}b^{۳}}{۱۶}+\frac{۳۵a^{۳}b^{۴}}{۸}+\frac{۲۱a^{۲}b^{۵}}{۴}+\frac{۷ab^{۶}}{۲}+b^{۷}$; ۲) $a^{۶}-۱۲a^{۵}b+۶۰a^{۴}b^{۲}-۱۶۰a^{۳}b^{۳}+۲۴۰a^{۲}b^{۴}-۱۹۲ab^{۵}+۶۴b^{۶}$; ۳) $۱+۱۰x+۴۰x^{۲}+۸۰x^{۳}+۸۰x^{۴}+۳۲x^{۵}$; ۴) $x^{۸}+۴x^{۶}+۷x^{۴}+۷x^{۲}+\frac{۳۵}{۸}+\frac{۷}{۴x^{۲}}+\frac{۷}{۱۶x^{۴}}+\frac{۱}{۱۶x^{۶}}+\frac{۱}{۲۵۶x^{۸}}$; ۵) $۲۹\sqrt{۲}+۴۱$; ۶) $۴۱-۲۹\sqrt{۲}$; ۷) $۳۶(۱۷+۱۲\sqrt{۲})$; ۸) $۶۴(۹-۴\sqrt{۵})$. **۲۵.** ۱) $C_{۳۱}^{۱۵}a^{۶۳}b^{۱۵}$ و $C_{۳۱}^{۱۶}a^{۶۱}b^{۱۶}$; ۲) $C_{۳۰}^{۱۵}a^{۶۰}b^{۱۵}$. **۲۶.** $T_{۱}=T_{۲}=۱$. **۲۷.** نه. **۲۸.** ۱) ۳۲; ۲) ۲۶. **۲۹.** ۱) $n=۶$، $m=۳$; ۲) $n=۵$، $m=۲$; ۳) $\{(n، m): n=۴، ۱\leqslant m\leqslant ۴، m\in\mathbf{N}\}$. **۳۴.** ۶۶، ۳۵. **۳۵.** $T_{۵}=C_{۱۲}^{۴}\left(\frac{x}{۳}\right)^{۸}(-۱)^{۴}\left(\frac{۳}{x}\right)^{۴}$.

۳۶. ۱۰. **۳۷.** ۱) $(-۲)^{۳}C_{۱۰۰}^{۳}$; ۲) ۱; ۳) -۱۰۰.

۳۸. ۸۰۸۵. **۳۹.** ۱۰۱. **۴۰.** ۱) $۲^{n-۱}$; ۲) $۲^{n-۱}$; ۳) ۰، (n عددی فرد); $(-۱)^{\frac{n}{۲}}C^{\frac{n}{۲}}$، ($n$ عددی زوج).

فصل چهارم

معادله‌ها، نامعادله‌ها و دستگاه‌های گویا

حل معادلهٔ

$$f(x)=g(x) \qquad (۱)$$

یعنی پیدا کردن همهٔ عددهای a، به‌نحوی که برای آن‌ها، برابری عددیِ زیر برقرار باشد:

$$f(a)=g(a) \qquad (۲)$$

و یا اثبات این‌که، چنین عددهایی وجود ندارند.

عدد a را ریشه یا جواب معادلهٔ (۱) گویند. بنابراین، حل معادلهٔ (۱)، یعنی جست‌وجوی مجموعهٔ همهٔ ریشه‌ها یا جواب‌های آن.

مجموعهٔ همهٔ جواب‌های معادلهٔ (۱)، به‌حوزهٔ تعریف یا دامنهٔ این معادله تعلق دارد، یعنی به‌اشتراك حوزهٔ وجود تابع $f(x)$ و حوزهٔ وجود تابع $g(x)$.

دو معادلهٔ

$$f_۱(x)=g_۱(x) \quad \text{و} \quad f_۲(x)=g_۲(x)$$

را هم‌ارز گویند، وقتی که مجموعهٔ جواب‌های اولی، بر مجموعهٔ جواب‌های دومی منطبق باشد. در چنین حالتی می‌نویسند:

$$f_۱(x)=g_۱(x) \iff f_۲(x)=g_۲(x)$$

در حالتی‌هم که، هر دو معادله، بدون جواب باشند، آن‌ها را هم‌ارز گویند.

حل نامعادلهٔ

$$f(x)>g(x) \qquad (۳)$$

به‌معنای پیدا کردن همهٔ عددهای a است، به‌نحوی که نابرابری عددی زیر، برای آن‌ها، برقرار باشد:

$$f(a)>g(a)$$

و یا اثبات این که، چنین عددهایی وجود ندارند.

عدد a را جواب نامعادلهٔ (۳) گویند. بنابراین، حل نامعادلهٔ (۳)، یعنی جست‌وجوی مجموعهٔ همهٔ جواب‌های آن.

مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۳)، به دامنهٔ این نامعادله، یعنی به‌اشتراك حوزهٔ وجود تابع $f(x)$ و حوزهٔ وجود تابع $g(x)$ تعلق دارد.

دو نامعادلهٔ

$$f_۱(x)>g_۱(x) \quad \text{و} \quad f_۲(x)>g_۲(x)$$

را وقتی هم‌ارز گویند که، مجموعهٔ جواب‌های اولی بر مجموعهٔ جواب‌های دومی منطبق باشد. در چنین موقعیتی می‌نویسند:

$$f_۱(x)>g_۱(x) \iff f_۲(x)>g_۲(x)$$

حل دستگاه معادله‌ها (یا دستگاه نامعادله‌ها) از یك مجهول، به‌معنای پیدا کردن همهٔ عددهایی است که جواب هریك از معادله‌های دستگاه (یا نامعادله‌های دستگاه) باشند، و یا اثبات این که، چنین عددهایی وجود ندارند.

دستگاه شامل دو معادله را به‌این‌صورت می‌نویسند:

$$\begin{cases} f_۱(x)=g_۱(x) \\ f_۲(x)=g_۲(x) \end{cases}$$

دستگاه شامل نامعادله‌ها و یا دستگاه مختلط (یعنی دستگاهی که، در آن، هم معادله وجود داشته باشد و هم نامعادله) را هم، به‌همین‌صورت می‌نویسند.

معادله (یا نامعادله) را، بـه‌مفهوم هم‌ارز یك دستگاه گویند، وقتی که، مجموعهٔ جواب‌های معادله (یا نامعادله)، برمجموعهٔ جواب‌های دستگاه منطبق باشد. مثلاً وقتی که می‌نویسیم:

$$\sqrt{x-۱}=۳-۲x \iff \begin{cases} x-۱=(۳-۲x)^۲ \\ ۳-۲x\geqslant ۰ \end{cases}$$

به‌این معناست که، معادله با دستگاه هم‌ارز است.

حل مجموعه‌ای ازمعادله‌ها (یا نامعادله‌ها و یا دستگاه‌ها) با یك‌مجهول، به‌معنای پیدا کردن همهٔ عددهایی است که، هر کدام از آن‌ها، دست‌کم جواب

یکی از معادله‌ها (یا نامعادله‌ها و یا دستگاه‌ها) باشد؛ و یا اثبات این‌که، چنین عددهایی وجود ندارند.

مجموعهٔ معادله‌های $f_۱(x)=g_۱(x)$ و $f_۲(x)=g_۲(x)$ را به‌این‌صورت می‌نویسند:

$$\left[\begin{array}{l} f_۱(x)=g_۱(x) \\ f_۲(x)=g_۲(x) \end{array}\right.$$

مجموعه‌هایی را هم که شامل معادله‌ها، نامعادله‌ها و دستگاه‌ها باشند، به‌همین صورت می‌نویسند.

یك معادله (یا نامعادله یا دستگاه) را هم‌ارز مجموعه‌ای از معادله‌ها (نامعادله‌ها یا دستگاه‌ها) گویند، وقتی که مجموعهٔ جواب‌های معادله (نامعادله یا دستگاه) بر مجموعهٔ جواب‌های این مجموعه منطبق باشد. مثلاً معادلهٔ

$$\sqrt{x^۲-۱}\cdot log_۲(x^۲-۲x+۱)=۰$$

با مجموعهٔ دستگاه‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} x^۲-۱=۰ \\ x^۲-۲x+۱>۰ \end{cases}, \qquad \begin{cases} x^۲-۲x+۱=۱ \\ x^۲-۱\geqslant ۰ \end{cases}$$

§۱. معادله‌های خطی و معادله‌های درجه دوم

۱۰۱. معادله‌های خطی معادلهٔ به‌صورت

$$ax+b=۰ \qquad (۱)$$

را که، در آن، a و b عددند و درضمن $a\neq ۰$، معادلهٔ خطی گویند. معادلهٔ (۱) تنها یك جواب دارد که برابر است با $-\frac{b}{a}$.

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x}{۳}+\frac{۲x-۱}{۶}=۱-\frac{x}{۳}$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{x}{۳}+\frac{۲x-۱}{۶}=۱-\frac{x}{۳} \Longleftrightarrow \frac{x}{۳}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۳}=۱+\frac{۱}{۶} \Longleftrightarrow x=\frac{۷}{۶}$$

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$(a-۱)x+۲=a+۱$$

حل. به‌ازای $a\neq ۱$، این معادله، یك معادلهٔ خطی است و تنها یك جواب‌دارد: $x=\frac{a-۱}{a-۱}=۱$. به‌ازای $a=۱$، معادله به‌صورت $۰\cdot x+۲=۲$ درمی‌آید و، بنابراین، هر عدد حقیقی، جواب آن است.

۲.۱. معادلهٔ درجهٔ دوم. معادلهٔ به‌صورت

$$ax^۲+bx+c=۰ \qquad (۲)$$

که در آن، a، b و c عددند و، در ضمن $a\neq ۰$، معادلهٔ درجهٔ دوم گویند.

به یاد بیاوریم که $\Delta=b^۲-۴ac$ را مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم می‌گوییم.

اگر $\Delta<۰$، آن‌وقت معادلهٔ (۲) جواب ندارد؛

اگر $\Delta>۰$، آن‌وقت معادلهٔ (۲)، دارای دو ریشه است:

$$x_۱=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}, \quad x_۲=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

و در این‌صورت

$$ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)(x-x_۲) \qquad (۳)$$

اگر $\Delta=۰$، آن‌وقت معادلهٔ (۲)، دو ریشهٔ برابر دارد:

$$x_۱=x_۲=-\frac{b}{۲a}$$

و در این‌صورت

$$ax^۲+bx+c=a(x-x_۱)^۲ \qquad (۴)$$

تبدیل سه‌جمله‌ای درجه‌دوم $ax^۲+bx+c$ را به‌صورت (۳) یا (۴)، تجزیهٔ آن به‌عامل‌های خطی گویند.

مثال ۳. این معادله را حل کنید:

$$x^۲-۵x+۶=۰$$

حل. چون $\Delta=۲۵-۲۴=۱>۰$، بنابراین، معادلهٔ مفروض دو ریشه دارد: $x_۱=\frac{۵+۱}{۲}=۳$ و $x_۲=\frac{۵-۱}{۲}=۲$.

مثال ۴. این معادله را حل کنید:

$$-x^۲+۱۴x-۴۹=۰$$

حل. مبین $\Delta=۱۹۶-۱۹۶=۰$، بنابراین معادله دو ریشهٔ برابر دارد:

$$x_۱=x_۲=\frac{-۱۴}{-۲}=۷$$

مثال ۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید، که به‌ازای هریک از آن‌ها معادلهٔ درجه دوم

$$(a+۱)x^۲+۲(a+۱)x+a-۲=۰$$

الف) دو ریشهٔ متمایز داشته باشد؛ ب) ریشهٔ حقیقی نداشته باشد؛ ج) دو ریشهٔ برابر داشته باشد.

حل. معادله، بنا به شرط درجه دوم است، بنابراین $a\neq-۱$. مبین معادله را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=۴(a+۱)^۲-۴(a+۱)(a-۲)=$$
$$=۴(a+۱)(a+۱-a+۲)=۱۲(a+۱)$$

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض به‌ازای $a>-۱$ دو ریشهٔ متمایز دارد و به‌ازای $a<-۱$، ریشه ندارد. این معادله نمی‌تواند دو ریشهٔ برابر داشته باشد، زیرا $\Delta=۰$ تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم $a=-۱$ و این، با شرط مساله متناقض است.

مثال ۶. این معادله را حل کنید:

$$ax^۲+۲x+۱=۰$$

حل. به‌ازای $a=۰$ به‌معادلهٔ خطی $۲x-۱=۰$ می‌رسیم که تنها یك

به‌ازای $a\neq ۰$، بـا معادله‌ای درجه دوم سر و کار داریم و مبین آن برابر $۴-۴a$ می‌شود. Δ به‌ازای $a>۱$ منفی‌است ومعادلهٔ مفروض جواب ندارد. به‌ازای $a=۱$، مبین برابر صفر است و معادله، دو ریشهٔ برابر دارد: $x_۱=x_۲=-۱$ به‌ازای $a<۱$ و $a\neq ۰$، داریم $\Delta>۰$ و معادله دوریشهٔ متفاوت دارد:

$$x_۱=\frac{-۲+۲\sqrt{۱-a}}{۲a}=\frac{-۱+\sqrt{۱-a}}{a},\quad x_۲=\frac{-۱-\sqrt{۱-a}}{a}$$

مثال ۷. مطلوب‌است مجموع مجذورها ومجموع مکعب‌های‌ریشه‌های معادلهٔ

$$۲x^۲-۵x+۱=۰$$

حل. مبین این معادلـه برابر $۲۵-۸=۱۷$ و مثبت است، بنابراین معادله دو ریشهٔ مختلف دارد. با توجه به قضیهٔ ویت داریم:

$$x_۱+x_۲=\frac{۵}{۲},\quad x_۱\cdot x_۲=\frac{۱}{۲}$$

و برای محاسبهٔ مجموع مجذورها و مجموع مکعب‌های دو ریشه، به ترتیب داریم:

$$x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲=\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲-۲\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲۱}{۴};$$

$$x_۱^۳+x_۲^۳=(x_۱+x_۲)(x_۱^۲-x_۱x_۲+x_۲^۲)=\frac{۵}{۲}\left(\frac{۲۱}{۴}-\frac{۱}{۲}\right)=۱۱\frac{۷}{۸}$$

$x_۱$ و $x_۲$ را ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $S_n=x_۱^n+x_۲^n$ ($n\geqslant ۲$ و $n\in\mathrm{N}$). در این‌صورت، رابطهٔ بازگشتی زیر برقرار است:

$$S_{n+۱}=-pS_n-qS_{n-۱} \text{ و } S_۱=-p,\quad S_۲=p^۲-۲q$$

در واقع، $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله‌اند، بنابراین

$$x_۱^۲+px_۱+q=۰$$
$$x_۲^۲+px_۲+q=۰$$

اکنون، اگر دو طرف معادلهٔ اول را در $x_۱^{n-۱}$ و دو طرف معادلهٔ دوم را در

$x^{\frac{n}{۲}-۱}$ ضرب و، سپس، دومعادله را با هم جمع کنیم، به‌همان رابطهٔ بازگشتی می‌رسیم.

مثال ۸. معادلهٔ درجه دومی باضریب‌های گویا تشکیل دهیدکه یکی‌از ریشه‌های آن، برابر $\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}$ باشد.

حل. $x^۲+px+q=۰$ را کــه، در آن، p و q عددهــای گویایی هستند، معادلهٔ مجهول می‌گیریم. درضمن داریم:

$$\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۵}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۵}}=\frac{(\sqrt{۳}-\sqrt{۵})^۲}{(\sqrt{۳})^۲-(\sqrt{۵})^۲}=-۴+\sqrt{۱۵}$$

این عدد، ریشهٔ معادله است و، بنابراین، باید در آن صدق کند:

$$(-۴+\sqrt{۱۵})^۲+p(-۴+\sqrt{۱۵})+q=۰$$

یعنی
$$(۳۱-۴p+q)+(p-۸)\sqrt{۱۵}=۰$$

بنابر شرط، p و q، عددهایی گویا هستند؛ بنابراین برابری اخیر، تنها وقتی برقرار است که، به‌طور همزمان، داشته باشیم:

$$۳۱-۴p+q=۰،\quad p-۸=۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $p=۸$، $q=۱$. یعنی معادلهٔ درجه دوم‌مطلوب، چنین است: $x^۲+۸x+۱=۰$.

مثال ۹. ثابت کنید، دو معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲+p_۱x+q_۱=۰ \quad و \quad x^۲+p_۲x+q_۲=۰$$

که مبین‌هایی غیرمنفی دارند، تنها وقتی دست‌کم یک‌ریشهٔ مشترک پیدا می‌کنند که داشته باشیم:

$$(q_۲-q_۱)^۲=(p_۲-p_۱)(p_۱q_۲-q_۱p_۲) \qquad (۵)$$

حل. فــرض مــی‌کــنیــم: $f_۱(x)=x^۲+p_۱x+q_۱$ و $f_۲(x)=x^۲+p_۲x+q_۲$؛ درضمن $x_۱$ و $x_۲$ را ریشه‌های معادلهٔ $f_۲(x)=۰$، می‌گیریم. برای این کــه معادله‌های $f_۱(x)=۰$ و $f_۲(x)=۰$، دست‌کم یک‌ریشهٔ مشترک داشته باشند، لازم و کافی است که $f_۲(x_۱)f_۲(x_۲)=۰$، یعنی

$$(x_۱^۲+p_۲x_۱+q_۲)(x_۲^۲+p_۲x_۲+q_۲)=۰$$

این برابری را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x_۱^۲+p_۱x_۱+q_۱+(p_۲-p_۱)x_۱+q_۲-q_۱)(x_۲^۲+p_۱x_۲+q_۱+$$
$$+(p_۲-p_۱)x_۲+q_۲-q_۱)=۰$$

چون $x_۱^۲+p_۱x_۱+q_۱=۰$ و $x_۲^۲+p_۱x_۲+q_۱=۰$، به‌دست می‌آید:

$$((p_۲-p_۱)x_۱+q_۲-q_۱)((p_۲-p_۱)x_۲+q_۲-q_۱)=۰$$

یعنی

$$(p_۲-p_۱)^۲x_۱x_۲+(q_۲-q_۱)(p_۲-p_۱)(x_۱+x_۲)+(q_۲-q_۱)^۲=۰$$

ولی $x_۱+x_۲=-p_۱$ و $x_۱x_۲=q_۱$، بنابراین

$$(p_۲-p_۱)^۲q_۱-(q_۲-q_۱)(p_۲-p_۱)p_۱+(q_۲-q_۱)^۲=۰$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$(q_۲-q_۱)^۲=(p_۲-p_۱)[(q_۲-q_۱)p_۱-(p_۲-p_۱)q_۱]=$$
$$=(p_۲-p_۱)(q_۲p_۱-q_۱p_۱-p_۲q_۱+p_۱q_۱)=$$
$$=(p_۲-p_۱)(q_۲p_۱-p_۲q_۱)$$

مثال ۱۰. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هریک از آن‌ها، دومعادلهٔ

$$(۱-۲a)x^۲-۶ax-۱=۰ \quad \text{و} \quad ax^۲-x+۱=۰$$

دست‌کم، یک ریشهٔ مشترک داشته باشند.

حل. درمثال قبل، شرط لازم و کافی را، برای این‌که دومعادلهٔ درجه دوم، دست‌کم یک‌ریشهٔ مشترک داشته‌باشند، پیدا کردیم. ازهمان شرط استفاده می‌کنیم. به‌ازای $a\neq۰$ و $۱-۲a\neq۰$ باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{۱-۲a}\right)^۲=\left(-\frac{۱}{a}+\frac{۶a}{۱-۲a}\right)\left(-\frac{۶a}{(۱-۲a)a}-\frac{۱}{(۱-۲a)a}\right)$$

که بعد از تبدیل‌های لازم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(۱-a)^۲=-(۶a^۲+۲a-۱)(۶a+۱)$$

بنابراین، مقدار پارامتر a، جواب معادلهٔ زیر است:

$$a(۳۶a^۲+۱۹a-۶)=۰$$

که باتوجه به‌شرط $a\neq۰$، باید جواب‌های معادله $۳۶a^۲+۱۹a-۶=۰$

را به‌دست آورد: $a_۱=\frac{۲}{۹}$، $a_۲=-\frac{۳}{۴}$. به‌ازای هر دو مقدار جواب، معادله‌های اصلی، مبینی مثبت پیدا می‌کنند و، بنابراین قابل قبول‌اند.

۳.۱. معادله‌های سه جمله‌ای. معادلهٔ به‌صورت

$$ax^{۲n}+bx^n+c=۰،\quad a\neq۰،\quad n\geqslant۲،\quad n\in\mathbf{N} \qquad (۶)$$

را معادلهٔ سه‌جمله‌ای گویند. به‌ازای $n=۲$، معادلهٔ (۶) را دومجذوری هم گویند.

با فرض $x^n=y$، معادلهٔ (۶) به‌صورت $ay^۲+by+c=۰$ درمی‌آید: اگر $y_۱$ و $y_۲$ را، دو ریشهٔ حقیقی و متمایز معادلهٔ درجه دوم اخیر بگیریم، آن‌وقت معادلهٔ (۶) به‌مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\left[\begin{array}{l} x^n=y_۱ \\ x^n=y_۲ \end{array}\right.$$

اگر $y_۱=y_۲$، آن‌وقت معادلهٔ (۶) هم ارز معادلهٔ $x^n=y_۱$ است؛ و بالاخره اگر معادلهٔ $ay^۲+by+c=۰$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، معادلهٔ (۶) هم جواب ندارد.

مثال ۱۱. این معادله را حل کنید:

$$x^۸-۱۷x^۴+۱۶=۰$$

حل. با فرض $x^۴=y$ به‌معادلهٔ $y^۲-۱۷y+۱۶=۰$ می‌رسیم که دارای دو ریشه است: $y_۱=۱$ و $y_۲=۱۶$. بنابراین معادلهٔ مفروض هم‌ارز مجموعهٔ معادله‌های

$$\left[\begin{array}{l} x^۴=۱ \\ x^۴=۱۶ \end{array}\right.$$

می‌شود که با حل آن به‌دست می‌آید: $x_۱=۱$، $x_۲=-۱$، $x_۳=۲$، $x_۴=-۲$.

معادلهٔ کلی‌تر به‌صورت

$$a[f(x)]^۲+b[f(x)]+c=۰،\quad a\neq۰$$

که، درآن $f(x)$ تـابع مفروضی از مجهول x است، با تبدیل $y=f(x)$، حل می‌شود.

مثال ۱۴. این معادله را حل کنید:

$$|x|^{\frac{۸}{۵}}-۲۶|x|^{\frac{۴}{۵}}-۲۷=۰$$

حل. $y=|x|^{\frac{۴}{۵}}$ می‌گیریم، معادلـهٔ $y^{۲}-۲۶y-۲۷=۰$ به دست می‌آید؛ از آن‌جا $y_{۱}=-۱$، $y_{۲}=۲۷$. بنابراین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ معادله‌های

$$\left[\begin{array}{l} |x|^{\frac{۴}{۵}}=-۱ \\ |x|^{\frac{۴}{۵}}=۲۷ \end{array}\right.$$

هم‌ارز است. معادلهٔ اول این مجموعه ریشه ندارد، زیرا $|x|^{\frac{۴}{۵}}\geqslant ۰$؛ ازمعادلهٔ دوم به دست می‌آید $|x|^{۴}=۲۷^{۵}$ یا $|x|^{۴}=۳^{۱۵}$. به‌این ترتیب، ریشه‌های معادلهٔ مفروض چنین‌اند: $x_{۱}=۲۷\sqrt[۳]{۲۷}$، $x_{۲}=-\sqrt[۳]{۲۷}$.

۴۰۱. معادله‌هایی که به‌معادلهٔ درجه‌دوم یا معادلهٔ سه‌جمله‌ای منجر می‌شوند.

معادلهٔ به‌صورت

$$ax^{۳}+bx^{۲}+bx+a=۰ \qquad (۷)$$

را معادلهٔ متقارن درجه‌سوم (ویا گاهی، معادلهٔ معکوسهٔ درجه‌سوم) می‌نامند. چون

$$ax^{۳}+bx^{۲}+bx+a=(x+۱)(ax^{۲}+(b-a)x+a)=۰$$

بنابراین معادلهٔ (۷) هم‌ارز این مجموعه است:

$$\left[\begin{array}{l} x+۱=۰ \\ ax^{۲}+(b-a)x+a=۰ \end{array}\right.$$

معادله‌های به‌صورت $(a\neq ۰)$:

$$ax^{۴}+bx^{۳}+cx^{۲}+bx+a=۰ \qquad (۸)$$

$$ax^{۴}+bx^{۳}+cx^{۲}-bx+a=۰ \qquad (۹)$$

را معادله‌های متقارن درجه‌چهارم (یا معادله‌های معکوسهٔ درجهٔ چهارم) گویند.

برای جدا کردن این دو معادله از یکدیگر، گاهی معادلهٔ (۸) را متقارن مثبت و معادلهٔ (۹) را متقارن منفی گویند.

اگر دو طرف معادلهٔ (۸) را بر $x^۲$ تقسیم کنید ($x=۰$، درمعادله صدق نمی‌کند)، به معادلهٔ زیر، که هم‌ارز (۸) است، می‌رسیم:

$$a\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)+b\left(x+\frac{۱}{x}\right)+c=۰ \tag{۸a}$$

به همین ترتیب، از تقسیم دو طرف معادلهٔ (۹) بر $x^۲$، به این معادلهٔ هم‌ارز آن می‌رسیم:

$$a\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)+b\left(x-\frac{۱}{x}\right)+c=۰ \tag{۹a}$$

برای حل معادله‌های (۸a) و (۹a)، به ترتیب فرض می‌کنیم:

$$x+\frac{۱}{x}=y, \quad x-\frac{۱}{x}=z$$

چون $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲$ و $\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲=x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲$، به دست می‌آید:

$$a(y^۲-۲)+by+c=۰ \tag{۸b}$$

$$a(z^۲+۲)+bz+c=۰ \tag{۹b}$$

به این ترتیب، اگر $y_۱$ و $y_۲$ ریشه‌های معادلهٔ (۸b)، $z_۱$ و $z_۲$ ریشه‌های معادلهٔ (۹b) باشند، معادله‌های اصلی (۸) و (۹)، به ترتیب، هم‌ارز این مجموعه معادله‌ها می‌شود:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{۱}{x}=y_۱ \\ x+\frac{۱}{x}=y_۲ \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x-\frac{۱}{x}=z_۱ \\ x-\frac{۱}{x}=z_۲ \end{array}\right.$$

اگر معادلهٔ (۸b) یا (۹b) جواب نداشته باشد، آن وقت معادلهٔ اصلی هم جواب نخواهد داشت.

مثال ۱۳. این معادله را حل کنید:

$$x^۴-۲x^۳-x^۲-۲x+۱=۰$$

حل. چون $x=۰$ جواب معادله نیست، می‌توانیم دو طرف برابری

را بر $x^۲$ تقسیم کنیم که، در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)-۲\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۱=۰$$

با فرض $x+\frac{۱}{x}=y$، به معادلهٔ $y^۲-۲y-۳=۰$ می‌رسیم که، از آن‌جا، به‌دست‌می‌آید: $y_۱=۳$، $y_۲=-۱$. بنابراین، معادلهٔ اصلی، هم‌ارز مجموعه معادله‌های زیر است.

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{۱}{x}=۳ \\ \\ x+\frac{۱}{x}=-۱ \end{array}\right.$$

معادلهٔ دوم این مجموعهٔ جواب ندارد؛ و ریشه‌های معادلهٔ اول چنین‌است:

$$x_۱=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲},\quad x_۲=\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

مثال ۱۴. این معادله را حل کنید:

$$(x^۲+x-۲)(x^۲+x-۳)=۱۲$$

حل. اگر $x^۲+x=y$ بگیریم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$y^۲-۵y-۶=۰$$

از آن‌جا $y_۱=۶$ و $y_۲=-۱$. معادلهٔ اصلی، با مجموعهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\left[\begin{array}{l} x^۲+x=۶ \\ \\ x^۲+x=-۱ \end{array}\right.$$

معادلهٔ دوم جواب ندارد و با حل معادلهٔ اول به‌دست می‌آید: $x_۱=۲$، $x_۲=-۳$.

مثال ۱۵. این معادله را حل کنید:

$$(۲x^۲-۳x+۱)(۲x^۲+۵x+۱)=۹x^۲$$

حل. $x=۰$ در معادله صدق نمی‌کند، بنابراین می‌توانیم دوطرف برابری را بر $x^۲$ تقسیم کنیم که، در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$\left(۲x-۳+\frac{۱}{x}\right)\left(۲x+۵+\frac{۱}{x}\right)=۹$$

با فرض $۲x+\frac{۱}{x}=y$، به معادلهٔ $(y-۳)(y+۵)=۹$ می‌رسیم و با حل آن، به‌دست می‌آید: $y_۱=-۶$ و $y_۲=۴$. به‌این ترتیب، مجموعهٔ هم‌ارز معادلهٔ اصلی چنین است:

$$\left[\begin{array}{l} ۲x+\frac{۱}{x}=-۶ \\ ۲x+\frac{۱}{x}=۴ \end{array}\right.$$

که با حل آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$x_۱=\frac{-۳-\sqrt{۷}}{۲},\quad x_۲=\frac{-۳+\sqrt{۷}}{۲},\quad x_۳=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲},\quad x_۴=\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$$

معادلهٔ به‌صورت

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=a$$

را که در آن $a<b<c<d$ و $b-a=d-c$، می‌توان با استفاده از این تغییر مجهول، حل کرد:

$$y=\frac{(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d)}{۴}=x-\frac{a+b+c+d}{۴}$$

مثال ۱۶. این معادله را حل کنید:

$$(۱۲x-۱)(۶x-۱)(۴x-۱)(۳x-۱)=۵$$

حل. معادلهٔ مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\left(x-\frac{۱}{۱۲}\right)\left(x-\frac{۱}{۶}\right)\left(x-\frac{۱}{۴}\right)\left(x-\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۵}{۳\times۴\times۶\times۱۲}$$

چون $\frac{۱}{۱۲}<\frac{۱}{۶}<\frac{۱}{۴}<\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}$، بنابراین فرض می‌کنیم:

$$y=\frac{۱}{۴}\left[\left(x-\frac{۱}{۱۲}\right)+\left(x-\frac{۱}{۶}\right)+\left(x-\frac{۱}{۴}\right)+\left(x-\frac{۱}{۳}\right)\right]=x-\frac{۵}{۲۴}$$

با فرض $x=y+\frac{۵}{۲۴}$، معادلهٔ اصلی چنین می‌شود:

$$\left(y+\frac{۳}{۲۴}\right)\left(y+\frac{۱}{۲۴}\right)\left(y-\frac{۱}{۲۴}\right)\left(y-\frac{۳}{۲۴}\right)=\frac{۵}{۶\times ۱۲^{۲}};$$

و یا

$$\left[y^{۲}-\left(\frac{۱}{۲۴}\right)^{۲}\right]\cdot\left[y^{۲}-\left(\frac{۳}{۲۴}\right)^{۲}\right]=\frac{۵}{۶\times ۱۲^{۲}}$$

از آن جا $y^{۲}=\frac{۴۹}{۲۴^{۲}}$، یعنی $y_{۱}=\frac{۷}{۲۴}$ و $y_{۲}=-\frac{۷}{۲۴}$. ریشه‌های متناظر معادلهٔ اصلی، برابر است با $-\frac{۱}{۱۲}$ و $\frac{۱}{۲}$.

معادله به‌صورت

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=Ax^{۲}$$

که در آن $ab=cd$، با فرض $y=x+\frac{ab}{x}$ حل می‌شود.

مثال ۱۷. این معادله را حل کنید:

$$(x+۲)(x+۳)(x+۸)(x+۱۲)=۴x^{۲}$$

حل. روشن است که $(-۲)(-۱۲)=(-۳)(-۸)$. در سمت چپ معادله، پرانتزهای اول و چهارم را در هم و پرانتزهای دوم و سوم را در هم ضرب می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x^{۲}+۱۴x+۱۴x+۲۴)(x^{۲}+۱۱x+۲۴)=۴x^{۲}$$

دو طرف را بر $x^{۲}$ تقسیم می‌کنیم ($x=۰$ جواب معادله نیست):

$$\left(x+۱۴+\frac{۲۴}{x}\right)\left(x+۱۱+\frac{۲۴}{x}\right)=۴$$

که با معادلهٔ اصلی هم‌ارز است. $x+\frac{۲۴}{x}=y$ می‌گیریم، به‌معادلهٔ

$$y^{۲}+۲۵y+۱۵۰=۰$$

می‌رسیم، از آن‌جا $y_{۱}=-۱۵$ و $y_{۲}=-۱۰$. بنابراین، معادلهٔ اصلی، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{۲۴}{x}=-۱۵ \\ \\ x+\frac{۲۴}{x}=-۱۰ \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^۲+۱۵x+۲۴=۰ \\ x^۲+۱۰x+۲۴=۰ \end{array}\right.$$

و به‌این جواب‌ها می‌رسیم:

$$x_۱=\frac{-۱۵-\sqrt{۱۲۹}}{۲},\ x_۲=\frac{-۱۵+\sqrt{۱۲۹}}{۲},\ x_۳=-۶،\ x_۴=-۴$$

معادلهٔ به‌صورت

$$(x-a)^۴+(x-b)^۴=A$$

را می‌توان با فرض $y=x-\frac{a+b}{۲}$ حل کرد.

مثال ۱۸. این معادله را حل کنید:

$$(۶-x)^۴+(۸-x)^۴=۱۶$$

حل. $y=\frac{۶-x+۸-x}{۲}=۷-x$ می‌گیریم، یعنی $x=۷-y$.

به‌دست می‌آید:

$$(y+۱)^۴+(y-۱)^۴=۱۶ \quad \text{یا} \quad y^۴+۶y^۲-۷=۰$$

که با حل آن نتیجه می‌شود: $y_۱=۱$، $y_۲=-۱$ و از آن‌جا $x_۱=۸$، $x_۲=۶$.

تکلیف ۱.

۱. ریشه‌های این معادله‌ها را به‌ترتیب صعودی بنویسید:

$$x-۱=۰،\ x+\frac{۱}{۲}=۰،\ \sqrt{۲}x-۳=۰،\ ۱۳x+\sqrt{۲}=۰،$$

$$۲x-۱=۰،\ ۷-۲x-\frac{۱-۳x}{۷}=۲-\frac{۲x-۱}{۳}$$

۲. آیا عدد مربوطه، ریشهٔ معادله است:

۱) عدد $۱۰-۲\sqrt{۵}$ برای معادلهٔ $x^۲-۲۰x+۸۰=۰$؛

۲) عدد $\sqrt{۳}$ برای معادلهٔ $x^۲-۴x=۰$؟

۳. معادلهٔ درجه دومی با ضریب‌های درست تشکیل دهید، به‌نحوی که ریشه‌های آن، عددهای $\frac{۵}{۲}$ و ۷ باشند.

۴. عدد b و ریشهٔ دوم معادله را پیدا کنید:

۱) $x^۲-۵x+b=۰$، اگر $x_۱=۵$؛

۲) $x^۲+bx-۱۵=۰$، اگر $x_۱=۳$.

۵. معادله را حل کنید:

۱) $x^۲-۸x+۱۵=۰$; ۲) $x^۲-۳\frac{۱}{۴}x+۰/۷۵=۰$; ۳) $۲x^۲-(a-۱)x+a+۱=۰$; ۴) $ax^۲-(a+۱)x+a^۲+a=۰$

۶. می‌دانیم، معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشه‌های حقیقی است. بدون حل معادله، علامت ریشه‌ها را تعیین کنید:

۱) $x^۲-x+\frac{۱}{۴}=۰$; ۲) $۲x^۲+۹x=۵$; ۳) $x^۲+۴+۵x=۰$;

۴) $۱۰x=x^۲+۲۵$; ۵) $x^۲+(۳-۲a)x-۳a+۲=۰$

تکلیف ۲.

۱. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادله، دست کم یك ریشه داشته باشد:

۱) $x^۲-۲(a-۱)x+۲a+۱=۰$;

۲) $(a-۲)x^۲-۲ax+۲a-۳=۰$;

۲. معادله‌ای درجه دوم با ضریب‌های گویا تشکیل دهید، به‌نحوی که یکی از ریشه‌های آن، برابر باشد با: ۱) $۲-\sqrt{۵}$؛ ۲) $\sqrt{۳}$.

۳. معادلهٔ درجه دومی با ضریب‌های درست تشکیل دهید، به‌نحوی که ریشه‌های آن برابر $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۴}{۵}$ باشد.

۴. معادلهٔ درجه دوم را حل کنید:

۱) $۳x^۲-۴x=۱/۵$; ۲) $x^۲-(۲+۲\sqrt{۲})x+۲\sqrt{۲}=۰$;

۳) $x^۲-ax+۲a+۴=۰$; ۴) $(a+۱)x^۲-x+(۱-a)=۰$

۵. مقدار a را طوری پیدا کنید که معادله، دو ریشهٔ متمایز داشته باشد:
۱) $ax^۲+۲(a+۱)x+a+۳=۰$; ۲) $(a-۲)x^۲+ax+۱=۰$

۶. می‌دانیم معادلهٔ درجه دوم دارای ریشه است. بدون حل معادله، علامت ریشه‌ها را پیدا کنید:
۱) $۳x^۲+۱۲x-۴=۰$; ۲) $۹x^۲+۱=۱۶x$; ۳) $۳x^۲+۸x+۴=۰$; ۴) $۴x^۲-x-۳=۰$; ۵) $ax^۲+۲(a+۱)x+۲a=۰$

تکلیف ۳.

۱. ثابت کنید، اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$ عددهایی گویا و p و q عددهایی درست باشند، آن‌وقت ریشه‌های معادله، عددهایی درست‌اند.

۲. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید، به‌نحوی که

۱) ریشه‌های معادلهٔ $۲x+a=۰$ باشرط $۷x_۲-۴x_۱=۴۷$ سازگار باشند.

۲) نسبت ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+ax-۱۶=۰$ برابر -۴ باشد.

۳. $x_۱$ و $x_۲$ را ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ می‌گیریم $(c\neq۰)$ معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن برابر $\frac{۱}{x_۱}$ و $\frac{۱}{x_۲}$ باشند.

۴. مقدار a را طوری پیدا کنید که دو معادلهٔ

$$x^۲+ax+۸=۰,\quad x^۲+x+a=۰$$

دست‌کم یك ریشهٔ مشترك داشته باشند.

۵. همهٔ مقدارهای a را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادلهٔ

$$(a^۲-۵a+۳)x^۲+(۳a-۱)x+۲=۰$$

دو برابر ریشهٔ آن باشد.

تکلیف ۴.

۱. $x_۱$ و $x_۲$، ریشه‌های معادلهٔ $x_۱-۳ax+a^۲=۰$ در برابری $x_۱^۲+x_۲^۲=۱/۷۵$ صدق می‌کنند. مقدار a را پیدا کنید.

۲. $x_۱$ و $x_۲$ را ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ $(c\neq۰)$ می‌گیریم. هر عبارت را برحسب a، b و c بنویسید:

۱) $x_۱^۲+x_۲^۲$; ۲) $x_۱^۳+x_۲^۳$; ۳) $\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}$; ۴) $x_۱-x_۲$;

۵) $x_۲x_۱^۲+x_۲x_۲^۲$; ۶) $x_۱^۲-x_۲^۲$; ۷) $x_۱^۳-x_۲^۳$; ۸) $x_۱^۲-۴x_۱x_۲+x_۲^۲$

۳. همهٔ مقدارهای y را طوری پیدا کنید که معادلهٔ درجه دوم

$$(y+۲)x^۲-۲yx-y=۰$$

دارای دو ریشهٔ متقارن نسبت به‌نقطهٔ $x=۱$ (در روی محور عددی) باشد.

۴. برای دو عدد a و b می‌دانیم $a>b>۰$. بدون حل معادلهٔ

$$abx^۲-(a+b)x+۱=۰$$

نسبت مجموع به تفاضل دو ریشه آن را پیدا کنید.

۵. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۵x+۴a^۲=۰$، برابر مجذور ریشهٔ دیگر باشد.

تکلیف ۵.

این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $x^۸-۱۷x^۴+۱۶=۰$; ۲) $x^۴-۴x^۲-۱=۰$;

۳) $(x^۲+۵x)^۲-۲(x^۲+۵x)-۲۴=۰$;

۴) $۲x^۴+x^۳-۱۱x^۲+x+۲=۰$;

۵) $x^۴-۲x^۳-۱۳x^۲+۱۴x+۲۴=۰$;

۶) $(x^۲-۶x-۹)^۲=x^۳-۴x^۲-۹x$;

۷) $x^۲(x-۱)^۲+x(x^۲-۱)=۲(x+۱)^۲$;

۸) $۲x^۳-۶x+۵=۰$; ۹) $(x+۳)^۴+(x+۵)^۴=۱۶$;

۱۰) $(x-۴)(x-۵)(x-۶)(x-۷)=۱۶۸۰$

تکلیف ۶.

این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $(x^۲-۵x)^۲+۱۰(x^۲-۵x)+۲۴=۰$;

۲) $x^۴+x^۲+۶x-۸=۰$; ۳) $(x^۲+x+۱)(x^۲+x+۲)=۱۲$;

۴) $x^۴-۷x^۳+۱۴x^۲-۷x+۱=۰$;

۵) $۴x^۴+۲۰x^۳+۱۵x^۲-۴۵x-۵۴=۰$;

۶) $x^۴-x^۳-۱۰x^۲+۲x+۴=۰$;

۷) $۲(x^۲+x+۱)^۲-۷(x-۱)^۲=۱۳(x^۳-۱)$;

۸) $۲x^۸-۹x^۷+۲۰x^۶-۲۳x^۵+۴۶x^۴-۶۶x^۳+۸۰x^۲-۷۲x+$
$+۳۲=۰$; ۹) $(x-۲)^۶+(x-۴)^۶=۶۴$;

۱۰) $x(x+۱)(x-۱)(x+۲)=۲۴$

تمرین‌ها

۱. معادله‌ها را حل کنید:

۱) $۰/۲(x-۱)+۰/۵(۳x-۹)=\frac{۱}{۳}x-۲$;

۲) $۲x+(۲x+۳)=۴x-۱+۲x-۳+(۷-۲x)$;

۳) $(۳x+۴)(۵-۸x)=۰$; ۴) $x^۴+۲x^۲-۸=۰$;

۵) $۹x^۲+۶x+۱=۰$; ۶) $x^۶-۳x^۳+۲=۰$

۲. معادله را، برای مقدارهای قابل قبول پارامتر حل کنید:

۱) $ax+۲x+۳=۱-x$; ۲) $۴۰x+۱۳a=\sqrt{a}+۱۵x$;

۳) $۴۰x+۱۲a=\sqrt{a-۲}+\sqrt{a}+۳۶x$; ۴) $۳x+۹=a(a-x)$;

۵) $ax^۲=۱$; ۶) $(a-۱)x^۲+۲(a+۱)x+a-۲=۰$;

۷) $x^۲-۲(a-۱)x+۲a+۱=۰$;

۸) $x^۲+۲x-۸-a(x-۴)=۰$;

۹) $(a+۱)x^۲-(a-۱)x-۲a=۰$

۳. $x_۱$ و $x_۲$ را ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲-۱۱x+۱۳=۰$ می‌گیریم؛ محاسبه کنید:

۱) $\frac{x}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}$; ۲) $x_۱^۲+x_۲^۲$; ۳) $x_۱^۳+x_۲^۳$; ۴) $x_۱^۴+x_۲^۴$;

۵) $\frac{x_۱}{x_۲}(۱-x_۲^۲)+\frac{x_۲}{x_۱}(۱-x_۱^۲)$; ۶) $x_۱^۴-x_۲^۴$

۴. مجموع دو عدد برابر ۲۰ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۹۶ شده است. دو عدد را پیدا کنید.

۵. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۴۸ و طول وتـر آن برابر ۳۷ است، مساحت مثلث را پیدا کنید.

۶. مجموع مجذورهای رقم‌های یك عدد دو رقمی برابر است با ۶۵. اگر ۲۷ را بـه‌این عدد اضافه‌کنیم، عددی با همان رقم‌هـا، ولی در جهت عکس به‌دست می‌آید. این عدد را پیدا کنید.

۷. فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B برابر ۴۵ کیلومتر است. دو قطار، یکی از A ودیگری از B، به‌طورهم‌زمان به‌طرف یکدیگر حرکت‌کردند و بعداز ۲۰ دقیقه به‌هم رسیدند. قطاری‌کـه از A حرکت‌کرده بود، ۹ دقیقه زودتر از قطار دوم، تمام فاصلهٔ بین A و B را طی کرد. سرعت هر یك از قطارها را پیدا کنید.

۸. وقتی دو شیر آب را با هم باز کنیم، بشکه در ۱۲ دقیقه از آب پر می‌شود؛ ولی اگـر نصف بشکه را به‌کمك شیر اول، سپس، نصف دیگر آن‌را به‌کمك شیر دوم پر کنیم، ۲۵ دقیقه طول می‌کشد. هر یك از دو شیر، در چند دقیقه بشکه را پر می‌کند.

۹. ثابت‌کنید، معادله دارای دو ریشهٔ متمایز است و علامت ریشه‌ها را پیدا کنید:

۱) $x^۲-۱۰۰x+۶=۰$؛ ۲) $۲x^۲-۳x+۱=۰$؛

۳) $(x-۱)(x-۳)+(x+۱)(x+۲)=۶$

۱۰. پارامتر y را طوری پیدا کنیدکه معادلهٔ

$$x^۲-۳xy+y^۲+۲x-۲y+۱=۰$$

دو ریشهٔ مختلف داشته باشد. علامت این ریشه‌ها را، در رابطه با پارامتر y پیدا کنید.

۱۱. مجموع مجذورهای دو ریشهٔ معادلهٔ

$$x^۲-(a-۲)x-(a+۳)=۰$$

۱) برابر ۹؛ ۲) برابر $k^۲$ شده است، مقدار a را پیدا کنید.

۱۲. $x_۱$ و $x_۲$ را ریشه‌هـای معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$ می‌گیریـم؛ محاسبه کنید:

۱) $(x_۱^۲+Ax_۱+B)(x_۲^۲+Ax_۲+B)$;

۲) $(x_۱^۲+Ax_۱+B)+(x_۲^۲+Ax_۲+B)$

۱۳. معادلهٔ درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن در هر یك از این دو برابری صدق کنند:

$$۶_۱^۲+x_۲^۲=۵،\ ۳(x_۱^۵+x_۲^۵)=۱۱(x_۱^۳+x_۲^۳)$$

۱۴. معادله را حل کنید:

۱) $x^۳-۴x^۳-x+۴=۰$; ۲) $x^۴+x^۳-۱۲x^۲=۰$;

۳) $x^۴-۳x^۳+۳x^۲-x=۰$;

۴) $۶x^۴+۵x^۳-۳۸x^۲+۵x+۶=۰$;

۵) $۶x^۴+۷x^۳-۳۶x^۲-۷x+۶=۰$;

۶) $(x^۲-۶x)^۲-۲(x-۳)^۲=۸۱$;

۷) $(x+۱)^۲(x+۲)+(x-۱)^۲(x-۲)=۱۲$;

۸) $۲(x-۱)^۲-۵(x-۱)(x-۲)+۲(x-۲)^۲=۰$;

۹) $(x+۱)^۵+(x-۱)^۵=۳۲x$;

۱۰) $(x-۱)^۵+(x+۳)^۵=۲۴۲(x+۱)$;

۱۱) $(x^۲+۱)^۲=۴(۲x-۱)$; ۱۲) $(x^۲-۱۶)(x-۳)^۲=۹x^۲$

۱۳) $(۶x+۵)^۲(۳x+۲)(x+۱)=۳۵$;

۱۴) $x^۴+x^۳+x+۱=۴x^۲$;

۱۵) $(۸x+۷)^۲(۴x+۳)(x+۱)=\frac{۹}{۲}$;

۱۶) $۹\left(x+\frac{۴}{۳}\right)\left(x+\frac{۲}{۳}\right)\left(x-\frac{۱}{۳}\right)(۱-x)=۴x\left(x+\frac{۱}{۳}\right)$;

۱۷) $۸x^۴+۸x^۳-x-۱۹۰=۰$;

۱۸) $۱۵x^۴-۴x^۳-۶x^۲-۴x-۱=۰$;

۱۹) $x^۴-۲\sqrt{۲}x^۲+x+۲-\sqrt{۲}=۰$;

۲۰) $x^۴-x^۲+۲x-۱=۰$;

۲۱) $(x-۴)^۳(x-۵)^۳+۲(x-۵)^۳+(x-۴)^۳=۰$;

۲۲) $ax^۴-x^۳+a^۲x-a=۰$; ۲۳) $x^۴+۴a^۳x=a^۴$;

۲۴) $(ax-۱)^۳+(a+۱)^۳x^۲=۰$;

۲۵) $(۲x+a)^۵-(۲x-a)^۵=۲۴۲a^۵$.

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. $-\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۱۳},\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$, ۵. ۲. ۱) بله; ۲) نه.

۳. $۲x^۲-۱۹x+۳۵=۰$. ۴. ۱) $x_۲=۰$، $b=۰$; ۲) $x_۲=-۵$; $b=۲$. ۵. ۱) $\{۳،۵\}$; ۲) $\left\{\frac{۱}{۴},۳\right\}$; ۳) $x_۱=x_۲=۱+$ $+\sqrt{۲}\ (a=۵+۴\sqrt{۲})$; $x_۱=x_۲=۱-\sqrt{۲}(a=۵-۴\sqrt{۲})$،

$$x_۱=\frac{a-۱+\sqrt{a^۲-۱۰a-۷}}{۲},\quad x_۲=\frac{a-۱-\sqrt{a^۲-۱۰a-۷}}{۲}$$

$(a<۵-۴\sqrt{۲}\ \text{یا}\ a>۵+۴\sqrt{۲})$; ۴) $x_۱=x_۲=\frac{-\sqrt{۱۷}+۱}{۴}$

$\left(a=\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۸}\right)$، $x_۱=x_۲=۰(a=-۱)$، $x_۱=x_۲=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۴}$

$\left(a=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۸}\right)$، $x_{۱,۲}=\frac{a+۱\pm\sqrt{۲a+۱-۳a^۲-۴a^۳}}{۲a}$

$\left(a<-۱\ \text{یا}\ \frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۸}<a<۰\ \text{یا}\ ۰<a<\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۸}\right)$.

۶. ۱) دوریشهٔ مثبت؛ ۲) ریشه‌های هم‌علامت؛ ۳) دوریشهٔ منفی؛ ۴) دوریشهٔ مثبت؛ ۵) به‌ازای $a<\frac{۲}{۳}$ دوریشهٔ منفی، به‌ازای $a=\frac{۲}{۳}$ یك ریشهٔ منفی ویك ریشهٔ برابر صفر و به‌ازای $a>\frac{۲}{۳}$ دوریشهٔ باعلامت‌های مختلف.

تکلیف ۲.

۱. ۱) $a \leqslant ۰$ یا $a \geqslant ۴$، زیرا $\Delta = ۴a(a-۴)$؛ ۲) $۱ \leqslant a \leqslant ۶$ زیرا به‌ازای $a=۲$ معادله خطی می‌شود و به‌ازای $a \neq ۲$: $\Delta = -۴(a-۱)(a-۶)$.

۲. ۱) $x^۲-۴x-۱=۰$، زیرا اگر درمعادله $x^۲+px+q=۰$، قراردهیم $x=۲-\sqrt{۵}$، به‌دست می‌آید:

$$-(۴+p)\sqrt{۵}+(۹+۲p+q)=۰$$

و از آن‌جا $۹+۲p+q=۰$ و $p+۴=۰$، یعنی $p=-۴$ و $q=-۱$؛

۲) $x^۲-۳=۰$.

۳. $۱۵x^۲-۱۷x+۴=۰$ (ازمعادله $\left(x-\frac{۱}{۳}\right)\left(x-\frac{۴}{۵}\right)=۰$ به‌دست می‌آید)

۴. ۱) $\left(\frac{۴+\sqrt{۳۴}}{۶}, \frac{۴-\sqrt{۳۴}}{۶}\right)$؛

۲) $(۱+\sqrt{۲}-\sqrt{۳}, ۱+\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$؛ ۳) $x_۱=x_۲=۲(۱+\sqrt{۲})$ به‌ازای $a=۴(۱+\sqrt{۲})$، $x_۱=x_۲=۲(۱-\sqrt{۲})$ به‌ازای $a=۴(۱-\sqrt{۲})$، و به‌ازای $a<۴(۱-\sqrt{۲})$ و $a>۴(۱+\sqrt{۲})$، دو ریشه متفاوت $x_{۱,۲}=\frac{۱}{۲}(a\pm\sqrt{a^۲-۸۵+۱۶})$؛ ۴) به‌ازای $a=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$: $x_۱=x_۲=۲+\sqrt{۳}$، به‌ازای $a=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$: $x_۱=x_۲=۲-\sqrt{۳}$ و به‌ازای $a<-۱$، $-۱<a<-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ یا $a>\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ دو ریشه مختلف $x_{۱,۲}=\frac{۱\pm\sqrt{۴a^۲-۳}}{۲(a+۱)}$.

۵. ۱) $a<۰$ و $۱>a>۰$ (زیرا برای $a\neq۰$: $\Delta=۴(۱-a)$)؛

۲) $a<۲$ و $a>۲$ (زیرا برای $a\neq۲$؛ مبین معادله همیشه مثبت است).

۶. ۱) ریشه‌ها هم علامت نیستند (زیرا حاصل‌ضرب آن‌ها منفی‌است)؛

۲) دوریشهٔ‌مثبت (زیرا هم‌مجموع وهم حاصل‌ضرب آن‌ها مثبت‌اند)؛ ۳) دو ریشهٔ منفی؛ ۴) دوریشه باعلامت‌های مختلف؛ ۵) برای $(۱-\sqrt{۲})\leqslant a<۰$ دوریشهٔ مثبت و برای $۰<a\leqslant ۱+\sqrt{۲}$ دوریشهٔ‌منفی.

تکلیف ۳.

۲. ۱) $a=-۱۵$، ۲) $a=\pm ۶$؛

۳. $cx^۲+bx+a=۰$. ۴. $a=-۶$. ۵. $a=\frac{۲}{۳}$.

تکلیف ۴.

۱. $a=\pm\frac{۱}{۲}$ (از برابری $x_۱^۲+x_۲^۲=(x_۱+x_۲)^۲-۲x_۱x_۲$ استفاده کنید).

۲. ۱) $\frac{b^۲-۲ac}{a^۲}$؛ ۲) $\frac{b(۳ac-b^۲)}{a^۳}$؛ ۳) $-\frac{b}{c}$؛ ۴) برای $x_۱\geqslant x_۲$: $\sqrt{\frac{b^۲-۴ac}{a^۲}}$ وبرای $x_۱\leqslant x_۲$: $-\sqrt{\frac{b^۲-۴ac}{a^۲}}$؛ ۵) $-\frac{bc}{a^۲}$؛ ۶) برای $x_۱\geqslant x_۲$: $\frac{-b\sqrt{b^۲-۴ac}}{a|a|}$ و برای $x_۱\leqslant x_۲$: $\frac{b\sqrt{b^۲-۴ac}}{a|a|}$؛ ۷) برای $x_۱\geqslant x_۲$: $\frac{(b^۲-ac)\sqrt{b^۲-۴ac}}{a^۲|a|}$ و برای $x_۱\leqslant x_۲$ قرینهٔ آن؛ ۸) $\frac{b^۲-۶ac}{a^۲}$. ۳. ϕ (اگر $x_۱$ و $x_۲$ نسبت به $x=۱$ قرینهٔ هم باشند، آن‌وقت $x_۱+x_۲=۲$، به‌جزاین $x_۱+x_۲=\frac{۲y}{y+۲}$ و معادلهٔ $\frac{۲y}{y+۲}=۲$ جواب ندارد). ۴. اگر اختلاف ریشه‌ها مثبت باشد: $\frac{a+b}{a-b}$ واگراختلاف ریشه‌ها منفی باشد، قرینهٔ آن. ۵. $a=\pm\frac{۳}{۴}\sqrt{۶}$.

تکلیف ۵.

۱. $\{-۲, -۱, ۱, ۲\}$؛

۲) $\left\{\frac{۱-\sqrt{۲\sqrt{۲}-۱}}{\sqrt{۲}}, \frac{۱+\sqrt{۲\sqrt{۲}-۱}}{\sqrt{۲}}\right\}$؛ ۳) $\{-۶, -۴, -۱, ۱\}$

۴) $\left\{\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}, \frac{-۳+\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۲\right\}$؛ ۵) $\{-۳, -۱, ۲\}$؛

۶) $\left\{\frac{۵-\sqrt{۶۱}}{۲}, -۱, \frac{۵+\sqrt{۶۱}}{۲}, ۹\right\}$؛ ۷) $\{۱-\sqrt{۲}, ۱+\sqrt{۲}\}$؛

۸) $\left\{-\left(\sqrt[۳]{۲}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}\right)\right\}$؛ ۹) $\{-۵, -۳\}$؛ ۱۰) $\{-۱, ۱۲\}$.

تکلیف ۶.

۱) $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$؛ ۲) $\{-۲, ۱\}$؛ ۳) $\{-۲, ۱\}$؛

۴) $\left\{۲\pm\sqrt{۳}, \frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}\right\}$؛ ۵) $\left\{-۳, -۲, \pm\frac{۳}{۲}\right\}$؛

۶) $\left\{-۱\pm\sqrt{۳}, \frac{۳\mp\sqrt{۱۷}}{۲}\right\}$؛ ۷) $\left\{-۱, -\frac{۱}{۲}, ۲, ۴\right\}$؛

۸) $\{۱, ۲\}$؛ ۹) $\{۲, ۴\}$؛ ۱۰) $\{-۲, ۲\}$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\left\{\frac{۸۱}{۴۱}\right\}$؛ ۲) $(-\infty, +\infty)$؛ ۳) $\left\{-\frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۸}\right\}$؛

۴) $\{-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}\}$؛ ۵) $\left\{-\frac{۱}{۳}\right\}$؛ ۶) $\{۱, \sqrt[۳]{۲}\}$.

۲. ۱) به‌شرط $a\neq-۳$، $x=\frac{-۲}{a+۳}$؛ ۲) $(a\geqslant ۰)x=\frac{\sqrt{a}-۱۳a}{۲۵}$؛

۳) $(a\geqslant ۲)\ x=\frac{\sqrt{a-۲}+\sqrt{a}-۱۲a}{۴}$؛ ۴) $(a=-۳)\ x\in\mathbf{R}$ و

$(a\neq-۳)x=a-۳$؛ ۵) $(a>۰)x=\pm\frac{۱}{\sqrt{a}}$؛

۶) $x_۱=\frac{۱}{۴}$ $(a=۱)$، $x_۱=x_۲=\frac{۳}{۲}$ $\left(a=\frac{۱}{۵}\right)$،
$x=\frac{-(a+۱)\pm\sqrt{۵a-۱}}{a-۱}$ $\left(\frac{۱}{۵}<a<۱\right.$ و $\left.a>۱\right)$؛
۷) $x_۱=x_۲=-۱$ $(a=۰)$، $x_۱=x_۲=۳$ $(a=۴)$،
$x=(a-۱)\pm\sqrt{a(a-۴)}$ $(a<۰$ و $a>۴)$؛
۸) $x_۱=x_۲=۰$ $(a=۲)$، $x_۱=x_۲=۸$ $(a=۱۸)$،
$x=\frac{a-۲\pm\sqrt{(a-۲)(a-۱۸)}}{۲}$ $(a<۲$ و $a>۱۸)$؛

۹) $x=-۱$ $(a=-۱)$، $x_۱=x_۲=-۱$ $\left(a=-\frac{۱}{۳}\right)$، $x_۱=-۱$
و $x_۲=\frac{۲a}{a+۱}$ $\left(a<-۱\right.$، $-۱<a<-\frac{۱}{۳}$ و $\left.a>-\frac{۱}{۳}\right)$.

۳. ۱) $\frac{۶۹}{۲۶}$؛ ۲) $\frac{۶۹}{۴}$؛ ۳) $\frac{۴۷۳}{۸}$؛ ۴) $\frac{۳۴۰۹}{۱۶}$؛ ۵) $-\frac{۲۶۹}{۲۶}$؛
۶) به‌شرط $x_۱>x_۲$ برابر $\frac{۷۵۹\sqrt{۱۷}}{۱۶}$ و به شرط $x_۱<x_۲$ برابر $-\frac{۷۵۹\sqrt{۱۷}}{۱۶}$.

۴. یکی ازعددها برابر ۸ و دیگری برابر ۱۲. ۵. ۲۱۰. ۶. ۴۷.

۷. سرعت قطاری که از A حرکت می‌کند برابر ۷۵ کیلومتر درساعت وسرعت قطاردیگر برابر ۶۰ کیلومتردرساعت است.

۸. شیر اول، بشکه را در ۲۰ دقیقه وشیر دوم در ۳۰ دقیقه پرمی‌کند.

۹. ۱) دوریشهٔ مثبت؛ ۲) دوریشهٔ مثبت؛ ۳) دوریشه باعلامت‌های متفاوت.

۱۰. به شرط $y<۰$ و $y>\frac{۴}{۵}$ دو ریشهٔ متمایز، به‌شرط $y<۰$ دو ریشهٔ منفی، به‌شرط $\frac{۴}{۵}<y<۱$ و $y>۱$ دو ریشهٔ مثبت و، بالاخره، به‌شرط

$y=۱$، یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری مثبت است.

۱۱. ۱) $a=۱$؛ ۲) $a=۱$ ($k=۳$ و $k=-۳$) و $a=۱\pm\sqrt{k^۲-۹}$ ($k>۳$ و $k<-۳$).

۱۲. ۱) $q^۲-Apq-ABp+B(p^۲-۲q)+A^۲q+B^۲$؛
۲) $(p^۲-۲q)-Ap+۲B$.

۱۳. $۲x^۲-۵=۰$، $x^۲+۳x+۲=۰$، $x^۲-۳x+۲=۰$.

۱۴. ۱) $\{-۱, ۱, ۴\}$؛ ۲) $\{-۴, ۰, ۳\}$؛ ۳) $\{۰, ۱\}$؛
۴) $\left\{-۳, -\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}, ۲\right\}$؛ ۵) $\left\{-۳, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, ۲\right\}$؛
۶) $\{۳-۲\sqrt{۵}, ۳+۲\sqrt{۵}\}$؛ ۷) $\{۱\}$؛ ۸) $\{۰, ۳\}$؛
۹) $\{-۱, ۰, ۱\}$؛ ۱۰) $\{-۱, ۰, -۲\}$؛ ۱۱) $\{۱\}$؛
۱۲) $\{۱-\sqrt{۷}, ۱+\sqrt{۷}\}$؛ ۱۳) $\left\{\frac{-۵-\sqrt{۲۱}}{۶}, \frac{-۵+\sqrt{۲۱}}{۶}\right\}$؛
۱۴) $\left\{\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}, ۱, \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\right\}$؛ ۱۵) $\left\{-\frac{۵}{۴}, -\frac{۱}{۲}\right\}$؛
۱۶) $\left\{\frac{-۱\pm\sqrt{۱۷}}{۶}, -۱ \text{ و } \frac{۲}{۳}\right\}$؛ ۱۷) $\left\{-\frac{۵}{۲}, ۲\right\}$؛ ۱۸) $\left\{-\frac{۱}{۳}, ۱\right\}$؛
۱۹) $\left\{\frac{۱\pm\sqrt{۴\sqrt{۲}-۱}}{۲}, \frac{-۱\pm\sqrt{۴\sqrt{۲}+۱}}{۲}\right\}$؛ ۲۰) $\left\{\frac{-۱\pm\sqrt{۵}}{۲}\right\}$؛
۲۱) $\left\{\frac{۹}{۲}, ۶+\sqrt[۳]{۴}+\sqrt[۳]{۲}\right\}$؛ ۲۲) $x_۱=۰$ $(a=۰)$، $x_۱=-\sqrt[۳]{a}$ و
$x_۲=\frac{۱}{a}$ $(a\neq۰)$؛ ۲۳) $x_۱=۰$ $(a=۰)$، $x=\frac{(-۱\pm\sqrt{۲\sqrt{۲}-۱})a}{\sqrt{۲}}$
$(a\neq۰)$؛ ۲۴) $x=\pm۱$ $(a=۰)$، $x_۱=-۱$ و
$x_{۲,۳}=\frac{-۳a-۱\pm(a+۱)\sqrt{۴a+۱}}{۲a^۳}$ $\left(-\frac{۱}{۴}<a<۰ \text{ و } a>۰\right)$؛
۲۵) $x\in\mathbf{R}$ $(a=۰)$ و $x=\pm a$ $(a\neq۰)$.

§۲. جست‌وجوی ریشه‌های چندجمله‌ای

۱. برای حل معادله‌های جبری با ضریب‌های درست، می‌توان از قضیهٔ زیر استفاده کرد.

قضیهٔ ۱. برای این‌که کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ $(q\neq ۰)$، ریشهٔ معادلهٔ

$$a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰=۰,\quad a_n\neq ۰ \qquad (۱)$$

با ضریب‌های درست باشد، باید عدد p مقسوم‌علیه مقدار ثابت $a_۰$ و عدد q مقسوم‌علیه ضریب بزرگترین درجه، یعنی a_n باشد.

نتیجه. اگر در معادلهٔ با ضریب‌های درست، ضریب بزرگترین درجه، یعنی a_n، برابر واحد باشد و اگر معادله ریشه‌های گویا داشته باشد، این ریشه‌های گویا عددهایی درست‌اند که در ضمن، جزو مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت $a_۰$ هستند.

این معادله را در نظر بگیرید:

$$۲x^۴+۷x^۳-۱۲x^۲-۳۸x+۲۱=۰$$

مقدار ثابت این معادله (یعنی ۲۱)، دارای مقسوم‌علیه‌های ±۱، ±۳، ±۷، ±۲۱ است؛ و مقسوم‌علیه‌های ضریب بزرگترین درجه (یعنی ۲) عبارتند از ±۱ و ±۲. اگر همهٔ کسرهای ممکن $\frac{p}{q}$ را پیدا کنیم، به این عددها می‌رسیم:

$$۱,\ ۳,\ ۷,\ ۲۱,\ -۱,\ -۳,\ -۷,\ -۲۱,$$

$$\frac{۱}{۲},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۷}{۲},\ \frac{۲۱}{۲},\ -\frac{۱}{۲},\ -\frac{۳}{۲},\ -\frac{۷}{۲},\ -\frac{۲۱}{۲}$$

همهٔ ریشه‌های گویای معادلهٔ مفروض، متعلق به همین مجموعهٔ عددها هستند.

برای این‌که ناچار به آزمایش همهٔ این عددها نشویم، بهتر است از قضیهٔ زیر استفاده کنیم.

قضیهٔ ۲. اگر کسر ساده‌نشدنی $\frac{p}{q}$ $(q\neq ۰)$ ریشه‌ای از معادلهٔ

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰=۰$$

باشد (ضریب‌های معادله، عددهای درست‌اند)، آن‌وقت برای هر عدد درست m، عدد $P(m)$ بر عدد $p-mq$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱. همهٔ ریشه‌های گویای این معادله را پیدا کنید:

$$P(x)=۲x^۴+۷x^۳-۱۲x^۲-۳۸x+۲۱=۰$$

حل. همان‌طور که در بالا دیدیم، ریشه‌های گویای این‌معادله را، باید در بین عددهای زیر جست‌وجو کرد:

$$\pm ۱،\ \pm ۳،\ \pm ۷،\ \pm ۲۱،\ \pm\frac{۱}{۲}،\ \pm\frac{۳}{۲}،\ \pm\frac{۷}{۲}،\ \pm\frac{۲۱}{۲}$$

اگر $x=۱$ را در سمت چپ معادله قرار دهیم، به دست می‌آید: $P(۱)=-۲۰$، یعنی $x=۱$ ریشهٔ‌معادله نیست. بنا به قضیهٔ ۲، اگر $\frac{p}{q}$ ریشهٔ معادلهٔ $P(x)=۰$ باشد، آن وقت $P(۱)$ بر $p-q$ بخش‌پذیر است. عدد (-۲۰) بر $۷-۱$، یعنی ۶، بخش‌پذیر نیست، بنا براین عدد ۷ نمی‌تواند ریشهٔ‌معادله باشد. به‌همین‌ترتیب، معلوم می‌شود که عددهای -۲۱، $-\frac{۲۱}{۲}$، -۷، $-\frac{۷}{۲}$، $-\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲۱}{۲}$ هم نمی‌توانند ریشهٔ معادله باشند. به‌این‌ترتیب، تنها عددهای زیر، برای آزمایش، باقی‌می‌ماند.

$$۳،\ ۲۱،\ -۱،\ -۳،\ \frac{۱}{۲}،\ \frac{۳}{۲}،\ \frac{۷}{۲}،\ -\frac{۳}{۲}$$

عدد $x=۳$، ریشهٔ معادله نیست، زیرا $P(۳)=۱۵۰$.

دوباره از قضیهٔ ۲ استفاده می‌کنیم. اگر عدد $\frac{p}{q}$ ریشهٔ معادله باشد، باید $P(۳)$ بر $p-۳q$ بخش‌پذیر شود. عدد ۱۵۰ بر $۲۱-۳=۱۸$ بخش‌پذیر نیست، پس $x=۲۱$ ریشهٔ معادله نیست. چون ۱۵۰ بر ۴ و بر ۹ بخش‌پذیر نیست، عددهای -۱ و $-\frac{۳}{۲}$ هم نمی‌توانند ریشهٔ معادله باشند. به‌این ترتیب، برای آزمایش، این عددها باقی می‌ماند:

$$-۳,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۳}{۲},\ \frac{۷}{۲}$$

و به‌دست می‌آید:

$$P(-۳)=۰؛\ P\left(\frac{۱}{۲}\right)=۰,\ P\left(\frac{۳}{۲}\right)\neq ۰,\ P\left(\frac{۷}{۲}\right)\neq ۰$$

ریشه‌های گویای این معادله، عبارتند از ۳ — و $\frac{۱}{۲}$.

۰۲ برای حل معادلهٔ جبری

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰=۰,\ (a_n\neq ۰)$$

می‌توان از روش پایین آوردن درجهٔ معادله استفاده کرد؛ به‌این ترتیب که اگر α ریشه‌ای از معادله باشد، براساس قضیهٔ به‌زو، $P(x)$ را بر $x-\alpha$ تقسیم کرد. ماهیت این روش را، ضمن مثالی روشن می‌کنیم.

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$P_۴(x)=x^۴+۲x^۳-۲x^۲-۶x+۵=۰$$

حل. چون ضریب‌های این معادله، عددهایی درست‌اند و، درضمن، ضریب $x^۴$ (یعنی بزرگترین درجه) برابر واحد است، تلاش می‌کنیم، دست‌کم یکی از ریشه‌های درست آن‌را پیدا کنیم (با استفاده از نتیجهٔ قضیهٔ ۱). مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت این‌معادله، عبارتنداز ۱، ۱ —، ۵، ۵ —. داریم:

$$P_۴(۱)=۱+۲-۲-۶+۵=۰;$$
$$P_۴(-۱)=۱-۲-۲+۶+۵=۸\neq ۰;$$
$$P_۴(۵)=۶۲۵+۲۵۰-۵۰-۳۰+۵=۸۰۰\neq ۰;$$
$$P_۴(-۵)=۶۲۵-۲۵۰-۵۰+۳۰+۵=۳۶۰\neq ۰$$

چندجمله‌ای $P_۴(x)$، ریشهٔ درست $x_۱=۱$ را دارد و عددهای ۱ —، ۵ و ۵ —، ریشهٔ معادله نیستند. بنابر قضیهٔ به‌زو باید داشته باشیم:

$$P_۴(x)=(x-۱)\cdot P_۳(x)$$

که در آن $P_۳(x)$، یك چندجمله‌ای درجهٔ سوم است:

$$P_۳(x)=a_۳x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$$

که ضریب‌های $a_۳$، $a_۲$، $a_۱$ و $a_۰$ آن‌را می‌توان مثلاً به‌کمك طرح هورنر

به‌دست آورد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^۴+۲x^۳-۲x^۲-۶x+۵=(x-۱)(x^۳+۳x^۲+x-۵)$$

اکنون، ریشه‌های این معادله را پیدا می‌کنیم:

$$P_۳(x)=x^۳+۳x^۲+x-۵=۰$$

لزومی نــدارد همهٔ مقسوم‌علیه‌هــای مقدار ثابت ۵−، یعنی ۱، ۱−، ۵ و ۵− را مورد آزمایش قرار دهیم، زیرا از قبل می‌دانیم کــه هیچ کدام از عددهــای ۱−، ۵ یــا ۵−، ریشهٔ معادلهٔ $P_۴(x)=۰$ نیستند و، بنابراین نمی‌توانند ریشهٔ معادلهٔ $P_۳(x)=۰$ باشند. بنابراین، تنها عدد ۱ را آزمایش می‌کنیم: $P_۳(۱)=۰$؛ و طرح هورنر به‌ما می‌دهد:

$$P_۳(x)=(x-۱)(x^۲+۴x+۵)$$

به‌این ترتیب، معادلهٔ ما به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x-۱)^۲(x^۲+۴x+۵)=۰$$

چون مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲+۴x+۵$، منفی است، بنابراین، معادلهٔ درجه دوم $x^۴+۴x+۵=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد و معادلهٔ مفروض، تنها دارای دو ریشهٔ برابر است: $x_۱=x_۲=۱$ (به‌زبان دیگر، $x=۱$، ریشهٔ مضاعف معادله است).

۳. از روش پایین آوردن درجهٔ معادله، برای حل معادله‌های متقارن (یا آن‌طورکه گاهی می‌گویند: معادله‌های معکوسهٔ) درجهٔ سوم و پنجم هم می‌توان استفاده کرد. این معادله‌ها، به‌این‌صورت‌اند:

$$ax^۳+bx^۲+bx+a=۰،\ a\neq۰ \qquad (۲)$$

$$ax^۵+bx^۴+cx^۳+cx^۲+bx+a=۰،\ a\neq۰ \qquad (۳)$$

آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که $x=-۱$، ریشهٔ هریک از این دو معادله است. بنابراین، معادله‌های (۲) و (۳)، با معادله‌های زیر هم‌ارزند:

$$(x+۱)[ax^۲+(b-a)x+a]=۰ \qquad (۴)$$

$$(x+۱)[ax^۴+(b-a)x^۳+(a-b+c)x^۲+$$
$$+(b-a)x+a]=۰ \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۴) هم‌ارز است با مجموعهٔ

$$\left[\begin{array}{l} x=-۱ \\ ax^{۲}+(b-a)x+a=۰ \end{array}\right.$$

و معادلهٔ (۵) با مجموعهٔ

$$\left[\begin{array}{l} x=-۱ \\ ax^{۴}+(b-a)x^{۳}+(a-b+c)x^{۲}+(b-a)x+a=۰ \end{array}\right. \qquad (۶)$$

در مجموعهٔ (۶)، معادلهٔ دوم، معادله‌ای متقارن از درجهٔ چهارم است که می‌تواند به‌معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل شود.

مثال ۳. این معادله را حل کنید:

$$۲x^{۵}+۳x^{۴}-۵x^{۳}-۵x^{۲}+۳x+۲=۰$$

حل. چون معادلهٔ مفروض، معادله‌ای متقارن از درجهٔ فرد است، بنابراین $x=-۱$ یکی از ریشه‌های آن است. با تجزیهٔ سمت چپ برابری به‌دست می‌آید:

$$(x+۱)(۲x^{۴}+x^{۳}-۶x^{۲}+x+۲)=۰$$

اکنون به‌حل معادلهٔ متقارن درجه چهارم، که از این‌جا به‌دست‌می‌آید، می‌پردازیم:

$$۲x^{۴}+x^{۳}-۶x^{۲}+x+۲=۰$$

$x=۰$ ریشهٔ معادله نیست، بنابراین می‌توان دو طرف برابری را بر $x^{۲}$ تقسیم کرد و، سپس فرض کرد $y=x+\frac{۱}{x}$ که، درنتیجه، به‌ریشه‌های $x_{۲}=x_{۳}=۱$ ، $x_{۴}=-۲$ ، $x_{۵}=-۰/۵$ می‌رسیم.

۴. معادله‌های به‌صورت

$$a_{۰}x^{۲n+۱}+a_{۱}x^{۲n}+\ldots+a_{n}x^{n+۱}+\lambda a_{n}x^{n}+$$
$$+\lambda^{۳}a_{n-۱}x^{n-۱}+\ldots+a_{۰}\lambda^{۲n+۱}=۰, \quad a_{۰}\neq ۰ \qquad (۷)$$

$$a_{۰}x^{۲n}+a_{۱}x^{۲n-۱}+\ldots+a_{n-۱}x^{n+۱}+a_{n}x^{n}+\lambda a_{n-۱}x^{n-۱}+$$
$$+\lambda^{۲}a_{n-۲}x^{n-۲}+\ldots+\lambda^{n}a_{۰}=۰, \quad a_{۰}\neq ۰ \qquad (۸)$$

که در آن‌ها، λ عددی مخالف صفر است، معادله‌های جبری بازگشتی نامیده

می‌شوند. به‌ازای $\lambda=۱$، معادله‌های (۷) و (۸)، همان معادله‌های متقارن‌اند. مثلاً معادلهٔ

$$۲x^۵+۶x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۴۸x-۶۴=۰$$

معادله‌ای بازگشتی به‌ازای $\lambda=-۲$، و معادلهٔ

$$۴x^۶+۵x^۵-۳x^۴+۱۰x^۳-۹x^۲+۴۵x+۱۰۸=۰$$

معادله‌ای بازگشتی به‌ازای $\lambda=۳$ است.

معادلهٔ بازگشتی از درجهٔ فرد، همیشه ریشهٔ $x=-\lambda$ را می‌پذیرد، زیرا معادله را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$a_۰(x^{۲n+۱}+\lambda^{۲n+۱})+a_۱x(x^{۲n-۱}+\lambda^{۲n-۱})+\dots+ \\ +a_nx^n(x+\lambda)=۰$$

و به‌ازای $x=-\lambda$، هریک‌از مقدارهای داخل پرانتزها، برابر صفر می‌شود.

حل معادلهٔ بازگشتی از درجهٔ زوج را، با مثالی روشن می‌کنیم.

مثال ۴. این معادله را حل کنید:

$$۲x^۸-۹x^۷+۲۰x^۶-۳۳x^۵+۴۶x^۴- \\ -۶۶x^۳+۸۰x^۲-۷۲x+۳۲=۰$$

حل. این، یک معادلهٔ درجهٔ هشتم بازگشتی است که، در آن، $\lambda=۲$، زیرا می‌توان آن‌را به‌این‌صورت نوشت:

$$۲x^۸-۹x^۷+۲۰x^۶-۳۳x^۵+۴۶x^۴-۳۳\times \\ \times ۲x^۳+۲۰\times ۲^۲x^۲-۹\times ۲^۳x+۲\times ۲^۴=۰$$

اگر دو طرف معادله را بر $x^۴$ تقسیم ($x=۰$، ریشهٔ معادله نیست) و، سپس، جمله‌ها را گروه‌بندی کنیم، به‌معادلهٔ زیر که هم‌ارز آن است می‌رسیم:

$$۲\left(x^۴+\frac{۱۶}{x^۴}\right)-۹\left(x^۳+\frac{۸}{x^۳}\right)+۲۰\left(x^۲+\frac{۴}{x^۲}\right)- \\ -۳۳\left(x+\frac{۲}{x}\right)+۴۶=۰$$

فرض می‌کنیم $y=x+\frac{\lambda}{x}=x+\frac{۲}{x}$. دراین‌صورت

$$x^۲+\frac{۴}{x^۲}=y^۲-۴;\quad x^۳+\frac{۸}{x^۳}=y^۳-۶y;$$

$$x^۴+\frac{۱۶}{x^۴}=y^۴-۸y^۲+۸$$

و معادلهٔ ما به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۲y^۴-۹y^۳+۴y^۲+۲۱y-۱۸=۰$$

که اگر در آن، ریشه‌های گویا را جست‌وجو کنیم، این‌ریشه‌ها به‌دست‌می‌آید:

$$y_۱=۱،\ y_۲=۲،\ y_۳=۳،\ y_۴=-\frac{۳}{۲}$$

به‌این‌ترتیب، معادلهٔ مفروض، به‌مجموعه‌ای شامل چهار معادله تبدیل می‌شود:

$$x+\frac{۲}{x}=۱،\ x+\frac{۲}{x}=۲،\ x+\frac{۲}{x}=۳،\ x+\frac{۲}{x}=-\frac{۳}{۲}$$

معادلهٔ مفروض، تنها دو ریشهٔ حقیقی دارد: ۱ و ۲.

۵. اگر عبارت سمت چپ برابری را در معادلهٔ جبری بتوان به‌ضرب عامل‌ها تجزیه کرد، آن‌وقت، معادله بـه‌مجموعه‌ای از معادله‌هـای از درجهٔ پایین‌تر منجر می‌شود. برای تجزیهٔ سمت چپ معادله، اغلب می‌توان ازروش ضریب‌های نامعین استفاده کرد (§۳ از فصل دوم را ببینید).

مثال ۵. این معادله را حل کنید:

$$x^۴-۴x^۳-۱۰x^۲+۳۷x-۱۴=۰$$

حل. در سمت چپ برابری، با عبارتی درجهٔ چهارم سر و کار داریم. چون ضریب درجهٔ چهارم برابر واحد است، تجزیه عبارت، منجر به‌پیدا کردن مقدارهای p، q، b و c در اتحاد زیر می‌شود:

$$x^۴-۴x^۳-۱۰x^۲+۳۷x-۱۴=(x^۲+px+q)(x^۲+bx+c)$$

در هر اتحاد، باید ضریب‌هـای جمله‌های هم‌درجه، در دو طرف بـرابری، یکی باشند؛ درنتیجه، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} p+b=-۴،\ c+q+pb-۱۰، \\ pc+qb=۳۷،\ qc=-۱۴ \end{cases} \qquad (۹)$$

کوشش می‌کنیم، جواب درستی از این دستگاه را پیدا کنیم. از معادلهٔ آخر دستگاه، معلوم می‌شود که q (و همچنین c) ممکن است یکی از مقدارهای ±۱، ±۲، ±۷ و ±۱۴ را قبول کند. اگر $q=۱$، آن‌وقت $c=-۱۴$. در این حالت، معادله‌های دوم و سوم دستگاه تبدیل می‌شوند:

$$\begin{cases} pb=۳ \\ -۱۴p+b=۳۷ \end{cases}$$

که از آن‌جا، برای b، به‌معادلهٔ $b^۲-۳۷b-۴۲=۰$ می‌رسیم که دارای ریشه‌های درست، نیست. بنابراین، دستگاه (۹)، به‌ازای $q=۱$، جواب درست ندارد.

$q=۲$ می‌گیریم، دراین‌صورت $c=-۷$ و معادله‌های دوم و سوم در (۹)، منجر به‌این دستگاه می‌شوند:

$$\begin{cases} pb=-۵ \\ -۷p+۲b=۳۷ \end{cases}$$

که با حذف p در بین آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$۲b^۲-۳۷b+۳۵=۰$$

که دارای ریشهٔ $b=۱$ است و از آن‌جا $p=-۵$. معادلهٔ اول دستگاه(۹) هم، به‌ازای $b=۱$ و $p=-۵$ برقرار است. به‌این ترتیب داریم:

$$x^۴-۴x^۳-۱۰x^۲+۳۷x-۱۴=(x^۲-۵x+۲)(x^۲+x-۷)$$

معادله چهار ریشهٔ حقیقی دارد:

$$x_{۱,۲}=\frac{۵\pm\sqrt{۱۷}}{۲},\quad x_{۳,۴}=\frac{-۱\pm\sqrt{۲۹}}{۲}$$

روش‌های دیگر تجزیه چندجمله‌ای سمت چپ معادله‌های جبری را، روی چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۶. این معادله را حل کنید:

$$(x^۲+x+۴)^۲+۳x(x^۲+x+۴)+۲x^۲=۰ \qquad (۱۰)$$

حل. سمت چپ برابری، نسبت به‌سه‌جمله‌ای درجه دوم $x^۲+x+۴$،

یک عبارت درجهٔ دوم است. آن‌را y می‌نامیم و به‌بررسی عبارت $y^{۲}+۳xy+۲x^{۲}$ می‌پردازیم. داریم:

$$y^{۲}+۳xy+۲x^{۲}=(y+x)(y+۲x)$$

که در نتیجه، به‌مجموعهٔ معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\left[\begin{array}{l} x^{۲}+۲x+۴=۰ \\ x^{۲}+۳x+۴=۰ \end{array}\right.$$

که هیچ‌کدام از آن‌ها، ریشهٔ حقیقی ندارد و، بنابراین، معادلهٔ (۱۰) جواب ندارد.

مثال ۷. به‌ازای هر مقدار پارامتر a، این معادله را حل کنید:

$$(۱+a^{۲})x^{۲}+۲(x-a)(۱+ax)+۱=۰ \qquad (۱۱)$$

حل. سمت‌چپ‌معادله‌را به‌ضرب‌عامل‌ها تجزیه‌می‌کنیم. به‌ترتیب‌داریم:

$$(۱+a^{۲})x^{۲}+۲(a-x)(۱+ax)+۱=$$
$$=a^{۲}x^{۲}+x^{۲}+۱+۲(x-a)(۱+ax)=$$
$$=(a^{۲}x^{۲}+۲ax+۱)+۲(x-a)(۱+ax)+x^{۲}-۲ax=$$
$$=(ax+۱)^{۲}+۲(x-a)(۱+ax)+(x-a)^{۲}-a^{۲}=$$
$$=(ax+۱+x-a)^{۲}-a^{۲}=(ax+x-۲a+۱)(ax+x+۱)$$

و به‌مجموعهٔ دومعادلهٔ خطی زیر می‌رسیم:

$$\left[\begin{array}{l} (a+۱)x-۲a+۱=۰ \\ (a+۱)x+۱=۰ \end{array}\right.$$

یعنی به‌ازای $a=-۱$، معادلهٔ (۱۱) جواب ندارد؛

به‌ازای $a\neq-۱$، عددهای $\frac{۲a-۱}{a+۱}$ و $\frac{-۱}{a+۱}$ ریشه‌های معادلهٔ (۱۱) هستند.

معادلهٔ (۱۰) در مثال ۶، به‌کلاس معادله‌های متجانس (یا همگن) مربوط می‌شود، یعنی معادله‌های به‌صورت

$$a_{۰}p^{n}(x)+a_{۱}p^{n-۱}(x)q(x)+\cdots$$

$$\cdots+a_{n-۱}p(x)q^{n-۱}(x)+a_nq^n(x)=۰$$

که در آن $n>۱$، $a_۰\neq ۰$، $a_n\neq ۰$، $p(x)$ و $q(x)$ تابع‌هایی دلخواهند.

حل چنین معادله‌ای، منجر به مجموعه‌ای می‌شود که شامل دستگاه

$$\begin{cases}q(x)=۰\\ p(x)=۰\end{cases}$$

و معادله‌های

$$p(x)=y_۱q(x),\ \ p(x)=y_۲(qx),\ \dots,\ p(x)=y_kq(x)$$

است و، در آن‌ها، $y_۱$، $y_۲$، ...، y_k عبارتند از همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$a_۰y^n+a_۱y^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}y+a_n=۰$$

مثال ۸. این معادله را حل کنید:

$$(x^۲-x+۱)^۴-۶x^۲(x^۲-x+۱)^۲+۵x^۴=۰ \qquad (۱۲)$$

حل. این، معادلهٔ همگن نسبت به‌چندجمله‌ای‌های $q(x)=x$ و $p(x)=x^۲-x+۱$ است. دوطرف معادله‌را بر $x^۴$ تقسیم می‌کنیم ($x=۰$، ریشهٔ معادله نیست)، به‌معادله‌ای هم‌ارز آن می‌رسیم:

$$\left(\frac{x^۲-x+۱}{x}\right)^۴-۶\left(\frac{x^۲-x+۱}{x}\right)^۲+۵=۰$$

که اگر $y=\left(\frac{x^۲-x+۱}{x}\right)^۲$ فرض کنیم، به‌جواب‌های $y_۱=۵$ و $y_۲=۱$ می‌رسیم. و از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x^۲-x+۱=\pm\sqrt{۵}x,\ \ x^۲-x+۱=\pm x$$

که با حل آن‌ها، ریشه‌های معادلهٔ (۱۲) به‌دست می‌آید:

$$۱,\ \frac{۱+\sqrt{۵}\pm\sqrt{۲+۲\sqrt{۵}}}{۲}$$

درضمن $x=۱$، ریشهٔ مضاعف معادله است.

۶. برای حل معادله‌های جبری از درجه‌های بالا، از روش‌تغییرمتغیرها هم استفاده می‌کنند وما، در واقع، درمعادله‌های (۱۰) و (۱۱)، از این‌روش استفاده کرده‌ایم.

مثال ۹. این معادله را حل کنید:

$$(x^۲-۳x+۱)(x^۲+۳x+۲)(x^۲-۹x+۲۰)=-۳۰ \qquad (۱۳)$$

حل. داریم:

$$(x^۲+۳x+۲)(x^۲-۹x+۲۰)=$$
$$=(x+۱)(x+۲)(x-۴)(x-۵)=[(x+۱)(x-۴)]\times$$
$$\times[(x+۲)(x-۵)]=(x^۲-۳x-۴)(x^۲-۳x-۱۰)$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۳) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x^۲-۳x+۱)(x^۲-۳x-۴)(x^۲-۳x-۱۰)=-۳۰ \qquad (۱۴)$$

برای حل معادلهٔ (۱۴) فرض می‌کنیم $y=x^۲-۳x$ (تغییر متغیر). در این‌صورت، به‌این معادله، نسبت به‌مجهول y می‌رسیم:

$$(y+۱)(y-۴)(y-۱۰)=-۳۰ \qquad (۱۵)$$

آزمایش مستقیم نشان می‌دهد که $y_۱=۵$، ریشه‌ای از این معادله است و، سپس، دو ریشهٔ دیگر معادلهٔ (۱۵) هم به‌دست می‌آیند: $y_{۲,۳}=۴\pm\sqrt{۳۰}$.

به این ترتیب معادلهٔ (۱۴)، و بنابراین معادلهٔ (۱۳)، با مجموعهٔ معادله‌های درجه دوم زیر، هم‌ارز می‌شود:

$$x^۲-۳x=۵،\ x^۲-۳x=۴+\sqrt{۳۰}،\ x^۲-۳x=۴-\sqrt{۳۰}$$

که با حل آن، ریشه‌های معادلهٔ (۱۳) به‌دست می‌آید:

$$\frac{۳\pm\sqrt{۲۹}}{۲},\ \frac{۳\pm\sqrt{۲۵+۴\sqrt{۳۰}}}{۲},\ \frac{۳\pm\sqrt{۲۵-۴\sqrt{۳۰}}}{۲}$$

مثال ۱۰. این معادله را حل کنید:

$$(a-x)^۵+(x-b)^۵=(a-b)^۵،\ a\neq b \qquad (۱۶)$$

حل. $a-x=u$ و $x-b=v$ می‌گیریم. در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases} u+v=a-b \\ u^۵+v^۵=(a-b)^۵ \end{cases} \qquad (۱۷)$$

از طرف دیگر

$$u^۵+v^۵=(u+v)(u^۴-u^۳v+u^۲v^۲-uv^۳+v^۴)=$$

$$=(u+v)[(u^۴+v^۴)-uv(u^۲-uv+v^۲)]=$$
$$=(u+v)[(u^۲+v^۲)^۲-۲u^۲v^۲-uv(u+v)^۲+۳u^۲v^۲]=$$
$$=(u+v)[(u^۲+v^۲)^۲+u^۲v^۲-uv(u+v)^۲]=$$
$$=(u+v)[((u+v)^۲-۲uv)^۲-uv(u+v)^۲+u^۲v^۲]$$

بنابراین، با توجه به‌این‌که $u+v=a-b$:

$$u^۵+v^۵=(a-b)[((a-b)^۲-۲uv)^۲-uv(a-b)^۲+u^۲v^۲]$$

که اگر آن‌را در معادلهٔ دوم دستگاه (۱۷) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(a-b)^۴=(a-b)^۴-۴(a-b)^۲(uv)+$$
$$+۴(uv)^۲-(a-b)^۲(uv)+(uv)^۲$$

و از آن‌جا: $۵(uv)^۲-۵(a-b)^۲(uv)=۰$.

بنابراین، دستگاه (۱۷) هم‌ارز است با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases}u+v=a-b\\ uv=۰\end{cases};\quad\begin{cases}u+v=a-b\\ uv=(a-b)^۲\end{cases}$$

دستگاه دوم جواب ندارد؛ دستگاه اول دو جواب دارد:

$$u_۱=۰،\ v_۱=a-b\quad\text{و}\quad u_۲=a-b،\ v_۲=۰$$

و برای معادلهٔ (۱۶)، دو ریشه به‌دست می‌آید: $x_۱=a$، $x_۲=b$.

مثال ۱۱. این معادله را حل کنید:

$$x^۴-۲\sqrt{۲}x^۲-x+۲-\sqrt{۲}=۰\qquad(۱۸)$$

حل. اگر $\sqrt{۲}=a$ بگیریم، معادله چنین می‌شود:

$$x^۴-۲ax^۲-x+a^۲-a=۰\qquad(۱۹)$$

اگر این معادله را، به‌عنوان معادله‌ای درجهٔ دوم نسبت به a در نظر بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$a=x^۲-x،\ a=x^۲+x+۱$$

بنابراین، معادله (۱۸) هم‌ارز است با مجموعهٔ دو معادلهٔ

$$x^۲-x=\sqrt{۲}\quad\text{و}\quad x^۲+x+۱=\sqrt{۲}$$

که از آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴\sqrt{۲}}}{۲},\quad \frac{-۱\pm\sqrt{۴\sqrt{۲}-۳}}{۲}$$

تکلیف ۱.

۱. ریشه‌های گویا را در این معادله‌ها پیدا کنید:

۱) $x^۳+۲x^۲-x-۲=۰$; ۲) $x^۳-۶x^۲+۱۵x-۱۴=۰$;

۳) $۶x^۴-x^۳-۷x^۲+x+۱=۰$

۲. آیا ممکن است عددهای $\frac{۱}{۲}$، ۲، ۳ و ۵ ریشه‌های یک معادلهٔ متقارن درجهٔ چهارم باشند؟

۳. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $۲x^۳+۱۲x^۲+۱۳x+۱۵=۰$;

۲) $x^۴-۴x^۳+۷x^۲-۱۶x+۱۲=۰$;

۳) $۲x^۴-۹x^۳+۴x^۲+۱۲x-۱۸=۰$;

۴) $x^۴-۴x^۳-۱۳x^۲+۲۸x+۱۲=۰$;

۵) $۶x^۶+۱۳x^۵+۳x^۴+x^۳-۷x^۲-۱۲x-۴=۰$;

۶) $x^۴-۸x+۶۳=۰$

تکلیف ۲.

۱. ریشه‌های گویا را در این معادله‌ها پیدا کنید:

۱) $x^۳+۲x^۲+x+۲=۰$; ۲) $x^۴+۴x^۳-۲x^۲-۱۲x+۹=۰$;

۳) $۲۴x^۵+۱۰x^۴-x^۳-۱۹x^۲-۵x+۶=۰$

۲. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $x^۳-۴x^۲-۴x-۵=۰$; ۲) $۲x^۳-۳x^۲+۴x+۹=۰$;

۳) $۲x^۴-۳x^۳+۲x^۲-۱۵x+۱۴=۰$;

۴) $(x-۳)^۴+(x-۲)^۴-(۲x-۵)^۴=۰$;

۵) $۴x^۶+۵x^۵-۳x^۴+۱۱x^۳+۶x^۲+۲۰x-۳۲=۰$;

۶) $۲x^۴+۲x^۳+۸x^۲+۶x+۵=۰$

تکلیف ۳.

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $۲x^۳+۳x^۲+۳x+۲=۰$;   ۲) $x^۳-۵x^۲-۵x+۱=۰$;

۳) $x^۵+۲x^۴+۳x^۳+۳x^۲+۲x+۱=۰$;

۴) $x^۵+۳x^۴-x^۳+۲x^۲-۲۴x-۳۲=۰$;

۵) $x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۳x+۲=۰$;

۶) $(x+۳)^۴+(x+۱)^۴=۲۰$

۲. می‌دانیم معادلهٔ

$$a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰=۱،\quad a_n\neq ۰،\quad n\geqslant ۴$$

دست‌کم چهار ریشهٔ درست متمایز دارد. ثابت‌کنید معادلهٔ

$$a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰=-۱$$

دارای ریشهٔ درست نیست.

۳. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنیدکه معادلهٔ

$$۳x^۴+۴x^۳-۶x^۲-۱۲x+a=۰$$

دارای ریشهٔ تکراری باشد. این ریشه و مرتبهٔ تکرار آن‌را پیدا کنید.

تکلیف ۴.

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $۳x^۳+۲x^۲+۲x+۳=۰$;

۲) $x^۵+۲x^۴-۳x^۳-۳x^۲+۲x+۱=۰$;

۳) $۴x^۶+۵x^۵-۳x^۴+۵۰x^۳-۹x^۲+۴۵x+۱۰۸=۰$;

۴) $x^۴+۳x^۳-۴۴x^۲+۱۵x+۲۵=۰$;

۵) $۲x^۴-x^۳+۳x^۲-x+۱=۰$;   ۶) $(x-۲)^۴+(x-۳)^۴=۱$

۲. ثابت کنید، معادله $x^۲+px+q=۰$، به‌شرط فردبودن عددهای p و q، نمی‌تواند ریشه‌های گویا داشته باشد.

۳. چه‌رابطه‌ای بین p و q برقرار باشد تا معادلهٔ $x^۵+px^۴+q=۰$، دارای ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ دوم (یعنی ریشهٔ مضاعف) باشد؟

تکلیف ۵.

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)=۱;$

۲) $x^۴+x^۳-۱۰x^۲+x+۱=۰;$

۳) $۱۵x^۴-۴x^۳-۶x^۲-۴x-۱=۰;$ ۴) $x^۳+۲x-۵\sqrt{۳}=۰;$

۵) $x^۴-۲۲x^۲-۵x+۲=۰;$ ۶) $x^۴-۵x^۲-۴x+۱۳=۰$

۲. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادله‌های

$$x^۲-x+a=۰ \quad \text{و} \quad x^۲-ax+۱=۰$$

دارای ریشهٔ مشترك باشند.

۳. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $(a+b+x)^۳-۴(a^۳+b^۳+x^۳)-۱۲abx=۰;$

۲) $x^۴-۶ax^۲+۸a\sqrt{a}x-۳a^۲=۰;$

۳) $(a-۳)x^۴-۲(۳a-۴)x^۲+۷a-۶=۰$

تکلیف ۶.

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $x^۵+۱=۰;$ ۲) $(x-۱)x(x+۲)(x+۱)=۳;$

۳) $x^۴-x^۳-۱۰x^۲+۲x+۴=۰;$

۴) $(۸x+۷)^۲(۴x+۳)(x+۱)=\frac{۹}{۲};$

۵) $x^۳-x-\sqrt{۲}=۰;$ ۶) $x^۴-۳x^۲+۶x+۱۳=۰$

۲. پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادله‌های $x^۳+ax+۱=۰$ و $x^۴+ax^۲+۱=۰$ دارای ریشهٔ مشترك باشند.

۳. این معادله‌ها را حل کنید.

۱) $x^۴-x^۲+a=۰;$

۲) $(x+a)(x+۲a)(x+۳a)(x+۴a)=b^۴;$

۳) $a^۲x^۴+۶a^۲x^۲-x+۹a+۳=۰$، $a\geqslant ۰$

تمرین‌ها

۱. ریشه‌های گویا را در این معادله‌ها پیدا کنید:

۱) $۲x^۳-۴x^۲-x=۱۵$; ۲) $x^۲(۱+x)^۲+x^۲=۸(۱+x)^۲$;

۳) $۶x^۴+۱۹x^۳-۷x^۲-۲۶x+۱۲=۰$;

۴) $x^۴+۴x^۳-۲x^۲-۱۲x+۹=۰$;

۵) $۲۴x^۵+۱۰x^۴-x^۳-۱۹x^۲-۵x+۶=۰$

۲. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷)+۱۵=۰$;

۲) $۴(x+۵)(x+۶)(x+۱۰)(x+۱۲)-۳x^۲=۰$;

۳) $x^۳+۹x^۲+۱۱x-۲۱=۰$;

۴) $x^۴+۲x^۳-۱۶x^۲-۲x+۱۵=۰$;

۵) $x^۴-۲x^۳-۱۱x^۲+۱۲x+۳۶=۰$;

۶) $(x-۱)^۳+(۲x+۳)^۳=۲۷x^۳+۸$;

۷) $(۶x+۵)^۲(۳x+۲)(x+۱)=۳۵$;

۸) $۱۲x^۵+۱۸x^۴-۴۵x^۳-۴۵x^۲+۱۸x+۱۲=۰$;

۹) $۲x^۵+۵x^۴+۱۱x^۳+۱۴x^۲+۱۱x+۵=۰$;

۱۰) $۶x^۴+۲۵x^۳+۱۲x^۲-۲۵x+۶=۰$;

۱۱) $x^۵-۳x^۴-۲x^۳-۴x^۲-۲۴x+۳۲=۰$;

۱۲) $۲(x^۲+۶x+۱)^۲+$
$+۵(x^۲+۶x+۱)(x^۲+۱)+۲(x^۲+۱)^۲=۰$;

۱۳) $x^۴+x^۳-۱۰x^۲+x+۱=۰$; ۱۴) $(x+۱)^۴=۲(۱+x^۴)$;

۱۵) $(۳-x)^۴+(۲-x)^۴=(۵-۲x)^۴$;

۱۶) $x^۴-۲x^۳+x-۱۳۲=۰$; ۱۷) $x^۵+(۶-x)^۵=۱۰۵۶$;

۱۸) $x^۳-۳x=۲۷+\frac{۱}{۲۷}$; ۱۹) $x^۸+\frac{x^۴}{۲}+\frac{۱}{۱۶}=۲x^۲\left(x^۴-\frac{۱}{۴}\right)$;

۲۰) $x^۳+(۱-a^۲)x+a=۰$; ۲۱) $x^۳-۳x=a^۳+\frac{۱}{a^۳}$;

۲۲) $x^۴+۴a^۳x=a^۴$; ۲۳) $x^۴+x^۳-۳a^۲x^۲-۲a^۳x+۲a^۴=۰$;
۲۴) $۴a^۳x^۴+۴a^۲x^۲+۳۲x+a+۸=۰$، $a\geqslant ۰$.

۳. برای این که معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای ریشه‌های حقیقی باشد کافی است نابرابری $a(a+b+c)<۰$ برقرار باشد. ثابت کنید.

۴. ثابت کنید معادلهٔ $x^۳-px+۱=۰$ به‌ازای $p>۲$ $(p\in\mathbf{N})$، ریشه‌های گویا ندارد.

۵. می‌دانیم $\sqrt{۲}+۱$، ریشه‌ای است ازمعادلهٔ

$$x^۵+ax^۳+bx^۲+۵x+۲=۰$$

اگر a و b عددهایی گویا باشند، ریشه‌های دیگر معادله را پیدا کنید.

۶. معادله‌ای جبری با کمترین درجهٔ ممکن وضریب‌های درست تشکیل دهید، به‌شرطی که یکی ازریشه‌های معادله $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ باشد.

۷. ثابت کنید، به‌شرط $a+b>c$ و $|a-c|>c$ $(a\neq ۰)$، معادلهٔ $a^۲x^۲+(b^۲+a^۲-c^۲)x+b^۲=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۸. ثابت کنید، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{۱}{x-a}+\frac{۱}{x-b}+\frac{۱}{x-c}+\frac{۱}{x-b-c+a}=۰$$

عددهایی حقیقی‌اند.

۹. ثابت کنید، به‌ازای هر p و q و $a\neq ۰$، معادلهٔ

$$\frac{۱}{x-p}+\frac{۱}{x-q}=\frac{۱}{a^۲}$$

دارای دوریشهٔ حقیقی ومتمایز است.

۱۰. همهٔ مقدارهای a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هریك ازآن‌ها، معادلهٔ $x^۲+x+a=۰$ دوریشهٔ حقیقی بزرگتر از a داشته باشد.

۱۱. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، برای هریك ازآن‌ها، معادله‌های

$$۲x^۲-(۳a+۲)x+۱۲=۰ \quad \text{و} \quad ۴x^۲-(۹a-۲)x+۳۶=۰$$

دارای ریشهٔ مشترك باشند.

۱۲. اگر p و q عددهایی فرد باشند، آن‌وقت معادلهٔ

$$x^{۱۰}+px^{۹}+q=۰$$

ریشه‌های درست ندارد. ثابت کنید.

۱۳. برای این که معادلهٔ $(۱-a^{۲})x^{۲}+۲ax-۱=۰$، ریشه‌هایی در بازهٔ $(۰, ۱)$ داشته باشد، لازم و کافی است که $a>۲$. ثابت کنید.

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. ۱) $\{-۱, ۱, -۲\}$؛ ۲) $\{۲\}$؛ ۳) $\left\{-۱, ۱, \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۳}\right\}$.

۲. نه.

۳. ۱) $\{-۵\}$؛ ۲) $\{۱, ۳\}$؛ ۳) $\left\{۱, ۲, ۳, -\frac{۳}{۲}\right\}$؛ ۴) $\left\{۲, -۳, \frac{۵\pm\sqrt{۳۳}}{۲}\right\}$؛ ۵) $\left\{-۲, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۶) ϕ؛ راهنمائی: عبارت $x^{۴}-۸x+۶۳$ به‌صورت ضرب $(x^{۲}-۴x+۷)(x^{۲}+۴x+۹)$ تجزیه می‌شود.

تکلیف ۲.

۱. ۱) $\{-۲\}$؛ ۲) $\{۱, -۳\}$؛ ۳) $\left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}, -\frac{۲}{۳}\right\}$.

۲. ۱) $\{۵\}$؛ ۲) $\{-۱\}$؛ ۳) $\{۱, ۲\}$؛ ۴) $\{۲, ۳\}$؛ ۵) $\left\{-\frac{۱}{۴}, -۲, ۱, -\frac{۲}{۳}\right\}$؛ ۶) ϕ. راهنمائی: عبارت سمت چپ برابری به‌صورت ضرب دوعبارت درجه دوم $۲x^{۲}+x+۵$ و $x^{۲}+x+۱$ تجزیه می‌شود.

تکلیف ۳.

۱. ۱) $\{-۱\}$؛ ۲) $\{-۱, ۳\pm۲\sqrt{۲}\}$ ۳) $\{-۱\}$؛

۴) $\left\{۲، \frac{-۵-\sqrt{۲۱}\pm\sqrt{۱۰\sqrt{۲۱}-۱۸}}{۴}\right\}$؛ ۵) ϕ. راهنمائی: عبارت سمت چپ برابری به‌صورت $(x^۲-x+۱)(x^۲-x+۲)$ تجزیه می‌شود؛
۶) $\{-۲\pm\sqrt{۳\sqrt{۲}-۳}\}$. راهنمائی: $y=x+۲$ بگیرید.

۳. $x_۱=x_۲=۱$ به‌ازای $a=۱۱$ و $x_۱=x_۲=-۱$ به‌ازای $a=-۵$.

تکلیف ۴.

۱. ۱) $\{-۱\}$؛ ۲) $\left\{\pm۱، \frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}\right\}$؛ ۳) $\{-۱، -۳\}$؛
۴) $\left\{۱، ۵، \frac{-۹\pm\sqrt{۶۱}}{۲}\right\}$؛ ۵) ϕ. راهنمائی: عبارت سمت‌چپ برابری به‌ضرب $x^۲+۱$ در $۲x^۲-x+۱$ تجزیه می‌شود؛ ۶) $\{۲، ۳\}$. راهنمائی: $y=x-\frac{۵}{۲}$.

۳. $q\neq ۰$، $۳۱۲۵q+۲۵۶p^۵=۰$.

تکلیف ۵.

۱. $\left\{\frac{-۵\pm\sqrt{۵+۴\sqrt{۲}}}{۲}\right\}$. راهنمائی: عبارت سمت چپ برابری را به صورت ضرب دو عامل $x^۲+۵x+۴$ و $x^۲+۵x+۶$ بنویسید و $x^۲+۵x+۵=y$ بگیرید؛ ۲) $\left\{\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}، -۲\pm\sqrt{۳}\right\}$. راهنمائی: $y=x+\frac{۱}{x}$؛ ۳) $\left\{۱، -\frac{۱}{۳}\right\}$. راهنمائی: معادله را به‌صورت $۱۶x^۴=(x+۱)^۴$ درآورید؛ ۴) $\{\sqrt{۳}\}$؛
۵) $\left\{\frac{۵\pm\sqrt{۲۱}}{۲}، \frac{-۵\pm\sqrt{۱۷}}{۲}\right\}$. راهنمائی: عبارت $x^۴-۲۲x^۲-۵x-۲$ را به‌صورت $(x^۲-۵x+۱)(x^۲+۵x+۲)$ تجزیه کنید؛ ۶) ϕ.

راهنمائی: عبارت $x^۴-۵x^۲-۴x+۱۳$ را به صورت $(x^۲-۳)^۲+(x-۲)^۲$ بنویسید.

۲. $\{-۲\}$. ۳. ۱) $\{a\pm b، b-a\}$؛ ۲) $\{\sqrt{a}، -۳\sqrt{a}\}$.
راهنمائی: $y=x-\sqrt{a}$؛ ۳) $\pm\sqrt{۲}$ به‌ازای $a=-۲$، ±۱ به‌ازای $a=\frac{۱}{۲}$، $\pm\sqrt{\frac{۳a-۴}{a-۳}+\sqrt{\left(\frac{۳a-۴}{a-۳}\right)^۲-\frac{۷a-۶}{a-۳}}}$ به‌ازای $\frac{۶}{۷}<a<۳$، ۰ و $\pm۲\sqrt{۳}$ به‌ازای $a=\frac{۶}{۷}$ وبالاخره $\pm\sqrt{\frac{۳a-۴}{a-۳}\pm\sqrt{\left(\frac{۳a-۴}{a-۳}\right)^۲-\frac{۷a-۶}{a-۲}}}$ (چهار جواب) به‌ازای $a>۳$ و $\frac{۱}{۲}<a<\frac{۷}{۶}$.

تکلیف ۶.

۱. ۱) $\{-۱\}$؛ ۲) $\left\{\frac{-۱\pm\sqrt{۱۳}}{۲}\right\}$؛ ۳) $\left\{-۱\pm\sqrt{۳}، \frac{۳\pm\sqrt{۱۷}}{۲}\right\}$.
راهنمائی: $y=x-\frac{۲}{x}$؛ ۴) $\left\{-\frac{۵}{۴}، -\frac{۱}{۲}\right\}$. راهنمائی: معادله را در ۱۶ ضرب کنید وسپس $y=۸x+۷$ بگیرید؛ ۵) $\{\sqrt{۲}\}$؛ ۶) ϕ، راهنمائی: عبارت سمت‌چپ برابری را به‌صورت $(x^۲-۲)^۲+(x+۳)^۲$ بنویسید.

۲. $\{-۲\}$. ۳. ۱) $\pm\sqrt{\frac{۱\pm\sqrt{۱-۴a}}{۲}}$ (چهارجواب) به‌ازای $۰<a<\frac{۱}{۴}$، ۰ و ±۱ به‌ازای $a=۰$، $\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ به‌ازای $a=\frac{۱}{۴}$، $\pm\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱-۴a}}{۲}}$ به‌ازای $a<۰$ و ϕ به‌ازای $a>\frac{۱}{۴}$؛

۲) $-\frac{۵}{۲}a\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲\pm۴\sqrt{a^۴+b^۴}}$ (چهار جواب) به‌ازای
$|a|\geqslant\frac{۲}{۳}|b|\sqrt{۳}$، $-\frac{۵a}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲+۴\sqrt{a^۴+b^۲}}$ و
$-\frac{۵}{۲}a-\frac{۱}{۲}\sqrt{۵a^۲-۴\sqrt{a^۴+b^۴}}$ به‌ازای $|a|<\frac{۲}{۳}|b|\sqrt{۳}$. راهنمائی:
$y=x+\frac{۵a}{۲}$؛ ۳) ۳ به‌ازای $a=۰$، $\frac{-۱\pm\sqrt{۱-۱۲a}}{۲a}$ به‌ازای
$۰<a<\frac{۱}{۱۲}$ و ۶ به‌ازای $a=\frac{۱}{۱۲}$. راهنمائی: سمت چپ برابری را
به‌صورت $(ax^۲-x+۳)(a^۲x^۲+ax+۳a+۱)$ تجزیه‌کنید.

تمرین‌ها

۱۰۱) $\{۳\}$؛ ۲) $\{-۲\}$؛ ۳) $\left\{-۳, \frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۴) $\{-۳, ۱\}$؛
۵) $\left\{-\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}\right\}$.

۱۰۲) $\{-۶, -۲, -۴\pm\sqrt{۶}\}$؛
۲) $\left\{-۸, -\frac{۱۵}{۲}, \frac{-۳۵\pm\sqrt{۲۶۵}}{۴}\right\}$؛ ۳) $\{-۷, -۳, ۱\}$؛
۴) $\{-۱, ۱, ۳, -۵\}$؛ ۵) $\{-۲, ۳\}$ ۶) $\left\{-\frac{۱}{۲}, -\frac{۲}{۳}, ۳\right\}$؛
۷) $\frac{-۵\pm\sqrt{۲۱}}{۶}$؛ ۸) -۱، $\frac{-۱+\sqrt{۱۰۱}\pm\sqrt{۳۸-۲\sqrt{۱۰۱}}}{۸}$
و $\frac{-۱-\sqrt{۱۰۱}\pm\sqrt{۳۸+۲\sqrt{۱۰۱}}}{۸}$؛ ۹) -۱. راهنمائی:

$$۲x^۴=۳x^۳+۸x^۲+۶x+۵=(۲x^۲+x+۵)(x^۲+x+۱)$$

۱۰) $\left\{-۳, -۲, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۱۱) $\{-۲, ۱, ۴\}$؛

۱۲) $\{-۱، -۲\pm\sqrt{۳}\}$؛ ۱۳) $\left\{\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}, -۲\pm\sqrt{۳}\right\}$؛ ۱۴) $۱+\sqrt{۳}\pm\sqrt{۳+۲\sqrt{۳}}$. راهنمائی: $y=x+\frac{۱}{x}$؛ ۱۵) $\{۲، ۳\}$. راهنمائی: $z=۳-x$ و $t=۲-x$؛ ۱۶) $\{-۳، ۴\}$. راهنمائی: $y=x^۲-x$؛ ۱۷) $\{۲، ۴\}$؛ ۱۸) $\frac{۱۰}{۳}$. راهنمائی:

$$\left(۳+\frac{۱}{۳}\right)^۳-۳\left(۳+\frac{۱}{۳}\right)=۳^۳+\frac{۱}{۳^۳}$$

۱۹) $\pm\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۲}}{۲}}$. راهنمائی: $y=x^۲-\frac{۱}{۴x^۲}$؛ ۲۰) $-a$ و $\frac{a\pm\sqrt{a^۲-۴}}{۲}$ به‌ازای $|a|>۲$، -۲ و ۱ به‌ازای $a=۲$، -۱ و ۲ به‌ازای $a=-۲$ و $-a$ به‌ازای $-۲<a<۲$؛ ۲۱) -۱ و ۲ به‌ازای $a=۱$، -۲ و ۱ به‌ازای $a=-۱$، $a+\frac{۱}{a}$ به‌ازای $a<-۱$، $-۱<a<۰$، $۰<a<۱$ و $a>۱$؛ ۲۲) ۰ به‌ازای $a=۰$ و $\frac{a}{\sqrt{۲}}(-۱\pm\sqrt{۲\sqrt{۲}-۱})$ به‌ازای $a\neq۰$. راهنمائی:

$$t^۴+۴t+۱=(t^۲+\sqrt{۲}t+۱-\sqrt{۲})(t^۲-\sqrt{۲}t+\sqrt{۲}+۱)$$

۲۳) $\pm\sqrt{۲}|a|$ و $\frac{-۱\pm\sqrt{۴a^۲+۱}}{۲}$ به‌ازای $a\neq۰$ و ۰ و ۱ به‌ازای $a=۰$. راهنمائی: معادلهٔ مفروض را به‌صورت معادلهٔ درجهٔ دومی نسبت به $a^۲$ بگیرید و به دست آورید: $a_۱^۲=x^۲+x$ و $a_۲^۲=\frac{۱}{۲}x^۲$؛ سمت‌چپ معادلهٔ مفروض به‌این صورت درمی‌آید:

$$(a^۲-x^۲-x)(۲a^۲-x^۲)=۰$$

۲۴) $-\frac{۱}{۴}$ به‌ازای $a=۰$، $\frac{-۲\pm\sqrt{۴-۲a}}{۲a}$ بـه‌ازای $۰<a<۲$ و

$-\frac{۱}{۲}$ به‌ازای $a=۲$.

۵. -۲، -۱، ۱، $۱-\sqrt{۲}$. ۶. $x^۴-۱۰x^۲+۱=۰$.

۱۰. $a<-۲$. ۱۱. $a=۳$.

§۳. معادله‌های گویا

معادلهٔ گویا، به‌معادله‌ای به‌صورت

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=۰ \qquad (۱)$$

گفته می‌شود که، در آن، $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای‌اند ($Q(x)\neq ۰$).

حل معادلهٔ (۱) منجر به حل معادلهٔ $P(x)=۰$ می‌شود، به‌شرطی که ریشه‌های آن، با شرط $Q(x)\neq ۰$ سازگار باشند. به‌این ترتیب، معادلهٔ (۱) با دستگاه زیر، هم‌ارز است:

$$\begin{cases} P(x)=۰ \\ Q(x)\neq ۰ \end{cases}$$

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۲}{x-۲}=۱ \qquad (۲)$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۲}{x-۲}-۱=۰ \Leftrightarrow \frac{x^۲-۴x-۲}{(x+۱)(x-۲)}=۰$$

یعنی باید این دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} x^۲-۴x-۲=۰ \\ (x+۱)(x-۲)\neq ۰ \end{cases}$$

ریشه‌های معادله $x^۲-۴x-۲=۰$ عبارتند از $۲\pm\sqrt{۶}$ که، هیچ‌کدام، ریشهٔ معادلهٔ $(x+۱)(x-۲)=۰$ نیست. بنابراین معادلهٔ (۲) دارای دو

ریشه است: $x_۱=۲+\sqrt{۶}$ و $x_۲=۲-\sqrt{۶}$.

معادلهٔ به‌صورت

$$\frac{Ax}{ax^۲+b_۱x+c}+\frac{Bx}{ax^۲+b_۲x+c}=C \qquad (۳)$$

با شرط $ABC\neq ۰$ و $ac\neq ۰$، با تغییر متغیر $y=ax+\frac{a}{x}$، منجر به‌معادلهٔ

$$\frac{A}{y+b_۱}+\frac{B}{y+b_۲}=C$$

می‌شود.

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$\frac{۴x}{x^۲+x+۳}+\frac{۵x}{x^۲-۵x+۳}=-\frac{۳}{۲}$$

حل. چون $x=۰$ ریشه‌ای ازمعادله نیست، می‌توانیم صورت ومخرج هر یك از دو کسر را بر x تقسیم کنیم، به‌معادله زیر می‌رسیم که با معادلهٔ ما هم‌ارز است:

$$\frac{۴}{x+\frac{۳}{x}+۱}-\frac{۵}{x+\frac{۳}{x}-۵}=-\frac{۳}{۲}$$

و با فرض $y=x+\frac{۳}{x}$، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۴}{y+۱}+\frac{۵}{y-۵}=-\frac{۳}{۲}$$

که با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\frac{y^۲+۲y-۱۵}{(y+۱)(y-۵)}=۰$$

این‌معادله دو ریشه دارد: $y_۱=-۵$ و $y_۲=۳$. بنابراین، معادلهٔ مفروض، با مجموعهٔ دو معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{۳}{x}=-۵ \\ \\ x+\frac{۳}{x}=۳ \end{array}\right.$$

ریشه‌های معادلهٔ اول این مجموعه $\frac{-۵\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$ است و معادلهٔ دوم مجموعه جواب ندارد؛ بنابراین، همین دو عدد، ریشه‌های معادلهٔ مفروض‌اند.

اگر معادله‌ای، به‌یکی از دو صورت

$$\frac{ax^۲+b_۱x+c}{ax^۲+b_۲x+c}\pm\frac{ax^۲+b_۳x+c}{ax^۲+b_۴x+c}=A،$$

$$\frac{ax^۲+b_۱x+c}{ax^۲+b_۲x+c}=\frac{Ax}{ax^۲+b_۳x+c}،\quad A\neq ۰$$

با شرط $ac\neq ۰$، شبیه معادلهٔ به‌صورت (۳) حل می‌شوند.

مثال ۳. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x^۲-۱۳x+۱۵}{x^۲-۱۴x+۱۵}-\frac{x^۲-۱۵x+۱۵}{x^۲-۱۶x+۱۵}=-\frac{۱}{۱۲}$$

حل. چون $x=۰$ ریشهٔ این معادله نیست، بنابراین هم‌ارز است با

$$\frac{x-۱۳+\frac{۱۵}{x}}{x-۱۴+\frac{۱۵}{x}}-\frac{x-۱۵+\frac{۱۵}{x}}{x-۱۶+\frac{۱۵}{x}}=-\frac{۱}{۱۲}$$

که با فرض $y=x+\frac{۱۵}{x}$ به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{y-۱۳}{y-۱۴}-\frac{y-۱۵}{y-۱۶}=-\frac{۱}{۱۲}$$

و با حل آن، به‌دست می‌آید: $y_۱=۲۰$، $y_۲=۱۰$.

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، به مجموعهٔ معادله‌های زیرمنجر می‌شود:

$$\left[\begin{array}{l} x+\frac{۱۵}{x}=۲۰ \\ \\ x+\frac{۱۵}{x}=۱۰ \end{array}\right.$$

که با حل آن، ریشه‌های معادلهٔ ما به‌دست می‌آید:

$$x_{۱,۲}=۱۰\pm\sqrt{۸۵},\ x_{۳,۴}=۵\pm\sqrt{۱۰}$$

گاهی برای ساده‌تر کردن محاسبه‌ها، ضمن حل معادله‌های گویا، از روش تجزیه به‌کسرهای ساده‌تر استفاده می‌کنند.

مثال ۴. این معادله را حل کنید:

$$\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{x-۲}{x+۲}+\frac{x-۳}{x+۳}+\frac{x+۴}{x-۴}=۴$$

حل. از آن‌جا که داریم:

$$\frac{x+۱}{x-۱}=۱+\frac{۲}{x-۱},\ \frac{x-۲}{x+۲}=۱-\frac{۴}{x+۲},$$

$$\frac{x-۳}{x+۳}=۱-\frac{۶}{x+۳},\ \frac{x+۴}{x-۴}=۱+\frac{۸}{x-۴}$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱}{x-۱}-\frac{۲}{x+۲}-\frac{۳}{x+۳}+\frac{۴}{x-۴}=۰$$

که بعداز تبدیل‌های اتحادی، به‌این معادله می‌رسد:

$$\frac{۵x-۸}{(x-۱)(x-۴)}=\frac{۵x+۱۲}{(x+۲)(x+۳)}$$

در نتیجه، معادلهٔ مفروض هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases}(۵x-۸)(x+۲)(x+۳)=(۵x+۱۲)(x-۱)(x-۴)\\(x-۱)(x-۴)(x+۲)(x+۳)\neq۰\end{cases}\qquad(۴)$$

ازحل‌معادلهٔ اول‌دستگاه به‌دست‌می‌آید: $x=\frac{۱}{۲}\left(-۱\pm\sqrt{\frac{۶۹}{۵}}\right)$، که چون با شرط دوم دستگاه (۴) سازگارند، ریشه‌های معادلهٔ مفروض‌اند.

برای‌حل معادله‌های گویا می‌توان، درصورت‌لزوم، از روش جداکردن مجذور کامل، از متجانس بودن معادله نسبت بـه برخی تابع‌هـا، از روش منجرکردن آن به‌حل یك دستگاه معادله‌ها و، همچنین، از تبدیل آن به‌بعضی

معادله‌های خاص (درجه دوم، دومجذوری، متقارن، بازگشتی‌وغیره) استفاده کرد.

مثال ۵. این معادله را حل کنید:

$$x^۲+\left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲=۸$$

حل. داریم:

$$x^۲+۲x\cdot\frac{x}{x-۱}+\left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲-۲x\cdot\frac{x}{x-۱}=۸\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\left(x+\frac{x}{x-۱}\right)^۲-۲\frac{x^۲}{x-۱}=\left(\frac{x^۲}{x-۱}\right)^۲-۲\frac{x^۲}{x-۱}=۸$$

بنابراین اگر فرض کنیم $y=\frac{x^۲}{x-۱}$، به‌معادلهٔ $y^۲-۲y=۸$ می‌رسیم که ریشه‌های آن، ۴ و ۲− است و، از آن‌جا، ریشه‌های معادلهٔ مفروض، باحل مجموعهٔ معادله‌های

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^۲}{x-۱}=۴\\[2ex]\dfrac{x^۲}{x-۱}=-۲\end{array}\right.$$

به‌دست می‌آید: $x_۱=x_۲=۲$، $x_{۳,۴}=-۱\pm\sqrt{۳}$.

مثال ۶. این معادله را حل کنید:

$$۵\left(\frac{x-۲}{x+۱}\right)^۲-۴۴\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^۲+۱۲\frac{x^۲-۴}{x^۲-۱}=۰$$

حل. داریم: $\frac{x^۲-۴}{x^۲-۱}=\frac{x-۲}{x+۱}\cdot\frac{x+۲}{x-۱}$. فرض کنیم: $u=\frac{x-۲}{x+۱}$ و $v=\frac{x+۲}{x-۱}$، معادلهٔ مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۵u^۲-۴۴v^۲+۱۲uv=۰ \qquad (۵)$$

در سمت چپ برابری (۵)، تابعی متجانس و درجه دوم نسبت به u و v

وجود دارد.

اگر $v=۰$، از (۵) نتیجه می‌شود $u=۰$.

اگر $v\neq ۰$، با تقسیم دو طرف برابری (۵) بر $v^{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$۵\left(\frac{u}{v}\right)^{۲}+۱۲\frac{u}{v}-۴۴=۰$$

که معادله‌ای است درجه‌دوم نسبت‌به‌مجهول $\frac{u}{v}$ و ریشه‌هایی برابر ۲ و $-\frac{۲۲}{۵}$ دارد.

به‌این ترتیب، معادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با مجموعهٔ

$$\begin{cases}\frac{x-۲}{x+۱}=۰\\ \frac{x+۲}{x-۱}=۰\end{cases},\quad \frac{x-۲}{x+۱}\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^{-۱}=۲،\quad \frac{x-۲}{x+۱}\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^{-۱}=-\frac{۲۲}{۵}$$

(۶)

دستگاه این مجموعه، جواب ندارد، بنابراین معادلهٔ مفروض هم‌ارز است با مجموعهٔ

$$\frac{x-۲}{x+۱}\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^{-۱}=۲،\quad \frac{x-۲}{x+۱}\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^{-۱}=-\frac{۲۲}{۵}.$$

که به‌نوبهٔ خود هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(x-۲)(x-۱)-۲(x+۱)(x+۲)=۰\\ ۵(x-۲)(x-۱)+۲۲(x+۱)(x+۲)=۰\end{array}\right.\\ (x+۲)(x-۱)(x+۱)\neq ۰\end{cases}$$

و با حل آن، $x=\frac{-۹\pm\sqrt{۷۳}}{۲}$ برای معادلهٔ اصلی به‌دست می‌آید.

مثال ۷. این معادله را حل کنید:

$$x\left(\frac{۵-x}{x+۱}\right)\left(x+\frac{۵-x}{x+۱}\right)=۶ \qquad (۷)$$

حل. $u=x\frac{۵-x}{x+۱}$ و $v=x+\frac{۵-x}{x+۱}$ می‌گیریم. در این‌صورت

$$uv=۶، \quad u+v=x\frac{۵-x}{x+۱}+x+\frac{۵-x}{x+۱}=(x+۱)\frac{۵-x}{x+۱}+x=۵$$

و بنابراین، به‌دستگاه $\begin{cases}uv=۶\\ u+v=۵\end{cases}$ می‌رسیم که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$u_۱=۳$، $v_۱=۲$ یا $u_۲=۲$، $v_۲=۳$. بنابراین، معادلهٔ (۷) با مجموعهٔ معادله‌های زیر، هم‌ارز است:

$$\left[\begin{array}{l} x\cdot\frac{۵-x}{x+۱}=۲ \\ \\ x\cdot\frac{۵-x}{x+۱}=۳ \end{array}\right.$$

که به‌نوبهٔ خود، هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} ۵x-x^۲=۲x+۲ \\ ۵x-x^۲=۳x+۳ \end{array}\right. \\ x+۱\neq ۰\end{cases}$$

جواب‌های این‌دستگاه و، بنابراین، جواب‌های معادلهٔ (۷) برابر ۱و۲ است.

مثال ۸. این معادله را حل کنید:

$$x^۴=\frac{۱۱x-۶}{۶x-۱۱} \qquad (۸)$$

حل. این معادله، هم‌ارزاست با دستگاه

$$\begin{cases} ۶x^۵-۱۱x^۴-۱۱x+۶=۰ \\ ۶x-۱۱\neq ۰ \end{cases}$$

معادلهٔ اول این‌دستگاه، معادله‌ای متقارن ازدرجهٔ پنجم است، یعنی $x=-۱$ ریشهٔ آن است، بنابراین

$$۶x^۵-۱۱x^۴-۱۱x+۶=$$

$$=(x+۱)(۶x^۴-۱۷x^۳+۱۷x^۲-۱۷x+۶)$$

معادلهٔ $۶x^۴-۱۷x^۳+۱۷x^۲-۱۷x+۶=۰$ را حل می‌کنیم.
دوطرف معادله را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۶\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)-۱۷\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۱۷=۰$$

که اگر $y=x+\frac{۱}{x}$ بگیریم، سرانجام به‌دست می‌آید: $x+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۳}$ یا $x+\frac{۱}{x}=\frac{۵}{۲}$. معادلهٔ اول جواب ندارد و جواب‌های معادلهٔ دوم ۲ و $\frac{۱}{۲}$ است.

به‌این ترتیب، معادله (۸) سه ریشه دارد: $x_۱=۲$، $x_۲=\frac{۱}{۲}$، $x_۳=-۱$.

تکلیف ۱.

این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $\frac{x^۲+۳x+۲}{x^۲+۴x+۳}=۰;$ ۲) $\frac{۱}{x-۱}-\frac{۲}{x+۲}=۱;$

۳) $\frac{x}{x+۱}+\frac{x+۱}{x+۲}+\frac{x+۲}{x}=\frac{۲۵}{۶};$ ۴) $\frac{۹}{x^۲}+\frac{۹}{(x+۲)^۲}=۱۰;$

۵) $\left(\frac{x-۱}{x}\right)^۲+\left(\frac{x-۱}{x-۲}\right)^۲=\frac{۴۰}{۹};$

۶) $\frac{۴x}{۴x^۲-۸x+۷}+\frac{۳x}{۴x^۲-۱۰x+۷}=۱;$

۷) $\frac{۱}{x^۲-۲x+۲}+\frac{۱}{x^۲-۲x+۳}=\frac{\frac{۹}{۲}}{x^۲-۲x+۴}.$

تکلیف ۲.

این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $\frac{x^۲+۵x+۶}{x^۳+۳x^۲+۲x}=۰;$ ۲) $\frac{x}{x+۳}+\frac{۴}{x+۱}=۲;$

۳) $\frac{۲x-۳}{x-۱}+۱=\frac{۶x-x^۲-۶}{x-۱};$

۴) $\frac{۲x-۱}{x+۱}+\frac{۳x-۱}{x+۲}=\frac{x-۷}{x-۱}+۴;$

۵) $\frac{۱۳}{۲x^۲+x-۲۱}+\frac{۱}{۲x+۷}=\frac{۶}{x^۲-۹};$

۶) $\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲+۲x+۲}+\frac{x^۲+۲x+۲}{x^۲+۲x+۳}=\frac{۷}{۶};$

۷) $\frac{۱}{x^۲-۳x+۳}+\frac{۲}{x^۲-۳x+۴}=\frac{۶}{x^۲-۳x+۵}.$

تکلیف ۳.

حل کنید:

۱) $\frac{x^۲-x}{x^۲-x+۱}-\frac{x^۲-x+۲}{x^۲-x-۲}=۱;$

۲) $\frac{x+۴}{x-۱}+\frac{x-۴}{x+۱}=\frac{x+۸}{x-۲}+\frac{x-۸}{x+۲}-\frac{۸}{۳};$

۳) $\frac{x^۲-۱۰x+۱۵}{x^۲-۶x+۱۵}=\frac{۴x}{x^۲-۱۲x+۱۵};$

۴) $x^۲+\frac{۲۵x^۲}{(۵+۲x)^۲}=\frac{۷۴}{۴۹};$

۵) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۲}+\frac{۱}{x+۵}+\frac{۱}{x+۷}=$

$=\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x+۳}+\frac{۱}{x+۴}+\frac{۱}{x+۶};$

۶) $(x^۲-۶x-۹)^۲=x(x^۲-۴x-۹).$

تکلیف ۴.

این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $۷\left(x+\frac{۱}{x}\right)-۲\left(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\right)=۹;$

۲) $\frac{۲۴}{x^{۲}+۲x-۸}-\frac{۱۵}{x^{۲}+۲x-۳}=۲;$ ۳) $x^{۲}+\frac{۴x^{۲}}{(x+۲)^{۲}}=۵;$

۴) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x+۲}+\frac{۱}{x+۳}+\frac{۱}{x+۴}=۰;$

۵) $\frac{۱۶}{x^{۳}+۳x^{۲}-x+۵}-\frac{۵}{x^{۳}+۳x^{۲}-x+۲}=۱;$

۶) $x^{۵}=\frac{۱۳۳x-۷۸}{۱۳۳-۷۸x}.$

تمرین‌ها

۱. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $\frac{x^{۳}+۲x^{۲}-x-۲}{x^{۳}+x^{۲}-۴x-۴}=۰;$ ۲) $۸x=\frac{۳۲x^{۳}-۱}{۲x^{۳}+۳x-۱};$

۳) $\frac{x^{۲}+۱}{۳x^{۲}-۲}=۲x;$ ۴) $۹\frac{x^{۲}+x+۱}{x^{۲}-x+۱}=۷\frac{x+۱}{x-۱};$

۵) $\frac{x-۱}{x}-\frac{۳x}{۲x-۲}=-\frac{۵}{۲};$ ۶) $\frac{x^{۲}+۱}{x}+\frac{x}{x^{۲}+۱}=-\frac{۵}{۲};$

۷) $\frac{۶}{(x+۱)(x+۲)}+\frac{۸}{(x-۱)(x+۴)}=۱;$

۸) $\frac{۲x}{۳x^{۲}-x+۲}-\frac{۷x}{۳x^{۲}+۵x+۲}=۱;$

۹) $\frac{x^{۲}+۴x+۴}{x+۴}-\frac{۲x+۶}{x+۲}=\frac{x^{۲}+x+۱}{x+۱}-\frac{۲x+۹}{x+۳};$

۱۰) $\frac{۳}{۲x+۱}-\frac{x+۱}{x+\frac{۱}{۲}}-۱=\frac{x}{۲}\left(\frac{۳}{۲\left(x+\frac{۱}{۲}\right)}-\frac{۲x+۲}{۲x+۱}-۱\right);$

۱۱) $\frac{۱}{۲x-۲}-\frac{۲x-۱}{x^{۲}+x+۱}+\frac{۳}{۲x+۲}=۰;$

۱۲) $\frac{۱۲x^۲+۳۰x-۲۱}{۱۶x^۲-۹}=\frac{۳x-۷}{۳-۴x}+\frac{۶x+۵}{۴x+۳};$

۱۳) $\frac{x+۲}{x-۲}-\frac{x(x-۴)}{x^۲-۴}=\frac{x-۲}{x+۲}-\frac{۴(۱+x)}{۱-x^۲};$

۱۴) $\frac{x+۹}{x^۲-۳x-۱۰}-\frac{x+۱۵}{x^۲-۲۵}=\frac{۱}{x+۲};$

۱۵) $\frac{x-۱}{x+۲}-\frac{x-۲}{x+۳}=\frac{x-۴}{x+۵}-\frac{x-۵}{x+۶};$

۱۶) $\left(\frac{x}{x+۱}\right)^۲+\left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲=۹۰;$

۱۷) $x^۲+\frac{۲۵x^۲}{(x+۵)^۲}=۱۱;$ ۱۸) $x^۲+\frac{۸۱x^۲}{(۹+x)^۲}=۴۰;$

۱۹) $۲۰\left(\frac{x-۲}{x+۱}\right)^۲-۵\left(\frac{x+۲}{x-۱}\right)^۲+۴۸\frac{x^۲-۴}{x^۲-۱}=۰;$

۲۰) $\left(\frac{x+۶}{x-۶}\right)\left(\frac{x+۴}{x-۴}\right)^۲+\left(\frac{x-۶}{x+۶}\right)\left(\frac{x+۹}{x-۹}\right)^۲=۲\frac{x^۲+۳۶}{x^۲-۳۶};$

۲۱) $x(x+۴)+\frac{۱}{x}\left(\frac{۱}{x}+۴\right)=۰;$

۲۲) $۳۴۳(x^۲+۳)=۲۶(x+۳)^۳;$

۲۳) $x^۶=\frac{۲۵۷x^۲-۶۸}{۶۸x^۲-۲۵۷};$ ۲۴) $x^۳+\frac{۱}{x^۳}=۶\left(x+\frac{۱}{x}\right);$

۲۵) $\frac{x^۲}{۳}+\frac{۴۸}{x^۲}=۱۰\left(\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}\right);$ ۲۶) $\frac{۱+x^۵}{(۱+x)^۵}=۰/۰۸۸;$

۲۷) $\frac{x^۲+۵}{x^۳-۳x-۲}=\frac{۱}{x-۲}-\frac{۲}{(x+۱)^۲}.$

۴. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $\frac{۱}{x-a}+\frac{۱}{x-b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b};$ ۲) $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=۲;$

۳) $\frac{x+a}{a-x}=\frac{ab+۱}{ab-۱}$; ۴) $\frac{(x-a)^۲+x(x-a)+x^۲}{(x-a)^۲-x(x-a)+x^۲}=\frac{۱۹}{۷}$;

۵) $\frac{a^۲+۲x}{x-a}=\frac{x-a}{x+a}$; ۶) $\frac{ax^۲}{x-۱}-۲a=a^۲+۱$;

۷) $\frac{۲a^۲+x^۲}{a^۳-x^۳}-\frac{۲x}{ax+a^۲+x^۲}+\frac{۱}{x-a}=۰$;

۸) $\frac{x-a}{x-۱}+\frac{x+a}{x+۱}=\frac{x-۲a}{x-۲}+\frac{x+۲a}{x+۲}-\frac{۶(a-۱)}{۵}$;

۹) $\frac{x^۲+ax+a^۲}{x^۲-ax+a^۲}=\frac{a^۲}{x^۲}$; ۱۰) $\left(\frac{x}{x+۱}\right)^۲+\left(\frac{x}{x-۱}\right)^۲=a(a-۱)$;

۱۱) $(۱+x+x^۲)^۲=\frac{a+۱}{a-۱}(۱+x^۲+x^۴)$.

پاسخ‌ها وراهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱) $\{-۲\}$؛ ۲) $\{-۱\pm\sqrt{۷}\}$؛ ۳) $\left\{۱, \frac{-۲\pm۲\sqrt{۷}}{۷}\right\}$؛ ۴) $\{۱, -۳\}$؛ ۵) $\left\{-۱, ۳, \frac{۱۱\pm\sqrt{۴۵}}{۱۱}\right\}$. راهنمائی: در عبارت سمت‌چپ، مخرج مشترک بگیرید وفرض کنید $y=x^۲-۲x$؛ ۶) $\left\{\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۲}\right\}$. راهنمائی: $۴x+\frac{۷}{x}=y$؛ ۷) $\{۱\}$. راهنمائی: $x^۲-۲x+۳=y$.

تکلیف ۲.

۱) $\{-۳\}$؛ ۲) $\left\{\frac{-۳\pm\sqrt{۳۳}}{۲}\right\}$؛ ۳) $\{۲\}$؛

۴) $\left\{-\frac{۵}{۴}, ۵\right\}$؛ ۵) $\{-۴\}$؛ ۶) $\{۰, -۲\}$؛ ۷) $\{۱, ۲\}$.

تکلیف ۳.

۱) $\{۰، ۱\}$؛ ۲) $\{۴، -۴\}$؛ ۳) $\{۳، ۵، ۹\pm\sqrt{۶۶}\}$.
راهنمائی: $y=x+\frac{۱۵}{x}$؛ ۴) $\left\{۱، -\frac{۵}{۷}\right\}$. راهنمائی: عبارت
$۲x\frac{۵x}{۵+۲x}$ را بـه‌سمت چپ اضافه و از آن کم کنید، سپس $y=\frac{۲x^۲}{۵+۲x}$
بگیرید؛ ۵) $\left\{-\frac{۷}{۲}\right\}$. راهنمائی: $y=x+\frac{۷}{۲}$؛
۶) $\left\{-۱، ۹، \frac{۵\pm\sqrt{۶۱}}{۲}\right\}$. راهنمائی: $y=\frac{x^۲-۶x-۹}{x}$.

تکلیف ۴.

۱) $\left\{۲، \frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۲) $\left\{۰، -۲، \frac{-۲\pm\sqrt{۶۶}}{۲}\right\}$؛ ۳) $\{-۱، ۲\}$؛
۴) $\pm\sqrt{\frac{۱۵\pm\sqrt{۱۴۵}}{۱۰}}-۲$ (چهار جواب). راهنمائـی: $y=x+۲$،
$y^۲=z$؛ ۵) $\{-۱، ۱، -۳\}$؛ ۶) $\left\{-۱، ۱، \frac{۳}{۲}، \frac{۲}{۳}\right\}$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\{۱\}$؛ ۲) $\left\{\frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۳) $\left\{-\frac{۱}{۳}، -\frac{۱}{۲}، ۱\right\}$؛ ۴) $\{۲\}$؛
۵) $\left\{۲، \frac{۱}{۴}\right\}$؛ ۶) $\{-۱\}$؛ ۷) $\left\{۰، -۳، \frac{-۳\pm\sqrt{۷۳}}{۲}\right\}$؛
۸) $\left\{\frac{-۱۱\pm\sqrt{۹۷}}{۶}\right\}$؛ ۹) $\left\{۰، \frac{-۵\pm\sqrt{۳}}{۲}\right\}$؛ ۱۰) $\{۰، ۲\}$؛
۱۱) $\left\{-۲، \frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۱۲) $\{۳\}$؛ ۱۳) $\{۴\pm\sqrt{۱۰}\}$؛ ۱۴) $\{-۸\}$؛
۱۵) $\left\{-\frac{۱}{۲}، -۴\right\}$؛ ۱۶) $\left\{\pm\frac{\sqrt{۵}}{۲}، \pm\frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱}\right\}$؛

۱۷) $\left\{\frac{۱\pm\sqrt{۲۱}}{۲}\right\}$؛ ۱۸) $\{۱\pm\sqrt{۱۹}\}$؛ ۱۹) $\left\{۲، \frac{۲}{۳}\right\}$؛

۲۰) $\left\{۰، \frac{۶}{۵}(۱\pm\sqrt{۲۶})\right\}$. راهنمائی: در واقع داریم:
$\frac{x^۲+۳۶}{x^۲-۳۶}=\frac{x+۶}{x-۶}+\frac{x-۶}{x+۶}$؛ ۲۱) $\left\{-\sqrt{\frac{۳}{۲}}+۱\pm\sqrt{\sqrt{۶}+\frac{۳}{۲}}\right\}$؛
۲۲) $\left\{\frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۲۳) $\left\{-۲، \pm\frac{۱}{۲}\right\}$؛ ۲۴) $\left\{\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}, \frac{-۳\pm\sqrt{۵}}{۲}\right\}$؛
۲۵) $\{-۲، ۶، ۳\pm\sqrt{۲۱}\}$. راهنمائی: $\frac{x}{۳}-\frac{۴}{x}=y$؛ ۲۶) $\left\{\frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۳}\right\}$.

راهنمائی: $x+\frac{۱}{x}=z$؛ ۲۷) $x\in\mathbf{R}$ به‌شرط $x\neq-۱$ و $x\neq۲$.

۱۰۲. ۱) ۰ به‌ازای $a=-b\neq۰$، $a+b$ به‌ازای $a\neq-b$ و $ab\neq۰$، $a+b$ و $\frac{۲ab}{a+b}$ به‌ازای $a\neq-b$ و $a\neq b$ و $ab\neq۰$؛ ۲) $x\in\mathbf{R}$ به‌شرط $x\neq a$ به‌ازای $a=b$، ϕ به‌ازای $a\neq b$؛ ۳) $x\in\mathbf{R}$ به‌شرط $x\neq۰$ به‌ازای $a=۰$ و $b\in\mathbf{R}$، $\frac{۱}{b}$ به‌ازای $ab\neq۰$ و $ab\neq۱$، ϕ به‌ازای $a\neq۰$ و $b=۰$؛ ۴) $-۲a$ و $۳a$ به‌ازای $a\neq۰$، ϕ به‌ازای $a=۰$؛ ۵) $-a^۲$ و $-a$ به‌ازای $a\neq-۲$ و $a\neq۰$، ϕ به‌ازای $a=-۲$ و $a=۰$؛ ۶) $a+۱$ و $\frac{۱}{a}+۱$ به‌ازای $a\neq۰$ و $a\neq۱$، ۲ به‌ازای $a=۱$، ϕ به‌ازای $a=۰$؛ ۷) $\frac{a}{۲}$ به‌ازای $a\neq۰$، ϕ به‌ازای $a=۰$؛ ۸) $x\in\mathbf{R}$ به‌شرط $x\neq\pm۱$ و $x\neq\pm۲$ به‌ازای $a=۱$، ϕ به‌ازای $a\neq۱$؛ ۹) $\frac{-a(۱\pm\sqrt{۵})}{۲}$ به‌ازای $a\neq۰$، ϕ به‌ازای $a=۰$.

راهنمائی: اگر $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ آنوقت $\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}$؛ ۱۰) $\pm\sqrt{\frac{a}{a-۲}}$

و $\pm\sqrt{\frac{a-۱}{a+۱}}$ به‌ازای $a<-۱$ و به‌ازای $a>۲$، $\pm\sqrt{\frac{a}{a-۲}}$ به‌ازای $-۱\leqslant a<۰$، ۰ بـه‌ازای $a=۰$ و $a=۱$، $\pm\sqrt{\frac{a-۱}{a+۱}}$ بـه‌ازای $۱<a\leqslant ۲$، ϕ به‌ازای $۰<a<۱$؛ ۱۱) $\frac{a\pm\sqrt{a^۲-۴}}{۲}$ به‌ازای $a<-۲$ و به‌ازای $a>۲$؛ ۱ به‌ازای $a=۲$، -۱ بـه‌ازای $a=-۲$، ϕ به‌ازای $-۲<a<۲$.

§۴. نامعادله‌های گویا و دستگاه نامعادله‌ها

نامعادله‌های به‌صورت

$$a_۰x+a_۱>۰,\quad a_۰x+a_۱<۰,\quad a_۰\neq ۰ \qquad (۱)$$

را نامعادلهٔ خطی می‌نامند.

مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $a_۰x+a_۱>۰$ باتوجه به‌علامت $a_۰$ به‌دست می‌آید:

الف) اگر $a_۰>۰$، آن وقت، جواب‌ها عبارتند از همهٔ مقدارهای $x>-\frac{a_۱}{a_۰}$؛

ب) اگر $a_۰<۰$، آن‌وقت $x<-\frac{a_۱}{a_۰}$.

به‌همین ترتیب برای نامعادلهٔ $a_۰x+a_۱<۰$:

الف) اگر $a_۰>۰$، آن‌وقت جواب‌ها عبارتند ازهمهٔ عددهای بازهٔ $\left(-\infty, -\frac{a_۱}{a_۰}\right)$؛

ب) اگر $a_۰<۰$، آن‌وقت جواب‌ها، عبارتند از همهٔ عددهای بازهٔ $\left(-\frac{a_۱}{a_۰}, +\infty\right)$.

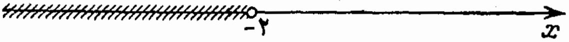
مثال ۱. این نامعادله را حل کنید:

$$-۸x+۳(x-۲)>-x+۲$$

حل. بعد از تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$x+۲<۰$$

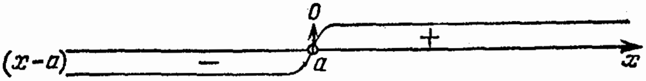
که با نامعادلهٔ اصلی هم‌ارز است. به‌این ترتیب، جواب‌های نامعادلهٔ مفروض، تمامی بازهٔ $(-\infty, -۲)$ را پر می‌کنند (شکل ۹).



شکل ۹

ویژگی‌هایی را که در بالا دربارهٔ نامعادله‌های خطی آوردیم، می‌توان به‌این‌صورت تنظیم کرد: چندجمله‌ای درجه‌اول $a_۰x+a_۱$، به‌ازای $a_۰>۰$، برای هر $x\in\left(-\frac{a_۱}{a_۰}, +\infty\right)$ مثبت، و برای هر $x\in\left(-\infty, -\frac{a_۱}{a_۰}\right)$ منفی است؛ و به‌ازای $a_۰<۰$ برای هر $x\in\left(-\infty, -\frac{a_۱}{a_۰}\right)$ مثبت و برای هر $x\in\left(-\frac{a_۱}{a_۰}, -\infty\right)$ منفی است.

درحالت خاص، دو جمله‌ای $x-a$، برای هر مقدار x که روی محور عددی درسمت‌راست نقطهٔ a واقع باشد مثبت، و برای‌هرمقدار x که درسمت چپ نقطهٔ a ازمحور عددی واقع باشد، منفی است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

این ویژگی دو جمله‌ای $x-a$ اساس روش بازه‌ها را تشکیل می‌دهد که اغلب، برای حل نامعادله‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

فرض کنید بخواهیم نامعادلهٔ $(x-a_۱)(x-a_۲)\dots(x-a_n)>۰$ را حل کنیم. این چندجمله‌ای را درنظرمی‌گیریم:

$$P(x)=(x-a_۱)(x-a_۲)\cdots(x-a_n) \qquad (۲)$$

که در آن $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، عددهای ثابتی با شرط $a_۱<a_۲<\cdots<a_n$ هستند. برپایهٔ آن چه گفتیم، روشن است که به‌ازای هرعدد $x_۰>a_n$، مقدار هریك ازعامل‌ها در(۲)، مثبت و، بنا براین، $P(x_۰)$ مثبت خواهد بود. برای هرعدد $x_۱$ ازبازهٔ $(a_{n-۱}, a_n)$، مقدارمتناظر آخرین عامل $P(x)$ منفی، ولی مقدار عددی هریك از عامل‌های دیگر مثبت است؛ بنابراین، $P(x_۱)$ منفی می‌شود. به‌همین‌ترتیب، برای‌هرعدد $x_۲$ ازبازهٔ $(a_{n-۲}, a_{n-۱})$، عدد $P(x_۲)$ مثبت می‌شود وغیره.

جواب‌های نامعادله‌های $P(x)>۰$ و $P(x)<۰$ به‌این ترتیب‌مشخص می‌شوند. روی محورعددی، جای عددهای $a_۱$، $a_۲$،...، a_n را معین می‌کنیم. بازه‌ای را که درسمت راست بزرگترین عدد قرار گرفته است، باعلامت مثبت مشخص می‌کنیم و، سپس، بازه‌های بعد ازآن را (ازراست به‌چپ) یك درمیان منفی و مثبت قرارمی‌دهیم (بعد از هر مثبت، منفی و بعد ازهر منفی، مثبت). دراین صورت، جواب‌های نامعادلهٔ $P(x)>۰$ عبارتند از اجتماع همهٔ بازه‌هایی که علامت مثبت دارند، و جواب نامعادلهٔ $P(x)<۰$، اجتماع همهٔ بازه‌های باعلامت منفی.

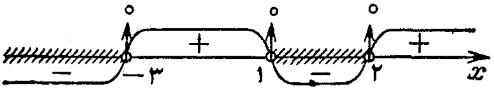
مثال ۳. این نامعادله را حل کنید:

$$(x-۲)(۳+x)(۱-x)>۰$$

حل. اگر دوطرف نامعادله را در ۱ − ضرب کنیم، به‌نامعادله

$$[x-(-۳)](x-۱)(x-۲)<۰ \qquad (۳)$$

می‌رسیم که با نامعادلهٔ مفروض هم‌ارزاست. برای حل نامعادلهٔ (۳)، از روش بازه‌ها استفاده می‌کنیم. جای عددهای ۳−، ۱ و ۲ را روی محور عددی مشخص می‌کنیم. روی بازه‌ها، از راست به‌چپ، به‌ترتیب، علامت‌های مثبت ومنفی را قرارمی‌دهیم (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

مجموعهٔ همهٔ x هایی که دربازه‌های $(-\infty، -۳)$ و $(۱، ۲)$ قراردارند، همان مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۳) است. چون نامعادلهٔ (۳) با نامعادلهٔ اصلی هم‌ارز است، بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اصلی عبارت است از $(-\infty، -۳)\bigcup(۱، ۲)$.

مثال ۳. این نامعادله را حل کنید:

$$x^۲-x-۶<۰$$

حل. سه جمله‌ای درجه دوم $P(x)=x^۲-x-۶$ دارای دو ریشهٔ $x_۱=۳$ و $x_۲=-۲$ است، پس $P(x)=(x-۳)(x-(-۲))$، یعنی

$$(x-۳)(x-(-۲))<۰$$

جواب‌های این نامعادله (که همان جواب‌های معادلهٔ اصلی است)، با روش بازه‌ها به‌دست می‌آید (شکل ۱۲): $(-۲، ۳)$.

شکل ۱۲

فرض کنید سه‌جمله‌ای درجه دوم $ax^۲+bx+c$ درنامعادلهٔ

$$ax^۲+bx+c>۰، \quad a\neq۰ \tag{۴}$$

ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، یعنی

$$ax^۲+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲-\frac{\Delta}{۴a^۲}\right] \tag{۵}$$

که در آن $\Delta=b^۲-۴ac<۰$. دراین صورت مقدار داخل کروشه عددی است مثبت و

الف) سه‌جمله‌ای با شرط $a>۰$، به‌ازای هر مقدار x مثبت است و، بنابراین، نامعادلهٔ (۴) به‌ازای هر مقدار x برقرار است و نامعادلهٔ $ax^۲+bx+c<۰$، جوابی ندارد.

ب) به‌ازای $a<۰$، نامعادلهٔ (۴) جواب ندارد، ولی نامعادلهٔ $ax^۲+bx+c<۰$ به‌ازای هر مقدار x برقرار است.

مثال ۴. این نامعادله را حل کنید:

$$x^۲+۱<۳x-x^۲-۳$$

حل. بعد از تبدیل‌های لازم، به‌دست می‌آید:

$$۲x^۲-۳x+۴<۰$$

که با نامعادلهٔ ما هم‌ارز است. چون علامت‌مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم سمت چپ نا برابری منفی و، در ضمن، ضریب $x^۲$ مثبت است، بنا بر این، نامعادله جواب ندارد.

مثال ۵. همهٔ مقدارهای a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر یك از آن‌ها، معادلهٔ $(a-۲)x^۲-۲ax+۲a-۳=۰$، دو ریشه متمایز داشته باشد.

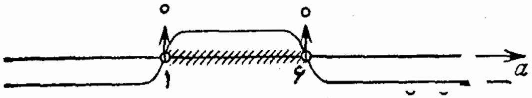
حل. این‌معادله، تنها وقتی دو ریشهٔ متمایز دارد که $a\neq ۲$ و، درضمن، مبین سه‌جمله‌ای سمت چپ برابری، مقداری مثبت باشد، یعنی

$$a\neq ۲ \quad \text{و} \quad ۴a^۲-۴(a-۲)(۲a-۳)>۰ \qquad (۶)$$

چون

$$۴a^۲-۴(۲a-۳)(a-۲)=$$
$$=-۴(a^۲-۷a+۶)=-۴(a-۱)(a-۶)$$

بنا بر این، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۶)، عبارت است از اجتماع دو بازهٔ (۱، ۲) و (۲، ۶). بنا بر این، شرط مساله وقتی برقرار است که عدد a را در مجموعهٔ (۲، ۶)∪(۱، ۲) به‌حساب آوریم (شکل ۱۳).



شکل ۱۳

بعضی از نامعادله‌های جبری بالاتر از درجهٔ دوم، بعد از تبدیل‌های لازم، به‌صورت

$$(x-a_۱)^{k_۱}(x-a_۲)^{k_۲}\dots(x-a_{n-۱})^{k_{n-۱}}(x-a_n)^{k_n}>۰ \qquad (۷)$$

درمی‌آیند که، در آن، $k_۱$، $k_۲$، ...، k_n عددهایی طبیعی و $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n

عددهایی حقیقی‌اند که درشرط $a_۱<a_۲<\dots<a_{n-۱}<a_n$ صدق می‌کنند.

نامعادلهٔ به‌صورت (۷)، به‌کمك تعمیم روش بازه‌ها حل می‌شود. چندجمله‌ای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P(x)=(x-a_۱)^{k_۱}(x-a_۲)^{k_۲}\dots(x-a_{n-۱})^{k_{n-۱}}(x-a_n)^{k_n} \quad (۸)$$

به‌ازای $x_۰>a_n$، مقدار متناظر هریك‌از عامل‌ها در (۸) و، بنا براین، مقدار $P(x_۰)$ مثبت است. برای هر عدد $x_۱$ از بازهٔ $(a_{n-۱}, a_n)$، مقدار متناظر هر عامل، به‌جز آخرین عامل، مثبت است، و مقدار عامل آخر در حالت زوج‌بودن k_n مثبت و درحالت فردبودن k_n منفی است. معمولاً دراین‌مورد می‌گویند: چندجمله‌ای $P(x)$، ضمن‌عبور از a_n (به‌سمت‌مقدارهای کوچکتر) به‌شرط فردبودن k_n تغییرعلامت می‌دهد و به‌شرط زوج‌بودن k_n تغییرعلامت نمی‌دهد.

به همین ترتیب، اگر علامت $P(x)$ در بازهٔ $(a_i, a_{i+۱})$ معلوم باشد، آن‌وقت در بازهٔ $(a_{i-۱}, a_i)$، با قانون زیر تعیین می‌شود: چندجمله‌ای $P(x)$، ضمن عبور از نقطهٔ a_i، به‌شرط فرد بودن k_i تغییرعلامت می‌دهد و به‌شرط زوج‌بودن k_i تغییرعلامت نمی‌دهد.

تعمیم روش بازه‌ها. فرض‌کنید چندجمله‌ای $P(x)$، با رابطهٔ (۸) داده شده باشد. جای‌عددهای $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n را روی محورعددی پیدا می‌کنیم. در بازهٔ سمت راست بزرگترین عدد، یعنی درسمت راست a_n، علامت‌مثبت می‌گذاریم. در بازهٔ بعد از آن (از راست به‌چپ)، به‌شرط زوج‌بودن k_n، علامت مثبت و به شرط فردبودن k_n، علامت منفی قرار می‌دهیم. برای بازهٔ بعدی، چندجمله‌ای $P(x)$، ضمن‌عبور از $a_{n-۱}$، به‌شرطی تغییرعلامت می‌دهد که $k_{n-۱}$، عددی فرد باشد. سپس، به بازهٔ بعدی می‌رویم و، برای علامت $P(x)$ در آن، از همین قانون استفاده می‌کنیم. به همین ترتیب عمل می‌کنیم تا همهٔ بازه‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. جواب نامعادلهٔ $P(x)>۰$ عبارت است از اجتماع همهٔ بازه‌هایی که، در آن‌ها، علامت مثبت گذاشته‌ایم و، اجتماع همهٔ بازه‌های با علامت منفی، جواب نامعادلهٔ $P(x)<۰$ خواهد بود.

مثال ۶. این نامعادله را حل کنید:

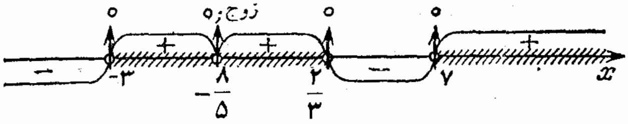
$$(x+۳)(۳x-۲)^۵(۷-x)^۳(۵x+۸)^۲<۰$$

حل. با ضرب دو طرف نامعادلهٔ مفروض در $-\frac{۱}{۳^۵}\cdot\frac{۱}{۵^۲}$ به‌نامعادلهٔ زیر هم‌ارز با نامعادلهٔ مفروض می‌رسیم:

$$(x-(-۳))\left(x-\left(-\frac{۸}{۵}\right)\right)^۲\left(x-\frac{۲}{۳}\right)^۵(x-۷)^۳>۰ \qquad (۹)$$

برای حل نامعادلهٔ (۹) از تعمیم روش بازه‌ها استفاده می‌کنیم. عددهای ۳−، $-\frac{۸}{۳}$، $\frac{۲}{۳}$ و ۷ را روی محور عددی قرار می‌دهیم (شکل ۱۴). سمت راست عدد ۷ (بزرگترین عدد)، علامت مثبت می‌گذاریم. ضمن عبور از نقطهٔ $x=۷$، چندجمله‌ای

$$P(x)=(x-(-۳))\left(x-\left(-\frac{۸}{۵}\right)\right)^۲\left(x-\frac{۲}{۳}\right)^۵(x-۷)^۳$$



شکل ۱۴

تغییر علامت می‌دهد، زیرا توان دوجمله‌ای $x-۷$، عددی فرد است؛ بنابراین در بازهٔ $\left(\frac{۲}{۳}، ۷\right)$، باید علامت منفی گذاشت. ضمن عبور از نقطهٔ $x=\frac{۲}{۳}$، چندجمله‌ای $P(x)$ تغییر علامت می‌دهد، زیرا دوجمله‌ای $x-\frac{۲}{۳}$ توانی فرد دارد. ضمن عبور از نقطهٔ $-\frac{۸}{۵}$، چندجمله‌ای $P(x)$ تغییر علامت نمی‌دهد، زیر دوجمله‌ای $x+\frac{۸}{۵}$ توانی زوج دارد؛ بنابراین در بازهٔ $\left(-۳، -\frac{۸}{۵}\right)$، علامت مثبت را می‌گذاریم. سرانجام، ضمن عبور از نقطهٔ ۳−، چندجمله‌ای

$P(x)$ تغییر علامت می‌دهد، زیرا دوجمله‌ای $x+۳$ توانی فرد دارد. به‌این ترتیب، جواب نامعادلهٔ (۹)، و بنابراین جواب نامعادلهٔ اصلی، عبارت است از اجتماع بازه‌های با علامت مثبت، یعنی اجتماع مجموعه‌های

$\left(-۳، -\frac{۸}{۵}\right)$، $\left(-\frac{۸}{۵}، \frac{۲}{۳}\right)$ و $(۷، +\infty)$.

از تعمیم روش بازه‌ها، در حل نامعادله‌های به‌صورت

$$(x-a_۱)^{k_۱}(x-a_۲)^{k_۲}\dots(x-a_n)^{k_n}(b_۱x^۲+c_۱x+d_۱)^{l_۱}\dots$$
$$\dots(b_mx^۲+c_mx+d_m)^{l_m}>۰$$

هم می‌توان استفاده کرد که، در آن، مبین هر یك از سه‌جمله‌ای‌های درجه‌دوم

$$(b_۱x^۲+c_۱x+d_۱)، \dots، (b_mx^۲+c_mx+d_m)$$

منفی است. در این حالت، نامعادلهٔ ما هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$b_۱^{l_۱}\dots b_m^{l_m}(x-a_۱)^{k_۱}\dots(x-a_n)^{k_n}>۰$$

برای حل نامعادلهٔ

$$a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n>۰$$

می‌توان به‌این ترتیب عمل کرد: ابتدا ریشه‌های چندجمله‌ای

$$P(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n$$

را پیدا می‌کنیم؛ سپس $P(x)$ را به ضرب عامل‌ها تجزیه و، سرانجام، از تعمیم روش بازه‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال ۷. این نامعادله را حل کنید:

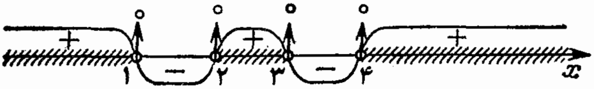
$$x^۴-۱۰x^۳+۳۵x^۲-۵۰x+۲۴>۰$$

حل. معادلهٔ $x^۴-۱۰x^۳+۳۵x^۲-۵۰x+۲۴=۰$ دارای ریشه‌های $x_۱=۱$، $x_۲=۲$، $x_۳=۳$ و $x_۴=۴$ است. بنابراین نامعادلهٔ مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)>۰$$

که اگر آن‌را با روش بازه‌ها حل کنیم (شکل ۱۵)، مجموعهٔ جواب به‌دست می‌آید:

$$(-\infty، ۱)\cup(۲، ۳)\cup(۴، +\infty)$$



شکل ۱۵

مثال ۸. این نامعادله را حل کنید:

$$۳x^{۲}(x-۴)^{۲}<۳۲-۵(x-۲)^{۲} \qquad (۱۰)$$

حل. بعد از تبدیل‌های لازم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$۳x^{۴}-۲۴x^{۳}+۳۵x^{۲}-۲۰x-۱۲<۰ \qquad (۱۱)$$

که با نامعادلهٔ مفروض هم‌ارز است. اگر سمت‌چپ نابرابری را برابر صفر قرار دهیم، معادله‌ای به‌دست می‌آید که ریشه‌های آن ۱، ۳، $۲\pm\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ است؛ بنابراین، نامعادلهٔ (۱۱) هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$(x-۱)(x-۳)\left(x-۲-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)\left(x-۲+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)<۰$$

و چون $۲-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}<۱<۳<۲+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$، بهتر است آن‌را به‌صورت

$$\left(x-۲+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)(x-۱)(x-۳)\left(x-۲-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)<۰ \qquad (۱۲)$$

بنویسیم. با استفاده از روش بازه‌ها، به‌سادگی مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ (۱۲) و، در نتیجه، مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$\left(۲-\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}،\ ۱\right)\cup\left(۳،\ ۲+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

مجموعهٔ جواب در نامعادلهٔ غیراکید

$$P(x)=a_{۰}x^{n}+a_{۱}x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_{n}\geqslant ۰،\quad a_{۰}\neq ۰$$

اجتماعی است از دومجموعه: مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اکید $P(x)>۰$ و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $P(x)=۰$.

به‌همین ترتیب، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ غیراکید $P(x)\leqslant ۰$

عبارت است از اجتماع مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ اکید $P(x)<۰$ و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $P(x)=۰$.

مثال ۹. نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

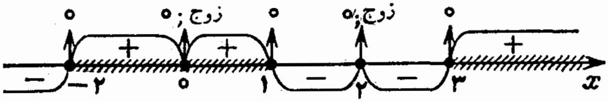
$$(x^{۲}-۳x+۲)(x^{۳}-۳x^{۲})(۴-x^{۲})\leqslant ۰$$

حل. نامعادلهٔ مفروض را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$(x+۲)x^{۲}(x-۱)(x-۲)^{۲}(x-۳)\geqslant ۰$$

که با استفاده از روش بازه‌ها (شکل ۱۶)، جواب آن به‌دست می‌آید:

$$[-۲، ۱]\cup\{۲\}\cup[۳، +\infty)$$



شکل ۱۶

مثال ۱۰. این نامعادله را، برای هر $a\geqslant ۰$، حل کنید:

$$a^{۳}x^{۴}+۶a^{۲}x^{۲}-x+۹a+۳\geqslant ۰$$

حل. به‌ازای $a=۰$، این معادله به‌صورت $-x+۳\geqslant ۰$ درمی‌آید و، از آن‌جا، به‌جواب $-\infty<x\leqslant ۳$ می‌رسیم.

اکنون a را عدد ثابت و مثبتی می‌گیریم. سمت چپ نامعادله را تبدیل می‌کنیم:

$$a^{۳}x^{۴}+۶a^{۲}x^{۲}-x+۹a+۳=a(a^{۲}x^{۴}+۶ax^{۲}+۹)-x+۳=$$
$$=a(ax^{۲}+۳)^{۲}-x+۳=a[(ax^{۲}+۳)^{۲}-x^{۲}]+ax^{۲}-x+۳=$$
$$=a(ax^{۲}+۳-x)(ax^{۲}+۳+x)+ax^{۲}-x+۳=$$
$$=(ax^{۲}-x+۳)(a^{۲}x^{۲}+ax+۳a+۱)$$

مبین سه‌جمله‌ای $a^{۲}x^{۲}+ax+۳a+۱$ برابر $-a^{۲}(۱۲a+۳)$ است، یعنی مقداری منفی. بنابراین، این سه‌جمله‌ای همیشه مثبت است و نامعادلهٔ مفروض، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$ax^{۲}-x+۳\geqslant ۰ \qquad (۱۳)$$

مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم سمت چپ نابرابری برابر است با

$۱-۱۲a$، که به‌ازای $a\geqslant\frac{۱}{۱۲}$ غیرمثبت است. به‌این ترتیب، به‌ازای $a\geqslant\frac{۱}{۱۲}$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱۳)، و در نتیجه نامعادلهٔ اصلی، عبارت‌است از تمامی‌محورعددی. به‌ازای $۰<a<\frac{۱}{۱۲}$، مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ (۱۳) شامل دو بازه است:

$$-\infty<x\leqslant\frac{۱-\sqrt{۱-۱۲a}}{۲a} \quad و \quad \frac{۱+\sqrt{۱-۱۲a}}{۲a}\leqslant x<+\infty$$

به‌این ترتیب جواب به‌دست می‌آید: به‌ازای $a=۰$، $x\leqslant ۳$؛ به‌ازای $۰<a<\frac{۱}{۱۲}$، $x\leqslant x_۱$ و $x\geqslant x_۲$ و به‌ازای $a\geqslant\frac{۱}{۱۲}$، $x\in\mathbf{R}$ در این‌جا $x_{۱,۲}=\frac{۱\mp\sqrt{۱-۱۲a}}{۲a}$.

مثال ۱۱. این نامعادله را حل کنید:

$$(x+۳)^۴+(x+۵)^۴\geqslant ۴ \qquad (۱۴)$$

حل. معادلهٔ $(x+۳)^۴+(x+۵)^۴=۴$ را، با استفاده از روش متقارن‌کردن به‌دست می‌آوریم (فصل چهارم §۱ را ببینید):

$$y=\frac{(x+۳)+(x+۵)}{۲}=x+۴$$

در این‌صورت، معادلهٔ ما به‌صورت $(y-۱)^۴+(y+۱)^۴=۴$ درمی‌آید که، بعد از بازکردن پرانتزها و سپس ساده‌کردن، خواهیم داشت:

$$y^۴+۶y^۲-۱=۰ \qquad (۱۵)$$

که در آن $y^۲=\pm\sqrt{۱۰}-۳$. بنابراین، معادلهٔ (۱۶) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$(y^۲+۳-\sqrt{۱۰})(y^۲+۳+\sqrt{۱۰})=۰$$

پرانتز دوم، به‌ازای هرمقدار y مثبت‌است، درنتیجه به‌این نامعادله می‌رسیم:

$$y^۲+۳-\sqrt{۱۰}\geqslant ۰$$

که اگر آن‌را با مجهول x بنویسیم:

$$(x+۴)^{۲}\geqslant\sqrt{۱۰}-۳$$

که با نابرابری (۱۴) هم‌ارز است و، بـا حل آن، مجموعهٔ جواب به‌دست می‌آید:

$$(-\infty، -۴-\sqrt{\sqrt{۱۰}-۳}]\cup[-۴+\sqrt{\sqrt{۱۰}-۳}، +\infty)$$

نامعادله‌های به‌صورت

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>۰، \quad \frac{P(x)}{Q(x)}<۰، \quad \frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant ۰، \quad \frac{P(x)}{Q(x)}\leqslant ۰$$

کـه در آن‌هـا، $P(x)$ و $Q(x)$، چندجمله‌ای‌هـایی هستند ($Q(x)\not\equiv ۰$)، نامعادله‌های گویا نامیده می‌شوند.

ضمن حل این نامعادله‌ها، از گزاره‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$۱)\quad \frac{P(x)}{Q(x)}>۰ \iff P(x)Q(x)>۰;$$

$$۲)\quad \frac{P(x)}{Q(x)}<۰ \iff P(x)Q(x)<۰;$$

$$۳)\quad \frac{P(x)}{Q(x)}\geqslant ۰ \iff \begin{cases} P(x)Q(x)\geqslant ۰ \\ Q(x)\neq ۰ \end{cases};$$

$$۴)\quad \frac{P(x)}{Q(x)}\leqslant ۰ \iff \begin{cases} P(x)Q(x)\leqslant ۰ \\ Q(x)\neq ۰ \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، حل نامعادله‌های گویا، به‌حل نامعادله‌هایی منجرمی‌شوند که قبلاً دربارهٔ آن‌ها بحث کرده‌ایم.

نامعادله‌های خطی - کسری زیرهم، به‌نامعادله‌های گویا تعلق دارند:

$$\frac{ax+b}{cx+d}>۰، \quad \frac{ax+b}{cx+d}<۰، \quad \frac{ax+b}{cx+d}\geqslant ۰، \quad \frac{ax+b}{cx+d}\leqslant ۰$$

مثال ۱۲. نامعادلهٔ $\frac{۱}{x}\leqslant ۱$ را حل کنید.

حل. اگر عدد ۱ را بـه سمت چپ ببریم، بعد از مخرج مشترک گرفتن به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱-x}{x}\leqslant ۰$$

که هم‌ارز است با دستگاه $\begin{cases} x(۱-x)\leqslant ۰\\ x\neq ۰\end{cases}$. اگر نامعادلهٔ اول دستگاه را حل کنیم، به‌جواب $(-\infty، ۰]\cup[۱، +\infty)$ می‌رسیم و، با توجه به‌شرط $x\neq ۰$، برای جواب نامعادلهٔ مفروض خواهیم داشت: $(-\infty، ۰)\cup[۱، +\infty)$.

مثال ۱۳. نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۵}>\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

حل. نامعادله به‌سادگی به‌صورت $\frac{x+۵}{x-۵}>۰$ درمی‌آید که با نامعادلهٔ

$$(x+۵)(x-۵)>۰$$

هم‌ارز است. پاسخ: $(-\infty، -۵)\cup(۵، +\infty)$.

مثال ۱۴. نامعادلهٔ $\frac{x^۲+۴x-۴}{۲x^۲-x-۱}>۰$ را حل کنید.

حل. این نامعادله، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

$$(x^۲+۴x-۴)(۲x^۲-x-۱)>۰$$

که به‌نوبهٔ خود و با تجزیه سه‌جمله‌ای‌ها، چنین می‌شود:

$$(x+۲-۲\sqrt{۲})(x+۲+۲\sqrt{۲})\left(x+\frac{۱}{۲}\right)(x-۱)>۰ \qquad (۱۶)$$

چون $-۲-۲\sqrt{۲}<-\frac{۱}{۲}<-۲+\sqrt{۲}<۱$، با استفاده از روش بازه‌ها، جواب نامعادلهٔ (۱۶)، که همان جواب نامعادلهٔ اصلی است، به‌دست‌می‌آید

$$(-\infty، -۲-۲\sqrt{۲})\cup\left(-\frac{۱}{۲}، -۲+۲\sqrt{۲}\right)\cup(۱، +\infty)$$

مثال ۱۵. نامعادلهٔ $\frac{۱}{x-۲}+\frac{۱}{x-۱}\geqslant\frac{۱}{x}$ را حل کنید.

حل. اگر همهٔ جمله‌ها را به‌سمت چپ نابرابری ببریم و به‌یك مخرج تبدیل کنیم، سرانجام به‌نامعادلهٔ اصلی، می‌رسیم:

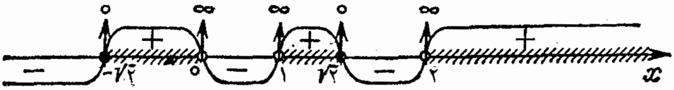
$$\frac{x^{۲}-۲}{x(x-۱)(x-۲)}\geqslant ۰ \qquad (۱۷)$$

نامعادله (۱۷) هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases}(x-۲)x(x-۱)(x-\sqrt{۲})(x+\sqrt{۲})\geqslant ۰\\ x(x-۱)(x-۲)\neq ۰\end{cases} \qquad (۱۸)$$

با استفاده از روش‌بازه‌ها، جواب نامعادلهٔ اول دستگاه‌را پیدامی‌کنیم وبا توجه به‌نامعادلهٔ دوم دستگاه (۱۸) (که منجربه $x\neq ۰$، $x\neq ۱$ و $x\neq ۲$ می‌شود)، جواب دستگاه (۱۸)، و در نتیجه جواب نامعادلهٔ اصلی را به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۷):

$$[-\sqrt{۲}, ۰)\cup(۱, \sqrt{۲}]\cup(۲, +\infty)$$



شکل ۱۷

مثال ۱۶. این نامعادله را حل کنید:

$$\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۱+x}+\frac{۱}{۲+x}-\frac{۱}{۳+x}-\frac{۱}{۴+x}+\frac{۱}{۵+x}-\frac{۱}{۶+x}+\frac{۱}{۷+x}>۰$$

حل. کسرها را گروه‌بندی می‌کنیم و، کسرهای اول و هشتم، دوم و هفتم، سوم و ششم، چهارم و پنجم را، بـه‌طور جداگانه باهم جمع می‌کنیم:

$$\frac{۲x+۷}{x(x+۷)}-\frac{۲x+۷}{(x+۱)(x+۶)}+\frac{۲x+۷}{(x+۲)(x+۵)}-$$

$$-\frac{۲x+۷}{(x+۳)(x+۴)}>۰ \Leftrightarrow (۲x+۷)\Big(\frac{۱}{x^{۲}+۷x}-$$

$$-\frac{۱}{x^۲+۷x+۶}+\frac{۱}{x^۲+۷x+۱۰}-\frac{۱}{x^۲+۷x+۱۲}\Big)>۰$$

که اگر کسرهای داخل پرانتز را دو به‌دو جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(۲x+۷)\Big(\frac{۳}{(x^۲+۷x)(x^۲+۷x+۶)}+$$

$$+\frac{۱}{(x^۲+۷x+۱۰)(x^۲+۷x+۱۲)}\Big)>۰ \Leftrightarrow (۲x+۷)\times$$

$$\times\frac{۴(x^۲+۷x)^۲+۷۲(x^۲+۷x)+۳۶۰}{(x^۲+۷x)(x^۲+۷x+۶)(x^۲+۷x+۱۰)(x^۲+۷x+۱۲)}>۰ \qquad (۱۹)$$

چون صورت کسر اخیر، به‌ازای همهٔ مقدارهای x مثبت است، بنابراین (۱۹) هم‌ارز است با

$$\frac{۲x+۷}{(x^۲+۷x)(x^۲+۷x+۶)(x^۲+۷x+۱۰)(x^۲+۷x+۱۲)}>۰$$

که به‌نوبهٔ خود، هم‌ارز است با نامعادلهٔ

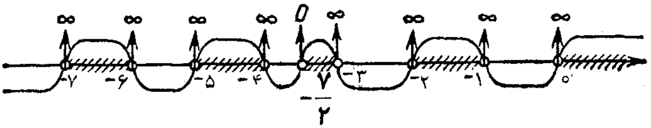
$$x(x+۱)(x+۲)(x+۳)\Big(x+\frac{۷}{۲}\Big)(x+$$

$$+۴)(x+۵)(x+۶)(x+۷)>۰$$

که به‌سادگی می‌توان جواب آن، و درنتیجه جواب نامعادلهٔ اصلی را پیدا کرد (شکل ۱۸):

$$(-۷،\ -۶)\cup(-۵،\ -۴)\cup\Big(-\frac{۷}{۲}،\ -۳\Big)\cup$$

$$\cup(-۲،\ -۱)\cup(۰،\ +\infty)$$

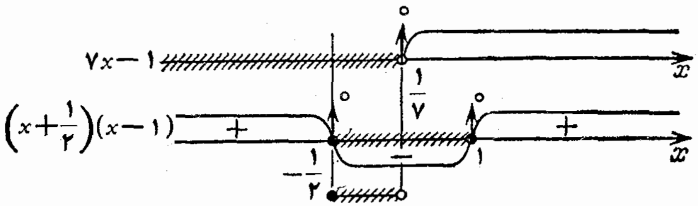


شکل ۱۸

برای حل دستگاه نامعادله‌های یك‌مجهولی، معمولاً هریك از نامعادله‌های دستگاه را به‌طورجداگانه حل می‌کنند و، سپس، اشتراك مجموعه‌های جواب را به‌دست می‌آورند.

مثال ۱۷. دستگاه $\begin{cases}۸x-۲<x-۱\\ ۲x^{۲}-x-۱\leqslant ۰\end{cases}$ را حل کنید.

حل. این دستگاه را می‌توان به‌صورت $\begin{cases}۷x<۱\\ \left(x+\frac{۱}{۲}\right)(x-۱)\leqslant ۰\end{cases}$ نوشت. جواب نامعادلهٔ اول دستگاه مجموعهٔ $\left(-\infty ,\frac{۱}{۷}\right)$ و جواب نامعادلهٔ دوم دستگاهٔ $\left[-\frac{۱}{۲}, ۱\right]$ است. اشتراك این دومجموعه (شکل ۱۹)، عبارت است از مجموعهٔ $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۷}\right)$ که، درضمن، جواب دستگاه مفروض است.



شکل ۱۹

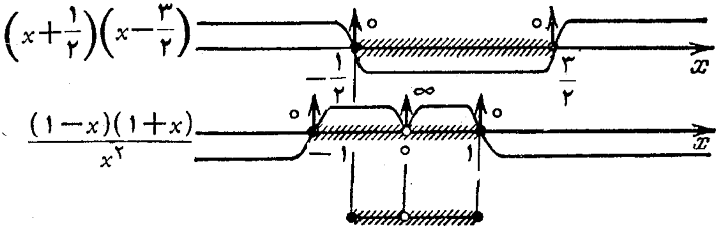
مثال ۱۸. دستگاه $\begin{cases}۲x^{۲}-۴x-۳\leqslant ۰\\ \frac{۱}{x^{۲}}\geqslant ۱\end{cases}$ را حل کنید.

حل. دستگاه مفروض هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases}\left(x+\frac{۱}{۲}\right)\left(x-\frac{۳}{۲}\right)\leqslant ۰\\ \frac{۱-x^{۲}}{x^{۲}}\geqslant ۰\end{cases}$$

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ دوم دستگاه $[-۱, ۰)\cup(۰, ۱]$ است و مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ اول $\left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}\right]$. بنابراین، از اشتراک این دو مجموعه، مجموعهٔ جواب دستگاه مفروض به‌دست می‌آید (شکل ۲۰):

$$\left[-\frac{۱}{۲}, ۰\right)\cup(۰, ۱].$$



شکل ۲۰

مثال ۱۹. همهٔ مقدارهای x را پیدا کنید، به‌نحوی که به‌ازای هر یک از آن‌ها، مجموعهٔ همهٔ جواب‌های دستگاه زیر، تمامی محور عددی باشد:

$$\begin{cases}\frac{x^{۲}+ax-۲}{x^{۲}-x+۱}<۲\\ \frac{x^{۲}+ax-۲}{x^{۲}-x+۱}>-۳\end{cases}$$

حل. دستگاه را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\begin{cases}\frac{x^{۲}-(a+۲)x+۴}{x^{۲}-x+۱}>۰\\ \frac{۴x^{۲}+(a-۳)x+۱}{x^{۲}-x+۱}>۰\end{cases}$$

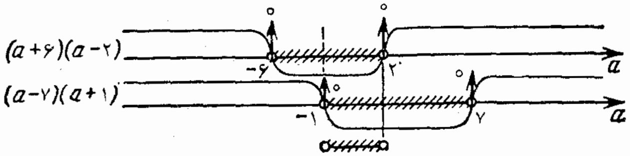
وچون، برای‌هرمقدار x داریم $x^۲-x+۱>۰$، دستگاه اخیرهم‌ارزاست با

$$\begin{cases} x^۲-(a+۲)x+۴>۰ \\ ۴x^۲+(a-۳)x+۱>۰ \end{cases} \qquad (۲۰)$$

بنا به صورت مساله، باید همهٔ مقدارهـای a را طوری پیدا کنیم که، به‌ازای هرکدام از آن‌ها، دستگاه (۲۰) برای همهٔ مقدارهای حقیقی x برقرار باشد. چون‌ضریب $x^۲$، درهر دونامعادلهٔ دستگاه، عددی مثبت‌است، بنابراین، این‌وضع تنها وقتی پیش‌می‌آیدکه مبین سه‌جمله‌ای‌های سمت‌چپ‌نابرابری‌ها، منفی باشند، یعنی

$$\begin{cases} (a+۲)^۲-۱۶<۰ \\ (a-۳)^۲-۱۶<۰ \end{cases} \qquad (۲۱)$$

جواب نامعادلهٔ اول دستگاه (۲۱) عبارت‌است‌از مجموعهٔ $(-۶, ۲)$ و جواب نامعادلهٔ دوم، مجموعه $(-۱, ۷)$. بـه این ترتیب، جواب دستگاه (۲۱)، مجموعهٔ $(-۱, ۲)$ است (شکل ۲۱). به‌این‌ترتیب، اگر a عددی‌از بازه $(-۱, ۲)$ باشد، جواب دستگاه مفروض، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی است.



شکل ۲۱

مسألهٔ مربوط به‌نوع استقرار ریشه‌های معادله، منجر به‌حل‌دستگاهی از نامعادله‌های گویا می‌شود.

گزاره‌هایی دربارهٔ نوع استقرار ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم.

۱. معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$، تنهاوقتی دارای دوریشهٔ مثبت‌است که

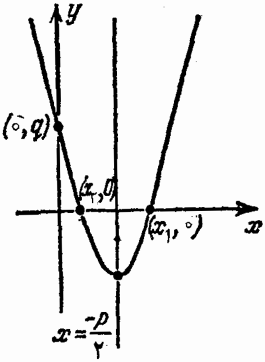
$$p^۲-۴q\geqslant ۰،\ \ p<۰،\ \ q>۰$$

تعبیر هندسی. برای این‌که سهمی مفروض (شکل ۲۲)، یعنی نمودار تابع $y=x^{۲}+px+q$، نیم محور مثبت Ox را در دو نقطهٔ $(x_{۱}, ۰)$ و $(x_{۲}, ۰)$ ($x_{۱}>۰$ و $x_{۲}>۰$) قطع کند، لازم و کافی است که سه شرط زیر برقرار باشند:

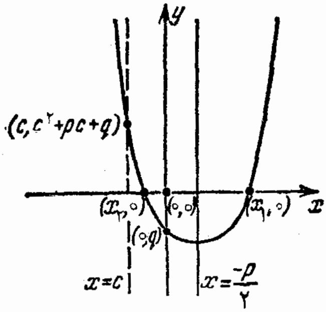
۱) راس‌سهمی، یعنی نقطهٔ $\left(-\frac{p}{۲}, \frac{p^{۲}-۴q}{۴}\right)$، یا در پایین نیم‌صفحه، نسبت به‌محور Ox، باشد و یا روی محور Ox قرار گیرد (شرط $p^{۲}-۴q\geqslant ۰$)؛

۲) محور تقارن سهمی، یعنی خط راست $x=-\frac{p}{۲}$، در سمت راست محور Oy باشد (شرط $p<۰$)؛

۳) سهمی، محور Oy را در نقطهٔ $(۰, q)$ واقع درنیم‌صفحهٔ بالاقطع کند (شرط $q>۰$).



شکل ۲۲



شکل ۲۳

۴. معادلهٔ $x^{۲}+px+q=۰$، تنها وقتی دو ریشهٔ بزرگتر از عدد مفروض c دارد که

$$p^{۲}-۴q\geqslant ۰,\quad -\frac{p}{۲}>c,\quad c^{۲}+pc+q>۰$$

تعبیر هندسی. برای این‌که سهمی، نمودار تابع

$y=\left(x+\frac{p}{۲}\right)^۲-\frac{p^۲-۴q}{۴}$، محور Ox را در دو نقطهٔ $(x_۱, ۰)$ و $(x_۲, ۰)$ واقع در سمت راست نقطهٔ $(c, ۰)$ قطع کند، لازم و کافی است، سه شرط زیر برقرار باشند:

۱) راس سهمی یا درنیم‌صفحه پایین و یا روی محور Ox باشد (شرط $p^۲-۴q\geqslant ۰$)؛

۲) محور تقارن سهمی، خط راست $x=-\frac{p}{۲}$، در سمت راست خط $x=c$ قرار گیرد (شرط $-\frac{p}{۲}>c$)؛

۳) سهمی، خط راست $x=c$ را در نقطهٔ $(c, c^۲+pc+x)$ قطع می‌کند که در نیم‌صفحهٔ بالا قرار دارد (شرط $c^۲+pc+q>۰$).

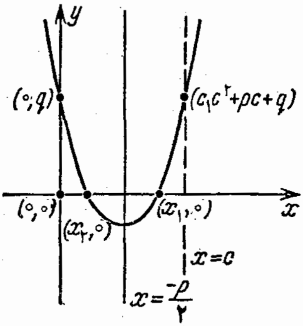
۴. معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$، تنها دارای دو ریشهٔ کوچکتر از عدد مفروض c است که

$$p^۲-۴q\geqslant ۰,\quad -\frac{p}{۲}<c,\quad c^۲+pc+q>۰$$

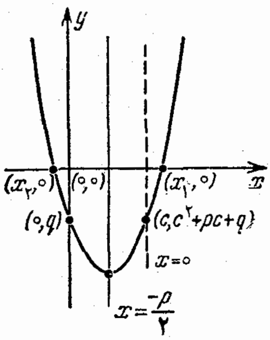
تعبیر هندسی. برای این‌که سهمی، نمودار تابع $y=\left(x+\frac{p}{۲}\right)^۲-\frac{p^۲-۴q}{۴}$ (شکل ۲۴)، محور Ox را در نقطه‌های $(x_۱, ۰)$ و $(x_۲, ۰)$ واقع در سمت چپ نقطهٔ $(c, ۰)$ قطع کند، لازم و کافی است سه شرط زیر برقرار باشد:

۱) راس سهمی ــ نقطهٔ $\left(\frac{-p}{۲}, \frac{p^۲-۴q}{۴}\right)$ ــ یا در نیم‌صفحهٔ بالا و یا روی محور Ox باشد (شرط $p^۲-۴q\geqslant ۰$)؛

۲) محور تقارن سهمی، خط راست $x=-\frac{p}{۲}$، درسمت چپ خط راست $x=c$ قرار گیرد (شرط $-\frac{p}{۲}<c$)؛



شکل ۲۴



شکل ۲۵

۳) سهمی، خط راست $x=c$ را در نقطهٔ $(c، c^{۲}+pc+q)$ واقع در نیم‌صفحهٔ بالا قطع کند (شرط $c^{۲}+pc+q>۰$).

۴. معادلهٔ $x^{۲}+px+q=۰$، تنها وقتی یک ریشهٔ بزرگتر از عدد مفروض c و یک ریشهٔ کوچکتر از c دارد که

$$c^{۲}+pc+q<۰$$

تعبیر هندسی. برای آن‌که سهمی، نمودار تابع $y=\left(x+\frac{p}{۲}\right)^{۲}-\frac{p^{۲}-۴q}{۴}$ (شکل ۲۵)، محور Ox را در نقطه‌های $(x_{۱}، ۰)$ و $(x_{۲}، ۰)$ به‌نحوی قطع کند که نقطهٔ $(c، ۰)$ در بین آن‌ها واقع باشد، لازم و کافی است که سهمی، خط راست $x=c$ را در نقطهٔ $(c، c^{۲}+pc+q)$ واقع در نیم‌صفحهٔ پایین قطع کند. (شرط $c^{۲}+pc+q<۰$).

مثال ۲۰. پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ زیر، دو ریشهٔ مثبت داشته باشد:

$$x^{۲}-۲(a-۱)x+۲a+۱=۰ \qquad (۲۲)$$

حل. برای این که هر دو ریشهٔ معادلهٔ (۲۲) مثبت باشد، لازم و کافی است که، مبین سه‌جمله‌ای درجه دوم سمت چپ برابری، غیرمنفی و، در ضمن، هم حاصل‌ضرب $x_{۱}x_{۲}$ و هم مجموع $x_{۱}+x_{۲}$ مثبت باشند.

به‌این ترتیب، با توجه به‌قضیهٔ ویت، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۴(a-۱)^۲-۴(۲a+۱)\geqslant ۰ \\ ۲(a-۱)>۰ \\ ۲a+۱>۰ \end{cases}$$

که با دستگاه نامعادله‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} a(a-۴)\geqslant ۰ \\ a-۱>۰ \\ ۲a+۱>۰ \end{cases} \qquad (۲۳)$$

که با حل آن، به‌جواب $a\in[۴, +\infty)$ می‌رسیم.

مثال ۲۱. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که ریشه‌های معادلهٔ

$$۲x^۲-۲(۲a+۱)x+a(a-۱)=۰$$

با شرط $x_۱<a<x_۲$ سازگار باشند.

حل. باید معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی باشد و، درضمن، عدد a، بین آن دو ریشه قرار گیرد. با توجه به گزارهٔ ۴، حل مساله منجر به‌حل این نامعادله می‌شود:

$$۲a^۲-۲(۲a+۱)a+a(a-۱)<۰$$

که بعد ازساده کردن به‌صورت $-a^۲-۳a<۰$ در می‌آید و، بنابراین $a<-۳$ یا $a>۰$.

تکلیف ۱.

این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $۳x+۳<۵(x+۱)-۲;$ ۲) $x-۸\geqslant ۲\left(x+\frac{۱}{۲}\right)+۷;$

۳) $-x^۲-۶x+۷>۰;$ ۴) $x^۴-۲x^۲+\frac{۳}{۴}\leqslant ۰;$

۵) $۲x^۲-۳x+۱>۰;$ ۶) $x^۴-۱۲x^۲+۳۶\leqslant ۰;$

۷) $(۲x^۲+۱۱x+۶)(۲x^۲+۱۱x+۱۳)>۸;$

۸) $(x-۲)(x-۳)(x-۱۲)>۰;$
۹) $(x+۱۴)(۸-x)(۵+x)>۰;$
۱۰) $(۸-x)(۱+x)^۲(۱۰-x)^۳\geqslant ۰;$
۱۱) $(x+۳)^۲(x-۲)(x+۵)^۳<۰;$ ۱۲) $x^۳-۲۵x\leqslant ۰;$
۱۳) $(x^۲-۱۶)(x^۲-۴)>۰;$ ۱۴) $(۲۷-x^۳)(x^۲-۹)\leqslant ۰;$
۱۵) $(x^۲-۶x+۸)(x^۲-۴)(۴+x^۲-۴x)\geqslant ۰;$
۱۶) $(۳+x)(x^۲-x)^۲(x-۲)\geqslant ۰;$
۱۷) $(x-۳)(x^۳+۳)(x^۲-۶x+۹)\leqslant ۰;$
۱۸) $(x^۲-۵)(۱۰x-x^۲-۲۵)(۱۰x+x^۲+۲۵)>۰;$
۱۹) $(۷-x^۲)(x-۱)^۲(x^۲-۸x+۱۶)\geqslant ۰.$

تکلیف ۲.

این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $۷x-۱>۱۶(x-۱)-۲;$ ۲) $۸-x\leqslant -۷\left(x+\frac{۱}{۷}\right)-۲x;$
۳) $x^۲-۶x-۷<۰;$ ۴) $x^۴-۴x^۲+۳\geqslant ۰;$
۵) $(x^۲+x-۲)(x^۲-۲x-۳)\leqslant ۰;$
۶) $(x^۲+۵x+۴)(x-۳)<۰;$
۷) $(۱۰-x)(x^۲+۱۴x+۳۳)<۰;$ ۸) $۶۴x^۳-x\geqslant ۰;$
۹) $(x^۲-۱۰x)(x^۲-۴۹)<۰;$
۱۰) $(۷-x)(۲-x)^۲(x+۱)\geqslant ۰;$
۱۱) $(x-۵)^۲(x-۸)(x-۴)^۳<۰;$
۱۲) $\left(x+\frac{۱}{۲}\right)\left(x^۲-\frac{۱}{۴}\right)^۲(۴x^۲+۴x+۱)<۰;$
۱۳) $(x^۲-۹)^۲(x+۱)(x^۲-۲x-۳)(x-۱)\leqslant ۰;$
۱۴) $(x^۳-۴x)(x^۲+۲x-۸)(x^۲+۷x+۱۰)\leqslant ۰;$
۱۵) $(x^۳-۲۷)(x^۳+۱)(۲x+۳-x^۲)\geqslant ۰;$
۱۶) $(۴x^۲-۴x+۱)(۴x+x^۲+۵)\leqslant ۰;$

۱۷) $(x^۲-۴x-۵)(x^۲+۱)\geqslant ۰;$

۱۸) $(x^۲-x-۲)(۲x+۳+۴x^۲)\leqslant ۰;$

۱۹) $(x-۵)(۳x^۲-x+۲)(x^۲-۲۵)\leqslant ۰.$

تکلیف ۳.

این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $\dfrac{-۵\sqrt{۲}}{(x+۳)^۲}>۰;$ ۲) $\dfrac{x+۴}{۱-x}\geqslant ۰;$ ۳) $\dfrac{(x+۳)(x-۲)}{(x+۱)^۲}\leqslant ۰;$

۴) $\dfrac{(x+۲)(۳-x)}{(x+۹)}\geqslant ۰;$ ۵) $\dfrac{(x+۱)^۳}{(x-۳)(x-۵)}\geqslant ۰;$

۶) $\dfrac{(x+۶)^۳(x-۴)}{(۷-x)^۵}>۰;$ ۷) $\dfrac{(x+۸)^۴(۱-x)^۳}{(x+۵)(x-۲)^۲}\geqslant ۰;$

۸) $\dfrac{(x+۷)(x-۵)^۳}{(x+۱۱)(x+۴)(۳-x)(x-۶)}\geqslant ۰;$

۹) $\dfrac{x^۲(x+۲)^۴(x+۱)^۶}{(x+۶)(x-۴)(x+۳)(۲-x)}\geqslant ۰;$

۱۰) $\dfrac{(x+۱۲)(x+۱)^۴(x+۴)^۳}{(x-۱)^۲(x-۵)^۶(x-۳)^۴}\leqslant ۰;$

۱۱) $\dfrac{-(x+۴)^۴}{x^۲(x-۴)^۶}\geqslant ۰;$ ۱۲) $\dfrac{(x+۳)^۴(x+۲)^۲}{(x-۵)^۲}\leqslant ۰;$

۱۳) $\dfrac{x^۲(x-۱)^۴}{(x+۷)^۳(۱۰-x)^۵}\leqslant ۰;$

۱۴) $\dfrac{(x+۸)^۳(x+۴)(۸-x)^۵}{(x-۴)^۵(x+۵)^۲}\leqslant ۰.$

تکلیف ۴.

این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $\dfrac{۴(۲x+۳)^۲}{۳\sqrt[۳]{۵}}<۰;$ ۲) $\dfrac{۷(۳-۴x)}{۱۲(x-۵)^۲}>۰;$

$$۳)\ \frac{(-۲x-۵)^۲}{۵x^۲(۳-x)}<۰; \qquad ۴)\ \frac{۳(-۷-x)^۳(x+۵)}{۴(۲x-۴)^۵}\geqslant ۰;$$

$$۵)\ \frac{۱۳(۵x-۴)(۲x-۷)^۵}{(۳x+۹)^۳}<۰;$$

$$۶)\ \frac{۱۷(۱۰-۵x)^۲}{(-۱-۳x)^۴(۲x-۱۲)^۲}\leqslant ۰;$$

$$۷)\ \frac{-۱۴\sqrt{۵}(۲۰-۵x)^۲}{(-۸-۲x)^۴(۳x+۲)^۲(۲x+۳)^۶}\geqslant ۰;$$

$$۸)\ \frac{-۷x^۲(-۳-۲x)^۳(x-۲)}{(۲x+۱۴)^۳(-۱۰+۲x)^۲(x-۷)^۵}\leqslant ۰;$$

$$۹)\ \frac{(-x-۱)^۲(x-۱)^۳(۲x-۸)^۵}{(-x-۸)(۲x+۶)^۳(۴-۲x)^۲}\geqslant ۰;$$

$$۱۰)\ \frac{x^۲(۲x+۴)(۹-۳x)}{(-۵-۲x)^۳}\geqslant ۰;$$

$$۱۱)\ \frac{(x-۱)(۳x+۲۴)^۲(۴-x)^۴}{x^۲(-۱۲-x)(x-۵)^۳(x-۶)}\leqslant ۰;$$

$$۱۲)\ \frac{(۴+x)^۳(x+۳)(x-۱)^۳(x-۲)^۲}{-۳\cdot(-۵-x)^۴(۱۶-۴x)^۴}>۰;$$

$$۱۳)\ \frac{-\sqrt{۶}(x+۲)^۴\cdot(-۳-x)^۲}{(۱+x)^۳(۴-۲x)(x-۳)^۲}<۰;$$

$$۱۴)\ \frac{۳\sqrt{۵}\cdot(x-۴)^۳}{(x+۱)^۵\cdot(-x-۴)\cdot x^۴}\leqslant ۰.$$

تکلیف ۵.

۱. این نامعادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \frac{x-۵}{x+۹}<۰; \qquad ۲)\ \frac{۵x-۱/۵}{x-۴۹}\geqslant ۰; \qquad ۳)\ \frac{۵x}{۳x-۱}\leqslant ۰;$$

$$۴)\ x\leqslant ۳-\frac{۱}{x-۱}; \qquad ۵)\ \frac{x^۲+۶x-۷}{x^۲+۱}\leqslant ۲;$$

۶) $\frac{۱-۲x-۳x^{۲}}{۳x-x^{۲}-۵}>۰;$

۷) $\frac{x+۷}{x-۵}+\frac{۳x+۱}{۲}\geqslant ۰;$

۸) $\frac{۱۴x}{x+۱}-\frac{۹x-۳۰}{x-۴}<۰;$

۹) $\frac{۵x+۴}{۳+x}-\frac{۲+x}{۱-x}\leqslant ۰.$

۲. این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $\begin{cases} ۲x-۱>۳، \\ ۳x-۲>۵، \\ ۵x-۴<۱۰; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} (x^{۲}-۴x)(x-۱)\leqslant ۰، \\ (x^{۲}-۱)(۳-x)\geqslant ۰; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x^{۲}+۳x+۲>۰، \\ \frac{x}{x+۱}\leqslant ۰; \end{cases}$

۴) $\begin{cases} (x^{۲}-۴)(x^{۲}-۲x+۱)\geqslant ۰، \\ (x-۱۴)(۷-x^{۲})\leqslant ۰. \end{cases}$

۳. برای هرمقدار a، این دستگاه نامعادله را حل کنید:

$$\begin{cases} a(x-۲)\geqslant x-۳ \\ ۸(a+۱)x>۸ax+۹ \end{cases}$$

تکلیف ۶.

۱. این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $\frac{۲x}{۱۸-x}>۰;$ ۲) $\frac{x+۱۰}{x-۵}\leqslant ۰;$ ۳) $\frac{x+۱۷}{۸x}\geqslant ۰;$

۴) $\frac{x^{۴}+x^{۲}+۱}{x^{۲}-۴x-۵}<۰;$

۵) $\frac{x^{۲}-۵x+۷}{-۲x^{۲}+۳x+۲}>۰;$

۶) $\frac{۱}{x+۲}<\frac{۳}{x-۳};$

۷) $\frac{x-۱}{x}-\frac{x+۱}{x-۱}<۲.$

۲. این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $\begin{cases} ۳x-۲\geqslant ۵x-۱۶، \\ ۳x-۷<۱۸-۲x، \\ x-\frac{۲}{۳}>\frac{۱۱}{۵}-\frac{۲x}{۵}; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ۲(x-۱)-۳(x-۴)>x+۵، \\ \frac{۳x-۴}{x^{۲}+۴x+۴}\geqslant ۰; \end{cases}$

۳) $$\begin{cases}\dfrac{x^۲+۱۰x+۲۵}{۴x-۵}\geqslant ۰\\[2ex](x-۲)(x^۲-۶x+۹)\leqslant ۰;\end{cases}$$

۴) $$\begin{cases}\dfrac{(x+۱)(x-۲)}{x-۶}\geqslant ۰,\\[2ex]\dfrac{(x+۵)}{(۴-x)(x-۳)}\geqslant ۰.\end{cases}$$

۳. برای هر مقدار پارامتر a، این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}\dfrac{ax}{a-۲}-\dfrac{x-۱}{۳}<\dfrac{۲x+۳}{۴}\\[2ex]\dfrac{x}{۲}(a-۱۰)+a>\dfrac{a}{۲}(x+۲)-۵x-۶\end{cases}$$

تمرین‌ها

۱. این نامعادله‌ها را حل کنید:

۱) $(x^۲+۳x+۱)(x^۲+۲x-۳)\geqslant ۵;$

۲) $(x^۲-x-۱)(x^۲-x-۷)<-۵;$

۳) $\dfrac{۷}{(x-۲)(x-۳)}+\dfrac{۹}{x-۳}+۱<۰;$

۴) $\dfrac{۲۰}{(x-۳)(x-۴)}+\dfrac{۱۰}{x-۴}+۱>۰;$

۵) $(x^۲-۲x)(۲x-۲)-\dfrac{۹(۲x-۲)}{x^۲-۲x}\leqslant ۰;$

۶) $(x^۲+۳x)(۲x+۳)-۱۶\dfrac{۲x+۳}{x^۲+۳x}\geqslant ۰;$

۷) $\dfrac{x+۶}{x-۶}\left(\dfrac{x-۴}{x+۴}\right)^۲+\dfrac{x-۶}{x+۶}\left(\dfrac{x+۹}{x-۹}\right)^۲>۲\cdot\dfrac{x^۲+۳۶}{x^۲-۳۶};$

۸) $$\frac{x^۲+۲x+۲}{x+۱}+\frac{x^۲+۸x+۲۰}{x+۴}>$$
$$>\frac{x^۲+۴x+۶}{x+۲}+\frac{x^۲+۶x+۱۲}{x+۳};$$

۹) $x^۲+\dfrac{۴x^۲}{(x+۲)^۲}<۵;$

$$۱۰)\quad \frac{۴x-۱۷}{x-۴}+\frac{۱۰x-۱۳}{۲x-۳}>\frac{۸x-۳۰}{۲x-۷}+\frac{۵x-۴}{x-۱};$$

$$۱۱)\quad \frac{۱}{۱+۲x}-\frac{۲}{۲+۳x}+\frac{۳}{۳+۴x}<\frac{۴}{۵x+۴};$$

$$۱۲)\quad \frac{(x+۱)^۴}{x(x^۲+۱)}<\frac{۱۲۸}{۱۵};\quad ۱۳)\quad ۲x^۲+۲x+۱-\frac{۱۵}{x^۲+x+۱}<۰.$$

۴. این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\quad \begin{cases} x^۲-۴<۰, \\ x+۱>۰, \\ \frac{۱}{۲}-x>۰; \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} x^۲-x-۶\geqslant ۰, \\ x^۲-۴x<۰; \end{cases}$$

$$۳)\quad \begin{cases} \frac{۱}{۳x}<۱, \\ x+\frac{۴}{x}\geqslant\frac{۴}{۳}x, \\ ۹x^۲-۹x+۱<۰; \end{cases}$$

$$۴)\quad \begin{cases} \frac{x}{۳}-\frac{۴}{۳}\leqslant\frac{۴}{x}, \\ \frac{۱}{x}>-۱, \\ x^۲+۳x+۱>۰; \end{cases}$$

$$۵)\quad \begin{cases} \frac{۳x-۱}{۲x+۵}>۰, \\ \frac{۳x-۱}{۲x+۵}<۱; \end{cases}$$

$$۶)\quad \begin{cases} \frac{۲-x}{x+۱}\geqslant ۱, \\ \frac{۲-x}{x+۱}\leqslant ۲; \end{cases}$$

$$۷)\quad \begin{cases} \frac{۳x-۱}{۲x+۱}\geqslant ۱, \\ \frac{۳x-۱}{۲x+۱}<۲; \end{cases}$$

$$۸)\quad \begin{cases} \frac{۳x^۲-۷x+۸}{x^۲+۱}>۱, \\ \frac{۳x^۲-۷x+۸}{x^۲+۱}\leqslant ۲; \end{cases}$$

$$۹)\quad \begin{cases} x^۴-۳x^۳-x^۲-x-۲\leqslant ۰, \\ x^۴-۲x^۳+x^۲-۸x-۱۲\geqslant ۰; \end{cases}$$

$$۱۰)\quad \begin{cases} x^۳-۵x^۲+۱۰x-۱۲\leqslant ۰, \\ x^۲-۴x+۳\geqslant ۰, \\ x^۲-۶x+۸\leqslant ۰. \end{cases}$$

۳. هریک از نامعادله‌ها را، به‌ازای مقدارهای مختلف a، حل کنید:

۱) $ax>\frac{۱}{x}$; ۲) $\frac{ax-(۱-a)a}{a^۲-ax-۱}>۰$;

۳) $\frac{ax+۱}{ax-۱}\geqslant\frac{a+۱}{a-۱}$; ۴) $\frac{۲a}{x}-\frac{۱}{x-۱}>۱$;

۵) $x^۴-ax^۲+۱<۰$; ۶) $\frac{x-۱}{a-۱}+x<\frac{۱}{۱-a}$;

۷) $x^۲+ax+۱>۰$; ۸) $\frac{(a-۱)x+a+۱}{x-۱}>۰$;

۹) $ax^۲-۲ax-۱<۰.$

۴. برای هر مقدار پارامتر a، این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $\begin{cases} x^۲+۴x+۳+a<۰, \\ ۲x+a+۶>۰; \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x^۲+۲x+a\leqslant۰, \\ x^۲-۴x-۶a\leqslant۰; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \frac{(۱-a)x-a}{x-۲(۱-a)}\geqslant۰, \\ x-۸\geqslant ax; \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۷-\left(\frac{۱۵a}{۴}-۳۰\right)x>۱۰; \\ \frac{x-۱}{a-۱}-۱<\frac{a}{۱-a}-x; \end{cases}$

۵) $\begin{cases} \frac{۲x^۲+ax+۴}{x^۲-x+۱}<۴, \\ \frac{۲x^۲+ax-۶}{x^۲-x+۱}>-۶. \end{cases}$

۵. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید که، به‌ازای هریک از آن‌ها، معادلهٔ درجه‌دوم دارای ریشهٔ حقیقی باشد، وعلامت این ریشه‌ها را پیدا کنید.

۱) $x^۲-۲(a-۱)x+۲a+۱=۰$;

۲) $۳ax^۲+(۴-۶a)x+۳(a-۱)=۰$;

۳) $(a-۳)x^۲-۲(۳a-۴)x+۷a-۶=۰$;

۴) $(a-۲)x^۲-۲ax+۲a-۳=۰.$

۶. پارامتر a را طوری پیدا کنید که سه‌جمله‌ای درجه دوم

$$(a^۲-۱)x^۲+۲(a-۱)x+۲$$

به‌ازای هرمقدار x، مثبت باشد.

۷. به‌ازای چه‌مقدارهایی از a، ریشه‌های معادلهٔ

$$x^۲-۲ax+a^۲-۱=۰$$

بین دوعدد ۲ و ۴ قراردارند؟

۸. اگر هر دو ریشهٔ معادلهٔ زیر، از واحد بزرگتر باشند، مقدار a را پیدا کنید:

$$(۱+a)x^۲-۳ax+۴a=۰$$

۹. مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ

$$۲x^۲-۲(۲a+۱)x+a(a+۱)=۰$$

دو ریشه، یکی بزرگتر از a و دیگری کوچکتر از a داشته باشد.

۱۰. پارامتر a را طوری پیدا کنید که معادلهٔ

$$(a-۲)x^۲-۲(a+۳)x+۴a=۰$$

دارای دو ریشه باشد، یکی بزرگتر از ۳ و دیگری کوچکتر از ۲.

۱۱. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به‌ازای آن‌ها، معادلهٔ

$$۴x^۲-۲x+a=۰$$

دارای دو ریشه متعلق به‌بازهٔ $(۱ \text{ و } ۱-)$ باشد.

۱۲. همهٔ مقدارهای پارامتر a را پیدا کنید، به‌نحوی که همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ

$$x^۲-a(۱+a^۲)x+a^۴<۰$$

درضمن، جواب‌های نامعادلهٔ زیر باشند:

$$x^۲+۴x+۳<۰$$

۱۳. پارامتر a را طوری پیدا کنید که، همهٔ جواب‌های نامعادلهٔ

$$ax^۲-۲(a^۲-۳)x-۱۲a\geqslant ۰$$

جواب‌های نامعادلهٔ زیر باشند:

$$x^۲-۴۹\geqslant ۰$$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱) $(۰، +\infty)$؛ ۲) $(-\infty، -۱۶)$؛ ۳) $(-۷، ۱)$؛

۴) $\left[-\frac{\sqrt{۶}}{۲}، -\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}، \frac{\sqrt{۶}}{۲}\right]$؛

۵) $\left(-\infty، \frac{۱}{۲}\right)\cup(۱، +\infty)$؛ ۶) $\{-\sqrt{۶}، \sqrt{۶}\}$؛

۷) $(-\infty، -۵)\cup\left(-\frac{۷}{۲}، -۲\right)\cup\left(-\frac{۱}{۲}، +\infty\right)$؛

۸) $(۲، ۳)\cup(۱۲، +\infty)$؛ ۹) $(-\infty، -۱۴)\cup(-۵، ۸)$؛

۱۰) $(-\infty، ۸]\cup[۰، +\infty)$؛ ۱۱) $(-۵، -۳)\cup(-۳، ۲)$؛

۱۲) $(-\infty، -۵]\cup[۰، ۵]$؛

۱۳) $(-\infty، -۴)\cup(-۲، ۲)\cup(۴، +\infty)$؛ ۱۴) $[-۳، +\infty)$؛

۱۵) $(-\infty، -۲]\cup\{۲\}\cup[۴، +\infty)$؛

۱۶) $(-\infty، -۳]\cup\{۰، ۱\}\cup[۲، +\infty)$؛ ۱۷) $(-\infty، ۳]$؛

۱۸) $(-\sqrt{۵}، \sqrt{۵})$؛ ۱۹) $[-\sqrt{۷}، \sqrt{۷}]\cup\{۴\}$.

تکلیف ۲.

۱) $\left(-\infty، \frac{۱۷}{۹}\right)$; ۲) $\left(-\infty، -\frac{۹}{۸}\right]$; ۳) $(-۱، ۷)$،
۴) $(-\infty، -\sqrt{۳}]\cup[-۱، ۱]\cup[\sqrt{۳}، +\infty)$; ۵) $[-۲، -۱]\cup[۱، ۳]$; ۶) $(-\infty، -۴)\cup(-۱، ۳)$; ۷) $(-۱۱، -۳)\cup(۱۰، +\infty)$; ۸) $\left[-\frac{۱}{۸}، ۰\right]\cup\left[\frac{۱}{۸}، +\infty\right)$;
۹) $(-۷، ۰)\cup(۷، ۱۰)$; ۱۰) $[-۱، ۷]$; ۱۱) $(۴، ۵)\cup(۵، ۸)$;
۱۲) $(-\infty، -۰/۵)$; ۱۳) $\{-۳، -۱\}\cup[۱، ۳]$; ۱۴) $(-\infty، -۵]\cup[-۴، ۰]\cup\{۲\}$; ۱۵) $\{-۱، ۳\}$; ۱۶) $\{۰، ۵\}$;
۱۷) $(-\infty، -۱]\cup[۵، +\infty)$; ۱۸) $[-۱، ۲]$;

۱۹) $(-\infty، -۵]\cup\{۵\}$.

تکلیف ۳.

۱) ϕ; ۲) $[-۴، ۱)$; ۳) $[-۳، -۱)\cup(-۱، ۲]$; ۴) $(-\infty، -۹)\cup[-۲، ۳]$; ۵) $[-۱، ۳)\cup(۵، +\infty)$; ۶) $(-\infty، -۶)\cup(۴، ۷)$; ۷) $\{-۸\}\cup(-۵، ۱]$; ۷) $(-۱۱، -۷]\cup(-۴، ۳)\cup[۵، ۶)$; ۹) $(-۶، -۳)\cup\{-۲، -۱، ۰\}\cup(۲، ۴)$; ۱۰) $[-۱۲، -۴]\cup\{-۱\}$; ۱۱) $\{-۴\}$; ۱۲) $\{-۳، -۲\}$; ۱۳) $(-\infty، -۷)\cup\{۰، ۱\}\cup(۱۰، +\infty)$; ۱۴) $(-\infty، -۸]\cup[-۴، ۴)\cup[۸، +\infty)$.

تکلیف ۴.

۱) ϕ; ۲) $\left(-\infty، \frac{۳}{۴}\right)$; ۳) $(۳، +\infty)$; ۴) $(-\infty، -۷]\cup[-۵، ۲)$; ۵) $(-\infty، -۳)\cup\left(\frac{۴}{۵}، \frac{۷}{۲}\right)$; ۶) $\{۲\}$; ۷) $\{۴\}$; ۸) $\left(-۷، -\frac{۳}{۲}\right]\cup\{۰\}\cup[۲، ۵)\cup(۵، ۷)$; ۹) $(-۸، -۳)\cup\{-۱\}\cup[۱، ۲)\cup(۲، ۴]$; ۱۰) $\left(-\frac{۵}{۲}، -۲\right]\cup\{۰\}\cup[۳، +\infty)$; ۱۱) $(-\infty، -۱۲)\cup\{-۸\}\cup[۱، ۵)\cup(۶، +\infty)$; ۱۲) $(-\infty، -۵)\cup(-۵; -۴)\cup(-۳، ۱)$; ۱۳) $(-۱، ۲)$; ۱۴) $(-۴، -۱)\cup[۴، +\infty)$.

تکلیف ۵.

۱. ۱) $(-۹، ۵)$؛ ۲) $(-\infty، ۰/۳]\cup(۴۹، +\infty)$؛

۳) $\left[۰، \frac{۱}{۳}\right)$؛ ۴) $(-\infty، ۱)\cup\{۲\}$؛ ۵) تمامی محور عددی؛

۶) $(-\infty، -۱)\cup\left(\frac{۱}{۳}، +\infty\right)$؛ ۷) $[۱، ۳]\cup(۵، +\infty)$؛

۸) $(-۱، ۱)\cup(۴، ۶)$؛ ۹) $(-۳، ۱)$.

۲. ۱) $\left(\frac{۷}{۳}، \frac{۱۴}{۵}\right)$؛ ۲) $(-\infty، -۱]\cup[۱، ۳]$؛ ۳) $(-۱، ۰]$؛

۴) $[-\sqrt{۷}، -۲]\cup\{۱\}\cup[۲، \sqrt{۷}]\cup[۱۴، +\infty)$.

۳. $\frac{۹}{۸}<x\leqslant\frac{۲a-۳}{a-۱}$ $(a<۱)$، $x>\frac{۹}{۸}$ $\left(۱\leqslant a\leqslant\frac{۱۵}{۷}\right)$،

$x\geqslant\frac{۲a-۳}{a-۱}$ $\left(a>\frac{۱۵}{۷}\right)$.

تکلیف ۶.

۱. ۱) $(۰، ۱۸)$؛ ۲) $[-۱۰، ۵]$؛

۳) $(-\infty، -۱۷]\cup(۰، +\infty)$؛ ۴) $(-۱، ۵)$؛ ۵) $\left(-\frac{۱}{۲}، ۲\right)$؛

۶) $\left(-\frac{۹}{۲}، -۲\right)\cup(۳، +\infty)$

۷) $(-\infty، -۱)\cup\left(۰، \frac{۱}{۲}\right)\cup(۱، +\infty)$.

۲. ۱) $\left(\frac{۴۳}{۲۱}، ۵\right)$؛ ۲) $\left(\frac{۴}{۳}، \frac{۵}{۲}\right)$؛ ۳) $\{-۵، -۳\}\cup\left(\frac{۵}{۴}، ۲\right]$؛

۴) ϕ.

۳. $x<\frac{۵(a-۲)}{۲(a+۱۰)}$ $(a<-۱۰$ و $a>۲)$،

$-\infty<x<+\infty$ $(a=-۱۰)$، به‌ازای $a=۲$ جواب ندارد،

$x>\frac{۵(a-۲)}{۲(a+۱۰)}$ $(-۱۰<a<۲)$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $(-\infty، -۴]\cup[-۲، -۱]\cup[۱، +\infty)$;

۲) $(-۲، -۱)\cup(۲، ۳)$; ۳) $(-۵، ۱)\cup(۲، ۳)$; ۴) $(-\infty،$

$-۲)\cup(-۱،۳)\cup(۴،+\infty)$; ۵) $(-\infty،-۱]\cup(۰،۱]\cup$
$\cup(۲،۳]$; ۶) $[-۴،-۳)\cup\left[-\frac{۳}{۲}،۰\right)\cup[۱،+\infty)$;
۷) $\left(-۶،\frac{۶-۶\sqrt{۲۶}}{۵}\right)\cup(۰،۶)\cup\left(\frac{۶+۶\sqrt{۲۶}}{۵}،۹\right)\cup(۹،+\infty)$;
۸) $(-۴،-۳)\cup\left(-\frac{۵}{۲}،-۲\right)\cup(-۱،۰)$; ۹) $(-۱،۲)$;
۱۰) $(-\infty،۱)\cup\left(\frac{۳}{۲}،\frac{۵}{۲}\right)\cup\left(\frac{۷}{۲}،۴\right)$; ۱۱) $\left(-\frac{۴}{۵}،-\frac{۳}{۴}\right)\cup$
$\cup\left(-\frac{۲}{۳}،-\frac{۱}{۲}\right)\cup(۰،+\infty)$ ۱۲) $(-\infty،۰)\cup\left(\frac{۱}{۳}،۳\right)$;
۱۳) $(-۲،۱)$.

۲۰. ۱) $(-۱،۰/۵)$; ۲) $[۳،۴)$; ۳) $\left(\frac{۱}{۳}،\frac{۳+\sqrt{۵}}{۶}\right)$;
۴) $\left(-\infty،\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)\cup(۰،۶]$; ۵) $\left(\frac{۱}{۳}،۶\right)$; ۶) $\left[۰،\frac{۱}{۲}\right]$;
۷) $(-\infty،-۳)\cup(۲،+\infty)$; ۸) $[۱،۶]$; ۹) $\{-۱\}$; ۱۰) $\{۳\}$.

۳. $\frac{-۱}{\sqrt{a}}<x<۰$ و $x>\frac{۱}{\sqrt{a}}$ $(a>۰)$، $x<۰$ $(a\leqslant۰)$؛

۲) به‌ازای $a=۰$، $a=-\frac{۱}{۲}$ و $a=۱$ جواب ندارد،
$۱-a<x<\frac{a^۲-۱}{a}$ $\left(-\frac{۱}{۲}<a<۰\right.$ یا $\left.a>۱\right)$،
$\frac{a^۲-۱}{a}<x<۱-a$ $\left(a<-\frac{۱}{۲}\right.$ و $\left.۰<a<۱\right)$؛

۳) $\frac{۱}{a}<x\leqslant۱$ $(a>۱)$، $x\geqslant۱$ و $x<\frac{۱}{a}$ $(a<۰)$، تمامی محور حقیقی
$(a=۰)$، $x\leqslant۱$ و $x>\frac{۱}{a}$ $(۰<a<۱)$

۴) $a-\sqrt{a^۲-۲a}<x<a+\sqrt{a^۲-۲a}$ $(a>۲)$، $a+\sqrt{a^۲-۲a}<x<۱$ $(a<۰)$، $۰<x<۱$ $(۰\leqslant a\leqslant ۲)$؛ ۵) به‌ازای $a\leqslant -۲$ جواب ندارد و به‌ازای $a>۲$ اگر ریشه‌های عبارت سمت چپ نابرابری را $\pm\alpha_۱$ و $\pm\alpha_۲$ $(\alpha_۱<\alpha_۲)$ بگیریم: $-\alpha_۲<x<-\alpha_۱$ و $\alpha_۱<x<\alpha_۲$؛ ۶) $x<۰$ $(a<۰$ و $a>۱)$، $x>۰$ $(۰<a<۱)$، به‌ازای $a=۰$ و $a=۱$ جواب ندارد؛

۷) $x<-\frac{a+\sqrt{a^۲-۴}}{۲}$ و $x>\frac{-a+\sqrt{a^۲-۴}}{۲}$ $(a>۲$ و $a<-۲)$، $x<۱$ و $x>۱$ $(a=-۲)$، $x\neq -۱$ $(a=۲)$، و به‌ازای $-۲<a<۲$ تمامی محور عددی؛ ۸) $\frac{۱+a}{۱-a}<x<۱$ $(a<۰)$، به‌ازای $a=۰$ جواب ندارد، $۱<x<\frac{۱+a}{۱-a}$ $(۰<a<۱)$، $x>۱$ $(a=۱)$، $x<\frac{۱+a}{۱-a}$ و $x>۱$ $(a>۱)$؛ ۹) $x<۱-\sqrt{\frac{۱+a}{a}}$ و $x>۱+\sqrt{\frac{۱+a}{a}}$ $(a\leqslant -۱)$، تمامی محور عددی $(-۱<a\leqslant ۰)$، $۱-\sqrt{\frac{a+۱}{a}}<x<۱+\sqrt{\frac{۱+a}{a}}$ $(a>۰)$.

۴.

۱) $-۲-\sqrt{۱-a}<x<-۲+\sqrt{۱-a}$، $\left(\frac{-۵+\sqrt{۱۳}}{۲}<a<۱\right)$، $-\frac{a+۶}{۲}<x<-۲+\sqrt{۱-a}$، $\left(a\leqslant\frac{-۵+\sqrt{۳}}{۲}\right)$، به‌ازای $a\geqslant ۱$ جواب ندارد؛ ۲) $x=۰$، $(a=۰)$، به‌ازای $a\neq ۰$ جواب ندارد؛ ۳) $x\geqslant ۸$، $(a=۰)$، به‌ازای $a\neq ۰$ جواب ندارد؛ ۴) به‌ازای $a\leqslant ۰$ و $۱\leqslant a\leqslant ۸$ جواب ندارد؛ $x>\frac{۴}{۴۰-۵a}$، $(۰<a<۱)$،

$x<\frac{4}{40-5a}$، $(a>8)$؛ ۵) $\frac{a+4}{2}<x<0$، $(a<-4)$، به‌ازای $-4\leqslant a\leqslant 2$ جواب ندارد، $\frac{a+4}{2}<x<\frac{6-a}{8}$، $(2<a<6)$، $0<x<\frac{a+4}{2}$، $(a\geqslant 6)$.

۱۰۵) به‌ازای $a<-\frac{1}{2}$ دو ریشه با علامت‌های مختلف، به‌ازای $a\geqslant 4$ دو ریشهٔ مثبت، به‌ازای $-\frac{1}{2}\leqslant x<0$ دو ریشهٔ منفی به‌ازای $a=-\frac{1}{2}$ یك ریشهٔ برابر صفر و یك ریشهٔ منفی، به‌ازای $0<a<4$ ریشهٔ حقیقی ندارد؛ ۲) به‌ازای $a<0$ و $1<a\leqslant\frac{4}{3}$ دو ریشه مثبت، به‌ازای $0<a<1$ دو ریشه با علامت‌های مختلف، به‌ازای $a=1$ یك ریشهٔ برابر صفر و یك ریشه مثبت، به‌ازای $a>\frac{4}{3}$ ریشهٔ حقیقی ندارد؛ ۳) به‌ازای $a\leqslant-2$ و $\frac{1}{2}\leqslant a<\frac{6}{7}$ و $a>3$ دو ریشهٔ مثبت، به‌ازای $\frac{6}{7}<a<3$ یك ریشهٔ مثبت و یك ریشهٔ منفی، به‌ازای $a=\frac{6}{7}$ یك ریشهٔ برابرصفر و یك ریشهٔ مثبت، به‌ازای $-2<a<\frac{1}{2}$ جواب حقیقی ندارد؛ ۴) به‌ازای $1\leqslant a<\frac{3}{2}$ دوریشهٔ منفی، به‌ازای $a=\frac{3}{2}$ یك ریشهٔ برابر صفر و یك ریشهٔ منفی، به‌ازای $\frac{3}{2}<a<2$ دوریشهٔ باعلامت‌های مختلف، به‌ازای $2<a\leqslant 6$ دوریشهٔ مثبت، به‌ازای $a<1$ و $a>6$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۰۶ به‌ازای $a<-3$ و $a\geqslant 1$.   ۰۷ به‌ازای $1<a<7$.

۸. $-۲ \leqslant a < ۱$.

۹. $a < -۳$ و $a > ۰$.

۱۰. $۲ < a < ۵$.

۱۱. $-۲ < a \leqslant \frac{۱}{۴}$.

۱۲. $-\sqrt[۳]{۶} < a < -\sqrt[۳]{۲}$.

۱۳. $۰ < a < \frac{۷}{۶}$؛

فصل پنجم

دستگاه معادله‌ها

§ ۱. دستگاه‌های خطی شامل دو مجهول

هر دستگاه به‌صورت

$$\begin{cases} a_۱x+b_۱y=c_۱ \\ a_۲x+b_۲y=c_۲ \end{cases} ,\ a_۱^۲+b_۱^۲\neq ۰،\ a_۲^۲+b_۲^۲\neq ۰ \qquad (۱)$$

را، دستگاه خطی دو معادلهٔ دومجهولی گویند.

برای حل دستگاه (۱)، می‌توان از روش جای‌گزینی، روش حذف و یا روش دترمینان استفاده کرد.

روش جای‌گزینی. این روش را روی چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x+۳y=۳ \\ ۷x+۵y=۱۶ \end{cases}$$

حل. اگر از معادلهٔ اول دستگاه، x را برحسب y محاسبه کنیم و، سپس، آن را، به‌جای x در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به‌دستگاه زیر که هم‌ارز دستگاه اصلی است، می‌رسیم:

$$\begin{cases} x=-\frac{۳}{۲}y+\frac{۳}{۲} \\ ۷\left(-\frac{۳}{۲}y+\frac{۳}{۲}\right)+۵y=۱۶ \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} x=-\frac{۳}{۲}y+\frac{۳}{۲} \\ y=-۱ \end{cases}$$

به‌این ترتیب، جواب این دستگاه، ودرنتیجه جواب دستگاه اصلی، به‌دست می‌آید: $x=۳$، $y=-۱$.

مثال ۲. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۴x+۲y=۳ \\ ۲x+y=۴ \end{cases}$$

حل. درمعادلهٔ دوم دستگاه، y را برحسب x محاسبه می‌کنیم و، سپس، به‌جای y درمعادلهٔ اول قرارمی‌دهیم، به‌دستگاه زیرهم‌ارز بادستگاه مفروض می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۴x+۲(۴-۲x)=۳ \\ y=۴-۲x \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} ۸=۳ \\ y=۴-۲x \end{cases}$$

چون $۳\neq۸$، بنابراین دستگاه اخیر، ودرنتیجه دستگاه اصلی، جواب ندارد.

مثال ۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x-۷y=۱ \\ ۲۱y-۶x=-۳ \end{cases}$$

حل. ازمعادلهٔ اول، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم و به‌جای x در معادلهٔ دوم دستگاه قرارمی‌دهیم، به‌دستگاه زیرهم‌ارزدستگاه اصلی می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲x-۷y=۱ \\ ۲۱y-۶\left(\frac{۱+۷y}{۲}\right)=-۳ \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} ۲x-۷y=۱ \\ -۳=-۳ \end{cases}$$

این دستگاه بامعادله $x=\frac{۱+۷y}{۲}$ هم‌ارزاست. جواب‌این معادله، ودرنتیجه

جواب دستگاه اصلی، عبارت است از هر دو عدد $(x ، y)$ که با شرط $x=\frac{۱+۷y}{۲}$ بسازد، یعنی $x=\frac{۱+۷y}{۲}$ و $y\in\mathbf{R}$.

مثال ۴. این دستگاه را، برای همهٔ مقدارهای پارامتر a، حل کنید:

$$\begin{cases} ax+(a-۱)y=۱ \\ (a+۱)x-(۵-۳a)y=a \end{cases}$$

حل. وقتی که از روش جای‌گزینی برای حل این دستگاه استفاده می‌کنیم، باید توجه داشته باشیم که، هریك ازضریب‌های مجهول‌ها، ممکن است برابر صفر باشد. بنابراین، اگر دریکی ازمعادله‌ها، یکی ازمجهول‌ها (و مثلاً x) را برحسب دیگری محاسبه می‌کنیم، آن‌وقت باید حالتی را که ضریب‌این‌مجهول برابر صفر می‌شود، به‌طورجداگانه مورد بررسی قراردهیم.

فرض کنید $a=۰$. دراین صورت دستگاه مفروض چنین می‌شود:

$$\begin{cases} ۰.x-y=۱ \\ x-۵y=۰ \end{cases}$$

که جواب آن چنین است: $x=-۵$، $y=-۱$.

اکنون فرض کنید $a\neq۰$؛ دراین‌صورت ازمعادلهٔ اول دستگاه مفروض به‌دست می‌آید: $x=\frac{۱-(a-۱)y}{a}$. اگر این مقدار x را، به جای x در معادلهٔ دوم دستگاه قراردهیم، به‌دستگاه زیر، که با دستگاه اصلی هم‌ارزاست می‌رسیم:

$$\begin{cases} x=\frac{۱-(a-۱)y}{a} \\ (a+۱).\frac{۱-(a-۱)y}{a}-(۵-۳a)y=a \end{cases}$$

و یا

$$\begin{cases} x=\frac{۱-(a-۱)y}{a} \\ (۲a^۲-۵a+۱)y=a^۲-a-۱ \end{cases} \qquad (۲)$$

ریشه‌های سه‌جمله‌ای درجه‌دوم $۲a^۲-۵a+۱$ عبارتند از $\frac{۵\pm\sqrt{۱۷}}{۴}$.

به‌ازای $a=\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}$، معادلهٔ دوم دستگاه (۲) چنین می‌شود:

$$۰\cdot y=\left(\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}\right)^۲-\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}-۱$$

که جواب ندارد. بنابراین به‌ازای $a=\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}$، دستگاه اصلی هم‌جواب ندارد. به‌همین‌ترتیب، می‌توان قانع شد که دستگاه، به‌ازای $x=\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۴}$ هم جواب ندارد.

با فرض $a\neq\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}$، $a\neq\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۴}$ و $a\neq ۰$ داریم:

$$y=\frac{a^۲-a-۱}{۲a^۲-۵a+۱}$$

و از آن‌جا $x=\frac{-a^۳+۴a^۲-۵a}{(۲a^۲-۵a+۱)^۲}$. به‌این ترتیب:

اگر $a=۰$، آن‌وقت $x=-۵$، $y=-۱$؛

اگر $a=\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}$ یا $a=\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۴}$، دستگاه جواب ندارد؛

اگر $a\neq ۰$، $a\neq\frac{۵-\sqrt{۱۷}}{۴}$ و $a\neq\frac{۵+\sqrt{۱۷}}{۴}$، آن‌وقت

$$x=\frac{-a^۳+۴a^۲-۵a}{(۲a^۲-۵a+۱)^۲},\quad y=\frac{a^۲-a-۱}{۲a^۲-۵a+۱}$$

روش حذف (یا روش گوس). فرض کنید، ضریب‌های $a_۱$، $a_۲$، $b_۱$ و $b_۲$ در دستگاه (۱) مخالف صفر باشند. معادلهٔ اول دستگاه را در $a_۲$ و معادلهٔ دوم را در $-a_۱$ ضرب می‌کنیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} a_۱a_۲x+a_۲b_۱y=a_۲a_۱ \\ -a_۱a_۲x-a_۱b_۲y=-a_۱a_۲ \end{cases}$$

در این دستگاه، به‌جای معادلهٔ دوم، مجموع دومعادلهٔ دستگاه را قرار می‌دهیم، به‌دستگاه زیر، هم‌ارز با دستگاه اصلی می‌رسیم:

$$\begin{cases} a_{۱}a_{۲}x+a_{۲}b_{۱}y=a_{۲}c_{۱} & (۳) \\ (a_{۲}b_{۱}-a_{۱}b_{۲})y=a_{۲}c_{۱}-a_{۱}c_{۲} & (۴) \end{cases}$$

اگر $a_{۲}b_{۱}-a_{۱}b_{۲}\neq ۰$، آن‌وقت ازمعادلهٔ (۴) به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{a_{۲}c_{۱}-a_{۱}c_{۲}}{a_{۲}b_{۱}-a_{۱}b_{۲}}$$

واگر این مقدار y را درمعادلهٔ (۳) قراردهیم:

$$x=\frac{b_{۲}c_{۱}-b_{۱}c_{۲}}{a_{۲}b_{۱}-a_{۱}b_{۲}}$$

اگر $a_{۲}b_{۱}-a_{۱}b_{۲}=۰$ و $a_{۲}c_{۱}-a_{۱}c_{۲}\neq ۰$، معادلهٔ (۴) و، همراه با آن، دستگاه (۱) جواب ندارد.

اگر $a_{۲}b_{۱}-a_{۱}b_{۲}=۰$ و $a_{۲}c_{۱}-a_{۱}c_{۲}=۰$ ، آن‌وقت معادلهٔ (۴) به‌ازای هر مقدار y برقرار است و، بنابراین، دستگاه (۱) دارای بی‌نهایت جواب است، مثلاً به‌این‌صورت

$$x=\frac{c_{۱}-b_{۱}t}{a_{۱}},\ y=t\ (t\in\mathbf{R})$$

مثال ۵. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x-۳y=۲ \\ -۵x+۲y=۳ \end{cases}$$

حل. مثلاً ضریب‌های x را برابر می‌کنیم. برای این منظور، معادلهٔ اول را در ۵ و معادلهٔ دوم را در ۲ ضرب می‌کنیم، به‌دستگاهی، هم‌ارز دستگاه مفروض می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۱۰x-۱۵y=۱۰ \\ -۱۰x+۴y=۶ \end{cases}$$

اکنون اگر به‌جای معادلهٔ دوم، مجموع دومعادلهٔ دستگاه را قرار دهیم

و، درضمن، معادلهٔ اول را به‌صورت اولیهٔ خود بنویسیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲x-۳y=۲ \\ ۱۱y=-۱۶ \end{cases}$$

که جواب آن، و در ضمن جواب دستگاه اصلی، چنین است: $x=-\frac{۱۳}{۱۱}$،

$y=-\frac{۱۶}{۱۱}$.

مثال ۶. برای هر مقدار پارامتر a، این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ax+a^۲y=۱ \\ x+(a-۱)y=a \end{cases}$$

حل. فرض کنید $a=۰$. دستگاه به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} ۰\cdot x+۰\cdot y=۱ \\ x-y=۰ \end{cases}$$

و این دستگاه، جواب ندارد.

فرض کنید $a\neq۰$. معادلـهٔ دوم دستگاه مفروض را در $-a$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} ax+a^۲y=۱ \\ -ax-a(a-۱)y=-a^۲ \end{cases}$$

به‌جای معادلهٔ دوم دستگاه اخیر، مجموع دو معادله را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ax+a^۲y=۱ \\ ay=۱-a^۲ \end{cases} \qquad (۵)$$

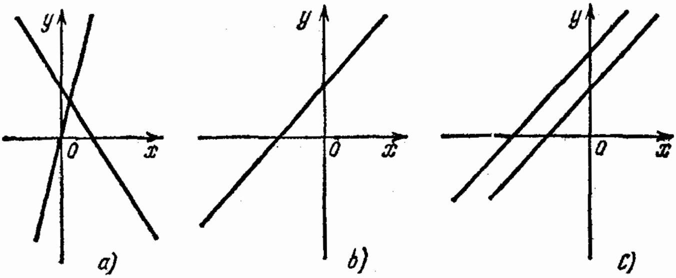
از معادلهٔ دوم (۵) به‌دست می‌آید $y=\frac{۱-a^۲}{a}$ و اگر آن‌را به‌جای y در معادلهٔ اول دستگاه (۵) قرار دهیم، داریم:

$$x=\frac{۱-a^{۲}y}{a}=\frac{۱-a+a^{۳}}{a}$$

به‌این‌ترتیب، دستگاه مفروض، به‌ازای $a=۰$ جواب ندارد و به‌ازای $a\neq ۰$

$$x=\frac{۱-a+a^{۳}}{a},\quad y=\frac{۱-a^{۲}}{a}$$

دستگاه خطی دو معادلهٔ دو مجهولی، یا یك جواب دارد، یا بی‌نهایت جواب و یا اصلاً جواب ندارد. این مطلب را به صورت هندسی توضیح می‌دهیم.



شکل ۲۶

هر معادله از دستگاه (۱) متناظر با خط راستی است از صفحهٔ xOy، بنا بر این دستگاه (۱)، درصفحه، متناظر است با دوخط راست. دو خط راست در صفحه، می‌توانند یك نقطهٔ مشترك داشته باشند، یا برهم منطبق شوند و یا باهم موازی باشند.

دوخط راست متقاطع (شکل ۲۶، a)، متناظر با حالتی است که دستگاه (۱) دارای یك جواب است؛ انطباق دو خط راست متناظر با حالتی است که دستگاه (۱) بی‌نهایت جواب دارد (شکل ۲۶، b)؛ و اگر دو خط راست نقطهٔ مشترکی نداشته باشند، به‌معنای آن است که دستگاه (۱) جواب ندارد.

روش دترمینان. به کمك ضریب‌های دستگاه

$$\begin{cases} a_{۱}x+b_{۱}y=c_{۱} \\ a_{۲}x+b_{۲}y=c_{۲} \end{cases}$$

با شرط $a_{۱}^{۲}+b_{۱}^{۲}\neq ۰$ و $a_{۲}^{۲}+b_{۲}^{۲}\neq ۰$، سه دترمینان Δ، Δ_x، Δ_y را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix}=a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱};$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_{۱} & b_{۱} \\ c_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix}=a_{۱}b_{۲}-c_{۲}b_{۱};\quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_{۱} & c_{۱} \\ a_{۲} & c_{۲} \end{vmatrix}=a_{۱}c_{۲}-a_{۲}c_{۱}$$

برای این‌که دستگاه (۱) دارای یک جواب باشد، لازم و کافی است که Δ، دترمینان اصلی دستگاه، مخالف صفر باشد. در این حالت، جواب با این دستور پیدا می‌شود:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

که به‌آن دستور کرامر هم می‌گویند.

اگر ضریب‌های $a_{۱}$، $b_{۱}$، $a_{۲}$، $b_{۲}$ مخالف صفر باشند، آن‌وقت شرط $\Delta\neq ۰$ را می‌توان به‌صورت زیر، که هم‌ارز آن است، نوشت:

$$\frac{a_{۱}}{a_{۲}}\neq\frac{b_{۱}}{b_{۲}}$$

برای این‌که دستگاه (۱) جواب نداشته باشد، لازم و کافی است که، دترمینان اصلی Δ، مساوی صفر و دست‌کم یکی از دو دترمینان Δ_x یا Δ_y مخالف صفر باشند. اگر ضریب‌های $a_{۱}$، $a_{۲}$، $b_{۱}$، $b_{۲}$ مخالف صفر باشند، آن‌وقت‌شرط $\Delta=۰$، $\Delta_x\neq ۰$ (یا $\Delta=۰$، $\Delta_y\neq ۰$) هم‌ارز باشرط زیراست:

$$\frac{a_{۱}}{a_{۲}}=\frac{b_{۱}}{b_{۲}}\neq\frac{c_{۱}}{c_{۲}}$$

برای این‌که دستگاه (۱) بی‌نهایت‌جواب داشته‌باشد، لازم‌وکافی‌است

$$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=۰$$

و به‌شرط این‌که ضریب‌های $a_۱$، $a_۲$، $b_۱$، $b_۲$ مخالف صفر باشند، این شرط را می‌توان به‌صورت زیر، که هم‌ارز آن است، نوشت:

$$\frac{a_۱}{a_۲}=\frac{b_۱}{b_۲}=\frac{c_۱}{c_۲}$$

درحالتی‌که دردستگاه (۱)، شرط‌های $a_۱^۲+b_۱^۲\neq ۰$ و $a_۲^۲+b_۲^۲\neq ۰$ برقرار نباشند، آن‌وقت از $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=۰$ نمی‌توان نتیجه گرفت که دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. مثلاً در دستگاه

$$\begin{cases} ۰\cdot x+۰\cdot y=۴ \\ ۰\cdot x+۰\cdot y=۷ \end{cases}$$

هر سه دترمینان برابر صفرند، ولی دستگاه جواب ندارد.

مثال ۷. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، این‌دستگاه تنها یك جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} ۳x+۷y=۲۰ \\ ax+۱۴y=۱۵ \end{cases}$$

حل. دستگاه وقتی یك جواب منحصر دارد که $\Delta\neq ۰$. چون

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۳ & ۷ \\ a & ۱۴ \end{vmatrix}=۴۲-۷a$$

بنابراین، دستگاه وقتی یك جواب منحصر دارد که $a\neq ۶$.

مثال ۸. به‌ازای چه‌مقدارهایی از پارامتر a، این‌دستگاه جواب‌ندارد:

$$\begin{cases} ax-۸y=۱۲ \\ ۲x-۶y=۱۵ \end{cases}$$

حل. چون $\Delta_x=\begin{vmatrix} ۱۲ & -۸ \\ ۱۵ & -۶ \end{vmatrix}\neq ۰$، بنابراین دستگاه مفروض، وقتی جواب ندارد که داشته باشیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & -۸ \\ ۲ & -۶ \end{vmatrix}=-۶a+۱۶=۰\Rightarrow a=\frac{۸}{۳}$$

مثال ۹. a را طوری پیدا کنید که این دستگاه بی‌نهایت جواب داشته باشد:

$$\begin{cases} ۱۵x+ay=۳ \\ ۵x+۱۰y=۱ \end{cases}$$

حل. چون $۱۵^۲+a^۲\neq ۰$ و $۵^۲+۱۰^۲\neq ۰$ و

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} ۱۵ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{vmatrix}=۰$$

بنابراین، وقتی دستگاه بی‌نهایت جواب دارد که

$$\Delta=\begin{vmatrix} ۱۵ & a \\ ۵ & ۱۰ \end{vmatrix}=۱۵۰-۵a=۰، \ \Delta_x=\begin{vmatrix} ۳ & a \\ ۱ & ۱۰ \end{vmatrix}=۳۰-a=۰$$

یعنی به‌ازای $a=۳۰$.

مثال ۱۰. این دستگاه را، برای مقدارهای مختلف a، حل کنید:

$$\begin{cases} ax+y=a^۲ \\ x+ay=۱ \end{cases}$$

حل. دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & ۱ \\ ۱ & a \end{vmatrix}=a^۲-۱، \ \Delta_x=\begin{vmatrix} a^۲ & ۱ \\ ۱ & a \end{vmatrix}=a^۳-۱،$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & a^۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}=a-a^۲$$

به‌ازای $a\neq ۱$ و $a\neq -۱$ داریم: $\Delta\neq ۰$. در این حالت، دستگاه‌مفروض، یک جواب دارد:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{a^۳-۱}{a^۲-۱}=\frac{a^۲+a+۱}{a+۱}; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{a-a^۲}{a^۲-۱}=-\frac{a}{a+۱}$$

به‌ازای $a=۱$ داریم: $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=۰$. در این حالت، دستگاه به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} x+y=۱\\ x+y=۱\end{cases}$$

که دارای بی‌نهایت جواب است و جواب‌های آن‌را می‌توان به صورت $x=t$، $y=۱-t$ نوشت که، در آن، t هر عدد حقیقی دلخواه است.

به‌ازای $a=-۱$ داریم $\Delta=۰$ و $\Delta_x\neq ۰$ و بنابراین، دراین‌حالت، دستگاه جواب ندارد.

تکلیف ۱.

۱. ثابت کنید، دستگاه‌های

$$\begin{cases} ۱۴x+۹y=۹\\ ۹x+۴y=۴\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۹۵y-۴۹=۲۳x\\ ۷۶y=۱۰۲-۱۳x\end{cases}$$

هم‌ارز نیستند.

۲. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۹x+۳y-۲=۰\\ ۱۰x+۶y-۴=۰\end{cases}$$

۳. دستگاه را برای همهٔ مقدارهای پارامتر a حل کنید:

$$\begin{cases} ax+y=a^۳\\ x+ay=۱\end{cases}$$

۴. a و b و c را طوری پیدا کنید که دستگاه شامل معادله‌های

$$۵x+۷y=۱۵،\ ax+by=c$$

جواب نداشته باشد، ولی معادلهٔ $ax+by=c$ دارای جواب $x=۴$، $y=۱$ باشد.

۵. مقدارهای a را پیدا کنید، به‌نحوی که جواب‌های دستگاه

$$۳x-۶y=۱،\ ۵x-ay=۲$$

با شرط $x<۰$ و $y<۰$ سازگار باشند.

۶. همهٔ مقدارهای a را پیدا کنید که، به‌ازای هریك از آن‌ها، دستگاه شامل معادله‌های زیر جواب نداشته باشد:

$$۲x+(۹a^{۲}-۲)y=۳a، \quad x+y=۱$$

۷. دستگـاه شامل دو معادلـهٔ زیر، بی‌نهایت جواب دارد و $x=۱$، $y=۳$ یکی از جواب‌های آن است، a و b و c را پیدا کنید:

$$ax-by=۲a-b، \quad (c+۱)x+cy=۱۰-a+۳b$$

تکلیف ۲.

۱. آیا این دو دستگاه هم‌ارزند:

$$\begin{cases}۵x+۳y=۱۵\\ ۱۰x-۶y=۰\end{cases} \quad و \quad \begin{cases}۳x-۲y=۲\\ -۶x+۴y=-۴\end{cases}$$

۲. دستگاه شامل دو معادلهٔ

$$۵x+۷y=۱۵، \quad ax+by=c$$

یك جواب منحصر دارد. درضمن $x=۲$، $y=۳$ یکی از جواب‌های معادلهٔ دوم دستگاه است. a و b و c را پیدا کنید.

۳. دستگاه زیر بی‌نهایت جواب دارد. a را پیدا کنید:

$$\begin{cases}۳x+(a-۳)y=۴\\ ۶x+(a-۱)y=a+۳\end{cases}$$

۴. این دستگاه جواب ندارد. a را پیدا کنید:

$$۷x-۲ay=۵، \quad (۴-۵a)x-۴ay=۷$$

۵. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}(۲a+۴)x-(۵a+۳)y=۲a-۴\\ (a+۲)x-۳ay \qquad = a-۲\end{cases}$$

۶. a را طوری پیدا کنید که خط‌های راست

$$۳x+۲ay=۱ \quad و \quad ۳(a-۱)x-ay=۱$$

a) در یك نقطه برخورد داشته باشند؛ b) برهم منطبق شوند؛

c) نقطهٔ مشترك نداشته باشند.

۷. a و b را طوری پیدا کنید که دستگاه شامل دومعادلهٔ زیر، بی‌نهایت جواب داشته باشد:

$$ax-by=a^۲-b، \quad bx-b^۲y=۲+۴b$$

تمرین‌ها

۱. این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $\begin{cases} ۲x+۳y=۱، \\ ۳x-۲y=۹; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x+۲y=۴، \\ y-۳x=۷; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x+y=۳، \\ ۲x+۲y=۸; \end{cases}$

۴) $\begin{cases} ۳x-y=۱، \\ ۱۲x-۴y=۴. \end{cases}$

۲. a را طوری پیدا کنید که دستگاه، جوابی منحصر داشته باشد:

۱) $\begin{cases} ۳x-۲y=۶، \\ ax+y=-۳; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ax+ay=a^۲، \\ x+ay=۲; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x-(a+۱)y=a+۲، \\ ax+y=a-۳; \end{cases}$

۴) $\begin{cases} ۲x-۳=۰، \\ ax+y(a-۱)=\frac{۳}{۲}. \end{cases}$

۳. a را طوری پیدا کنید که دستگاه، دارای بی‌نهایت جواب باشد:

۱) $\begin{cases} ۳x+ay=۳، \\ ax+۳y=۳; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} ۲x+ay=a+۲، \\ (a+۱)x+۲ay=۲a+۴; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} (a+۱)x+۸y=۴a; \\ ax+(a+۳)y=۳a-۱; \end{cases}$

۴) $\begin{cases} (a-۱)x+۴y=۲a-۳، \\ x+۲ay=۱. \end{cases}$

۴. a را طوری پیدا کنید که دستگاه، جواب نداشته باشد:

۱) $\begin{cases} -۴x+ay=۱+a، \\ (۶+a)x+۲y=۳+a; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a^۲x+(۲-a)y=۴+a^۲; \\ ax+(۲a-۱)y=a^۵-۲; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x + ay = ۱، \\ ax - ۳ay = ۲a + ۳; \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} ۲x + a^۲y = a^۲ + a - ۲، \\ x + ۲y = ۲. \end{cases}$

۵. دستگاه را، برای همهٔ مقدارهای پارامتر a، حل کنید:

۱) $\begin{cases} ax + y = a، \\ x + ay = ۱; \end{cases}$ ۶) $\begin{cases} ۲x - ay = ۵، \\ ۳y - ۶x = -۱۵; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a^۲x + y = a^۲، \\ x + ay = ۱; \end{cases}$ ۷) $\begin{cases} x + ay = ۱، \\ ax + y = ۲a; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} ax + y = ۲، \\ x + ay = ۱; \end{cases}$ ۸) $\begin{cases} ax + y = |a|، \\ x + ay = a^۲; \end{cases}$

۴) $\begin{cases} ax + y = a، \\ ax + ay = ۱; \end{cases}$ ۹) $\begin{cases} |a|x + a^۲y = a، \\ ax - a^۲y = a^۲; \end{cases}$

۵) $\begin{cases} |a|x - y = ۱، \\ x + |a|y = a; \end{cases}$ ۱۰) $\begin{cases} (\sin ۲a)x + (۱ + \cos ۲a)y = \sin ۲a، \\ (۱ + \cos ۲a)x - (\sin ۲a)y = ۰. \end{cases}$

۶. همهٔ مقدارهای پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هر مقدار دلخواه b، دست‌کم یك مقدار برای c وجود داشته باشد، به‌نحوی که دستگاه معادله‌ها، حداقل یك ریشه داشته باشد:

۱) $\begin{cases} ۲x + by = ac^۲ + c، \\ bx + ۲y = c - ۱; \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} ۲x + by = c^۲، \\ bx + ۲y = ac - ۱; \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x + by = ac^۲ + c، \\ bx + ۲y = c - ۱; \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} bx + y = ac^۲، \\ x + by = ac + ۱. \end{cases}$

۷. برای همهٔ مقدارهای a و b، دستگاه را حل کنید:

۱) $\begin{cases} ax + y = b، \\ x - y = ۲; \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x - yb = a، \\ ax + y = ۱; \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x+y=b، \\ ax-y=a؛ \end{cases}$
۴) $\begin{cases} ax+by=a، \\ ax+by=b; \end{cases}$

۵) $\begin{cases} ax-ay=ab، \\ ۲ax-\ \ y=a; \end{cases}$
۶) $\begin{cases} ax=ab، \\ yb=b^{۲}; \end{cases}$

۷) $\begin{cases} a^{۲}x=ab، \\ abx=b^{۲}; \end{cases}$
۸) $\begin{cases} ax+ay=b، \\ ax+by=a. \end{cases}$

۸. پارامتر a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای آن، جواب‌های دستگاه زیر با شرط $x>۱$ و $y>۰$ سازگار باشند:

$$x+ay=۳،\ \ ax+۴y=۶$$

۹. این دو دستگاه را، برای همهٔ مقدارهای پارامتر a حل کنید:

۱) $\begin{cases} ۲x+۳y=۵، \\ x-\ \ y=۲، \\ x+۴y=a; \end{cases}$
۲) $\begin{cases} x+۲y=۳، \\ ax-۴y=-۶، \\ x+\ \ y=۱. \end{cases}$

۱۰. دستگاه را برای هرمقدار a و b حل کنید:

۱) $\begin{cases} x+ay=۱، \\ ۲x+۴y=۲، \\ bx+۴y=۲; \end{cases}$
۲) $\begin{cases} ax+by=a، \\ (a-۲)x+y=۳، \\ x+y=۱. \end{cases}$

۱۱. همهٔ مقدارهای a را طوری پیدا کنید که، به‌ازای هریک از آن‌ها، هر دوعدد x و y که دردستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} (\sin ۲a)x+(۱+\cos ۲a)y=\sin ۲a \\ (۱+\cos ۲a)x-(\sin ۲a)y=۰ \end{cases}$$

صدق می‌کند، درضمن جوابی ازدستگاه زیر باشد:

$$\begin{cases} (\sin a)x+(\cos a)y=\sin a \\ (\cos a)x+(\sin a)y=۰ \end{cases}$$

۱۲. $x=\alpha_۱$، $y=\alpha_۲$، جوابی از این دستگاه‌اند:

$$۳x-y=۲-a, \qquad x+۲y=a+۱$$

مقدار a را طوری پیدا کنید که $\alpha_۱^۲+\alpha_۲^۲$ حداقل مقدار ممکن باشد.

۱۳. این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \begin{cases} |x|+۲|y|=۳, \\ ۵y+۷x=۲; \end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases} u+v=۲, \\ |۳u-v|=۱; \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} |x-۱|+y=۰, \\ ۲x-y=۱; \end{cases} \qquad ۴)\ \begin{cases} y+x-۱=۰, \\ |y|-x-۱=۰; \end{cases}$$

$$۵)\ \begin{cases} |x+y|=۱, \\ |x|+|y|=۱; \end{cases} \qquad ۶)\ \begin{cases} |x-۱|+|y-۲|=۱, \\ y=۳-|x-۱|. \end{cases}$$

۱۴. برای همهٔ مقدارهای پارامتر a، این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \begin{cases} x+y=۱, \\ a|x|-y=۱; \end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases} a|x+y|=۱, \\ |x|+|y|=۱; \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} a|x|-y=a, \\ |x|+ay=۱; \end{cases} \qquad ۴)\ \begin{cases} ax-|x|+y=۱, \\ x+ay=۱; \end{cases}$$

$$۵)\ \begin{cases} a|x+y|=a, \\ x+y=a; \end{cases} \qquad ۶)\ \begin{cases} |ax-y|=۱, \\ x+y=۲. \end{cases}$$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۲. $\left(۰, \frac{۲}{۳}\right)$. ۳. به‌ازای $a\neq۱$: $(a^۲+۱, -a)$، به‌ازای $a=۱$: $(t, ۱-t)$ و به‌ازای $a=-۱$: $(t, t-۱)$ $(t\in\mathbf{R})$. ۴. $a=۵t$،

$b=۷t$، $c=۲۷t$ که در آن $t\neq ۰$. ۵. $۱۰<a<۱۲$. ۶. $a=-\frac{۲}{۳}$.

۷. $a=b=۰$، $c=\frac{۹}{۴}$ و $a=۲$، $b=-۱$، $c=۱$.

تکلیف ۲.

۱. نه. ۲. $a=t$، $b=p$، $c=۲t+۳p$ که در آن $t\in\mathbf{R}$ و $p\neq\frac{۷t}{۵}$. ۳. $a=۵$. ۴. $a=۰$، $a=-۲$. ۵. اگر a مخالف -۲ و ۳ باشد: $\left(\frac{a-۲}{a+۲}, ۰\right)$، اگر $a=۳$: $\left(t, \frac{۵t-۱}{۹}\right)(t\in\mathbf{R})$ و در حالت $a=-۲$ جواب ندارد. ۶. a) $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{۰, \frac{۱}{۲}\right\}$؛ b) ϕ؛ c) $a=۰$ و $a=\frac{۱}{۲}$. ۷. $a=۱$، $b=-۱$ و $a=۱$، $b=-۲$.

تمرین‌ها

۱. ۱) $\left(\frac{۲۹}{۱۳}, -\frac{۱۵}{۱۳}\right)$؛ ۲) $\left(-\frac{۱۰}{۷}, \frac{۱۹}{۷}\right)$؛ ۳) جواب ندارد؛ ۴) $(t, ۳t-۱)\ (t\in\mathbf{R})$.

۲. ۱) $a\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{۳}{۲}\right\}$، ۲) $a\in\mathbf{R}\setminus\{۰, ۱\}$؛ ۳) $a\in\mathbf{R}$؛ ۴) $a\neq ۱$.

۳. ۱) $a=۳$؛ ۲) $a=۱$؛ ۳) $a=۱$؛ ۴) $a=۲$.

۴. ۱) $a=-۴$؛ ۲) $a=-۱$، $a=۱$؛ ۳) $a=۰$؛ ۴) $a=-۲$.

۵. ۱) به‌ازای $a\neq\pm ۱$: $(۰, ۱)$، به‌ازای $a=۱$: $(t, ۱-t)$، به‌ازای $a=-۱$: $(t, t+۱)$ که در آن‌ها $t\in\mathbf{R}$؛ ۲) به‌ازای $a\neq ۱$: $(۰, ۱)$، به‌ازای $a=۱$: $(t, ۱-t)$ که در آن $t\in\mathbf{R}$؛ ۳) برای $a\neq\pm ۱$: $\left(\frac{۲a-۱}{a^۲-۱}, \frac{a-۲}{a^۲-۱}\right)$ و به‌ازای $a=\pm ۱$ جواب ندارد؛ ۴) به‌ازای $a\neq ۰$ و $a\neq ۱$: $\left(\frac{a+۱}{a}, -۱\right)$، به‌ازای $a=۱$: $(t, ۱-t)$

$(t\in\mathbf{R})$، به‌ازای $a=۰$ جواب ندارد؛ ۵) $\left(\frac{۲|a|}{a^۲+۱}, \frac{a^۲-۱}{a^۲+۱}\right)$؛
۶) اگر $a\neq۱$ آن وقت $\left(۰، \frac{۵}{۲}\right)$ و اگر $a=۱$ آن‌وقت $(t، ۲t-۵)$
$(t\in\mathbf{R})$؛ ۷) اگر $a\neq\pm۱$ آن‌وقت $\left(\frac{۱-۲a^۲}{۱-a^۲}, \frac{a}{۱-a^۲}\right)$ ودرحالت
$a=۱$ یا $a=-۱$ جواب ندارد؛ ۸) اگر $a\in(۰، ۱)\bigcup(۱، +\infty)$،
آن وقت $(a، ۰)$، اگر $a\in(-\infty، -۱)\bigcup(-۱، ۰)$ آن وقت
$\left(\frac{-۲a^۲}{a^۲-۱}, \frac{a^۳+a}{a^۲-۱}\right)$، اگر $a=۱$ آن‌وقت $(t، ۱-t)$ به شرط $t\in\mathbf{R}$ و
به‌ازای $a=-۱$ جواب ندارد؛ ۹) اگر $a>۰$: $\left(\frac{۱+a}{۲}, \frac{۱-a}{۲a}\right)$،
اگر $a=۰$: $(t، p)$، اگر $a=-۱$: $(t، -۱-t)$ $(t\in\mathbf{R}$، $p\in\mathbf{R})$ و
به‌ازای سایر مقدارهای a جواب ندارد؛

۱۰) اگر $a\neq(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbf{Z})$: $\left(\sin^۲a، \frac{۱}{۲}\sin۲a\right)$، اگر
$a=(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$: $(t، p)(k\in\mathbf{Z}، t\in\mathbf{R}، p\in\mathbf{R})$. ۱۰۶. ۱) $-۱\leqslant a<۰$؛
۲) $-\frac{۳\sqrt{۲}+۴}{۸}\leqslant a\leqslant\frac{۳\sqrt{۲}-۴}{۸}$؛ ۳) $a<-۲$ و $a>۲$؛
۴) $a<-۴$ و $a>۴$. ۱۰۷. ۱) به‌ازای $b\in\mathbf{R}$ و $a\neq-۱$: $x=\frac{b+۲}{a+۱}$
و $y=\frac{b-۲a}{a+۱}$، به‌ازای $a=-۱$ و $b=-۲$: $x=t$ و $y=t-۲$
$(t\in\mathbf{R})$ ودرحالت $a=-۱$ و $b\neq-۲$ جواب ندارد؛ ۲) اگر
$ab\neq-۱$: $x=\frac{a+b}{ab+۱}$ و $y=\frac{۱-a^۲}{ab+۱}$، اگر $a=۱$ و $b=-۱$ آن‌وقت
$x=t$ و $y=۱-t$ $(t\in\mathbf{R})$، اگر $a=-۱$ و $b=۱$: $x=t$ و $y=t-۱$ $(t\in\mathbf{R})$

و اگر $ab=-۱$ ولی $a\neq\pm ۱$ جواب ندارد؛ ۳) اگر $a\neq -۱$:
$\left(\frac{a+b}{a+۱}, \frac{ab-a}{a+۱}\right)$، اگر $a=-۱$ و $b=۱$: $(t، ۱-t)$ $(t\in\mathbf{R})$ و اگر
$a=-۱$ و $b\neq ۱$ جواب ندارد؛ ۴) اگر $a=b\neq ۰$ آن‌وقت $(t، ۱-t)$ $(t\in\mathbf{R})$،
اگر $a=b=۰$ آن‌وقت $(t، p)$ که در آن $t\in\mathbf{R}$ و $p\in\mathbf{R}$ و برای $a\neq b$ جواب
ندارد؛ ۵) اگر $a\neq ۰$ و $a\neq\frac{۱}{۲}$ آن‌وقت $\left(\frac{a-b}{۲a-۱}, \frac{a-۲ab}{۲a-۱}\right)$، اگر
$a=۰$: $(t، ۰)$ $(t\in\mathbf{R})$، اگر $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=\frac{۱}{۲}$: $\left(t، t-\frac{۱}{۲}\right)$ $(t\in\mathbf{R})$ و اگر
$a=\frac{۱}{۲}$ و $b\neq\frac{۱}{۲}$ جواب ندارد؛ ۶) به‌ازای $a=۰$ و $b\neq ۰$: $(t، b)$ $(t\in\mathbf{R})$،
به‌ازای $ab\neq ۰$: $(b، b)$، به‌ازای $a\neq ۰$ و $b=۰$، $(۰، t)$ $(t\in\mathbf{R})$، به‌ازای
$a=b=۰$: $(t، p)$ $(t\in\mathbf{R}$ و $p\in\mathbf{R})$؛ ۷) $x=\frac{b}{a}$ به‌ازای $ab\neq ۰$، $x=۰$
به‌ازای $b=۰$ و $a\neq ۰$، $x=t$ به‌ازای $a=b=۰$ $(t\in\mathbf{R})$ و برای $a=۰$
و $b\neq ۰$ جواب ندارد؛ ۸) به‌ازای $a=b\neq ۰$: $(t، ۱-t)$ $(t\in\mathbf{R})$،
به‌ازای $a=b=۰$: $(t، p)$ که در آن t و p عددحقیقی ودلخواه‌اند. به‌ازای
$a=۰$ و $b\neq ۰$ یا $a\neq ۰$ و $b=۰$ یا به‌ازای $ab\neq ۰$ و $a\neq b$ جواب
ندارد؛ ۸. $-۲<a<۲$ و $a>۲$. ۹. ۱) اگر $a=۳$ آن‌وقت
$\left(\frac{۱۱}{۵}، \frac{۱}{۵}\right)$، اگر $a\neq ۳$ آن‌وقت جواب ندارد؛ ۲) $(-۱، ۲)$ به‌ازای
$a=-۲$، به‌ازای $a\neq -۲$ جواب ندارد. ۱۰. ۱) $(۱، ۰)$ به‌ازای
$b=۲$ و $a\neq ۲$، $\left(۰، \frac{۱}{۲}\right)$ به‌ازای $a=۲$ و $b\neq ۲$، $\left(t، \frac{۱}{۲}(۱-t)\right)$ به‌ازای
$a=۲$ و $b=۲$ $(t\in\mathbf{R})$، و درحالت $a\neq ۲$ و $b\neq ۲$ جواب ندارد؛
۲) $(۱، ۰)$ به‌ازای $a=۵$ و $b\in\mathbf{R}$، $\left(\frac{۲}{a-۳}, \frac{a-۵}{a-۳}\right)$ به‌ازای $b=a$ و
$a\neq ۳$ و $a\neq ۵$، دستگاه به‌ازای $a=۳$ و $b=۳$ و به‌ازای $b\neq a$ و $b\neq ۵$

جواب ندارد؛ ۱۱. $a\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $(k\in\mathbf{R})$. ۱۲. $a=\frac{۱}{۱۷}$.

۱۳. ۱) $(۱، -۱)$ و $\left(-\frac{۱۱}{۹}, \frac{۲۳}{۱۹}\right)$؛ ۲) $\left(\frac{۱}{۴}, \frac{۷}{۴}\right)$ و $\left(\frac{۳}{۴}, \frac{۵}{۴}\right)$؛
۳) $(۰، -۱)$؛ ۴) $(۰، ۱)$؛ ۵) به‌شرط $t\in[-۱، ۰]$: $(t، -۱-t)$؛
و بـه‌شرط $t\in[۰، ۱]$: $(t، ۱-t)$ ۶) $(t، ۴-t)$ بـاشرط $۱\leqslant t\leqslant ۲$ و
$(t، t+۲)$ بـاشرط $۰\leqslant t\leqslant ۱$.

۱۴. ۱) $\left(\frac{۲}{a+۱}, \frac{a-۱}{a+۱}\right)$ بـه‌ازای $a\in(-۱، ۱)$، دو جـواب
$\left(\frac{۲}{a+۱}, \frac{a-۱}{a+۱}\right)$ و $\left(\frac{۲}{۱-a}, \frac{a+۱}{a-۱}\right)$ به‌ازای $a\in(۱، +\infty)$ ودرحالت
$a\leqslant -۱$ جواب ندارد؛ ۲) به‌ازای $a<۱$ جواب نـدارد، به‌ازای
$a=۱$ دوجواب $(t، ۱-t)$ و $(-t، t-۱)$ که‌در آن $۰\leqslant t\leqslant ۱$، به‌ازای
$a>۱$ جـواب‌هـای $\left(\pm\frac{a+۱}{۲a}, \pm\frac{۱-a}{۲a}\right)$ و $\left(\frac{۱-a}{۲a}, \pm\frac{a+۱}{۲a}\right)$؛
۳) $(۱، ۰)$ و $(-۱، ۰)$ به‌ازای $a\in\mathbf{R}$؛ ۴) $\left(\frac{a+۱}{a^۲+a-۱}, \frac{a}{a^۲+a-۱}\right)$
بـه‌ازای $a<\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}$، $\left(\frac{a-۱}{a^۲-a-۱}, \frac{a-۲}{a^۲-a-۱}\right)$ بـه‌ازای
$\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}<a\leqslant\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$، $\left(\frac{a-۱}{a^۲-a-۱}, \frac{a-۲}{a^۲-a-۱}\right)$
و $\left(\frac{a-۱}{a^۲+a-۱}, \frac{a}{a^۲+a-۱}\right)$ به‌ازای $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}<a<۱$، $(۰، ۱)$به‌ازای
$a=۱$، $\left(\frac{a-۱}{a^۲-a-۱}, \frac{a-۲}{a^۲-a-۱}\right)$به‌ازای $a>\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، درحالت‌های
$\frac{-۱-\sqrt{۵}}{۲}\leqslant a\leqslant\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ و $۱<a\leqslant\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ جـواب نـدارد؛
۵) $(t، -t)$ به‌ازای $a=۰$ $(t\in\mathbf{R})$، $(t، ۱-t)$ بـه‌ازای $a=۱$ $(t\in\mathbf{R})$،
و در حالت‌های $a<-۱$ یـا $-۱<a<۰$ یـا $۰<a<۱$ ویا $a>۱$

جواب ندارد؛ ۶) درحالت $a\neq -۱$ دوجواب $\left(\frac{۳}{a+۱}, \frac{۲a-۱}{a+۱}\right)$ و $\left(\frac{۱}{a+۱}, \frac{۲a+۱}{a+۱}\right)$ و درحالت $a=-۱$ جواب ندارد.

§۲. دستگاه‌های هم‌ارز

تابع‌های $f_۱(x, y, z, u, \dots, v)$، $f_۲(x, y, z, u, \dots, v)$، …، $f_n(x, y, z, u, \dots, v)$ را تابع‌هایی از متغیرهای x، y، z، u، …، v می‌گیریم. اگر بخواهیم همهٔ گروه‌های عددی $(x_۰, y_۰, z_۰, u_۰, \dots, v_۰)$ را طوری پیدا کنیم که برابری‌های زیر برقرار باشند:

$$f_۱(x_۰, y_۰, z_۰, u_۰, \dots, v_۰)=۰,\quad f_۲(x_۰, y_۰, z_۰, u_۰, \dots, v_۰)=۰,\quad f_n(x_۰, y_۰, z_۰, u_۰, \dots, v_۰)=۰$$

آن‌وقت می‌گویند با دستگاهی از معادله‌ها سروکار داریم و می‌نویسند:

$$\begin{cases} f_۱(x, y, z, u, \dots, v)=۰ \\ f_۲(x, y, z, u, \dots, v)=۰ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_n(x, y, z, u, \dots, v)=۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

درضمن گروه مرتب عددهای $(x_۰, y_۰, z_۰, u_۰, \dots, v_۰)$ را جواب دستگاه (۱) گویند. حل یك دستگاه، به‌معنای پیدا کردن همهٔ جواب‌های آن است. دستگاه

$$\begin{cases} g_۱(x, y, z, u, \dots, v)=۰ \\ g_۲(x, y, z, u, \dots, v)=۰ \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_p(x, y, z, u, \dots, v)=۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

را هم‌ارز دستگاه (۱) گویند، به‌شرطی که مجموعهٔ جواب‌های دستگاه‌های (۲) و (۱) برهم منطبق باشند، یعنی دستگاه‌های (۱) و (۲) به‌شرطی هم‌ارزند،

به‌شرطی که هرجواب دستگاه (۲) جوابی از دستگاه (۱)، و هرجواب دستگاه (۱) جوابی از دستگاه (۲) باشد. اگر هیچ کدام از دستگاه‌های (۱) و (۲) جواب نداشته باشند، بازهم آن‌ها را هم‌ارز به‌حساب می‌آورند.

حل مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} f_1(x, y, \ldots, v) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_{n_1}(x, y, \ldots, v) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} g_1(x, y, \ldots, v) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_{n_2}(x, y, \ldots, v) = 0 \end{cases}, \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} \varphi_1(x, y, \ldots, v) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \varphi_{n_k}(x, y, \ldots, v) = 0 \end{cases} \qquad (۳)$$

به‌معنای پیدا کردن همهٔ گروه عددهای مرتب $(x_0, y_0, \ldots, v_0)$ است به‌نحوی که، هریك از آن‌ها، دست کم جواب یکی از دستگاه‌های مجموعهٔ (۳) باشد. هریك از این گونه گروه‌ها، جوابی است از دستگاه (۳).

دستگاه معادله‌های (۱) وقتی با مجموعهٔ دستگاه‌های (۳) هم‌ارز است که هرجواب دستگاه (۱)، جوابی از مجموعهٔ دستگاه‌های (۳) و، برعکس، هر جواب مجموعهٔ دستگاه‌های (۳) جوابی از دستگاه (۱) باشد و یا، هم‌دستگاه (۱) و هم‌مجموعهٔ دستگاه‌های (۳) جواب نداشته باشند.

گزاره‌هایی دربارهٔ دستگاه‌های هم‌ارز

۱. اگر در دستگاه (۱)، جای دو معادلهٔ دلخواه را با هم عوض کنیم، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه (۱) می‌رسیم.

۲. اگر در دستگاه (۱)، به‌جای یکی از معادله‌ها، معادله‌ای هم‌ارز آن‌را قرار دهیم، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه (۱) می‌رسیم.

۳. اگر معادلهٔ $f_1(x, y, z, u, \ldots, v) = 0$، هم‌ارز با معادلهٔ $x = \varphi(y, z, u, \ldots, v)$ باشد، آن‌وقت دستگاه (۱) با دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} f_۲(\varphi(y، z، u، …، v)، y، z، u، …، v)=۰ \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ f_n(\varphi(y، z، u، …، v)، y، z، u، …، v)=۰ \\ x=\varphi(y، z، u، …، v) \end{cases}$$

۴. $\alpha_۱، \alpha_۲، …، \alpha_n$ را عددهایی حقیقی و $\alpha_۱\neq ۰$ می‌گیریم، در این‌صورت دستگاه (۱) هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} \alpha_۱ f_۱+\alpha_۲ f_۲+\cdots+\alpha_n f_n=۰ \\ f_۲=۰ \\ . \quad . \quad . \\ f_n=۰ \end{cases}$$

در حالت خاص، این دستگاه‌ها هم‌ارز یکدیگرند:

$$\begin{cases} f_۱=۰ \\ f_۲=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} f_۱+f_۲=۰ \\ f_۲=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} f_۱=۰ \\ f_۱+f_۲=۰ \end{cases},$$

$$\begin{cases} f_۱-f_۲=۰ \\ f_۲=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} f_۱=۰ \\ f_۱-f_۲=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} f_۱+f_۲=۰ \\ f_۱-f_۲=۰ \end{cases}$$

۵. اگر معادلهٔ $f_۱(x، y، z، u، …، v)=۰$ از دستگاه (۱)، با مجموعهٔ k معادلهٔ

$$\varphi_۱(x، y، z، u، …، v)=۰، \quad \varphi_۲(x، y، z، u، …، v)=۰، …$$
$$…، \varphi_k(x، y، z، u، …، v)=۰$$

هم‌ارز باشد، آن‌وقت دستگاه (۱)، با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} \varphi_۱=۰ \\ f_۲=۰ \\ . \quad . \quad . \\ f_n=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_۲=۰ \\ f_۲=۰ \\ . \quad . \quad . \\ f_n=۰ \end{cases}, …, \quad \begin{cases} \varphi_k=۰ \\ f_۲=۰ \\ . \quad . \quad . \\ f_n=۰ \end{cases}$$

هم‌ارز است. در حالت خاص، اگر $f_۱=\varphi_۱\varphi_۲$ و، در ضمن، حوزهٔ تعریف تابع‌های $f_۱$، $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ برهم منطبق باشند، آن‌وقت دستگاه (۱) با مجموعهٔ دو دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases}\varphi_۱=۰\\ f_۲=۰\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ f_n=۰\end{cases},\quad \begin{cases}\varphi_۲=۰\\ f_۲=۰\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ f_n=۰\end{cases}$$

دستگاه (۲) را نتیجه‌ای از دستگاه (۱) گویند، وقتی‌که هر جواب دستگاه (۱)، جوابی از دستگاه (۲) باشد؛ در این حالت، مجموعهٔ همهٔ جواب‌های دستگاه (۲)، ممکن است گسترده‌تر از مجموعهٔ همهٔ جواب‌های دستگاه (۱) باشد. اگر یکی ازمعادله‌های دستگاه (۱) را، به‌معادله‌ای که نتیجهٔ آن است تبدیل کنیم، به‌دستگاهی می‌رسیم که نتیجه‌ای از دستگاه (۱) است. مثلاً، دستگاه‌های

$$\begin{cases}(۵x+۷y)^۲=۲۵۶\\ (۲x+۳y)^۲=۹\end{cases} \quad و \quad \begin{cases}۲x+۳y=۳\\ ۵x+۷y=۱۶\end{cases}$$

هم‌ارز نیستند، زیرا با مجذور کردن یک معادله، به‌معادله‌ای می‌رسیم که نتیجه‌ای از معادلهٔ اول است؛ ولی دستگاه‌های

$$\begin{cases}(۲x+۳y)^۲=۹\\ (۵x+۷y)^۲=۲۵۶\end{cases} \quad و \quad \begin{cases}|۲x+۳y|=۳\\ |۵x+۷y|=۱۶\end{cases}$$

هم‌ارز با یکدیگرند.

معادلهٔ $p(x, y, z, u, \ldots, v)=۰$ را نتیجهٔ دستگاه (۱) گویند، به‌شرطی که هر جواب دستگاه (۱)، جوابی از معادلهٔ $p(x, y, z, u, \ldots, v)=۰$ باشد. مثلاً معادلهٔ $x=y$، نتیجه‌ای است از دستگاه

$$\begin{cases}x=۱\\ y=۱\end{cases}$$

البته‌معادلهٔ $y = x$ دارای بی‌نهایت جواب است که در دستگاه (۱) صدق نمی‌کنند.

۶. اگر دستگاه (۲) نتیجه‌ای از دستگاه (۱) باشد، آن‌وقت، دستگاه (۱) هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} f_۱(x، y، z، u، \dots، v) = ۰ \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_n(x، y، z، u، \dots، v) = ۰ \\ g_۱(x، y، z، u، \dots، v) = ۰ \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ g_p(x، y، z، u، \dots، v) = ۰ \end{cases}$$

برای حل دستگاه معادله‌ها، می‌توان به‌یکی از این دوروش متوسل شد:

الف) خود را به دستگاه‌هایی هم‌ارز دستگاه مفروض برسانیم؛ دراین صورت، ضمن عبور به هر دستگاه جدید، مجموعهٔ جواب‌های دستگاه مفروض حفظ می‌شوند و، در مرحلهٔ نهائی، همهٔ جواب‌های دستگاه مفروض به دست می‌آیند.

ب) دستگاه‌مفروض را به‌دستگاه‌هایی‌تبدیل کنیم که، هر کدام، نتیجه‌ای از دستگاه قبلی است؛ دراین صورت ممکن است مجموعهٔ جواب‌ها گسترش یابند و، بنابراین، باید با آزمایش، جواب‌های «خارجی» را کنار گذاشت.

مثال ۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y = x + ۱ \\ ۲x^۲ - xy + ۳y^۲ - ۷x - ۱۲y + ۱ = ۰ \end{cases}$$

حل. این دستگاه، هم‌ارزاست با دستگاه

$$\begin{cases} y = x + ۱ \\ ۲x^۲ - x(x + ۱) + ۳(x + ۱)^۲ - ۷x - ۱۲(x + ۱) + ۱ = ۰ \end{cases}$$

که بعد از تبدیل‌های لازم درمعادلهٔ دوم دستگاه، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} y = x + ۱ \\ ۲x^۲ - ۷x - ۴ = ۰ \end{cases}$$

که با دستگاه اصلی هم‌ارز است. معادلهٔ دوم، دارای دو ریشه است: $x_۱ = -\frac{۱}{۲}$ و $x_۲ = ۴$؛ بنا بر این، دستگاه مفروض، دوجواب دارد: $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $(۴, ۵)$.

مثال ۲. دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} ۶x^{۲}+xy-y^{۲}-۳x-۴y-۱۵=۰ \\ -۳x^{۲}+۴xy-y^{۲}+۱۵x-۷y-۱۸=۰ \end{cases} \qquad (۴)$$

با دستگاه

$$\begin{cases} ۶x^{۲}+xy-y^{۲}-۳x-۴y-۱۵=۰ \\ ۹xy-۳y^{۲}+۲۷x-۱۸y-۵۱=۰ \end{cases} \qquad (۵)$$

و، همچنین، با دستگاه

$$\begin{cases} ۶x^{۲}+xy-y^{۲}-۳x-۴y-۱۵=۰ \\ ۹x^{۲}-۳xy-۱۸x+۳y+۳=۰ \end{cases} \qquad (۶)$$

هم‌ارز است، دستگاه (۵) را از دستگاه (۴)، به‌این ترتیب به‌دست آورده‌ایم: معادلهٔ دوم دستگاه (۴) را در ۲ ضرب و، سپس، معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ اول دستگاه (۴) جمع کرده‌ایم. دستگاه (۶) هم با روش مشابهی به دست آمده است: معادلهٔ‌دوم دستگاه (۴) رادر ۱ — ضرب و، سپس، معادلهٔ‌حاصل را با معادلهٔ اول دستگاه (۴) جمع می کنیم.

دستگاه‌های (۴) و (۵) و (۶)، بنا بر ویژگی ۴، هم‌ارز یکدیگرند.

برتری دستگاه (۵) بر دستگاه (۴) در این‌است که، معادلهٔ دوم‌دستگاه (۵)، نسبت به‌مجهول x، از درجهٔ اول است (به همین ترتیب، دستگاه (۶)، این برتری را دارد که، معادلهٔ دوم آن، نسبت به‌مجهول y از درجهٔ اول است)؛ و این به‌ما امکان می‌دهد که، در دستگاه‌های (۵) و (۶)، از روش جای‌گزینی استفاده‌کنیم.

از دستگاه (۶) به‌دستگاه دیگری هم‌ارز با آن (ولی ساده‌تر از آن) عبور می کنیم؛ برای این‌منظور، جملهٔ xy را در دومعادلهٔ دستگاه (۶)حذف

می‌کنیم (معادلهٔ دوم دستگاه (۶) را بر ۳ تقسیم و، سپس، بامعادلهٔ اول دستگاه (۶) جمع می‌کنیم)، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۳x^۲ - xy - ۶x + y + ۱ = ۰ \\ ۹x^۲ - y^۲ - ۹x - ۳y - ۱۴ = ۰ \end{cases}$$

که با استفاده از روش جای‌گزینی قابل‌حل است. y را برحسب x ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آوریم و آن‌را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم.

مثال ۳. در دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^۲ - xy + y^۲ = ۱۹ \\ x^۴ + x^۲y^۲ + y^۴ = ۹۳۱ \end{cases}$$

بعد از تجزیهٔ سمت چپ معادلهٔ دوم، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} x^۲ - xy + y^۲ = ۱۹ \\ (x^۲ - xy + y^۲)(x^۲ + xy + y^۲) = ۹۳۱ \end{cases}$$

که هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} x^۲ - xy + y^۲ = ۱۹ \\ x^۲ + xy + y^۲ = ۴۹ \end{cases}$$

و اگر آن‌ها را، یکبار ازهم کم و یکبار با هم جمع کنیم، به‌دستگاه می‌رسیم زیر که هم‌ارز با دستگاه

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۳۴ \\ xy = ۱۵ \end{cases}$$

است و حل آن ساده است.

مثال ۴. آیا این دو دستگاه هم‌ارزند:

$$\begin{cases} x + y = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = b \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} \sin(x + y) = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = b \end{cases}$$

الف) به‌ازای $b = ۲$، ب) به‌ازای $b = ۵$.

حل. روشن است که به‌ازای $b=۲$ و $b=۵$، دستگاه دوم نتیجه‌ای است از دستگاه اول، زیرا معادلهٔ $\sin(x+y)=۰$ نتیجه‌ای از معادلهٔ $x+y=۰$ است.

دستگاه اول، در حالت $b=۵$ دارای دو جواب $\left(\sqrt{\frac{۵}{۲}}, -\sqrt{\frac{۵}{۲}}\right)$ و $\left(-\sqrt{\frac{۵}{۲}}, \sqrt{\frac{۵}{۲}}\right)$ و در حالت $b=۲$ دارای دو جواب $(۱, -۱)$ و $(-۱, ۱)$ است.

مجموعهٔ جواب‌های دستگاه دوم را پیدا می‌کنیم. از معادلهٔ اول آن به دست می‌آید: $x+y=n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$ و بنابراین، دستگاه دوم با مجموعهٔ دستگاه‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{matrix} x+y=n\pi \\ x^۲+y^۲=b \end{matrix} \quad (n\in\mathbf{Z}) \tag{۷}$$

معادلهٔ دوم را می‌توان به‌صورت $(x+y)^۲-۲xy=b$ نوشت و، بنابراین، دستگاه (۷) با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} x+y=n\pi \\ xy=\frac{۱}{۲}n^۲\pi^۲-\frac{۱}{۲}b \end{cases} \quad (n\in\mathbf{Z}) \tag{۸}$$

هم‌ارز است. برای به‌دست آوردن مجموعهٔ جواب‌های (۸)، از قضیهٔ ویت استفاده می‌کنیم، که بنابرآن، x و y ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند:

$$z^۲-\pi nz+\frac{۱}{۲}(\pi^۲n^۲-b)=۰ \quad (n\in\mathbf{Z})$$

این معادله، تنها وقتی جواب دارد که مبین آن غیرمنفی باشد:

$$D=\pi^۲n^۲-۲(\pi^۲n^۲-b)\geqslant ۰ \quad \text{یا} \quad n^۲\leqslant\frac{۲b}{\pi^۲}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که، مجموعهٔ دستگاه‌های (۸)، به‌ازای $b=۲$

تنها برای $n=۰$ و به‌ازای $b=۵$ تنها برای $n=-۱$، $n=۰$ و $n=۱$ جواب دارد. به‌این ترتیب، به‌ازای $b=۲$، دو دستگاه مفروض هم‌ارزند. ولی اگرمجموعهٔ جواب‌ها را، به‌ازای $b=۵$، مقایسه کنیم، معلوم‌می‌شود که در این حالت، دو دستگاه مفروض، هم‌ارز نیستند.

مثال ۵. ثابت کنید، دو دستگاه زیر هم‌ارز نیستند:

$$\begin{cases} yz+zx=۱۶ \\ zx+yx=۲۵ \\ xy+zy=-۳۹ \end{cases} \quad (۹)\,; \qquad \begin{cases} x^۲+xy+xz=۴۸ \\ xy+y^۲+yz=۱۲ \\ xz+yz+z^۲=۸۴ \end{cases} \quad (۱۰)$$

حل. روشن می‌کنیم، چه گروه‌هایی از عددهای سه‌گانهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ می‌توانند در هر دو دستگاه صدق کنند. فرض می‌کنیم $(x_۰, y_۰, z_۰)$ جوابی از هر یك از این دستگاه‌ها باشد؛ در این‌صورت از دستگاه دوم، با توجه به‌معادله‌های دستگاه اول به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_۰^۲+۲۵=۴۸ \\ y_۰^۲-۳۹=۱۲ \\ z_۰^۲+۱۶=۸۴ \end{cases} \qquad (۱۱)$$

از این‌جا، هشت سه‌تایی مرتب به‌دست می‌آید که، هرکدام از آن‌ها، جوابی از دستگاه (۱۱) است:

$$(\sqrt{۲۳}, \sqrt{۵۱}, ۲\sqrt{۱۷}),\ (-\sqrt{۲۳}, \sqrt{۵۱}, ۲\sqrt{۱۷}),$$
$$(\sqrt{۲۳}, -\sqrt{۵۱}, ۲\sqrt{۱۷}),\ (\sqrt{۲۳}, \sqrt{۵۱}, -۲\sqrt{۱۷}),$$
$$(\sqrt{۲۳}, -\sqrt{۵۱}, -۲\sqrt{۱۷}),\ (-\sqrt{۲۳}, -\sqrt{۵۱}, ۲\sqrt{۱۷}),$$
$$(-\sqrt{۲۳}, \sqrt{۵۱}, -۲\sqrt{۱۷}), (-\sqrt{۲۳}, -\sqrt{۵۱}, -۲\sqrt{۱۷})$$

ولی به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که، هیچ‌کدام از این جواب‌ها، در معادلهٔ $yz+xz=۱۶$ از دستگاه (۹) صدق نمی‌کند (سمت چپ برابری، عددی گنگ به‌دست می‌آید، درحالی‌که، سمت‌راست برابری، عددی‌درست است).

به‌این ترتیب، این معادله‌ها، جواب مشترکی ندارند، بنابراین تنها

وقتی می‌توانند هم‌ارز باشند که، هیچ کدام از دو دستگاه، جواب نداشته باشد.

دستگاه (۱۰) را حل می‌کنیم. اگر سه معادلهٔ دستگاه را با هم جمع کنیم، به معادلهٔ

$$(x+y+z)^۲=۱۴۴$$

می‌رسیم که نتیجهٔ دستگاه است، یعنی دستگاه (۱۰) هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} x(x+y+z)=۴۸ \\ y(x+y+z)=۱۲ \\ z(x+y+z)=۸۴ \\ (x+y+z)^۲=۱۴۴ \end{cases}$$

که هم‌ارز است با مجموعهٔ این دو دستگاه:

$$\begin{cases} x(x+y+z)=۴۸ \\ y(x+y+z)=۱۲ \\ z(x+y+z)=۸۴ \\ x+y+z=-۱۲ \end{cases}, \quad \begin{cases} x(x+y+z)=۴۸ \\ y(x+y+z)=۱۲ \\ z(x+y+z)=۸۴ \\ x+y+z=۱۲ \end{cases}$$

یعنی، دو جواب برای دستگاه (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$(-۷، -۱، -۴) \quad و \quad (۷، ۱، ۴)$$

به‌این ترتیب، دستگاه‌های مفروض، هم‌ارز نیستند.

یادداشت. ناهم‌ارزی دو دستگاه را به‌طریق دیگری هم می‌توان ثابت کرد: یکی از دستگاه‌ها را حل می‌کنیم و، با آزمایش، روشن می‌کنیم که این جواب‌ها، در دستگاه دیگر صدق نمی‌کنند.

تکلیف ۱.

۱. کدام‌یك از زوج عددهای (۲،۳) یا (۳،۲)، جوابی است از دستگاه

$$\begin{cases} ۳x+۲y=۱۳ \\ ۳x-۲y=۵ \end{cases}$$

۲. آیا این دستگاه‌ها هم‌ارزند:

$$\begin{cases}\frac{۳x+۱}{۷}-\frac{۲x-y}{۲}=\frac{۲y-x}{۸}\\ \frac{۴x-۲}{۸}-\frac{۴y-۵x}{۲}=\frac{x+y}{۵}\end{cases}\quad \text{و}\quad \begin{cases}۳x+۲y=۱۳\\ ۳x-۲y=۵\end{cases}$$

۳. هم‌ارزی این دو دستگاه را ثابت کنید:

$$\begin{cases}۲x=۲۰-۵y\\ y^۲-۴=۰\end{cases}\quad \text{و}\quad \begin{cases}۲x+۵y=۲۰\\ ۲x^۲+۱۰xy+۱۷y^۲=۲۱\end{cases}$$

۴. ثابت کنید، دستگاه

$$\begin{cases}x^۲-y^۲-ax+ay=۰\\ xy=a^۲\end{cases}$$

با مجموعهٔ دستگاه‌های زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases}x-y=۰\\ xy=a^۲\end{cases},\quad \begin{cases}x+y=a\\ xy=a^۲\end{cases}$$

۵. ثابت کنید، اگر معادله‌های

$$ax^۲+bxy+cy^۲+d=۰\quad \text{و}\quad x^۲+y^۲-۱=۰$$

هم‌ارز باشند، آن‌وقت $b=۰$ و $a=c=-d\neq ۰$.

۶. ثابت کنید، اگر $a_۱b_۲-a_۲b_۱\neq ۰$، آن‌وقت دستگاه‌های زیر هم‌ارزند:

$$\begin{cases}a_۱p(x، y)+b_۱q(x، y)=۰\\ a_۲p(x، y)+b_۲q(x، y)=۰\end{cases}\quad \text{و}\quad \begin{cases}p(x، y)=۰\\ q(x، y)=۰\end{cases}$$

تکلیف ۲.

۱. آیا (۱، ۲) جواب این دستگاه است:

$$\begin{cases}۱۴x+۹y=۹\\ ۹x+۴y=۴\end{cases}$$

۰۲ ثابت کنید، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases}(x^۲+y^۲)(x^۳+y^۳)=۱۴۴۰\\ x+y=۶\end{cases}$$

هم‌ارز است با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases}x+y=۶\\ xy=۲۲\end{cases} \text{و} \begin{cases}x+y=۶\\ xy=۸\end{cases}$$

۰۳ آیا دو دستگاه زیر هم‌ارزند:

$$\begin{cases}x+y=۷xy\\ x-y=۳xy\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}۲x=۵y\\ x+y=۷xy\end{cases}$$

۰۴ اگر معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱$، هم‌ارز باشد با معادلهٔ

$$ax^۲+bxy+cy^۲+dx+ey+f=۰$$

آن‌وقت $b=d=e=۰$ و $a=c=-f\neq ۰$، ثابت کنید.

۰۵ آیا دستگاه

$$\begin{cases}x+y=۰\\ x^۲+y^۲=a\end{cases}$$

با مجموعهٔ $k+۱$ دستگاه $(k\geqslant ۱)$

$$\begin{cases}x+y=۰\\ x^۲+y^۲=a\end{cases}, \begin{cases}x+y=۳\\ x^۲+y^۲=a\end{cases}, \begin{cases}x+y=۶\\ x^۲+y^۲=a\end{cases}, \dots, \begin{cases}x+y=۳k\\ x^۲+y^۲=a\end{cases}$$

۱) به‌ازای $a=۲$، ۲) به‌ازای $a=۵$، هم‌ارز است؟

۰۶ ثابت کنید، معادلهٔ $۵x+۱۲x^۲-۱۹xy=۰$، نتیجه‌ای است از دستگاه

$$\begin{cases}x^۲-xy+y^۲=۲۱\\ y^۲-۲xy+۱۵=۰\end{cases}$$

تکلیف ۳.

آیا این دستگاه‌ها هم‌ارزند؟

$$۱)\quad \begin{cases} ۵x-۶y=۱۰، \\ ۵x+۶y=۷۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۱۰x=۸۰، \\ ۱۲y=۶۰; \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} ۴x+۳y=۱۰، \\ ۲x-۳y=-۴ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۴x+۳y=۱۰، \\ ۶x=۶; \end{cases}$$

$$۳)\quad \begin{cases} ۲y-x=۳، \\ x^۲-y+y^۲=۱۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=۲y-۳، \\ (۲y-۳)^۲-y+y^۲=۱۰; \end{cases}$$

$$۴)\quad \begin{cases} (x+۲y)^۲-(y-۲x)^۲=۱۶۸، \\ (x+۲y)^۲+(y-۲x)^۲=۱۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۲(x+۲y)^۲=۱۸۰، \\ ۲(y-۲x)^۲=-۱۵۶; \end{cases}$$

$$۵)\quad \begin{cases} x^۲y+y^۲x=۲۰، \\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۵}{۴} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} (x+y)^۲=۲۵، \\ (xy)^۲=۱۶; \end{cases}$$

$$۶)\quad \begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{۱۰}{۳}, \\ x^۲+y^۲=۵ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x^۲-y^۲=۳، \\ x^۲+y^۲=۵; \end{cases}$$

$$۷)\quad \begin{cases} x^۲(x+y)=۸۰، \\ x^۲(۲x-۳y)=۸۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x^۲(x+y)=۸۰، \\ x=۴y; \end{cases}$$

$$۸)\quad \begin{cases} x+y=۵، \\ x^۳+y^۳=۳۵ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x+y=۵، \\ ۱۲۵-۱۵xy=۳۵; \end{cases}$$

$$۹)\quad \begin{cases} x-y=۲، \\ x^۳-y^۳=۸ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x-y=۲، \\ ۲(۴+۳xy)=۸; \end{cases}$$

$$۱۰)\quad \begin{cases} xy=۶، \\ x^{۴}+y^{۴}=۸۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} xy=۶، \\ ((x+y)^{۲}-۱۲)^{۲}-۷۲=۸۲. \end{cases}$$

تکلیف ۴.

آیا این دستگاه‌ها هم‌ارزند؟

$$۱)\quad \begin{cases} ۳x+۴y=۲۰، \\ ۳x-۴y=۴ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۶x=۲۴، \\ ۸y=۱۶; \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} ۵x+۱۴y=۱۹، \\ ۷x+۱۰y=۱۷ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} -۳۵x-۹۸y=-۱۳۳، \\ ۳۵x+۵۰y=۸۵; \end{cases}$$

$$۳)\quad \begin{cases} ۳x+y=۷، \\ x+y+xy=-۷ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y=۷-۳x، \\ x+(۱+x)(۷-۳x)=-۷; \end{cases}$$

$$۴)\quad \begin{cases} \dfrac{۱}{x}-\dfrac{۱}{y}=۲، \\ \dfrac{۱}{x^{۲}}-\dfrac{۱}{y^{۲}}=۱۶ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \dfrac{۱}{x}-\dfrac{۱}{y}=۲، \\ ۲\left(\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y}\right)=۱۶; \end{cases}$$

$$۵)\quad \begin{cases} x-۲y=۲، \\ xy=۱۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=۲+۲y، \\ y^{۲}+y-۶=۰; \end{cases}$$

$$۶)\quad \begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=۵، \\ xy=۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} (x+y)^{۲}=۹، \\ xy=۲; \end{cases}$$

$$۷)\quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{۵}{۲}, \\ x^{۲}+y^{۲}=۲۰ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \dfrac{۴۰}{x^{۲}-y^{۲}}=\dfrac{۵}{۲}, \\ x^{۲}+y^{۲}=۲۰; \end{cases}$$

$$۸)\quad \begin{cases} x+xy+y=۱۱، \\ x-xy+y=۱ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} ۲(x+y)=۲۲، \\ ۲xy=۱۰; \end{cases}$$

$$۹)\quad \begin{cases} x+y=۵، \\ x^۲-xy+y^۲=۷ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x+y=۵، \\ ۲۵-۳xy=۷; \end{cases}$$

$$۱۰)\quad \begin{cases} x^۲+۳xy=۵۴، \\ xy+۴y^۲=۱۱۵ \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} (x+۲y)^۲=۱۶۹، \\ xy+۴y^۲=۱۱۵. \end{cases}$$

تمرین‌ها

روشن کنید که زنجیرهٔ تبدیل‌ها، تبدیل‌های هم‌ارزی است و، سپس دستگاه را حل کنید:

$$۱)\quad \begin{cases} xy=۱۲، \\ x-۲y-۲=۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=۲y+۲، \\ y(۲y+۲)=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=۲y+۲، \\ ۲y^۲+۲y-۱۲=۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=۲y+۲، \\ y^۲+y-۶=۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=۲y+۲، \\ \left[\begin{array}{l} y=۲ \\ y=-۳; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} x^۲+۴y^۲-۳x-۲=۰، \\ ۲x+۳y=۵ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۲x=۵-۳y، \\ (۲x)^۲+۱۶y^۲-۶(۲x)-۸=۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۲x=۵-۳y، \\ (۵-۳y)^۲+۱۶y^۲-۶(۵-۳y)-۸=۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۲۵y^۲-۱۲y-۱۳=۰، \\ ۲x=۵-۳y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=۱، \\ y=-\frac{۱۳}{۲۵}, \end{array}\right. \\ ۲x=۵-۳y; \end{cases}$$

$$۳)\quad \begin{cases} xy+x-y=۳، \\ x^۲y-xy^۲=۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=۳-xy، \\ xy(x-y)=۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=۳-xy، \\ (xy)^۲-۳(xy)+۲=۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=۳-xy، \\ \left[\begin{array}{l} xy=۲، \\ xy=۱ \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=۲، \\ x-y=۱، \end{cases} \\ \\ \begin{cases} xy=۱، \\ x-y=۲ \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=۱+y، \\ y^۲+y-۲=۰، \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x=۲+y، \\ y^۲+۲y-۱=۰; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$۴)\quad \begin{cases} \dfrac{x^۲}{y}+\dfrac{y^۲}{x}=۳، \\ x+y=۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^۳+y^۳}{xy}=۳، \\ x+y=۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+y)(x^۲-xy+y^۲)}{xy}=۳، \\ x+y=۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{۲((x+y)^۲-۳xy)}{xy}=۳، \\ x+y=۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{۸-۶xy}{xy}=۳، \\ x+y=۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy\neq ۰، \\ ۹xy=۸، \\ x+y=۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\dfrac{۸}{۹}، \\ x+y=۲ \end{cases}$$

$$۵)\quad \begin{cases} x^۳-y^۳=۲۶، \\ x^۴-y^۴=۲۰(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=۲۶،\\(x+y)((x-y)(x^۲+y^۲)-۲۰)=۰\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)((x+y)^۲-xy)=۲۶،\\\left[\begin{array}{l}x+y=۰،\\(x-y)(x^۲+y^۲)-۲۰=۰\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=۰،\\(x-y)(-xy)=۲۶،\end{cases}\\\\\begin{cases}(x-y)(x^۲+xy+y^۲)=۲۶،\\(x-y)(x^۲+y^۲)=۲۰\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y،\\-۲y^۳=۲۶،\end{cases}\\\\\begin{cases}(x-y)(x^۲+y^۲)=۲۰،\\۱۰x^۲+۱۰xy+۱۰y^۲=۱۳x^۲+۱۳y^۲\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-y،\\y^۳=-۱۳،\end{cases}\\\begin{cases}(x-y)(x^۲+y^۲)=۲۰،\\\left[\begin{array}{l}x=۳y،\\y=۳x;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

۶) $$\begin{cases}(x-y)^۲-(x-y)=۶،\\۲(x^۲+y^۲)=۵xy\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^۲-(x-y)-۶=۰،\\۲((x-y)^۲+۲xy)=۵xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-y=۳،\\x-y=-۲،\end{array}\right.\\۲(x-y)^۲=xy\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=۳،\\xy=۱۸،\end{cases}\\[2ex]\begin{cases}x-y=-۲،\\xy=۸\end{cases}\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=۳+y،\\y^{۲}+۳y-۱۸=۰،\end{cases}\\[2ex]\begin{cases}x=y-۲،\\y^{۲}-۲y-۸=۰;\end{cases}\end{array}\right.$$

۷) $$\begin{cases}x^{۴}+x^{۲}y^{۲}+y^{۴}=۹۳۱،\\x^{۲}-xy+y^{۲}=۱۹\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-(xy)^{۲}=۹۳۱،\\x^{۲}-xy+y^{۲}=۱۹\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x^{۲}+y^{۲}+xy)(x^{۲}+y^{۲}-xy)=۹۳۱،\\x^{۲}-xy+y^{۲}=۱۹\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x^{۲}+xy+y^{۲}=۴۹،\\x^{۲}-xy+y^{۲}=۱۹\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x^{۲}+y^{۲}=۳۴،\\xy=۱۵\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x+y)^{۲}=۶۴،\\xy=۱۵\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=۸،\\x+y=-۸،\end{array}\right.\\xy=۱۵;\end{cases}$$

۸) $$\begin{cases}x(x+۱)(۳x+۵y)=۱۴۴،\\x^{۲}+۴x+۵y=۲۴\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}۳x+۵y=۲۴-(x+x^{۲})،\\(x^{۲}+x)(۲۴-(x+x^{۲}))=۱۴۴\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}(x^{۲}+x)^{۲}-۲۴(x^{۲}+x)+۱۴۴=۰،\\۳x+۵y=۲۴-(x+x^{۲})\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{۲}+x=۱۲, \\ ۳x+۵y=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-۴, \\ x=۳, \end{array}\right. \\ ۳x+۵y=۱۲; \end{cases}$$

۹) $$\begin{cases} \frac{۷}{x-۷}-\frac{۴}{\sqrt{y+۶}}=\frac{۵}{۳}, \\ \frac{۵}{\sqrt{x-۷}}+\frac{۳}{\sqrt{y+۶}}=۲\frac{۱}{۶} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{۲۱}{\sqrt{x-۷}}-\frac{۱۲}{\sqrt{y+۶}}=۵, \\ \frac{۲۰}{\sqrt{x-۷}}+\frac{۱۲}{\sqrt{y+۶}}=\frac{۲۶}{۳} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{۴۱}{\sqrt{x-۷}}=\frac{۴۱}{۳}; \\ \frac{۵}{\sqrt{x-۷}}+\frac{۳}{\sqrt{y+۶}}=\frac{۱۳}{۶} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-۷}=۳, \\ \frac{۳}{\sqrt{y+۶}}=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-۷}=۳, \\ \sqrt{y+۶}=۶; \end{cases}$$

۱۰) $$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{۵x}}+\sqrt{\frac{۵x}{x+y}}=\frac{۳۴}{۱۵}, \\ x+y=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{۱۲}{۵x}}+\sqrt{\frac{۵x}{۱۲}}=\frac{۳۴}{۱۵}, \\ x+y=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{۶}{\sqrt{۱۵x}}+\frac{\sqrt{۱۵x}}{۶}=\frac{۳۴}{۱۵}, \\ x+y=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۵(\sqrt{۱۵x})^{۲}-۶۸(\sqrt{۱۵x})+۱۸۰=۰, \\ x+y=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{۱۵x}=۱۰, \\ \sqrt{۱۵x}=\frac{۱۸}{۵}, \end{array}\right. \\ x+y=۱۲; \end{cases}$$

۱۱) $$\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=۱۴, \\ x^{۲}+y^{۲}+xy=۸۴ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=۱۴, \\ (x+y)^{۲}-xy=۸۴ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=۱۴، \\ (x+y-\sqrt{xy})(x+y+\sqrt{xy})=۸۴ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=۱۴، \\ x+y-\sqrt{xy}=۶ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ۲(x+y)=۲۰، \\ ۲\sqrt{xy}=۸ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=۱۰، \\ xy=۱۶; \end{cases}$$

۱۲) $$\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=۳۴۱، \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=۳۳۰ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x})^{۳}+(\sqrt{y})^{۳}=۳۴۱، \\ \sqrt{x}\sqrt{y}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=۳۳۰ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^{۳}-۳\sqrt{x}\sqrt{y}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=۳۴۱، \\ ۳\sqrt{x}\sqrt{y}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=۹۹۰ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^{۳}=۱۳۳۱، \\ \sqrt{x}\sqrt{y}\,(\sqrt{x}+\sqrt{y})=۳۳۰ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱۱، \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=۳۰; \end{cases}$$

۱۳) $$\begin{cases} ۶۴^{۲x}+۶۴^{۲y}=۱۲، \\ ۶۴^{x+y}=۴\sqrt{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (۶۴^{x})^{۲}+(۶۴^{y})^{۲}=۱۲، \\ ۲\cdot ۶۴^{x}۶۴^{y}=۸\sqrt{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (۶۴^{x}+۶۴^{y})^{۲}-۸\sqrt{۲}=۱۲، \\ ۶۴^{x}\cdot ۶۴^{y}=۴\sqrt{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} ۶۴^{x}+۶۴^{y}=\sqrt{۱۲+۸\sqrt{۲}}، \\ ۶۴^{x}+۶۴^{y}=-\sqrt{۱۲+۸\sqrt{۲}}، \end{array}\right. \\ ۶۴^{x}۶۴^{y}=۴\sqrt{۲} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۶۴^x + ۶۴^y = ۲\sqrt{۲} + ۲, \\ ۶۴^x ۶۴^y = ۴\sqrt{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ۶۴^x = ۲\sqrt{۲}, \\ ۶۴^y = ۲, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} ۶۴^x = ۲, \\ ۶۴^y = ۲\sqrt{۲}; \end{cases} \end{array} \right.$$

۱۴) $$\begin{cases} ۹\cdot ۵^x + ۷\cdot ۲^{x+y} = ۴۵۷, \\ ۶\cdot ۵^x - ۱۴\cdot ۲^{x+y} = -۸۹۰ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۱۸\cdot ۵^x + ۱۴\cdot ۲^{x+y} = ۹۱۴, \\ ۶\cdot ۵^x - ۱۵\cdot ۲^{x+y} = -۸۹۰ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۲۴\cdot ۵^x = ۲۴, \\ ۶\cdot ۵^x - ۱۴\cdot ۲^{x+y} = -۸۹۰ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۵^x = ۱, \\ ۶ - ۱۴\cdot ۲^x ۲^y = -۸۹۰ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = ۰, \\ ۲y = ۶۴; \end{cases}$$

۱۵) $$\begin{cases} ۸^{۲x+۱} = ۳۲\cdot ۲^{۴y}\cdot ۲^{-۱} \\ ۵\cdot ۵^{x-y} = \sqrt{۲۵^{۲y+۱}} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ۲^{۶x+۳} = ۲^{۴y+۴}, \\ ۵^{x-y+۱} = ۵^{۲y+۱} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۶x + ۳ = ۴y + ۴, \\ x - y + ۱ = ۲y + ۱ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ۶x - ۴y = ۱, \\ x = ۳y \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۱۸y - ۴y = ۱, \\ x = ۳y; \end{cases}$$

۱۶) $$\begin{cases} \lg^۲ x + \lg^۲ y = ۷, \\ \lg x - \lg y = ۲ \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (\lg x - \lg y)^۲ + ۲\lg x \lg y = ۷, \\ \lg x - \lg y = ۲ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ۲\lg x \lg y = ۳, \\ \lg x = ۲ + \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases}۲\lg^۲ y+۴\lg y-۳=۰، \\ \lg x=۲+\lg y\end{cases} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\lg y=\dfrac{-۲+\sqrt{۱۰}}{۲}, \\ \lg y=\dfrac{-۲-\sqrt{۱۰}}{۲},\end{array}\right. \\ \lg x=۲+\lg y;\end{array}\right.$$

۱۷) $$\begin{cases}۳^{\log_۳ x}-۲^{\log_۴ y}=۷۷، \\ ۳^{\log_۳ \sqrt{x}}-۲^{\log_{۱۶} y}=۷\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}۳^{\log_۳ x}-(۲^{\log_۲ y})^{\frac{۱}{۲}}=۷۷؛ \\ (۳^{\log_۳ x})^{\frac{۱}{۲}}-(۲^{\log_۲ y})^{\frac{۱}{۴}}=۷\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x>۰، \\ y>۰، \\ x-\sqrt{y}=۷۷ \\ \sqrt{x}-\sqrt[۴]{y}=۷\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}x>۰، \\ y>۰، \\ (\sqrt{x}-\sqrt[۴]{y})(\sqrt{x}+\sqrt[۴]{y})=۷۷، \\ \sqrt{x}-\sqrt[۴]{y}=۷\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x>۰، \\ y>۰، \\ \sqrt{x}+\sqrt[۴]{y}=۱۱، \\ \sqrt{x}-\sqrt[۴]{y}=۷;\end{cases}$$

۱۸) $$\begin{cases}\lg(۱-x)+\lg(۱-y)=\lg ۶، \\ xy=۲\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}۱-x>۰، \\ ۱-y>۰، \\ (۱-x)(۱-y)=۶، \\ xy=۲\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x<۱، \\ y<۱، \\ ۱-(x+y)+xy=۶، \\ xy=۲\end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<۱، \\ y<۱، \\ x+y=-۳، \\ xy=۲؛ \end{cases}$$

۱۹) $$\begin{cases} x-|y+۱|=۱، \\ x^۲-y=۱۰ \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+۱\geqslant ۰، \\ x-y-۱=۱، \\ x^۲-y=۱۰، \end{cases} \\ \begin{cases} y+۱\leqslant ۰، \\ x+y+۱=۱، \\ x^۲-y=۱۰، \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geqslant -۱، \\ y=x-۲، \\ x^۲-x-۸=۰، \end{cases} \\ \begin{cases} y\leqslant -۱، \\ y=-x، \\ x^۲+x-۱۰=۰ \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x-۲، \\ x\geqslant ۱، \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۲}, \\ x=\frac{۱-\sqrt{۳۳}}{۲}, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y=-x، \\ x\geqslant ۱، \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{-۱-\sqrt{۴۱}}{۲}, \\ x=\frac{-۱+\sqrt{۴۱}}{۲} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۲}, \\ y=x-۲، \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{\sqrt{۴۱}-۱}{۲}، \\ y=-x؛ \end{cases} \end{array}\right.$$

۲۰)
$$\begin{cases} \cos x+\cos y=\frac{۳}{۲}، \\ x+y=\frac{\pi}{۳} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ۲\cos\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲}=\frac{۳}{۲}، \\ \frac{x+y}{۲}=\frac{\pi}{۶} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{x-y}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}، \\ x+y=\frac{\pi}{۳} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} \frac{x-y}{۲}=\frac{\pi}{۶}+۲\pi m، & m\in\mathbf{Z}، \\ \frac{x-y}{۲}=\frac{-\pi}{۶}+۲\pi n، & n\in\mathbf{Z}، \end{array}\right. \\ x+y=\frac{\pi}{۳} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{۳}+۴\pi m، & m\in\mathbf{Z}، \\ x+y=\frac{\pi}{۳}، \end{cases} \\ \\ \begin{cases} x-y=-\frac{\pi}{۳}+۴\pi n، & n\in\mathbf{Z}، \\ x+y=\frac{\pi}{۳}; \end{cases} \end{array}\right.$$

۲۱)
$$\begin{cases} \sin ۲x+\sin ۲y=\frac{۱}{۲}، \\ \sin(x+y)=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ۲\sin(x+y)\cos(x-y)=\frac{۱}{۲}، \\ \sin(x+y)=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=\frac{۱}{۲}، \\ \sin(x+y)=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{۳}+۲\pi l، \quad l\in\mathbf{Z}، \\ x-y=-\frac{\pi}{۳}+۲\pi m، \quad m\in\mathbf{Z}، \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+y=\frac{\pi}{۶}+۲\pi p، \quad p\in\mathbf{Z}، \\ x+y=\frac{۵\pi}{۶}+۲\pi n، \quad n\in\mathbf{Z}، \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{۳}+۲\pi l، \\ x+y=\frac{\pi}{۶}+۲\pi p، \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-y=\frac{\pi}{۳}+۲\pi l، \\ x+y=\frac{۵\pi}{۶}+۲\pi n، \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-y=-\frac{\pi}{۳}+۲\pi m، \\ x+y=\frac{\pi}{۶}+۲\pi p، \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-y=-\frac{\pi}{۳}+۲\pi m، \\ x+y=\frac{۵\pi}{۶}+۲\pi n \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} ۲x=۲\pi(l+p)، \\ ۲y=-\frac{\pi}{۶}+۲\pi(p-l)، \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} ۲x=\frac{۷\pi}{۶}+۲\pi(l+n)، \\ ۲y=\frac{\pi}{۲}+۲\pi(n-l)، \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} ۲x=-\frac{\pi}{۶}+۲\pi(m+p)، \\ ۲y=\frac{\pi}{۲}+۲\pi(p-m)، \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} ۲x=\frac{\pi}{۲}+۲\pi(m+n)، \\ ۲y=\frac{۷\pi}{۶}+۲\pi(n-m); \end{array}\right. \end{array}\right.$$

۲۲) $$\left\{\begin{array}{l} x+۲y+۵z=-۹، \\ x-y+۳z=۲، \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱۴ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ۳x+۱۱z=-۵، \\ ۳y+۲z=-۱۱، \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱۴ \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ۳x=-۱۱z-۵، \\ ۳y=-۲z-۱۱، \\ (۳x)^{۲}+(۳y)^{۲}+۹z^{۲}=۱۴\cdot۹ \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۳x=-۱۱z-۵، \\ ۳y=-۲z-۱۱، \\ (-۱۱z-۵)^{۲}+(-۲z-۱۱)^{۲}+۹z^{۲}=۱۲۶ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۳x=-۱۱z-۵، \\ ۳y=-۲z-۱۱، \\ ۶۷z^{۲}+۷۷z+۱۰=۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ۳x=-۱۱z-۵، \\ ۳y=-۲z-۱۱، \\ \left[\begin{array}{l} z=-۱، \\ z=-\dfrac{۱۰}{۶۷}; \end{array}\right. \end{cases}$$

۲۳) $$\begin{cases} x+y=۵z، \\ x^{۲}+y^{۲}=۱۳z، \\ x^{۳}+y^{۳}=۳۵z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=۵z \\ ۲۵z^{۲}-۲xy=۱۳z، \\ ۵z(۲۵z^{۲}-۳xy)=۳۵z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=۵z، \\ ۶xy=۷۵z^{۲}-۳۹z، \\ z(۵۰z^{۲}-۶xy)=۱۴z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=۵z، \\ ۲xy=۲۵z^{۲}-۱۳z، \\ z(-۲۵z^{۲}+۳۹z-۱۴)=۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=۵z، \\ ۲xy=۲۵z^{۲}-۱۳z، \\ \left[\begin{array}{l} z=۰، \\ z=۱، \\ z=\dfrac{۱۴}{۲۵}; \end{array}\right. \end{cases}$$

۲۴) $$\begin{cases} xy+yz+zx=۱۱، \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱۴، \\ xyz=۶ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+xz+yz=۱۱، \\ (x+y+z)^{۲}=۱۴+۲\cdot۱۱، \\ xyz=۶ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy+xz+yz=۱۱، \\ \left[\begin{array}{l} x+y+z=۶، \\ x+y+z=-۶، \end{array}\right. \\ xyz=۶ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=۶، \\ xy+xz+yz=۱۱، \\ xyz=۶; \end{cases}$$

۲۵) $$\begin{cases} ۲(x+y)=xy، \\ xy+yz+xz=۱۰۸، \\ xyz=۱۸۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۲(x+y)=xy، \\ ۲xy+۲(x+y)z=۲۱۶، \\ xyz=۱۸۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ۲(x+y)=xy \\ ۲xy+xyz=۲۱۶، \\ xyz=۱۸۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ۲(x+y)=xy، \\ ۲xy=۳۶، \\ xyz=۱۸۰ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=۹، \\ xy=۱۸، \\ z=۱۰; \end{cases}$$

۲۶) $$\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=۷۲، \\ (x+z)(x+y+z)=۹۶، \\ (y+z)(x+y+z)=۱۲۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+y+z)=۷۲، \\ (x+z)(x+y+z)=۹۶، \\ ۲(x+y+z)^{۲}=۷۲+۹۶+۱۲۰ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x+y+z)=۷۲، \\ (x+z)(x+y+z)=۹۶، \\ \left[\begin{array}{l} x+y+z=۱۲، \\ x+y+z=-۱۲; \end{array}\right. \end{cases}$$

۲۷) $$\begin{cases} x+y+z=۱۳، \\ x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۹۱، \\ y^{۲}=xz \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x+z=۱۳-y،\\(x+z)^{۲}-۲xz+y^{۲}=۹۱،\\۲y^{۲}=۲xz\end{cases}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}x+z=۱۳-y،\\(۱۳-y)^{۲}-۲y^{۲}+y^{۲}=۹۱،\\y^{۲}=xz\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x+z=۱۰،\\y=۳،\\xz=۹.\end{cases}$$

پاسخ‌ها وراهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. (۲، ۳). ۲. نه.

تکلیف ۲.

۱. نه. ۳. بله. ۵. ۱) بله؛ ۲) نه.

تکلیف ۳.

دستگاه‌های هریك ازتمرین‌های ۱) تا ۱۰) هم‌ارزند.

تکلیف ۴.

دستگاه‌های هریك ازتمرین‌های ۱) تا ۱۰) هم‌ارزند.

تمرین‌ها

$$۱)\ (۶،۲)،(-۴،-۳);\quad ۲)\ (۱،۱)،\left(\frac{۸۲}{۲۵}،-\frac{۱۳}{۲۵}\right);$$

$$۳)\ (۲،۱)،(-۱،-۲)،(۱+\sqrt{۲}،\sqrt{۲}-۱)،(۱-\sqrt{۲}،-۱-$$

$$-\sqrt{۲});\quad ۴)\ \left(\frac{۲}{۳}،\frac{۴}{۳}\right)،\left(\frac{۴}{۳}،\frac{۲}{۳}\right);\quad ۵)\ -(\sqrt[۳]{۱۳}،-\sqrt[۳]{۱۳})،(۳،۱)،$$

$$(-۱،-۳);\qquad ۶)\ (۶،۳)،(-۳،-۶)،(۲،۴)،(-۴،-۲);$$

$$۷)\ (۳،۵)،(۵،۳)،(-۳،-۵)،(-۵،-۳);\quad ۸)\ \left(-۴،\frac{۲۴}{۵}\right)،$$

$\left(۳، \frac{۳}{۵}\right)$;   ۹) $(۱۶، ۳۰)$; ۱۰) $\left(\frac{۲۰}{۳}، \frac{۱۶}{۳}\right)، \left(\frac{۱۰۸}{۱۲۵}، ۱۱\frac{۱۷}{۱۲۵}\right)$;

۱۱) $(۸، ۲)، (۲، ۸)$;   ۱۲) $(۲۵، ۳۶)، (۳۶، ۲۵)$;   ۱۳) $\left(\frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۶}\right)،$

$\left(\frac{۱}{۶}، \frac{۱}{۴}\right)$;   ۱۴) $(۰، ۶)$;   ۱۵) $\left(\frac{۳}{۱۴}، \frac{۱}{۱۴}\right)$;

۱۶) $\left(۱۰^{\frac{۲+\sqrt{۱۰}}{۲}}، ۱۰^{\frac{\sqrt{۱۰}-۲}{۲}}\right)، \left(۱۰^{\frac{۲-\sqrt{۱۰}}{۲}}، ۱۰^{\frac{-۲-\sqrt{۱۰}}{۲}}\right)$;

۱۷) $(۸۱، ۱۶)$;   ۱۸) $(-۱، -۲)، (-۲، -۱)$;

۱۹) $(۰/۵(۱+\sqrt{۳۳}))، (۰/۵(\sqrt{۳۳}-۳))، (۰/۵(\sqrt{۴۱}-۱))،$

$(۰/۵(۱-\sqrt{۴۱}))$;

۲۰) $\left(\frac{\pi}{۳}+۲\pi m، -۲\pi m\right)$ و $\left(۲\pi m، \frac{\pi}{۳}-۲\pi m\right)، (m\in\mathbf{Z})$;

۱) $(\pi(l+p)، -\frac{\pi}{۱۲}+\pi(p-l))، \left(\frac{۷\pi}{۱۲}+\pi(l+n)، \frac{\pi}{۴}+\pi(n-l)\right)،$

$\left(-\frac{\pi}{۶}+\pi(m+p)، \frac{\pi}{۴}+\pi(p-m)\right)، \left(\frac{\pi}{۴}+\pi(m+n)، \frac{۷\pi}{۱۲}+\pi(n-\right.$

$\left.-m)\right)، (p، l، m، n\in\mathbf{Z})$;   ۲۲) $(۲، -۳، -۱)، \left(-\frac{۷۵}{۶۷}،\right.$

$\left.-\frac{۲۳۹}{۶۷}، -\frac{۱۰}{۶۷}\right)$; ۲۳) $(۰، ۰، ۰)، (۲، ۳، ۱)، (۳، ۲، ۱)، (۰/۲(۷\pm$

$\pm\sqrt{۴۲})، ۰/۲(۷-\sqrt{۴۲})۰/۵۶)، (۰/۲(۷-\sqrt{۴۲})، ۰/۲(۷+\sqrt{۴۲})،$

$۰/۵۶)$; ۲۴) $(۱، ۲، ۳)، (۱، ۳، ۲)، (۲، ۱، ۳)، (۲، ۳، ۱)، (۳، ۱، ۲)،$

$(۳، ۲، ۱)$; ۲۵) $(۶، ۳، ۱۰)، (۳، ۶، ۱۰)$; ۲۶) $(۲، ۴، ۶)، (-۲،$

$-۴، -۶)$; ۲۷) $(۹، ۳، ۱)، (۱، ۳، ۹)$.

§۳. دستگاه معادله‌های جبری

دراین بند، دستگاهایی را مورد مطالعه قرارمی‌دهیم که به‌این صورت باشند:

$$\begin{cases} p_۱(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = ۰ \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ p_m(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = ۰ \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن $p_۱$، $p_۲$، ...، p_n چندجمله‌ای‌هایی نسبت به متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n اند.

یکی از اساسی‌ترین روش‌های حل دستگاه‌های جبری، روش تبدیل است.

مثال ۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲x^۲ - xy + ۳y^۲ - ۷x - ۱۲y + ۱ = ۰ \\ x - y = -۱ \end{cases}$$

حل. از معادلهٔ دوم داریم: $x = y - ۱$. این مقدار را در معادلهٔ اول می‌گذاریم؛ به دستگاه زیر که هم‌ارز با دستگاه مفروض است، می‌رسیم:

$$\begin{cases} x = y - ۱ \\ ۲(y-۱)^۲ - y(y-۱) + ۳y^۲ - ۷(y-۱) - ۱۲y + ۱ = ۰ \end{cases}$$

یعنی

$$\begin{cases} x = y - ۱ \\ ۲y^۲ - ۱۱y + ۵ = ۰ \end{cases}$$

با حل معادلهٔ دوم دستگاه اخیر به‌دست می‌آید: $y_۱ = ۵$ و $y_۲ = \frac{۱}{۲}$؛

در نتیجه به‌یاری معادلهٔ اول، مقدار x هم پیدا می‌شود: $x_۱ = ۴$ و $x_۲ = -\frac{۱}{۲}$.

بنابراین، دستگاه مفروض، دو جواب دارد: $(۴, ۵)$ و $\left(-\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$.

مثال ۲. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} xy - x + y = ۷ \\ xy + x - y = ۱۳ \end{cases}$$

حل. معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} xy - x + y = ۷ \\ x - y = ۳ \end{cases}$$

که بـا دستگاه مفروض هم‌ارز است. اگـر این دستگاه را بـا روش تبدیل (شبیه‌مثال ۱) حل کنیم، دوجواب به‌دست می‌آید: (۲ ،۵) و (۵ — ،۲ —).

دستگاه معادله‌های به‌صورت

$$\begin{cases} a_۱x^۲+b_۱xy+c_۱y^۲+d_۱x+e_۱y+f_۱=۰ \\ a_۲x^۲+b_۲xy+c_۲y^۲+d_۲x+e_۲y+f_۲=۰ \end{cases}$$

را دستگاه معادله‌های جبری درجه دوم از دومتغیر x و y گویند.

برای حل این دستگاه، باید آن را به‌دستگاه‌دیگری تبدیل کرد که هم‌ارز آن باشد و، درضمن، یکی ازمعادله‌هـای دستگاه جدید، نسبت به x یا y از درجهٔ اول باشد؛ سپس، دستگاه جدید را به‌کمك روش تبدیل حل کرد.

مثال ۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲-۴y^۲-xy+۵y=۱ \\ x^۲+۳y^۲-xy-۴y=-۱ \end{cases}$$

حل. معادلهٔ اول دستگاه را در ۱ — ضرب و، سپس، معادلهٔ حاصل را با معادلهٔ دوم جمع می‌کنیم، به‌دستگاه زیر، هم‌ارز بادستگاه اصلی، می‌رسیم:

$$\begin{cases} x^۲-۴y^۲-xy+۵y=۱ \\ ۷y^۲-۹y=-۲ \end{cases}$$

ازمعادلهٔ دوم این دستگاه به‌دست می‌آید. $y_۱=\frac{۲}{۷}$ ، $y_۲=۱$. اگر این‌مقدارها را به‌جای‌مجهول y درمعادلهٔ‌اول‌قراردهیم، به‌معادلهٔ $۴۹x^۲-۱۴x+۵=۰$ (که جواب ندارد) ومعادلهٔ $x^۲-x=۰$ (با ریشه‌های ۰ و ۱) می‌رسیم.

به‌این ترتیب، دستگاه دوجواب دارد: (۱ ،۰) و (۱ ،۱).

مثال ۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲+۲xy-۸y^۲-۶x+۱۸y-۷=۰ \\ ۲x^۲-۵xy-۱۰y^۲-۳x+۹y+۷=۰ \end{cases} \qquad (۲)$$

حل. معادلهٔ اول را در ۲ ضرب و، سپس، معادلـهٔ دوم را از آن کم

می‌کنیم، به‌دستگاهی هم‌ارز دستگاه اصلی می‌رسیم:

$$\left\{\begin{aligned} ۳xy-۲y^۲-۳x+۹y-۷&=۰\\ x^۲+۲xy-۸y^۲-۶x+۱۸y-۷&=۰\end{aligned}\right. \qquad (۳)$$

معادلهٔ اول دستگاه (۳)، نسبت به x، خطی‌است؛ ازآن با فرض $y\neq ۱$ x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$x=\frac{۲y^۲-۹y+۷}{۳(y-۱)}$$

این مقدار x را در معادلهٔ دوم دستگاه (۳) قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$\frac{y^۴-۳y^۳+y^۲+۳y-۲}{y-۱}=۰$$

که جواب‌های آن، چنین‌اند: $y_۱=-۱$، $y_۲=۲$.

به‌ازای این مقدارهای y، به‌سادگی مقدارهای متناظر x پیدا می‌شود. دستگاه، به‌ازای $y\neq ۱$، دو جواب دارد: $(-۳, -۱)$ و $(-۱, ۲)$.

به‌ازای $y=۱$، هردومعادلهٔ‌دستگاه (۲) به‌صورت $x^۲-۴x+۳=۰$ درمی‌آیند و، بنابراین، دستگاه دو جواب دیگرهم دارد: $(۳, ۱)$، $(۱, ۱)$.

مثال ۵. دستگاه را حل کنید:

$$\left\{\begin{aligned} x^۳+۴y&=y^۳+۱۶x\\ ۱+y^۲&=۵(۱+x^۲)\end{aligned}\right. \qquad (۴)$$

حل. این‌دستگاه را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\left\{\begin{aligned} x^۳-۱۶x&=y^۳-۴y\\ ۵x^۲&=y^۲-۴\end{aligned}\right.$$

$x\neq ۰$ می‌گیریم و معادلهٔ اول دستگاه را بر معادلهٔ دوم تقسیم می‌کنیم، به‌معادلهٔ

$$\frac{x^۳-۱۶x}{۵x^۲}=\frac{y^۳-۴y}{y^۲-۴}$$

می‌رسیم که نتیجهٔ دستگاه (۴) است. از این معادله به‌دست می‌آید

$y=\frac{x^۲-۱۶}{۵x}$. این مقدار y را در معادلهٔ دوم دستگاه (۴) قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$۵x^۲=\frac{(x^۲-۱۶)^۲}{۲۵x^۲}-۴$$

یعنی $۱۲۴x^۴+۱۳۲x^۲-۲۵۶=۰$، از آن‌جا $x_۲=۱$ و $x_۱=۱$، $x_۲=-۱$. دستگاه به‌ازای $x\neq ۰$ دوجواب دارد: $(۱، -۳)$ و $(-۱، ۳)$.

در حالت $x=۰$، معادلهٔ دوم دستگاه به‌صورت $y^۲=۴$ درمی‌آید، یعنی $y_۱=۲$، $y_۲=-۲$. چون در جریان حل، از نتیجهٔ دستگاه استفاده کرده‌ایم، باید جواب‌ها را مورد تحقیق قرار دهیم. تحقیق نشان می‌دهد که، هرچهار جواب در دستگاه صدق می‌کنند:

$$(۱، -۳)، (-۱، ۳)، (۰، ۲)، (۰، -۲)$$

مثال ۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y^۳+z^۳=۷x^۳ \\ y-z=۳x \\ z-x=y-۲ \end{cases}$$

حل. از مجموع دومعادلهٔ دوم و سوم دستگاه به‌دست‌می‌آید: $x=\frac{۱}{۲}$؛ آن‌را در معادلهٔ اول و معادلهٔ دوم دستگاه قرار می‌دهیم، به‌دستگاه زیر، هم‌ارز دستگاه مفروض می‌رسیم:

$$\begin{cases} y^۳+z^۳=\frac{۷}{۸} \\ y-z=\frac{۳}{۲} \\ x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه اخیر داریم: $z=y-\frac{۳}{۲}$، که اگر آن‌را در

معادلهٔ اول قراردهیم، به‌دست‌می‌آید: $(y-۱)(۸y^۲-۱۰y+۱۷)=۰$ که تنها یک‌جواب‌دارد: $y=۱$. از این‌جا $z=-\frac{۱}{۲}$. دستگاه جوابی‌منحصر دارد: $\left(\frac{۱}{۲}، ۱، -\frac{۱}{۲}\right)$.

برای حل دستگاه‌های دو مجهولی، گاهی می‌توان از تغییر متغیر

$$x=r\cos\varphi،\quad y=r\sin\varphi$$

استفاده کرد که در آن‌ها $۰\leqslant r<+\infty$ و $۰\leqslant\varphi<۲\pi$.

این تغییر متغیر، مفهومی هندسی دارد: اگر x و y مختصات نقطه‌ای از صفحه در دستگاه مختصات دکارتی باشد، آن‌وقت r و φ مختصات قطبی همان نقطه است.

مثال ۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}x^۳+xy^۲=۴۰y\\ y^۳+x^۲y=۱۰x\end{cases}\qquad(۵)$$

حل. $(۰، ۰)$ جوابی از دستگاه است، ولی $(y ،۰)$ به‌ازای $y\neq۰$ و $(۰ ،x)$ به‌ازای $x\neq۰$ جواب دستگاه نیستند.

$x\neq۰$ و $y\neq۰$ می‌گیریم. دراین‌صورت، دستگاه مفروض بادستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases}\dfrac{x^۳}{y}+xy=۴۰\\[2ex] \dfrac{y^۳}{x}+xy=۱۰\end{cases}\qquad(۶)$$

اکنون $x=r\cos\varphi$، $y=r\sin\varphi$ می‌گیریم. دستگاه (۶) چنین می‌شود:

$$\begin{cases}\dfrac{r^۳\cos^۳\varphi}{r\sin\varphi}+r^۲\sin\varphi\cos\varphi=۴۰\\[2ex] \dfrac{r^۳\sin^۳\varphi}{r\cos\varphi}+r^۲\sin\varphi\cos\varphi=۱۰\end{cases}$$

و بعد از تبدیل‌های لازم

$$\begin{cases} r^{۲} cotg\varphi = ۴۰ \\ r^{۲} tg\varphi = ۱۰ \end{cases} \qquad (۷)$$

چون $r \neq ۰$، $\varphi \neq ۰$ و $\varphi \neq \pi$، می‌توان معادلهٔ اول دستگاه اخیر را بر معادلهٔ دوم آن تقسیم کرد که به‌دست می‌آید $cotg^{۲}\varphi = ۴$ و $cotg\varphi = ۲$ یا $cotg\varphi = -۲$. مقدار دوم کتانژانت به‌درد نمی‌خورد، زیرا از (۷) روشن است که $r^{۲}$ و $cotg\varphi$ هم‌علامت‌اند و $r^{۲}$ نمی‌تواند منفی باشد. برای پیدا کردن x و y، به مقدارهای $sin\varphi$ و $cos\varphi$ نیاز داریم که با در دست داشتن $cotg\varphi$ به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} sin\varphi = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ cos\varphi = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} sin\varphi = -\frac{۱}{\sqrt{۵}} \\ cos\varphi = -\frac{۲}{\sqrt{۵}} \end{cases}$$

سپس، از معادلهٔ اول دستگاه (۷) به‌دست می‌آید: $r^{۲} = ۲۰$ و $r = ۲\sqrt{۵}$. به این ترتیب، مقدارهای x و y مشخص می‌شوند: $x_{۱} = ۴$، $y_{۱} = ۲$ و $x_{۲} = -۴$، $y_{۲} = -۲$. دستگاه سه جواب دارد: (۰، ۰)، (۴، ۲)، (-۴، -۲).

مثال ۸. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲} = (y-z)^{۲} + a \\ y^{۲} = (z-x)^{۲} + b \quad (abc \neq ۰) \\ z^{۲} = (x-y)^{۲} + c \end{cases}$$

حل. دستگاه را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-z) = a \\ (y-z+x)(y+z-x) = b \\ (z-x+y)(z+x-y) = c \end{cases}$$

با فرض $x+y-z=u$، $x-y+z=v$ و $-x+y+z=w$، به‌دستگاه

زیر برحسب u و v و w می‌رسیم:

$$uv=a،\ \ uw=b،\ \ vw=c$$

چون $abc\neq 0$، پس $uvw\neq 0$ و به‌دست می‌آید:

$$\left\{\begin{aligned}(uvw)^{2}&=abc\\ u&=\frac{uvw}{vw}\\ v&=\frac{uvw}{uw}\\ w&=\frac{uvw}{uv}\end{aligned}\right. \qquad (۸)$$

به‌این‌ترتیب، برای $abc>0$ به‌دست می‌آید:

$$u_{1}=\frac{\sqrt{abc}}{c},\ \ u_{2}=-\frac{\sqrt{abc}}{c};\quad v_{1}=\frac{\sqrt{abc}}{b},\ \ v_{2}=-\frac{\sqrt{abc}}{b};$$

$$w_{1}=\frac{\sqrt{abc}}{a},\ \ w_{2}=-\frac{\sqrt{abc}}{a}$$

و در حالت $abc<0$، دستگاه (۸) جواب ندارد.

اکنون اگر به‌مجهول‌های اصلی برگردیم، معلوم‌می‌شود که، جواب‌های دستگاه، به‌ازای هر مقدار a و b و c $(abc>0)$، چنین است:

$$\left(\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc}،\ \ \frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc}،\ \ \frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right);$$

$$\left(-\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc}،\ \ -\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc}،\ \ -\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right)$$

دستگاه معادله‌های (۱) را متقارن گویند، وقتی که، همهٔ چندجمله‌ای‌های $p_{1}(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n})$، ...، $p_{n}(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n})$، چندجمله‌ای‌هایی متقارن باشند، یعنی با تبدیل هر دو مجهول دلخواه آن به یکدیگر تغییر نکنند مثلاً چندجمله‌ای‌های

$$\sigma_{1}=x_{1}+x_{2}+x_{3}+\dots+x_{n},$$

$$\sigma_۲=x_۱x_۲+x_۱x_۳+\cdots+x_{n-۱}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_k=x_۱x_۲\cdots x_k+x_۲x_۳\cdots x_{k+۱}+\cdots+x_{n-k+۱}\cdots x_{n-۱}x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n=x_۱x_۲\cdots x_n$$

نسبت به n متغیر، متقارن‌اند و آن‌ها را چندجمله‌ای‌های متقارن اصلی گویند (σ_k، یعنی مجموع همهٔ حاصل‌ضرب‌های ممکن k به k از n متغیر: $۱\leqslant k\leqslant n$).

چندجمله‌ای‌های متقارن اصلی از دو متغیر x و y، عبارتند از $\sigma_۱=x+y$ و $\sigma_۲=xy$، و برای سه متغیر x و y و z عبارتند از

$$\sigma_۱=x+y+z,\quad \sigma_۲=xy+yz+zx,\quad \sigma_۳=xyz$$

برای حل دستگاه‌های متقارن، این قضیه مفید است:

هر چندجمله‌ای متقارن نسبت به متغیرهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n را می‌توان برحسب چندجمله‌ای‌های متقارن اصلی، یعنی $\sigma_۱$، $\sigma_۲$، ...، σ_n نوشت. مثلاً:

$$x^۲+y^۲=(x+y)^۲-۲xy,$$

$$x^۳+y^۳=(x+y)^۳-۳xy(x+y),$$

$$x^۲+y^۲+z^۲=(x+y+z)^۲-۲(xy+yz+zx)$$

برای حل دستگاه‌های متقارن، باید چندجمله‌ای‌های متقارن را برحسب چندجمله‌ای‌های متقارن اصلی نوشت.

مثال ۹. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases}x^۲+۳xy+y^۲=۶۱\\ xy=۱۲\end{cases}\qquad(۹)$$

حل. چندجمله‌ای‌های $x^۲+۳xy+y^۲$ و xy، نسبت به x و y متقارن‌اند. آن‌ها را برحسب $u=x+y$ و $v=xy$ می‌نویسیم:

$$x^۲+۳xy+y^۲=(x+y)^۲+xy=u^۲+v,\quad xy=v$$

در این‌صورت، دستگاه (۹) به این‌صورت درمی‌آید:

$$\begin{cases} u^۲+v=۶۱ \\ v=۱۲ \end{cases}$$

که هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} u^۲=۴۹ \\ v=۱۲ \end{cases}$$

و از آن‌جا: $u_۱=۷$، $v_۱=۱۲$؛ $u_۲=-۷$، $v_۲=۱۲$.

به‌این ترتیب، دستگاه (۹) هم‌ارز است با مجموعهٔ دو دستگاه

$$\begin{cases} x+y=۷ \\ xy=۱۲ \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=-۷ \\ xy=۱۲ \end{cases}$$

که با حل هریك از آن‌ها، چهارجواب برای دستگاه‌مفروض به‌دست‌می‌آید:

$$(۴, ۳), \ (۳, ۴), \ (-۴, -۳), \ (-۳, -۴)$$

مثال ۱۰. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۳+y^۳=۶ \\ xy=۲ \end{cases} \tag{۱۰}$$

حل. دستگاه (۱۰) هم‌ارز با دستگاه

$$\begin{cases} x^۳+y^۳=۶ \\ x^۳\cdot y^۳=۸ \end{cases}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x^۳=۲ \\ y^۳=۴ \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x^۳=۴ \\ y^۳=۲ \end{cases}$$

و دستگاه دو جواب دارد: $(\sqrt[۳]{۲}, \sqrt[۳]{۴})$ و $(\sqrt[۳]{۴}, \sqrt[۳]{۲})$.

مثال ۱۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۳+x^۳y^۳+y^۳=۱۷ \\ x+xy+y=۰ \end{cases} \tag{۱۱}$$

حل. دستگاه (۱۱) متقارن است. $u=x+y$ و $v=xy$ می‌گیریم.
در این‌صورت $(x+y)^۳-۲xy(x+y)=u^۳-۳uv$ و

$$\begin{cases}u^۳-۳uv+v^۳=۱۷\\ u+v=۰\end{cases}$$

که از حل آن به‌دست می‌آید:

$$u_۱=\sqrt{\frac{۱۷}{۳}},\ v_۱=-\sqrt{\frac{۱۷}{۳}};\quad u_۲=-\sqrt{\frac{۱۷}{۳}},\ v_۲=\sqrt{\frac{۱۷}{۳}}$$

بنابراین، دستگاه (۱۱)، هم‌ارز مجموعهٔ دو دستگاه زیر است:

$$\begin{cases}x+y=\sqrt{\frac{۱۷}{۳}}\\ xy=-\sqrt{\frac{۱۷}{۳}}\end{cases},\quad \begin{cases}x+y=-\sqrt{\frac{۱۷}{۳}}\\ xy=\sqrt{\frac{۱۷}{۳}}\end{cases}$$

دستگاه دوم این مجموعه، جواب ندارد. با حل دستگاه اول، این جواب‌ها، برای دستگاه مفروض به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{\sqrt{۵۱}-\sqrt{۱۲\sqrt{۵۱}+۵۱}}{۶},\ \frac{\sqrt{۵۱}-\sqrt{۱۲\sqrt{۵۱}+۵۱}}{۶}\right);$$

$$\left(\frac{\sqrt{۵۱}-\sqrt{۱۲\sqrt{۵۱}+۵۱}}{۶},\ \frac{\sqrt{۵۱}+\sqrt{۱۲\sqrt{۵۱}+۵۱}}{۶}\right)$$

گاهی، دستگاه مفروض متقارن نیست، ولی می‌توان آن‌را به‌دستگاهی متقارن تبدیل کرد. مثلاً دستگاه

$$\begin{cases}x^۳-y^۳=\frac{۷}{۸}\\ x-y=\frac{۳}{۲}\end{cases}$$

نسبت به x و y متقارن نیست، ولی نسبت به x و $-y$ متقارن است.

مثال ۱۲. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۳+y^۳+z^۳=a^۳ \\ x^۲+y^۲+z^۲=a^۲ \\ x+y+z=a \end{cases} \qquad (۱۲)$$

حل. دستگاه نسبت به x و y و z متقارن است، فرض می‌کنیم:

$$u=x+y+z، \quad v=xy+yz+zx، \quad w=xyz$$

و چون

$$(x+y+z)^۲-(x^۲+y^۲+z^۲)=۲(xy+yz+zx)،$$

$$(x+y+z)^۳-(x^۳+y^۳+z^۳)=$$
$$=۳(x+y+z)(xy+yz+zx)-۶xyz$$

بنابراین، برای پیدا کردن u و v و w داریم:

$$\begin{cases} u=a \\ u^۲-۲v=a^۲ \\ u^۳-۳uv+۶w=a^۳ \end{cases} \qquad (۱۳)$$

از معادله‌های اول و دوم این دستگاه به‌دست می‌آید: $u=a$، $v=۰$ و از معادلهٔ سوم دستگاه $w=۰$. بنابراین، دستگاه (۱۳) هم‌ارز با دستگاه

$$u=a \quad v=۰، \quad w=۰$$

و اگر به‌مجهول‌های x و y و z برگردیم، به‌این سه جواب می‌رسیم:

$$(۰، ۰، a)، \quad (۰، a، ۰)، \quad (a، ۰، ۰)$$

مثال ۱۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} xy+yz=۱۸ \\ xz+zy=۲۰ \\ yx+xz=۸ \end{cases} \qquad (۱۴)$$

حل. اگر سه معادلهٔ دستگاه (۱۴) را باهم جمع کنیم، به‌دست‌می‌آید:

$$xy+xz+yz=۲۳$$

و بنابراین، دستگاه (۱۴) هم‌ارز است با دستگاه

$$\begin{cases} xy+xz+yz=۲۳ \\ xy+yz=۱۸ \\ xz+zy=۲۰ \\ yx+xz=۸ \end{cases} \qquad (۱۵)$$

اگر هر یك از معادله‌هـای دوم، سوم و چهارم دستگاه (۱۵) را از معادلهٔ اول آن کم کنیم، به‌دستگاه زیر، هم‌ارز دستگاه (۱۵) می‌رسیم:

$$xy=۳،\ xz=۵،\ yz=۱۵$$

$$xy+yz=۱۸،\ xz+zy=۲۰،\ yx+xz=۸$$

که در آن، سه‌معادلهٔ آخر، نتیجه‌ای از دستگاه زیرند:

$$xy=۳،\ xz=۵،\ yz=۱۵ \qquad (۱۶)$$

به‌این ترتیب، دستگاه (۱۴) هم‌ارز است بـا دستگاه (۱۶) و، سپس، هم‌ارز با دستگاه

$$(xyz)^۲=۲۲۵،\ xy=۳،\ xz=۵،\ yz=۱۵ \qquad (۱۷)$$

در دستگاه (۱۷)، مقدارهای xy، xz و yz را از معادله‌های دوم تا چهارم، در معادلهٔ اول می‌گذاریم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$x^۲=۱،\ y^۲=۹،\ z^۲=۲۵،\ xz=۵،\ xy=۳،\ yz=۱۵$$

که با دستگاه اصلی هم‌ارز است. از دستگاه اخیر روشن است که x و y و z هم‌علامت‌اند. دو جواب بـرای دستگاه به دست می‌آیـد: (۱، ۳، ۵) و (−۱، −۳، −۵).

●

چندجمله‌ای $p(x، y، \dots، v)$ از درجهٔ n نسبت به‌متغیرهای x، y، ...، v را متجانس یـا همگن گویند، وقتی که برای هر عدد ثابت $\lambda\neq ۰$ و هـر انتخاب عددی $(x، y، \dots، v)$، این اتحاد برقرار باشد:

$$p(\lambda x، \lambda y، \dots، \lambda v)=\lambda^n p(x، y، \dots، v)$$

در این حالت، معادلهٔ $p(x، y، \dots، v)=۰$ را معادلهٔ متجانس گویند. مثلاً چندجمله‌ای‌های

$$a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}y + a_{n-۲}x^{n-۲}y^{۲} + \dots + a_{۱}xy^{n-۱} + a_{۰}y^n (a_n \neq ۰)،$$

$$yx^{۳} + ۳x^{۲}y^{۲} + ۵xy^{۳} + ۶y^{۴}،$$

$$x^{۲} - yz، ۲y^{۲} - xy - x^{۲}،$$

$$x^{۳} + y^{۳} + z^{۳} - ۴xyz$$

چندجمله‌ای‌هایی متجانس، به‌ترتیب از درجه n، ۴، ۲، ۲ و ۳ هستند.

دستگاه معادله‌های جبری شامل دو متغیر x و y، به‌صورت

$$\begin{cases} p_{۱}(x، y) = q_{۱}(x، y) \\ p_{۲}(x، y) = q_{۲}(x، y) \end{cases}$$

را متجانس یا همگن گویند، وقتی که چندجمله‌ای‌های $p_{۱}$، $p_{۲}$، $q_{۱}$ و $q_{۲}$ متجانس باشند و، در ضمن، درجهٔ چندجمله‌ای‌های $p_{۱}$ و $p_{۲}$ و، همچنین، درجهٔ چندجمله‌ای‌های $q_{۱}$ و $q_{۲}$ یکی باشد. توجه کنیم، در دستگاه متجانس، ممکن است $p_{۱}$ و $q_{۱}$ از دو درجهٔ متفاوت باشند.

اگر در سمت چپ یکی از معادله‌های دستگاه شامل دو مجهول x و y، یك چندجمله‌ای همگن و در سمت راست آن عدد صفر باشد، می‌توان دستگاه را با تغییر متغیر $y = tx$ یا $x = ty$ حل کرد.

مثال ۱۴. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲} - ۲xy - ۳y^{۲} = ۰ \\ x^{۲} - xy - ۲x - ۳y = ۶ \end{cases} \qquad (۱۸)$$

حل. معادلهٔ اول این‌دستگاه، همگن‌و از درجهٔ دوم است. اگر $x = ۰$، آن‌گاه $y = ۰$، ولی $x = ۰$ و $y = ۰$ در معادلهٔ دوم دستگاه صدق نمی‌کند. $y \neq ۰$ می‌گیریم. اگر معادلهٔ اول را بر y تقسیم کنیم و $\frac{x}{y} = t$ بگیریم، به‌معادلهٔ $t^{۲} - ۲t - ۳ = ۰$ می‌رسیم که دارای دو جواب $t_{۱} = ۳$ و $t_{۲} = -۱$ است. بنابراین دستگاه (۱۸) با مجموعهٔ دو دستگاه زیر هم‌ارز است:

$$\begin{cases} x=-y \\ x^۲-xy-۲x-۳y=۶ \end{cases},\quad \begin{cases} x=۳y \\ x^۲-xy-۲x-۳y=۶ \end{cases}$$

که با حل آن‌ها به‌جواب‌های دستگاه (۱۸) می‌رسیم:

$$(-۲, ۲),\ \left(\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}\right),\ (۶, ۲),\ \left(-\frac{۳}{۲}, -\frac{۱}{۲}\right)$$

مثال ۱۵. دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۲۱ \\ y^۲-۲xy+۱۵=۰ \end{cases} \tag{۱۹}$$

حل. باید این دستگاه را حل کنیم:

$$\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۲۱ \\ y^۲-۲xy=-۱۵ \end{cases} \tag{۲۰}$$

در دستگاه (۲۰)، سمت چپ هر یك از معادله‌ها، چندجمله‌ای‌هایی همگن و از درجهٔ دوم‌اند و، سمت راست آن‌ها، چندجمله‌ای‌های همگنی از درجهٔ صفر؛ بنابراین، دستگاه (۲۰) همگن است. معادلهٔ اول دستگاه (۲۰) را ۵ و معادلهٔ دوم را در ۷ ضرب و، سپس، معادله‌های حاصل را باهم‌جمع می‌کنیم، به‌دستگاه

$$\begin{cases} ۵x^۲+۱۲y^۲-۱۹xy=۰ \\ y^۲-۲xy=-۱۵ \end{cases} \tag{۲۱}$$

می‌رسیم که با دستگاه (۱۹) هم‌ارز است. در معادلهٔ اول دستگاه (۲۱) فرض می‌کنیم: $y=tx$. به‌معادلهٔ $۵x^۲+۱۲t^۲x^۲-۱۹tx^۲=۰$ می‌رسیم، یعنی

$$x^۲(۵-۱۹t+۱۲t^۲)=۰$$

چون $x\neq ۰$ (اگر $x=۰$، آن‌وقت $y=۰$، ولی $(۰, ۰)$ در دستگاه (۱۹) صدق نمی‌کند)، بنابراین t باید درمعادلهٔ $۱۲t^۲-۱۹t+۵=۷$ صدق کند.

از آن‌جا $t_۱=\frac{۵}{۴}$، $t_۲=\frac{۱}{۳}$؛ یعنی $y=\frac{۵}{۴}x$ یا $y=\frac{۱}{۳}x$.

به‌این ترتیب، دستگاه (۱۹) هم‌ارز است با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} y=\frac{۵}{۴}x \\ y^{۲}-۲xy=-۱۵ \end{cases}, \quad \begin{cases} y=\frac{۱}{۳}x \\ y^{۲}-۲xy=-۱۵ \end{cases}$$

که با حل آن‌ها، جواب‌های دستگاه (۱۹) به‌دست می‌آیند:

$$(۴، ۵)، \ (-۴\ -۵)، \ (۳\sqrt{۳}، \sqrt{۳})، \ (-۳\sqrt{۳}، -\sqrt{۳})$$

مثال ۱۶. این دستگاه را با شرط $۲b>a>۰$، حل کنید:

$$x^{۳}=ax+by$$
$$y^{۳}=bx+ay \qquad (۲۲)$$

حل. دستگاه (۲۲) همگن است، زیرا در دو طرف برابری معادله‌های آن، چندجمله‌ای‌های همگن قرار دارد.

روشن است که (۰، ۰) جوابی از دستگاه است. اکنون فرض می‌کنیم $y\neq ۰$. در این‌صورت از دستگاه به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{۳}=\frac{ax+by}{bx+ay}$$

یعنی

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{۳}=\frac{a\left(\frac{x}{y}\right)+b}{b\left(\frac{x}{y}\right)+a} \qquad (۲۳)$$

$x=ty$ می‌گیریم؛ در این‌صورت از (۲۳) به‌دست می‌آید:

$$t^{۳}=\frac{at+b}{bt+a} \Longleftrightarrow t^{۳}(bt+a)=at+b$$

که هم‌ارز است با معادلهٔ

$$(t^{۲}-۱)[b(t^{۲}+۱)+at]=۰$$

چون $۲b>a>۰$، پس $b(t^{۲}+۱)+at>۰$ (به‌ازای همهٔ مقدارهای t)؛ بنابراین، معادله دو ریشه دارد: $t_{۱}=۱$، $t_{۲}=-۱$؛ و دستگاه (۲۲)

هم‌ارز است با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} y=x \\ y^{۳}=bx+ay \end{cases}, \quad \begin{cases} y=-x \\ y^{۳}=bx+ay \end{cases}$$

یعنی با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} y=x \\ y^{۳}=(a+b)y \end{cases}, \quad \begin{cases} y=-x \\ y^{۳}=(a-b)y \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آیند:

الف) به‌ازای $a-b \geqslant ۰$:

$$(۰، ۰)، (\sqrt{a+b}، \sqrt{a+b})، (-\sqrt{a+b}، -\sqrt{a+b})،$$
$$(\sqrt{a-b}، -\sqrt{a-b})، (-\sqrt{a-b}، \sqrt{a-b})$$

ب) به‌ازای $a-b<۰$:

$$(۰، ۰)، (\sqrt{a+b}، \sqrt{a+b})، (-\sqrt{a+b}، -\sqrt{a+b})،$$

●

گاهی برای حل دستگاه‌ها، می‌توان از روش تجزیه استفاده کرد. مثلاً دستگاه مثال (۱۶) را می‌توان به‌این‌طریق حل کرد. اگر معادلهٔ دستگاه را، یکبار باهم جمع و بار دیگر ازهم کم کنیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} (x+y)(x^{۲}-xy+y^{۲}-a-b)=۰ \\ (x-y)(x^{۲}+xy+y^{۲}-a+b)=۰ \end{cases}$$

که هم‌ارز است با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} x+y=۰ \\ x-y=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=۰ \\ x^{۲}+xy+y^{۲}=a-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{۲}-xy+y^{۲}=a+b \\ x-y=۰ \end{cases}, \quad \begin{cases} x^{۲}-xy+y^{۲}=a+b \\ x^{۲}+xy+y^{۲}=a-b \end{cases}$$

که هرکدام از آن‌ها را می‌توان حل کرد.

مثال ۱۷. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲}-y^{۲}-ax+ay=۰ \\ xy=a^{۲} \end{cases} \qquad (۲۴)$$

حل. با توجه به‌این‌که

$$x^{۲}-y^{۲}-ax+ay=(x-y)(x+y-a)$$

دستگاه (۲۴) هم‌ارز است با مجموعهٔ دستگاه‌های

$$\begin{cases} x-y=۰ \\ xy=a^{۲} \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y=a \\ xy=a^{۲} \end{cases}$$

دستگاه دوم، تنها به‌ازای $a=۰$ جواب دارد و این جواب $(۰،۰)$ است. دستگاه اول به ازای هرمقدار دلخواه a جواب دارد: $(a،a)$، $(-a،-a)$.

در حل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی، می‌توان در صورت لزوم، از تقارن نسبت به‌دو مجهول (و نه تقارن نسبت به‌سه مجهول) استفاده کرد.

مثال ۱۸. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}-z^{۲}=(x+y-z)^{۲}+۲ \\ x^{۳}+y^{۳}-z^{۳}=(x+y-z)^{۳}+۹ \\ x^{۴}+y^{۴}-z^{۴}=(x+y-z)^{۴}+۲۹ \end{cases} \qquad (۲۵)$$

حل. هر سه معادلهٔ این دستگاه، نسبت به x و y متقارن‌اند. برای حل دستگاه، فرض می‌کنیم: $u=x+y$، $v=xy$، $z=z$. داریم:

$$x^{۲}+y^{۲}=(x+y)^{۲}-۲xy=u^{۲}-۲v$$

$$x^{۳}+y^{۳}=(x+y)^{۳}-۳xy(x+y)=u^{۳}-۳uv$$

$$x^{۴}+y^{۴}=(x^{۲}+y^{۲})^{۲}-۲x^{۲}y^{۲}=(u^{۲}-۲v)^{۲}-۲v^{۲}$$

و دستگاه نسبت به u و v و z چنین می‌شود:

$$\begin{cases} u^{۲}-۲v-z^{۲}=(u-z)^{۲}+۲ \\ u^{۳}-۳uv-z^{۳}=(u-z)^{۳}+۹ \\ (u^{۲}-۲v)^{۲}-۲v^{۲}-z^{۴}=(u-z)^{۴}+۲۹ \end{cases} \qquad (۲۶)$$

ابتدا تنها دومعادلهٔ اول دستگاه را در نظر می گیریم. بعداز تبدیل‌های ساده، به‌دست می آید:

$$\begin{cases} z(u-z)=۱+v \\ uz(u-z)=۳+uv \end{cases} \qquad (۲۷)$$

$u=۰$ درمعادلهٔ دوم دستگاه (۲۷) صدق‌نمی کند؛ معادلهٔ اول رادر u ضرب و نتیجه را، از معادلهٔ دوم‌کم می کنیم، به‌دست می‌آید: $u=۳$.

اکنون دو معادلـهٔ اول و سوم دستگاه (۲۶) را در نظر می گیریم و، در آن‌ها، به‌جای u مقدارش ۳ را قرار می‌دهیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} z(۳-z)=۱+v \\ (۹-۲v)^۲-۲v^۲=[۹-۲z(۳-z)]^۲-۲z^۲(۳-z)^۲+۲۹ \end{cases}$$

دراین دستگاه، عبارت $z(۳-z)$ را بین دومعادله حذف می کنیم:

$$(۹-۲v)^۲-۲v^۲=[۹-۲(۱+v)]^۲-۲(۱+v)^۲+۲۹$$

از آن جا $v=\frac{۵}{۴}$، با دردست داشتن u و v، ازدستگاه

$$x+y=۳، \quad xy=\frac{۵}{۴}$$

دوجواب برای آن به‌دست می آیـد: $\left(\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}\right)$؛ اگـر در معادلهٔ اول دستگاه (۲۷)، $u=۳$ و $v=\frac{۵}{۴}$ قراردهیم، به‌دست می‌آید $z=\frac{۳}{۲}$.

دستگاه دوجواب دارد: $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۲}\right)$. آزمایش نشان می‌دهد که، هر دوجواب، در دستگاه اصلی صدق می کنند.

تکلیف ۱.

دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $\begin{cases} x+y=۱، \\ x^۲+y^۲=۱; \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} (۲x-۵)^۲+(۳y-۲)^۲=۱۷، \\ (۲x-۵)(۳y-۲)=۴; \end{cases}$

$$۳)\quad \begin{cases} x^۲-۴y^۲-xy+۵y=۱، \\ x^۲+۳y^۲-xy-۴y=-۱; \end{cases}$$

$$۴)\quad \begin{cases} x^۲-y^۲=۱۵، \\ x^۲+۳xy-۸y^۲=۲۰; \end{cases}$$

$$۵)\quad \begin{cases} x^۲-y^۲+۳y=۰، \\ x^۲+۳xy+۲y^۲+۲x+۴y=۰. \end{cases}$$

تکلیف ۲.

دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\quad \begin{cases} x^۲+y+\frac{۱}{۴}=۰، \\ x+y^۲+\frac{۱}{۴}=۰; \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} x+xy-y=۱۳، \\ x^۲y-xy^۲=۳۰; \end{cases}$$

$$۳)\quad \begin{cases} x^۲+۴y^۲+x=۴xy+۲y+۲، \\ ۴x^۲+۴xy+y^۲=۲x+y+۵۶; \end{cases}$$

$$۴)\quad \begin{cases} ۴x^۲+۲xy+۶x-۲۷=۰، \\ x^۲-۵xy+۶y^۲=۰; \end{cases}$$

$$۵)\quad \begin{cases} x^۲+y^۲-۴x-۳y+۵=۰، \\ ۳x^۲+۳y^۲-۱۱x-۷y+۱۰=۰، \end{cases}$$

تکلیف ۳.

حل کنید:

$$۱)\quad \begin{cases} x+y=xy، \\ x+y=x^۲-y^۲، \end{cases}$$

$$۲)\quad \begin{cases} x^۲+۳xy+y^۲=۶۱، \\ xy=۱۲; \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} ۵x^۲-۶xy+۵y^۲=۲۹، \\ ۷x^۲-۸xy+۷y^۲=۴۳; \end{cases} \qquad ۴)\ \begin{cases} x^۲-xy+ay=۰، \\ y^۲-xy-۴ax=۰; \end{cases}$$

$$۵)\ \begin{cases} x^۳+y^۳=۱، \\ x^۲y+xy^۲=۱. \end{cases}$$

تکلیف ۴.

این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \begin{cases} x^۲-۴y^۲=۹، \\ xy+۲y^۲=۱۸; \end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases} ۳x^۲+۵xy-۴x^۲=۳۸، \\ ۵x^۲-۹xy-۳y^۲=۱۵; \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} ۶x^۲-xy-۱۲y^۲=۰، \\ x^۲+۲y^۲=\frac{۱۷}{۱۶}; \end{cases}$$

$$۴)\ \begin{cases} (x+a)(y-b)+(x-a)(y+b)=۲(y^۲-b^۲)، \\ ay+bx=۲ab; \end{cases}$$

$$۵)\ \begin{cases} x^۲+xy+y^۲=۱، \\ x^۴+x^۲y^۲+y^۴=۱. \end{cases}$$

تکلیف ۵.

این دستگاه‌ها را حل کنید:

$$۱)\ \begin{cases} x+y+xy=۷، \\ x^۲+y^۲+xy=۱۳; \end{cases} \qquad ۲)\ \begin{cases} x^۲+y^۲=۱۷، \\ x+xy+y=۹; \end{cases}$$

$$۳)\ \begin{cases} x+xy+y=۱، \\ y+yz+z=۲، \\ z+zx+x=۳; \end{cases} \qquad ۴)\ \begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۷}{۲}، \\ x+y+z=\frac{۷}{۲}، \\ xyz=۱; \end{cases}$$

۵) $$\begin{cases} x+y+z=a، \\ x^۲+y^۲+z^۲=a^۲+۲b^۲، \\ x^۳+y^۳+z^۳=a^۳. \end{cases}$$

تکلیف ۶.

این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $$\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۷، \\ x+y=۵; \end{cases}$$

۲) $$\begin{cases} x^۲+y^۲+x+y=۳۲، \\ ۱۲(x+y)=۷xy; \end{cases}$$

۳) $$\begin{cases} x+y+z=۲، \\ x^۲+y^۲+z^۲=۶، \\ x^۳+y^۳+z^۳=۸; \end{cases}$$

۴) $$\begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۱۳}{۳}, \\ x+y+z=\frac{۱۳}{۳}, \\ xyz=۱; \end{cases}$$

۵) $$\begin{cases} x(x+y+z)=a، \\ y(x+y+z)=b، \\ z(x+y+z)=c. \end{cases}$$

تمرین‌ها

این دستگاه‌ها را حل کنید:

۱) $$\begin{cases} (x-y)(x^۲+y^۲)=۴۴۷، \\ xy(x-y)=۲۱۰; \end{cases}$$

۲) $$\begin{cases} (۵x-۱)(۳y+۲)=(۲x+۱)(۹y-۲)، \\ (۳x+۲)(۲y-۹)=-(x+۲)(y+۹); \end{cases}$$

۳) $$\begin{cases} x^۳+y^۳+xy(x+y)=۱۳، \\ x^۲y^۲(x^۲+y^۲)=۴۶۸; \end{cases}$$

۴) $$\begin{cases} y^۴+xy^۲-۲x^۲=۰ \\ x+y=۶; \end{cases}$$

۵) $$\begin{cases} x+y+xy=۱۹، \\ xy(x+y)=۸۴; \end{cases}$$

۶) $$\begin{cases} x^۳=۳۱x^۲-۴y^۲، \\ y^۳=۳۱y^۲-۴x^۲; \end{cases}$$

۷) $$\begin{cases} ۱۵(x+y)=۸xy، \\ x+y+x^۲+y^۲=۴۲; \end{cases}$$

۸) $$\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۱۹، \\ x^۴+x^۲y^۲+y^۴=۹۳۱; \end{cases}$$

۹) $$\begin{cases} xy(x+y)=۳۰، \\ x^۳+y^۳=۳۵; \end{cases}$$

۱۰) $$\begin{cases} x^۲+۴y^۲+x+۳y=۱; \\ ۲x-y=۱; \end{cases}$$

۱۱) $$\begin{cases} x+y=۶، \\ (x^۲+y^۲)(x^۳+y^۳)=۱۴۴۰; \end{cases}$$

۱۲) $$\begin{cases} x^۲-xy+y^۲=۲، \\ x^۳-y^۳=۴; \end{cases}$$

۱۳) $$\begin{cases} ۶x^۲-۳y^۲=x^۲+۲xy، \\ x^۲+y^۲=۳۴; \end{cases}$$

۱۴) $$\begin{cases} x+y=۷xy، \\ x-y=۳xy; \end{cases}$$

۱۵) $$\begin{cases} ۶(x+y)=۵xy، \\ ۲x+۳y=۱۲; \end{cases}$$

۱۶) $$\begin{cases} x(y+z)=۲۰، \\ y(x+z)=۱۸، \\ z(x+y)=۱۴; \end{cases}$$

۱۷) $$\begin{cases} xy=۹z، \\ yz=x، \\ zx=۴y; \end{cases}$$

۱۸) $$\begin{cases} x^۲-y^۲-z^۲=۱۱، \\ yz=۲، \\ x+y+z=۷; \end{cases}$$

۱۹) $$\begin{cases} x+y+z=۱۳، \\ x^۲+y^۲+z^۲=۶۱، \\ ۲yz=x(y+z); \end{cases}$$

۲۰) $$\begin{cases} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۱۱، \\ \frac{۳}{x}+\frac{۴}{y}=۱۸، \\ ۶x-۳y=۲; \end{cases}$$

۲۱) $$\begin{cases} x^۲+xy+y^۲=۳۷، \\ x^۲+xz+z^۲=۲۸، \\ y^۲+yz+z^۲=۱۹; \end{cases}$$

۲۲) $$\begin{cases} xy+xz=x^۲+۲، \\ xy+yz=y^۲+۳، \\ xz+yz=z^۲+۴; \end{cases}$$

$$۲۳)\quad \begin{cases} ۲x^۲-۵xy+۳y^۲=۰، \\ x^۳-y^۳=x-y; \end{cases} \qquad ۲۴)\quad \begin{cases} x^۲+y^۲-z=۰، \\ x+y+z=-\frac{۱}{۲}; \end{cases}$$

$$۲۵)\quad \begin{cases} x+y+z=۱، \\ xy+yz+zx=-۴، \\ x^۳+y^۳+z^۳=۱، \end{cases} \qquad ۲۶)\quad \begin{cases} ۲x+y+z=۴، \\ x+۴y+۴z=-۵. \end{cases}$$

پاسخ‌ها و راهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

$۱)\ (۰، ۱)، (۱، ۰);\quad ۲)\ (۴/۵، ۱)، (۳، ۲)، \left(۰/۵، \frac{۱}{۳}\right)،$ $\left(۲، -\frac{۲}{۳}\right);\quad ۳)\ (۰، ۱)، (۱، ۱);\quad ۴)\ (-۴، -۱)، (۴، ۱)،$ $\left(-\frac{۵}{۴}\sqrt{۱۰}، -\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}\right)، \left(\frac{۵}{۴}\sqrt{۱۰}، \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}\right);\quad ۵)\ (۰، ۰)، (۲، -۱)،$ $\left(-\frac{۱۰}{۷}، -\frac{۴}{۷}\right).$

تکلیف ۲.

$۱)\ \left(-\frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۲}\right);\quad ۲)\ (۵+۲\sqrt{۷}، -۵+۲\sqrt{۷})،$ $(۵-۲\sqrt{۷}، -۵-۲\sqrt{۷})، (۵، ۲)، (-۲، -۵);\quad ۳)\ (-۳/۲،$ $-۰/۶)، (۲/۴، ۳/۲)، (-۲/۶، -۱/۸)، (۲/۸، ۲/۴);$ $۴)\ \left(-۳، -\frac{۳}{۲}\right)، (۱/۸، ۰/۹)، \left(\frac{-۹(۱+\sqrt{۱۵})}{۱۴}، \frac{-۳(۱+\sqrt{۱۵})}{۱۴}\right)،$ $\left(\frac{-۹(۱-\sqrt{۱۵})}{۱۴}، \frac{-۳(۱-\sqrt{۱۵})}{۱۴}\right);\quad ۵)\ (۳، ۱)، (۱، ۲).$

تکلیف ۳.

$$۱)\ (۰، ۰)، \left(\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)، \left(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}, \frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right);$$

$۲)\ (۳، ۴)، (-۳، -۴)، (۴، ۳)، (-۴، -۳);\quad ۳)\ (۳، ۲)،$
$(-۳، -۲)، (۲، ۳)، (-۲، -۳);\quad ۴)\ (t، t)، (a=۰; t\in\mathbf{R})(۲a،$
$۴a)، \left(\frac{۲a}{۳}-\frac{۴a}{۳}\right)، (a\neq ۰);\quad ۵)\ \left(\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}, \frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}\right).$

تکلیف ۴.

$۱)\ (۵، ۲)، (-۵، -۲);\quad ۲)\ (۳، ۱)، (-۳، -۱);$

$۳)\ \left(\frac{۳}{۴}, \frac{۱}{۲}\right)، \left(-\frac{۳}{۴}, -\frac{۱}{۲}\right)، \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\right)، \left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\right);$
$۴)$ به ازای $a=b=۰\ (t، ۰)، (t، t)، (t\in\mathbf{R})،$ به ازای $a\neq ۰، b=۰:$
$(t، ۰)، (t\in\mathbf{R})،$ به‌ازای $a=-b، b\neq ۰: (-b، b)،$ به‌ازای $a\neq -b،$
$b\neq ۰: (a، b)، \left(\frac{a(a+۳b)}{a+b}, \frac{b(a-b)}{a+b}\right);\quad ۵)\ (۰، ۱)، (۰، -۱)،$
$(۱، ۰)، (-۱، ۰).$

تکلیف ۵.

$۱)\ (۳، ۱)، (۱، ۳);\quad ۲)\ (۴، ۱)، (۱، ۴);\quad ۳)\ \left(\frac{۲}{۳}\sqrt{۶}-۱،\right.$
$\left.\frac{۱}{۲}\sqrt{۶}-۱، \sqrt{۶}-۱\right)، \left(-\frac{۲}{۳}\sqrt{۶}-۱، \frac{۱}{۲}\sqrt{۶}-۱، \sqrt{۶}-۱\right);$
$۴)\ \left(۱، ۲، \frac{۱}{۲}\right)، \left(۲، ۲، \frac{۱}{۲}\right)، \left(۲، \frac{۱}{۲}, ۱\right)، \left(\frac{۱}{۲}, ۱، ۲\right)، \left(\frac{۱}{۲}, ۲، ۱\right);$
$۵)\ (a، b، -b)، (a، -b، b)، (b، a، -b)، (b، -b، a)، (-b،$
$a، b)، (-b، b، a).$

تکلیف ۶.

۱) $(۳، ۲)$، $(۲،۳)$؛ ۲) $(۳، ۴)$، $(۴، ۳)$، $\left(\frac{-۱۶+۸\sqrt{۱۰}}{۷}, \frac{-۱۶-۸\sqrt{۱۰}}{۷}\right)$، $\left(\frac{-۱۶-۸\sqrt{۱۰}}{۷}, \frac{-۱۶+۸\sqrt{۱۰}}{۷}\right)$؛

۳) $(۱، -۱، ۲)$، $(۱، ۲، -۱)$، $(-۱، ۱، ۲)$، $(۲، ۱، -۱)$، $(-۱، ۲، -۱)$، $(۲، -۱، ۱)$؛

۴) $\left(۱، ۳، \frac{۱}{۳}\right)$، $\left(۱، \frac{۱}{۳}، ۳\right)$، $\left(۳، ۱، \frac{۱}{۳}\right)$، $\left(۳، \frac{۱}{۳}، ۱\right)$، $\left(\frac{۱}{۳}، ۳، ۱\right)$، $\left(\frac{۱}{۳}، ۱، ۳\right)$؛ ۵) به‌ازای $a=b=c=0$: $(u، v، -u-v)$، $(u\in\mathbf{R}،$ $\in\mathbf{R})$؛ به‌ازای $a+b+c>0$: $\left(\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{b}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{c}{\sqrt{a+b+c}}\right)$، $\left(\frac{-a}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{-b}{\sqrt{a+b+c}}, \frac{-c}{\sqrt{a+b+c}}\right)$؛

آخرین جمله، برای سایرمقدارهای a و b و c جواب ندارد.

تمرین‌ها

۱) $(۱۰، ۷)$، $(-۷، -۱۰)$؛ ۲) $(۰، ۰)$، $(۳، ۲)$؛ ۳) $(۳، -۲)$، $(-۲، ۳)$؛ ۴) $(۴، ۲)$، $(۹، -۳)$؛ ۵) $(۳، ۴)$، $(۴، ۳)$، $(۶+\sqrt{۲۹}، ۶-\sqrt{۲۹})$، $(۶-\sqrt{۲۹}، ۶+\sqrt{۲۹})$؛ ۶) $(۰، ۰)$، $(۲۷، ۲۷)$، $\left(\frac{۷}{۲}(۳+\sqrt{۳۳})، \frac{۷}{۲}(۳-\sqrt{۳۳})\right)$، $\left(\frac{۷}{۲}(۳-\sqrt{۳۳})، \frac{۷}{۲}(۳+\sqrt{۳۳})\right)$، $(۳۰، ۱۵)$، $(۱۵، ۳۰)$؛ ۷) $(۵، ۳)$، $(۳، ۵)$؛

۸) $(۵، ۳)$، $(-۳، -۵)$، $(۳، ۵)$، $(-۵، -۳)$؛ ۹) $(۲، ۳)$، $(۳، ۲)$؛

۱۰) $\left(\frac{۹}{۱۷}, \frac{۱}{۱۷}\right)$، $(۰، -۱)$؛ ۱۱) $(۲، ۴)$، $(۴، ۲)$؛

۱۲) $\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}, \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)$، $\left(-\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)$؛

۱۳) $(-۳، ۵)$، $(۳، -۵)$، $(-\sqrt{۱۷}، -\sqrt{۱۷})$، $(\sqrt{۱۷}، \sqrt{۱۷})$؛

۱۴) $(۰، ۰)$، $\left(\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۵}\right)$، ۱۵) $\left(\frac{۱۲}{۵}، \frac{۱۲}{۵}\right)$، $(۳، ۲)$; ۱۶) $(۴، ۳، ۲)$، $(-۴، -۳، -۲)$; ۱۷) $(۰، ۰، ۰)$، $(۶، ۳، ۲)$; ۱۸) $(۴، ۲، ۱)$، $(۴، ۱، ۲)$; ۱۹) ϕ; ۲۰) $\left(\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۶}\right)$; ۲۱) $\left(\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}، \frac{۱}{\sqrt{۳}}، -\frac{۸}{\sqrt{۳}}\right)$، $\left(-\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}، -\frac{۱}{\sqrt{۳}}، \frac{۸}{\sqrt{۳}}\right)$، $(۴، ۳، ۲)$، $(-۴، -۳، -۲)$، ۲۲) $\left(\frac{۱۰}{\sqrt{۱۵}}، \frac{۹}{\sqrt{۱۵}}، \frac{۴}{\sqrt{۱۵}}\right)$، $\left(-\frac{۱۰}{\sqrt{۱۵}}، -\frac{۹}{\sqrt{۱۵}}، -\frac{۴}{\sqrt{۱۵}}\right)$ ۲۳) $\left(\frac{۳}{\sqrt{۱۹}}، \frac{۲}{\sqrt{۱۹}}\right)$، $\left(-\frac{۳}{\sqrt{۱۹}}، -\frac{۲}{\sqrt{۱۹}}\right)$، $(t، t)$، $(t \in \mathbf{R})$; ۲۴) $\left(-\frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۲}\right)$; ۲۵) $(۱، ۲، -۲)$، $(۱، -۲، ۲)$، $(۲، ۱، -۲)$، $(۲، -۲، ۱)$، $(-۲، ۱، ۲)$، $(-۲، ۲، ۱)$; ۲۶) $(۳، t، -۲-t)$، $(t \in \mathbf{R})$.

فصل ششم

عددهای مختلط

ضمن بررسی عددهای حقیقی یادآوری کردیم که، مثلاً نمی‌توان عددی را پیدا کرد که مجذور آن برابر ۱− باشد. برای حل مساله‌هایی از این گونه، مفهوم عدد را، با وارد کردن عددهای مختلط، گسترش داده‌اند.

مجموعهٔ شامل عبارت‌های به‌صورت $z=a+bi$ را، که در آن $i^{۲}+۱=۰$ و a و b عددهایی حقیقی‌اند، مجموعهٔ عددهای مختلط گویند. در این مجموعه، عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو عدد، بر اساس قانون‌های زیر، تعریف شده‌اند:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i \qquad (۱)$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i \qquad (۲)$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i \qquad (۳)$$

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{ca+bd}{a^{۲}+b^{۲}}+\frac{ad-cb}{a^{۲}+b^{۲}}i \quad (a^{۲}+b^{۲}\neq ۰) \qquad (۴)$$

عدد $a+bi$ را به‌ازای $b=۰$ برابر عدد حقیقی a به‌حساب می‌آورند، یعنی $a+۰i=a$.

ویژگی‌های عمل‌های حسابی

۱. $z_{۱}+z_{۲}=z_{۲}+z_{۱}$؛ ۲. $(z_{۱}+z_{۲})+z_{۳}=z_{۱}+(z_{۲}+z_{۳})$؛

۳. برای دو عدد مختلط $z_{۱}$ و $z_{۲}$، عدد منحصر به‌فرد z وجود دارد، به‌نحوی که $z_{۱}+z=z_{۲}$؛

۴. $z_{۱}z_{۲}=z_{۲}z_{۱}$؛ ۵. $(z_{۱}z_{۲})z_{۳}=z_{۱}(z_{۲}z_{۳})$؛

۶. برای هر دو عدد مختلط $z_{۱}\neq ۰$ و $z_{۲}$، عدد منحصر به‌فرد z وجود

دارد، به‌نحوی که $z_۱ z = z_۲$؛ ۷. $z_۱(z_۲+z_۳)=z_۱z_۲+z_۱z_۳$.

همهٔ این ویژگی‌ها، نتیجه‌ای از دستورهای (۱) تا (۴) ویژگی‌های مشابه آن‌ها درعددهای حقیقی‌اند. دستورهای مربوط به‌ساده کردن ضرب‌ها هم، درست‌اند:

$$(z_۱+z_۲)^۲=z_۱^۲+۲z_۱z_۲+z_۲^۲$$

$$(z_۱+z_۲)^۳=z_۱^۳+۳z_۱^۲z_۲+۳z_۱z_۲^۲+z_۲^۳$$

$$z_۱^۳-z_۲^۳=(z_۱-z_۲)(z_۱^۲+z_۱z_۲+z_۲^۲)$$

وغیره. ازتعریف عمل‌های جمع، تفریق وضرب عددهای‌مختلط نتیجه می‌شود که‌می‌توان این عمل‌ها را، هم‌چون عمل‌های متناظر خود روی چندجمله‌ای‌ها (ودراین‌جا نسبت به i) انجام‌داد، سپس $i^۲$ را برابر ۱ — گرفت و،سرانجام، جمله‌های شامل i را ازجمله‌هایی که شامل i نیستند، جدا کرد.

عددهای a و b را، به‌ترتیب، بخش‌های حقیقی وموهومی عدد مختلط $z=a+bi$ گویند و بـه‌صورت $a=\mathrm{Re}\,z$ و $b=\mathrm{Im}\,z$ نشان مـی‌دهند. برای $z=a+bi$. عددمختلط $\bar{z}=a-bi$ را مزدوج آن گویند. این برابری‌ها برقرارند:

$$\overline{z_۱+z_۲}=\bar{z}_۱+\bar{z}_۲,\qquad \overline{z_۱-z_۲}=\bar{z}_۱-\bar{z}_۲,$$

$$\overline{z_۱z_۲}=\bar{z}_۱\bar{z}_۲,\qquad (\overline{z_۱:z_۲})=\bar{z}_۱:\bar{z}_۲$$

عبارت $z\bar{z}=a^۲+b^۲$، عبارت است ازمجذور عدد غیرمنفی $\sqrt{a^۲+b^۲}$ که به‌آن، مدول یا قدرمطلق عدد z گویند و بانماد $|z|$ نشان می‌دهند. بنابراین

$$|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

اگر z عددی حقیقی باشد (یعنی اگر $b=0$)، آن‌وقت مدول عـدد مختلط، همان قدرمطلق عدد حقیقی a می‌شود. این برابری‌ها درست‌اند:

$$|z_۱z_۲|=|z_۱|\cdot|z_۲|,\qquad |z_۱:z_۲|=|z_۱|:|z_۲|$$

دستور (۴) را، کـه به‌معنای تقسیم عدد مختلط $c+di$ برعدد مختلط $a+bi$ است، می‌توان این‌طورنوشت:

$$\frac{z_۱}{z_۲}=\frac{z_۱\cdot\bar{z}_۲}{z_۲\cdot\bar{z}_۲}$$

مثال ۱. برای عددهای مختلط $z_۱=۱۰-i$ و $z_۲=-۵+۲i$ مطلوب است: الف) تفاضل $z_۲-z_۱$؛ ب) خارج‌قسمت $z_۱:z_۲$.

حل. الف) به‌ترتیب داریم:

$$z_۲-z_۱=(-۵+۲i)-(۱۰-i)=(-۵-۱۰)+(۲+۱)i=$$
$$=-۱۵+۳i;$$

ب)
$$\frac{z_۱}{z_۲}=\frac{۱۰-i}{-۵+۲i}=\frac{(۱۰-i)(-۵-۲i)}{(-۵+۲i)(-۵-۲i)}=$$
$$=\frac{(-۵۰-۲)+(۵-۲۰)i}{۲۹}=\frac{-۵۲-۱۵i}{۲۹}=-\frac{۵۲}{۲۹}-\frac{۱۵}{۲۹}i$$

مثال ۲. عدد مختلط زیر را به‌صورت $a+bi$ بنویسید:

$$z=\frac{۵+i}{(۱+i)(۲-۳i)}$$

حل. داریم:

$$z=\frac{۵+i}{(۱+i)(۲-۳i)}=$$
$$=\frac{۵+i}{۲+۲i-۳i+۳}=\frac{۵+i}{۵-i}=\frac{(۵+i)(۵+i)}{(۵-i)(۵+i)}=\frac{۱۲}{۱۳}+\frac{۵}{۱۳}i$$

مثال ۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$z_۱\cdot\mathrm{Im}\,(\bar{z}_۲\cdot z_۳)+z_۲\cdot\mathrm{Im}\,(z_۱\cdot\bar{z}_۳)+z_۳\cdot\mathrm{Im}\,(\bar{z}_۱\cdot z_۲)=۰$$

حل. $z_۱=x_۱+iy_۱$، $z_۲=x_۲+iy_۲$ و $z_۳=x_۳+iy_۳$ می‌گیریم:

$$\mathrm{Im}\,(\bar{z}_۲\cdot z_۳)=\mathrm{Im}\,[(x_۲x_۳+y_۲y_۳)+i(x_۲y_۳-x_۳y_۲)]=$$
$$=x_۲y_۳-x_۳y_۲,$$

$$\mathrm{Im}\,(z_۱\cdot\bar{z}_۳)=\mathrm{Im}\,[(x_۱x_۳+y_۱y_۳)+i(x_۳y_۱-x_۱y_۳)]=$$
$$=x_۳y_۱-x_۱y_۳,$$

$$\mathrm{Im}\,(\bar{z}_۱\cdot z_۲)=\mathrm{Im}\,[(x_۱x_۲+y_۱y_۲)+i(x_۱y_۲-x_۲y_۱)]=$$
$$=x_۱y_۲-y_۱x_۲,$$

$$z_۱\cdot\mathrm{Im}\,(\bar{z}_۲\cdot z_۳)=(x_۱x_۲y_۳-x_۱x_۳y_۲)+i(x_۲y_۱y_۳-x_۳y_۱y_۲),$$

$$z_۲ \cdot \mathrm{Im}\,(z_۱ \cdot \bar{z}_۳)=(x_۲x_۳y_۱-x_۱x_۲y_۳)+i(x_۳y_۱y_۲-x_۱y_۲y_۳),$$
$$z_۳ \cdot \mathrm{Im}\,(\bar{z}_۱ \cdot z_۲)=(x_۱x_۳y_۲-x_۲x_۳y_۱)+i(x_۱y_۲y_۳-x_۲y_۱y_۳)$$

که از آن‌جا، درستی اتحاد تایید می‌شود.

مثال ۴. می‌دانیم $|z_۱|=|z_۲|=c$. ثابت کنید:

$$|z_۱+z_۲|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=۴c^۲$$

حل. چون $|z|^۲=z\cdot\bar{z}=c^۲$، بنابراین

$$|z_۱+z_۲|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=(z_۱+z_۲)(\overline{z_۱+z_۲})+(z_۱-z_۲)(\overline{z_۱-z_۲})=$$
$$=(z_۱+z_۲)(\bar{z}_۱+\bar{z}_۲)+(z_۱-z_۲)(\bar{z}_۱-\bar{z}_۲)=z_۱\cdot\bar{z}_۱+z_۲\cdot\bar{z}_۲+$$
$$+(z_۱\bar{z}_۲+z_۲\bar{z}_۱)+z_۱\bar{z}_۱+z_۲\bar{z}_۲-(z_۱\bar{z}_۲+z_۲\bar{z}_۱)=$$
$$=|z_۱|^۲+|z_۲|^۲+|z_۱|^۲+|z_۲|^۲=۴c^۲$$

مثال ۵. معادلهٔ $z^۲+|z|=۰$ را حل کنید.

حل. $z=x+iy$ می‌گیریم؛ معادلهٔ مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x+iy)^۲+\sqrt{x^۲+y^۲}=۰$$

یك عدد مختلط تنها وقتی برابر صفر است که بخش حقیقی و بخش موهومی آن برابر صفر باشد. بنابراین، برای پیدا کردن x و y، باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$x^۲-y^۲+\sqrt{x^۲+y^۲}=۰,\quad xy=۰$$

از معادلهٔ دوم دستگاه به دست می‌آید: $x=۰$ یا $y=۰$. به‌ازای $x=۰$، معادلهٔ اول دستگاه به‌صورت $-y^۲+|y|=۰$ و یا $|y|^۲-|y|=۰$ درمی‌آید؛ از آن‌جا $|y|=۰$ یا $|y|=۱$. بنابراین، عددهای $z_۱=۰$، $z_۲=i$ و $z_۳=-i$ جواب‌های معادله‌اند. به‌ازای $y=۰$، معادلهٔ اول دستگاه به‌صورت $|x|^۲+|x|=۰$ درمی‌آید و از آن‌جا $x=۰$، یعنی $z=۰$.

معادلهٔ مفروض، سه جواب دارد: $z_۱=۰$، $z_۲=i$ و $z_۳=-i$.

مثال ۶. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\left|\frac{z-۱۲}{z-۸i}\right|=\frac{۵}{۳},\quad \left|\frac{z-۴}{z-۸}\right|=۱$$

حل. اگر $z=x+iy$ بگیریم، داریم:

$$\left|\frac{z-۱۲}{z-۸i}\right|^۲=\frac{|z-۱۲|^۲}{|z-۸i|^۲}=\frac{(x-۱۲)^۲+y^۲}{x^۲+(y-۸)^۲}=$$

$$=\frac{x^۲+y^۲+۱۴۴-۲۴x}{x^۲+y^۲+۶۴-۱۶y},$$

$$\left|\frac{z-۴}{z-۸}\right|^۲=\frac{|z-۴|^۲}{|z-۸|^۲}=\frac{(x-۴)^۲+y^۲}{(x-۸)^۲+y^۲}=\frac{x^۲+y^۲+۱۶-۸x}{x^۲+y^۲+۶۴-۱۶x}$$

بنابراین، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\frac{x^۲+y^۲+۱۴۴-۲۴x}{x^۲+y^۲+۶۴-۱۶y}=\frac{۲۵}{۹},\quad \frac{x^۲+y^۲+۱۶-۸x}{x^۲+y^۲+۶۴-۱۶x}=۱$$

که بعد از تبدیل‌های لازم، دستگاه به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$۲x^۲+۲y^۲+۲۷x-۵۰y+۳۸=۰،\quad x=۶$$

و با حل آن، به‌جواب‌های (۶، ۱۷) و (۶، ۸) می‌رسیم:

$$z_۱=۶+۱۷i،\quad z_۲=۶+۸i$$

مثال ۷. می‌دانیم $|z|\leqslant ۱$، ثابت کنید $\left|\frac{۲z-i}{۲+iz}\right|\leqslant ۱$.

حل. فرض می‌کنیم عدد مختلط $z_۰$، به شرط $|z_۰|\leqslant ۱$، وجود داشته باشد، به‌نحوی که داشته باشیم: $\left|\frac{۲z_۰-i}{۲+iz_۰}\right|>۱$. در این‌صورت

$$\left|\frac{۲z_۰-i}{۲+iz_۰}\right|^۲>۱\Rightarrow|۲z_۰-i|^۲>|۲+iz_۰|^۲$$

از طرف دیگر، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$|۲z_۰-i|^۲=(۲z_۰-i)\overline{(۲z_۰-i)}=(۲z_۰-i)(\overline{۲z_۰}-\bar{i})=$$

$$=(۲z_۰-i)(۲\bar{z}_۰+i)=۵z_۰\bar{z}_۰+۱-۲i\bar{z}_۰+۲iz_۰،\quad |۲+iz_۰|^۲=$$

$$=(۲+iz_۰)(\overline{۲-i\bar{z}_۰})=(۲+iz_۰)(\overline{۲-iz_۰})=۴+z_۰\bar{z}_۰+۲iz_۰-۲i\bar{z}_۰$$

$$۲iz_۰-۲i\bar{z}_۰=۲i(z_۰-\bar{z}_۰)=۲i(\operatorname{Re}z_۰+i\operatorname{Im}z_۰-\operatorname{Re}\bar{z}_۰-$$

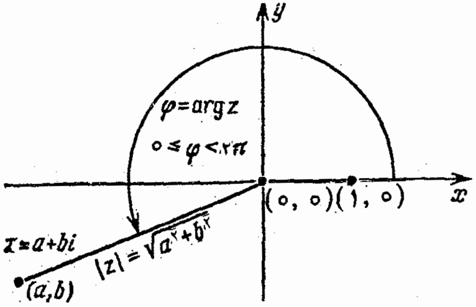
$$-i\operatorname{Im}\bar{z}_۰)=۲i(\operatorname{Re}z_۰+i\operatorname{Im}z_۰-\operatorname{Re}z_۰+i\operatorname{Im}z_۰)=-۴\operatorname{Im}z_۰$$

بنابرایـن $۴|z_۰|^۲-۴\,\mathrm{Im}\,z_۰+۱$ و $۴+|z_۰|^۲-۴\,\mathrm{Im}\,z_۰$ عددهایی حقیقی‌اند و، در نتیجه، از نابرابری اخیر به‌دست می‌آید:

$$۴|z_۰|^۲+۱>۴+|z_۰|^۲$$

یعنی $|z_۰|>۱$. تناقض حاصل درستی حکم مساله را ثابت می‌کند.

اگر از تعبیر هندسی زیر استفاده کنیم، می‌توانیم عدد مختلط را به‌صورتی دیگر، که اغلب ساده‌تر است، بنویسیم. هر عدد $z=a+bi$ متناظر است با نقطه‌ای به‌مختصات $(a، b)$، از صفحه محورهای مختصات قائم. بنابراین بین مجموعهٔ عددهای مختلط و نقطه‌های صفحه xOy، تناظری یك به‌یك وجود دارد (شکل ۲۶). فاصلهٔ نقطهٔ $(a، b)$ تا مبداء مختصات، برابر است با $\sqrt{a^۲+b^۲}$، یعنی برابر است با $|z|$. از این‌جا نتیجه می‌شود که، $|z_۱-z_۲|$ برابر است با فاصلهٔ بین نقطه‌های متناظر با عددهای مختلط $z_۱$ و $z_۲$.



شکل ۲۶

زاویهٔ φ $(۰\leqslant\varphi<۲\pi)$ که برحسب رادیان در نظر گرفته می‌شود و بین نیم‌خط $[ox)$ و نیم‌خط $[oz)$ درخلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، قرار دارد، آرگومان اصلی عدد $z\neq۰$ نامیده می‌شود و، آن‌را با نماد argz نشان می‌دهند. مقدار زاویهٔ φ را می‌توان از دستگاه زیر به‌دست آورد:

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}},\quad \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}},\quad ۰\leqslant\varphi<۲\pi$$

آرگومان عددz (با نماد $\operatorname{Arg} z$) و به‌هریك از عددهای زیر گفته‌می‌شود.

$$\arg z+۲k\pi،\ (k\in\mathbf{Z})$$

چون $a=|z|\cos\alpha$ و $b=|z|\sin\alpha$ که در آن $\alpha=\operatorname{Arg} z$، بنا براین هر عددمختلط $z=a+bi\neq ۰$ را می‌توان برحسب مدول وقدرمطلق آن نوشت:

$$z=a+bi=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

وقتی عددمختلط را این‌طور بنویسند، آن را صورت مثلثاتی عدد گویند (تا از صورت جبری آن، $a+bi$، تشخیص داده شود). اگر عددهای $z_۱$ و $z_۲$ را به‌صورت مثلثاتی آن‌ها، نشان داده باشیم:

$$z_۱=|z_۱|(\cos\alpha_۱+i\sin\alpha_۱)،\quad z_۲=|z_۲|(\cos\alpha_۲+i\sin\alpha_۲)$$

آن‌وقت

$$z_۱z_۲=|z_۱|\cdot|z_۲|[(\cos\alpha_۱\cos\alpha_۲-\sin\alpha_۱\sin\alpha_۲)+$$
$$+i(\cos\alpha_۱\sin\alpha_۲+\sin\alpha_۱\cos\alpha_۲)]$$

که با استفاد ازدستورهای معلوم مثلثات، خواهیم داشت:

$$z_۱z_۲=|z_۱|\cdot|z_۲|(\cos(\alpha_۱+\alpha_۲)+i\sin(\alpha_۱+\alpha_۲))$$

درواقع $|z_۱z_۲|=|z_۱||z_۲|$ و $\operatorname{Arg}(z_۱z_۲)=\operatorname{Arg}z_۱+\operatorname{Arg}z_۲$.

اگر درتقسیم عدد مختلط $z_۱$ بر عدد مختلط $z_۲$، عددها را به‌صورت مثلثاتی بنویسیم و، سپس، صورت ومخرج را در $\cos\alpha_۲-i\sin\alpha_۲$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{z_۱}{z_۲}=\frac{|z_۱|(\cos\alpha_۱+i\sin\alpha_۱)(\cos\alpha_۲-i\sin\alpha_۲)}{|z_۲|(\cos\alpha_۲+i\sin\alpha_۲)(\cos\alpha_۲-i\cos\alpha_۲)}=$$
$$=\frac{|z_۱|}{|z_۲|}(\cos(\alpha_۱-\alpha_۲)+i\sin(\alpha_۱-\alpha_۲))$$

و درواقع $\left|\frac{z_۱}{z_۲}\right|=\frac{|z_۱|}{|z_۲|}$ و $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)=\operatorname{Arg} z_۱-\operatorname{Arg} z_۲$.

مثال ۸. این عددهای مختلط، را به‌صورت مثلثاتی آن‌ها بنویسید:

$$۱+i،\ i،\ ۲،\ -i،\ -۳،\ \cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{-\pi}{۶}،\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+i)$$

حل. به‌ترتیب داریم:

$$۱+i=\sqrt{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right),\qquad i=\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲},$$

$$۲=۲(\cos ۰+i\sin ۰),\qquad -i=\cos\frac{۳\pi}{۲}+i\sin\frac{۳\pi}{۲},$$

$$-۳=۳(\cos\pi+i\sin\pi),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{-\pi}{۶}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{۶}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{۶}\right),$$

$$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(۱+i)=\cos\frac{۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۵\pi}{۴}$$

توجه داشته باشیم، عبارت‌های

$$-۳\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right),\qquad ۲\left(\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴}\right),$$

$$۲\left(\sin\frac{۲\pi}{۳}+i\cos\frac{۲\pi}{۳}\right),\qquad \cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}$$

را نمی‌توان صورت‌های مثلثاتی عددهایی مختلط دانست.

مثال ۹. صورت مثلثاتی این عدد مختلط را پیدا کنید:

$$z=\frac{i-۱}{۲\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)}$$

حل. فرض می‌کنیم: $z_۱=i-۱$ و $z_۲=۲\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$. در این صورت: $|z_۲|=۲$، $(k\in\mathbf{Z})\operatorname{Arg} z_۲=\frac{\pi}{۴}+۲k\pi$. چون $|z_۱|=\sqrt{۲}$ و $(m\in\mathbf{Z})\operatorname{Arg} z_۱=\frac{۳\pi}{۴}+۲m\pi$، بنابراین $\frac{|z_۱|}{|z_۲|}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و

$$\operatorname{Arg}\frac{z_۱}{z_۲}=\operatorname{Arg} z_۱-\operatorname{Arg} z_۲=\frac{۳\pi}{۴}+۲m\pi-\frac{\pi}{۴}-۲k\pi=$$

$$=\frac{\pi}{۲}+۲(m-k)\pi$$

چون $\arg\left(\frac{z_۱}{z_۲}\right)=\frac{\pi}{۲}$، پس

$$z=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۲}+۲p\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۲}+۲p\pi\right)\right)$$

برابری $\operatorname{Arg}(z_۱z_۲)=\operatorname{Arg}z_۱+\operatorname{Arg}z_۲$، برای مقدارهای اصلی آرگومان‌ها، یعنی $۰\leqslant a\arg z<۲\pi$، همیشه برقرار نیست. مثلاً برای $z_۱=-i$ و $z_۲=-i$ داریم:

$$\arg(z_۱z_۲)=\arg(-۱)=\pi$$

درحالی که

$$\arg z_۱+\arg z_۲=\arg(-i)+\arg(-i)=\frac{۳\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۲}=۳\pi$$

برابری $\operatorname{Arg}(z_۱z_۲)=\operatorname{Arg}z_۱+\operatorname{Arg}z_۲$ به‌این معناست که: برای هردو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$، به‌شرطی که مخالف صفر باشند، بین همهٔ مقدارهای ممکن $\operatorname{Arg}z_۱$، $\operatorname{Arg}z_۲$ و $\operatorname{Arg}(z_۱z_۲)$، مقدارهایی پیدا می‌شود که، برای آن‌ها، این برابری برقرار است. مثلاً در نمونهٔ بالا، برابری وقتی برقرار است که داشته باشیم:

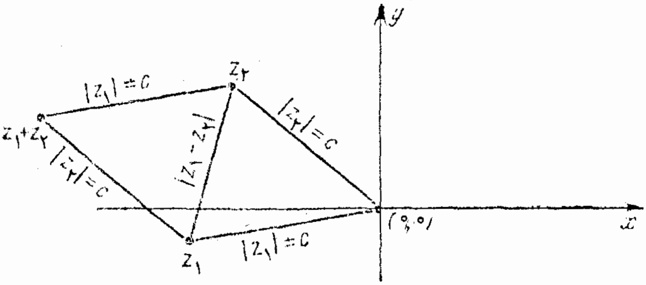
$$\operatorname{Arg}(z_۱z_۲)=۳\pi,\ \operatorname{Arg}z_۱=\frac{۳\pi}{۲},\ \operatorname{Arg}z_۲=\frac{۳\pi}{۲}$$

ازنظریهٔ عددهای مختلط، برای حل مساله‌های هندسهٔ مسطحه می‌توان استفاده کرد، برعکس، از برخی گزاره‌های هندسی، می‌توان برای اثبات رابطه‌ها واتحادهایی درحوزه عددهای مختلط سودجست مثلاً، درمثال ۴ ثابت کردیم که، اگر برای دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داشته باشیم: $|z_۱|=|z_۲|=c$، آن‌وقت داریم: $|z_۱+z_۲|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=۴c^۲$؛ واین، به‌معنای آن‌است که، مجموع مجذورهای طول‌های دو قطر یك لوزی، برابر است بامجموع مجذورهای طول‌های چهارضلع آن (شکل ۲۷).

درواقع، نقطه‌هایی از صفحه‌که متناظرند با چهارعدد ۰، $z_۱$، $z_۲$ و $z_۱+z_۲$، راس‌های یك‌لوزی را تشکیل‌می‌دهندکه، درآن، $|z_۱|$ و $|z_۲|$ طول ضلع‌ها، و $|z_۱+z_۲|$ و $|z_۱-z_۲|$ طول قطرهای آنند.

مثال ۱۰. برای چهارعدد مختلط $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$ و $z_۴$ داریم:

$$|z_۱|=|z_۲|=|z_۳|=|z_۴|$$



شکل ۲۷

ثابت کنید: الف) عدد $\frac{(z_۱-z_۲)(z_۳-z_۴)}{(z_۱-z_۴)(z_۲-z_۳)}$، عددی حقیقی و مثبت است.

ب) این برابری برقرار است:

$$|z_۱-z_۳|\cdot|z_۲-z_۴|=|z_۱-z_۲|\cdot|z_۳-z_۴|+|z_۱-z_۳|\cdot|z_۲-z_۳|$$

حل. الف) عددهای مفروض را، به‌صورت مثلثاتی می‌نویسیم:

$$z_۱=\rho(\cos\alpha_۱+i\sin\alpha_۱),\qquad z_۲=\rho(\cos\alpha_۲+i\sin\alpha_۲),$$
$$z_۳=\rho(\cos\alpha_۳+i\sin\alpha_۳),\qquad z_۴=\rho(\cos\alpha_۴+i\sin\alpha_۴)$$

فرض می‌کنیم: $\alpha_۱<\alpha_۲<\alpha_۳<\alpha_۴<\alpha_۱+۲\pi$. در این صورت

$$\frac{(z_۱-z_۲)(z_۳-z_۴)}{(z_۱-z_۴)(z_۲-z_۳)}=$$
$$=[(\cos\alpha_۱-\cos\alpha_۲)+i(\sin\alpha_۱-\sin\alpha_۲)][(\cos\alpha_۳-\cos\alpha_۴)+$$
$$+i(\sin\alpha_۳-\sin\alpha_۴)]:[(\cos\alpha_۱-\cos\alpha_۴)+i(\sin\alpha_۱-\sin\alpha_۴)]\times$$
$$\times[(\cos\alpha_۲-\cos\alpha_۳)+i(\sin\alpha_۲-\sin\alpha_۳)]=$$
$$=\left(-۲\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲}\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}+i\cdot۲\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲}\cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}\right)\times$$
$$\times\left(-۲\sin\frac{\alpha_۳-\alpha_۴}{۲}\sin\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}+i\cdot۲\sin\frac{\alpha_۳-\alpha_۴}{۲}\cos\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}\right):$$
$$:\left[\left(-۲\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۴}{۲}\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۴}{۲}+i\cdot۲\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۴}{۲}\cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۴}{۲}\right)\times\right.$$

$$\times\left(-۲\sin\frac{\alpha_۲-\alpha_۳}{۲}\sin\frac{\alpha_۲+\alpha_۳}{۲}+i.۲\sin\frac{\alpha_۲-\alpha_۳}{۲}\cos\frac{\alpha_۲+\alpha_۳}{۲}\right)\Bigg]=$$

$$=۴\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲}\sin\frac{\alpha_۳-\alpha_۴}{۲}\left(i\cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}-\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{۲}\right)\times$$

$$\times\left(i\cos\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}-\sin\frac{\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}\right):$$

$$:\Bigg[۴\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۴}{۲}\sin\frac{\alpha_۲-\alpha_۳}{۲}\left(i\cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۴}{۲}-\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۴}{۲}\right)\times$$

$$\times\left(i\cos\frac{\alpha_۲+\alpha_۳}{۲}-\sin\frac{\alpha_۲+\alpha_۳}{۲}\right)\Bigg]=$$

$$=\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲}\sin\frac{\alpha_۳-\alpha_۴}{۲}\left(\cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}+\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}\right):\Bigg[\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۴}{۲}\sin\frac{\alpha_۲-\alpha_۳}{۲}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}+i\sin\frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳+\alpha_۴}{۲}\right)\Bigg]=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۲}{۲}\sin\frac{\alpha_۳-\alpha_۴}{۲}}{\sin\frac{\alpha_۱-\alpha_۴}{۲}\sin\frac{\alpha_۲-\alpha_۳}{۲}}=\frac{\sin\frac{\alpha_۲-\alpha_۱}{۲}\sin\frac{\alpha_۴-\alpha_۳}{۲}}{\sin\frac{\alpha_۴-\alpha_۱}{۲}\sin\frac{\alpha_۳-\alpha_۲}{۲}}$$

عبارت اخیر، عددی مثبت است، زیرا درجلو علامت سینوس، همه‌جا، عددهایی از بازهٔ $(۰، \pi)$ قراردارند.

به اثبات اتحاد ب) می‌پردازیم:

$$|(z_۱-z_۲)(z_۳-z_۴)|+|(z_۱-z_۴)(z_۲-z_۳)|=$$

$$=|(z_۱-z_۲)(z_۳-z_۴)+(z_۱-z_۴)(z_۲-z_۳)|$$

زیرا عدد $\frac{(z_۱-z_۲)(z_۳-z_۴)}{(z_۱-z_۴)(z_۲-z_۳)}$، حقیقی و مثبت است. درواقع، اگر

و b دوعدد مختلط، و $\frac{a}{b}$ حقیقی و بزرگتر ازصفر باشد، آن‌وقت

$$|a+b|=|b|\cdot\left|۱+\frac{a}{b}\right|=|b|\left(۱+\frac{a}{b}\right)=$$
$$=|b|\left(۱+\left|\frac{a}{b}\right|\right)=|b|\left(۱+\frac{|a|}{|b|}\right)=|a|+|b|$$

علاوه بر این

$$|(z_۱-z_۲)(z_۳-z_۴)+(z_۱-z_۴)(z_۲-z_۳)|=$$
$$=|-z_۱z_۴-z_۲z_۳+z_۱z_۲+z_۴z_۳|=|(z_۱-z_۳)(z_۲-z_۴)|$$

که به‌معنای درستی اتحاد است.

این برابری (برابری ب) ازمثال ۱۰)، درهندسهٔ مسطحه بـه‌نام قضیهٔ بطلمیوس مشهور است: حاصل‌ضرب طول قطرهـای یك چهارضلعی محدب محاطی، برابراست با مجموع حاصل‌ضرب‌های دوبه‌دوی ضلع‌های روبه‌رو.

مثال ۱۱. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های $z=x+iy$ ازصفحهٔ xOy رامشخص کنیدکه، برای آن‌ها، داشته باشیم:

الف) $|z-i|=۱$؛ ب) $۱<|z|<۲$؛ ج) $|z+i|>|z-i|$؛

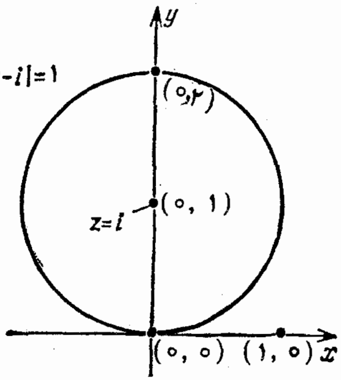
د) $\arg z=\frac{\pi}{۳}$؛ ه) $\begin{cases} ۱\leqslant|z+۱|\leqslant ۲ \\ \frac{\pi}{۲}<\arg z<\pi \end{cases}$.

حل. الف) برای هر z، عدد $|z-i|$ به‌معنای فاصلهٔ بین‌نقطه z و نقطهٔ i است. بنابراین، شرط $|z-i|=۱$ تنها برای نقطه‌هایی برقرارکـه روی محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد و به‌مرکز نقطهٔ (۱ ،۰) واقع باشند (شکل ۲۸).

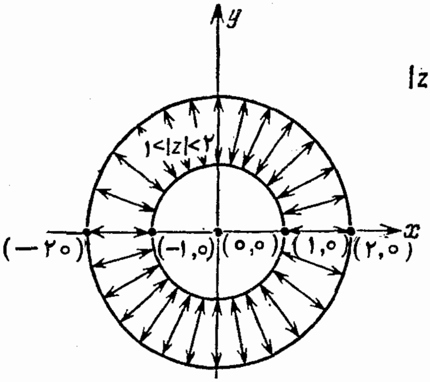
ب) برای هر z، نقطهٔ $|z|=|z-۰|$ برابر است با فاصلهٔ بین نقطهٔ z تا مبداء مختصات. بنابراین، شرط $۱<|z|<۲$، تنها برای نقطه‌هایی از صفحهٔ xOy برقراراست که دردرون حلقهٔمحدود به‌دودایرهٔ هم‌مرکز، به‌مرکز مبداء مختصات و به‌شعاع‌های ۱ و ۲ واقع باشند (شکل ۲۹).

ج) $z=x+iy$ می‌گیریم. دراین‌صورت، شرط‌مفروض به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$|x+(y+۱)i|>|x+(y-۱)i|;$$

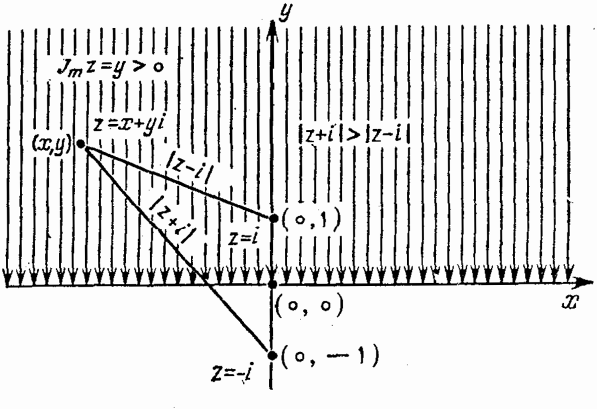


شکل ۲۸



شکل ۲۹

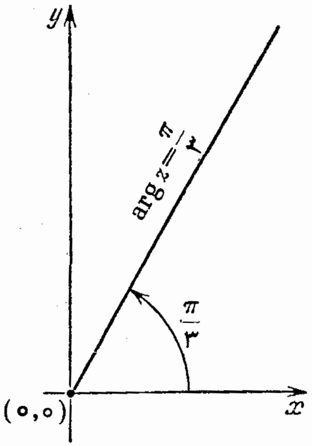
و یا
$$x^۲+(y+۱)^۲>x^۲+(y-۱)^۲$$
که از آن‌جا به‌دست می‌آید $(y+۱)^۲>(y-۱)^۲$ و یا
$$(y+۱-y+۱)(y+۱+y-۱)>۰\Rightarrow y>۰$$
به این ترتیب، رابطهٔ مفروض، دربارهٔ نقطه‌هایی از z برقرار است‌که، برای آن‌ها، داشته باشیم: $\mathrm{Im}\, z>۰$. چنین نقطه‌هایی، تمامی نیم‌صفحهٔ بالا را پر می‌کنند (شکل ۳۰). تعبیر هندسی جواب از این راه به دست می‌آید که،



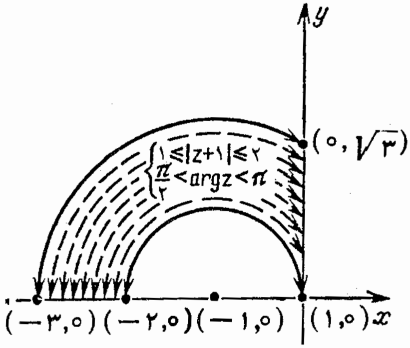
شکل ۳۰

محور Ox را، به‌عنوان عمودمنصف پاره‌خط راست بین دو نقطهٔ (۱ — ، ۰) و (۱ ، ۰) در نظر بگیریم.

د) از تعریف آرگومان اصلی عدد مختلط نتیجه می‌شود که: مجموعهٔ نقطه‌های z، با شرط $\arg z=\frac{\pi}{3}$؛ نیم‌خط راست و باز Oz را تشکیل می‌دهند که با جهت‌مثبت محور Ox، زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{3}$ ساخته‌است (مبداء مختصات، به‌این مجموعه تعلق ندارد؛ شکل ۳۱).



شکل ۳۱



شکل ۳۲

ه) مجموعهٔ مجهول، شامل نقطه‌هایی است که در ربع دوم دستگاه مختصات، در درون حلقه‌ای محدود به دو دایرهٔ هم‌مرکز به‌شعاع ۱ و ۲ و به‌مرکز (۰ ، ۱ —) قرار دارند (شکل ۳۲).

اگر $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$، شکل مثلثاتی عدد z باشد، آن‌وقت

$$z^2=|z|^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$$

و اگر این برابری را در z ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$z^3=|z|^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$$

و به‌کمك استقرای ریاضی، می‌توان برای هرعدد طبیعی n به دست آورد:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

در حالت خاص، به‌ازای $|z| = ۱$، به دستور موآور می‌رسیم:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n\in\mathbf{N}$$

دستور موآور کاربردهای فراوان دارد. مثلاً، به‌ازای $n = ۳$، می‌توان از این دستور نتیجه‌گرفت:

$$\cos ۳\varphi + i\sin ۳\varphi = (\cos^۳\varphi - ۳\cos\varphi\sin^۲\varphi) + (۳\cos^۲\varphi\sin\varphi - \sin^۳\varphi)i$$

دو عدد مختلط وقتی برابرند که بخش‌های حقیقی و، همچنین، بخش‌های موهومی آن‌ها، باهم برابر باشند:

$$\cos ۳\varphi = \cos^۳\varphi - ۳\cos\varphi\sin^۲\varphi; \quad \sin ۳\varphi = ۳\cos^۲\varphi\sin\varphi - \sin^۳\varphi$$

که با استفاده از دستور $\sin^۲\varphi + \cos^۲\varphi = ۱$، به‌این‌صورت درمی‌آیند:

$$\cos ۳\varphi = ۴\cos^۳\varphi - ۳\cos\varphi; \quad \sin ۳\varphi = -۴\sin^۳\varphi + ۳\sin\varphi$$

مثال ۱۲. عدد $z = (\sqrt{۳}+i)^{۱۷}$ را به‌صورت جبری بنویسید.

حل. ابتدا z را به‌صورت مثلثاتی می‌نویسیم و، سپس، آن‌را به‌صورت جبری درمی‌آوریم. داریم: $|\sqrt{۳}+i| = \sqrt{۳+۱} = ۲$؛ ولی برای $\varphi = \arg(\sqrt{۳}+i)$ به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{۳}}{۲}, \quad \sin\varphi = \frac{۱}{۲}, \quad ۰ \leqslant \varphi < ۲\pi$$

از این‌جا، با توجه به‌دستور موآور، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{۳}+i)^{۱۷} = \left[۲\left(\cos\frac{\pi}{۶} + i\sin\frac{\pi}{۶}\right)\right]^{۱۷} =$$

$$= ۲^{۱۷}\left(\cos\frac{۱۷\pi}{۶} + i\sin\frac{۱۷\pi}{۶}\right) = ۲^{۱۷}\left(\cos\frac{۵\pi}{۶} + i\sin\frac{۵\pi}{۶}\right)$$

اکنون، این عدد را، به‌صورت جبری، درمی‌آوریم:

$$(\sqrt{۳}+i)^{۱۷} = ۲^{۱۷}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۱}{۲}i\right) = -۲^{۱۶}\sqrt{۳} + ۲^{۱۶}i$$

مثال ۱۳. این مجموع را محاسبه کنید:

$$\sin x+\sin ۳x+\sin ۵x+\dots+\sin(۲n-۱)x،\ x\neq k\pi،\ k\in\mathbf{Z}$$

حل. این مجموع را در نظر می‌گیریم:

$$S_n(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos ۳x+i\sin ۳x)+\dots$$
$$\dots+(\cos(۲n-۱)x+i\sin(۲n-۱)x)$$

با استفاده از دستور موآور به‌دست می‌آید:

$$S_n(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^۳+\dots$$
$$\dots+(\cos x+i\sin x)^{۲n-۱}$$

که عبارت است از مجموع n جملهٔ یك تصاعد هندسی با قدر نسبت $q=(\cos x+i\sin x)^۲$ و جملهٔ اول $b_۱=\cos x+i\sin x$، بنابراین

$$S_n(x)=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)^{۲n+۱}}{۱-(\cos x+i\sin x)^۲}=$$
$$=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos(۲n+۱)x+i\sin(۲n+۱)x)}{۱-\cos^۲x+\sin^۲x-i\cdot ۲\sin x\cos x}=$$
$$=\frac{(\cos x-\cos(۲n+۱)x)+i(\sin x-\sin(۲n+۱)x)}{۲\sin x(\sin x-i\cos x)}=$$
$$=[(\cos x-\cos(۲n+۱)x)+i(\sin x-\sin(۲n+۱)x)]\times$$
$$\times(\sin x+i\cos x)(۲\sin x(\sin x-i\cos x)(\sin x+i\cos x))^{-۱}=$$
$$=\frac{(\cos x-\cos(۲n+۱)x)\sin x-(\sin x-\sin(۲n+۱)x)\cos x}{۲\sin x}+$$
$$+\frac{i\{[\sin x-\sin(۲n+۱)x]\sin x+[\cos x-\cos(۲n+۱)x]\cos x\}}{۲\sin x}$$

اگر مقدار موهومی این عبارت را جدا کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\operatorname{Im} S_n(x)=\sin x+\sin ۳x+\dots+\sin(۲n-۱)x=$$
$$=\frac{۱-\sin x\sin(۲n+۱)x-\cos x\cos(۲n+۱)x}{۲\sin x}=$$
$$=\frac{۱-\cos ۲nx}{۲\sin x}=\frac{\sin^۲nx}{\sin x}$$

و اگر بخش حقیقی را جدا می‌کردیم، به‌دست می‌آمد:

$$\cos x+\cos ۳x+\dots+\cos(۲n-۱)x=\frac{\sin ۲nx}{۲\sin x},\ x\neq k\pi,\ k\in \mathbf{Z}$$

مثال ۱۴. این مجموع‌ها را محاسبه کنید:

الف) $۱-C_n^۲+C_n^۴-C_n^۶+\dots$؛

ب) $C_n^۱-C_n^۳+C_n^۵-C_n^۷+\dots$.

حل. با توجه به‌دستور بسط دوجمله‌ای داریم:

$$(۱+i)^n=۱+C_n^۱i+C_۲^ni^۲+C_n^۳i^۳+C_n^۴i^۴+\dots+C_n^ni^n=$$
$$=۱+iC_n^۱-C_n^۲-iC_n^۳+C_n^۴+iC_n^۵-C_n^۶-iC_n^۷+\dots=$$
$$=(۱-C_n^۲+C_n^۴-C_n^۶+\dots)+i(C_n^۱-C_n^۳+C_n^۵-C_n^۷+\dots)$$

و بنا به دستور موآور

$$(۱+i)^n=(\sqrt{۲})^n\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)^n=(\sqrt{۲})^n\left(\cos\frac{n\pi}{۴}+i\sin\frac{n\pi}{۴}\right)$$

و اگر مقدارهای حقیقی و همچنین، مقدارهای موهومی $(۱+i)^n$ را برابر قرار دهیم:

$$۱-C_n^۲+C_n^۴-C_n^۶+\dots=۲^{\frac{n}{۲}}\cos\frac{n\pi}{۴};$$

$$C_n^۱-C_n^۳+C_n^۵-C_n^۷+\dots=۲^{\frac{n}{۲}}\sin\frac{n\pi}{۴}$$

این دو دستور را، به‌صورت زیرهم می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=۰}^{[\frac{n}{۲}]}(-۱)^kC_n^{۲k}=۲^{\frac{n}{۲}}\cos\frac{n\pi}{۴};\qquad \sum_{k=۰}^{[\frac{n+۱}{۲}]}(-۱)^kC_n^{۲k+۱}=۲^{\frac{n}{۲}}\sin\frac{n\pi}{۴}$$

که در آن‌ها، $[a]$، به‌معنای بخش درست عدد a است.

عدد w را ریشهٔ nام ($n\in\mathbf{N}$ ، $n>۱$) عدد مختلط z گویند، وقتی که داشته باشیم: $z=w^n$. مثلاً $i-$ و i ریشه‌های دوم عدد ۱ – هستند، زیرا $i^۲=(-i)^۲=-۱$.

به‌این‌ترتیب، برای پیدا کردن ریشه‌های nام عدد z، باید همهٔ جواب‌های

معادلهٔ $z = w^n$ را به‌دست آورد. در حالت $z = ۰$، تنها یك جواب داریم: $w = ۰$. درحالت $z \neq ۰$، اگر عددهای z و w را به‌صورت مثلثاتی بنویسیم، معادلهٔ $w^n = z$، با توجه به‌دستور موآور، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

که در آن: $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ و $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

دوعدد مختلط وقتی برابرند که مدول‌ها باهم برابر باشند و آرگومان‌ها اختلافی برابر $۲k\pi$ داشته باشند، یعنی

$$\rho^n = r \quad \text{و} \quad n\varphi = \alpha + ۲k\pi;$$

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{و} \quad \varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{۲k\pi}{n}, \ (k\in\mathbf{Z})$$

به‌این‌ترتیب، همهٔ جواب‌های معادلهٔ $w^n = z$ را می‌توان این‌طور نوشت:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right], \ k\in\mathbf{Z}$$

که در آن، k می‌تواند همهٔ عددهای از ۱ تا $n-۱$ باشد؛ در نتیجه همهٔ جواب‌های $w_۰$، $w_۱$، ...، $w_{n-۱}$ به دست می‌آید. به‌ازای بقیهٔ مقدارهای $k\in\mathbf{Z}$، دوباره به همین جواب‌ها می‌رسیم. بنا براین، معادلهٔ $w^n = z$، درست n جواب دارد:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right]$$
$$k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۱ \qquad (۵)$$

از این‌جا معلوم می‌شود که، همهٔ این عددها، مدولی برابر دارند در آرگومان‌های اصلی خود، به‌اندازهٔ $\frac{۲k\pi}{n}$ $(k = ۰, ۱, \ldots, n-۱)$ با هم فرق دارند. به این ترتیب، عددهای w_k، روی صفحهٔ مختلط، راس‌های یك nضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند که در دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt[n]{r}$ و به‌مرکز مبداء مختصات محاط است.

نماد $\sqrt[n]{a+bi}$ به‌معنای n عدد است: $z_۰، z_۱، \dots، z_{n-۱}$.

برای پیدا کردن مقدارهای $\sqrt{a+bi}$ (a و b، عددهایی حقیقی‌اند)، اغلب می‌توان بـه‌جای شکل مثلثاتی عدد و دستور موآور، از تعریف ریشه استفاده کرد. اگر $z=x+iy$ و $z^۲=a+bi$، آن‌وقت به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$x^۲-y^۲=a، \quad ۲xy=b$$

که در نتیجه، برای $\sqrt{a+bi}$، دوجواب $z_۰=x_۰+iy_۰$ و $z_۱=x_۱+iy_۱$ به‌دست می‌آید. مثلاً، اگر $\sqrt{۳+۴i}=x+iy$، آن‌وقت

$$x^۲-y^۲=۳، \quad xy=۲$$

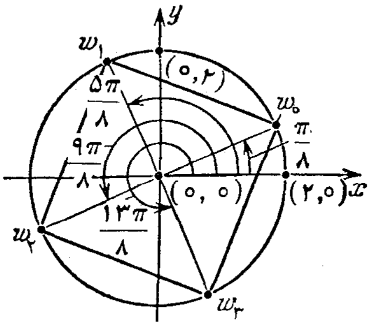
که دارای دو جواب است: (۲، ۱) و (−۲، −۱). به‌این ترتیب، دو عدد مختلط به‌عنوان جواب‌های $\sqrt{۳+۴i}$ به‌دست می‌آید: $۲+i$ و $-۲-i$.

مثال ۱۵. همهٔ عددهای w را، به‌شرط $w^۴=۱۶i$ پیدا کنید.

حل. چون $۱۶i=۱۶\left(\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}\right)$، بنابراین با استفاده از دستور (۵)، به‌دست می‌آید:

$$w_k=\sqrt[۴]{۱۶}\left[\cos\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{۲k\pi}{۴}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۸}+\frac{۲k\pi}{۴}\right)\right]، \quad k=۰، ۱، ۲، ۳$$

و بنابراین



شکل ۳۳

$$w_{\circ}=۲\left(\cos\frac{\pi}{۸}+i\sin\frac{\pi}{۸}\right),\ \ w_{۱}=۲\left(\cos\frac{۵\pi}{۸}+i\sin\frac{۵\pi}{۸}\right),$$

$$w_{۲}=۲\left(\cos\frac{۹\pi}{۸}+i\sin\frac{۹\pi}{۸}\right),\ \ w_{۳}=۲\left(\cos\frac{۱۳\pi}{۸}+i\sin\frac{۱۳\pi}{۸}\right)$$

این عددها، در صفحهٔ مختلط، متناظرند با نقطه‌های چهار راس مربعی که در دایرهٔ به‌شعاع ۲ و به‌مرکز مبداء مختصات، محاط باشد (شکل ۳۳).

مثال ۱۶. این معادله را حل کنید:

$$(z+a)^n=z^n,\ \ n\in\mathbf{N},\ \ a\in\mathbf{R},\ \ a\neq\circ$$

حل. طبق شرط $a\neq\circ$، بنابراین، $z=\circ$ ریشهٔ این معادله نیست، یعنی هم‌ارز با معادلهٔ زیر است:

$$\left(۱+\frac{a}{z}\right)^n=۱$$

برای این‌که z، ریشهٔ این معادله باشد، باید عدد $\left(۱+\frac{a}{z}\right)$ ریشهٔ n ام عدد واحد باشد. از این‌جا معلوم می‌شود که، معادلهٔ اصلی، $n-۱$ ریشه دارد: $z_۱$، ...، $z_{n-۱}$، که از برابری زیر به‌دست می‌آیند:

$$۱+\frac{a}{z_k}=\cos\frac{۲k\pi}{n}+i\sin\frac{۲k\pi}{n},\ \ k=۱،۲،\dots،n-۱$$

و بنابراین

$$z_k=\frac{a}{\cos\frac{۲k\pi}{n}-۱+i\sin\frac{۲k\pi}{n}}=\frac{a\left(\cos\frac{۲k\pi}{n}-۱-i\sin\frac{۲k\pi}{n}\right)}{۲\left(۱-\cos\frac{۲k\pi}{n}\right)}=$$

$$=\frac{a}{۲}\left(-۱-i\frac{\sin\frac{۲k\pi}{n}}{۱-\cos\frac{۲k\pi}{n}}\right)=-\frac{a}{۲}\left(۱+i\frac{۲\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{۲\sin^{۲}\frac{k\pi}{n}}\right)=$$

$$=-\frac{a}{۲}\left(۱+\operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}\right)$$

به‌این ترتیب $z_k=-\frac{a}{۲}\left(۱+i\,cotg\frac{k\pi}{n}\right)$ $(k=۱، ۲، …، n-۱)$.

یادآوری می‌کنیم که عبور از معادلهٔ $(z+a)^n=z^n$ به‌معادلهٔ $z+a=z$، حتی یکی از جواب‌های معادله‌را هم به‌ما نمی‌دهد. درواقع، برابری $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{w}$ (که در آن، z و w، عددهایی مختلط‌اند) به‌این‌معناست که، برای هر مقدار $\sqrt[n]{z}$ مقدار $\sqrt[n]{w}$ را برابر با آن پیدا کنیم و برعکس. بنابراین، دو برابری $\sqrt[n]{z^n}=\sqrt[n]{w^n}$ و $z=w$، در حالت کلی، هم‌ارز نیستند.

مثال ۱۷. این معادله را، در مجموعهٔ عددهای مختلط، حل کنید:

$$z^۵+z^۴+z^۳+z^۲+z+۱=۰$$

حل. چون $z=۱$ در این‌معادله صدق‌نمی‌کند، بنابراین معادلهٔ‌مفروض به‌ازای $z\neq۱$، با معادلهٔ زیر هم‌ارز است:

$$(z-۱)(z^۵+z^۴+z^۳+z^۲+z+۱)=۰\Rightarrow z^۶=۱$$

جواب‌های معادلهٔ اخیر، به‌کمک دستور (۵)، به‌دست می‌آیند:

$$z_۰=۱$$

$$z_۱=\cos\left(۰+\frac{۲\pi}{۶}\right)+i\sin\left(۰+\frac{۲\pi}{۶}\right)=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i;$$

$$z_۲=\cos\left(۰+\frac{۲\pi\times۲}{۶}\right)+i\sin\left(۰+\frac{۲\pi\times۲}{۶}\right)=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i;$$

$$z_۳=\cos\left(۰+\frac{۲\pi\times۳}{۶}\right)+i\sin\left(۰+\frac{۲\pi\times۳}{۶}\right)=-۱;$$

$$z_۴=-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i;\quad z_۵=\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

و $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ و $z_۵$، ریشه‌های معادلهٔ مفروض‌اند.

در مجموعهٔ عددهای مختلط، هرمعادلهٔ درجه دوم $z^۲+pz+q=۰$، با ضریب‌های حقیقی p و q، دو ریشه دارد (متمایز یا منطبق برهم) که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند:

الف) اگر $D=p^۲-۴q\geqslant ۰$، آن‌وقت

$$z_۱=\frac{-p+\sqrt{D}}{۲},\quad z_۲=\frac{-p-\sqrt{D}}{۲} \qquad (۶)$$

ب) اگر $D<۰$، آن‌وقت

$$z_۱=\frac{-p+i\sqrt{|D|}}{۲},\quad z_۲=\frac{-p-i\sqrt{|D|}}{۲} \qquad (۷)$$

مثال ۱۸. معادلهٔ $z^۲+z+۱=۰$ را در مجموعهٔ عددهای مختلط حل کنید.

حل. $D=۱-۴=-۳$ و بنا به دستور (۷) داریم:

$$z_۱=-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i,\quad z_۲=-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$$

معادلهٔ درجه دوم $z^۲+\alpha z+\beta=۰$ هم‌که، در آن، α و β عددهایی مختلط‌اند، دارای دو ریشه است:

$$z_۱=\frac{-\alpha+w_۱}{۲},\quad z_۲=\frac{-\alpha+w_۲}{۲}$$

که در آن $w_۱$ و $w_۲$ در شرط $w^۲=D=\alpha^۲-۴\beta$ صدق می‌کنند.

مثال ۱۹. این معادله را حل کنید:

$$z^۲+(۳+۲i)z-۷+۱۷i=۰$$

حل. داریم:

$$z_۱=\frac{-۳-۲i+w_۱}{۲},\quad z_۲=\frac{-۳-۲i+w_۲}{۲}$$

که در آن‌ها، $w_۱$ و $w_۲$ عددهایی هستند که از رابطهٔ

$$w^۲=\alpha^۲-۴\beta=(۳+۲i)^۲-۴(-۷+۱۷i)=۳۳-۵۶i$$

به‌دست می‌آیند. $w=x+iy$ می‌گیریم. در این‌صورت

$$(x+iy)^۲=۳۳-۵۶i \Rightarrow x^۲-y^۲+۲xyi=۳۳-۵۶i$$

از آن‌جا $x^۲-y^۲=۳۳$ و $xy=-۲۸$. با حل این‌دستگاه به‌دست‌می‌آید:

$$x_۱=۷,\ y_۱=-۴;\quad x_۲=-۷,\ y_۲=۴$$

و بنابراین:

$$z_۱ = \frac{-۳-۲i+۷-۴i}{۲} = ۲-۳i،$$
$$z_۲ = \frac{-۳-۲i-۷+۴i}{۲} = -۵+i$$

اهمیت اصلی عددهای مختلط درجبر این است که، روشن می‌کند، هر معادلهٔ جبری درجهٔ n به‌صورت

$$a_n z^n + a_{n-۱} z^{n-۱} + \dots + a_۱ z + a_۰ = ۰ \qquad (a_n \neq ۰)$$

باضریب‌های حقیقی یا مختلط، همیشه درست n ریشه دارد (که البته ممکن است برخی از آن‌ها باهم برابر باشند)؛ درضمن چندجمله‌ای واقع در سمت چپ برابری را، همیشه می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$a_n (z-z_۱)^{k_۱} (z-z_۲)^{k_۲} \dots (z-z_m)^{k_m}$$

که در آن، $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n عددهایی مختلط ومتمایزند و، برای عددهای طبیعی $k_۱$، ...، k_m داریم: $k_۱+k_۲+\dots+k_m=n$. تنها $z_۱$، $z_۲$، ...، z_m ریشه‌های معادلهٔ ما هستند و، درضمن، می‌گویند: $z_۱$ ریشهٔ‌تکراری ازمرتبهٔ $k_۱$، $z_۲$ ریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ $k_۲$، ...، z_m ریشهٔ تکراری ازمرتبهٔ k_m است.

مثال ۲۰. این معادله را حل کنید:

$$z^۳ + \frac{۱}{۲} z^۲ + \frac{۱}{۲} z - \frac{۱}{۲} = ۰$$

حل. با فرض $t = ۲z$، معادله به‌این صورت درمی‌آید:

$$t^۳ + t^۲ + ۲t - ۴ = ۰$$

که $t_۱ = ۱$ یکی از ریشه‌های آن است. بنابراین عبارت سمت‌چپ برابری بر $t-۱$ بخش‌پذیراست و درنتیجه به‌ضرب دوعامل درجه اول ودرجهٔ دوم تجزیه می‌شود:

$$(t-۱)(t^۲+۲t+۴) = ۰$$

ازاین‌جا، $t_۲ = -۱+\sqrt{۳}i$ و $t_۳ = -۱-\sqrt{۳}i$. به‌این ترتیب، ریشه‌های معادلهٔ مفروض، چنین‌اند:

$$z_۱ = \frac{۱}{۲}، \; z_۲ = -\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} i، \; z_۳ = -\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} i$$

مثال ۲۱. برای هرعدد حقیقی a، همهٔ عددهای مختلط z را پیدا کنید که دراین برابری صدق کنند:

a) $|z|^۲+۲iz+۲a(۱+i)=۰$; b) $z|z|-az-i=۰$

حل. a) $z=x+yi$ می‌گیریم؛ دراین‌صورت داریم:

$$x^۲+y^۲+۲i(x+yi)+۲a(۱+i)=۰$$

از آن‌جا، برای محاسبه x و y، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$x^۲+y^۲-۲y+۲a=۰,\qquad x+a=۰$$

از معادلهٔ دوم به‌دست می‌آید: $x=-a$؛ که اگر درمعادلهٔ اول قراردهیم:

$$y^۲-۲y+a^۲+۲a=۰$$

ریشه‌های این معادله، تنها وقتی حقیقی‌اند که $D=۴-۴a^۲-۸a\geqslant ۰$. برای این مقدارهای a داریم:

$$y_۱=۱+\sqrt{۱-۲a-a^۲},\quad y_۲=۱-\sqrt{۱-۲a-a^۲}$$

درضمن، اگر $۱-۲a-a^۲=۰$، آن‌وقت $y_۱=y_۲$. نابرابری $۱-۲a-a^۲\geqslant ۰$، منجر به $-۱-\sqrt{۲}\leqslant a\leqslant -۱+\sqrt{۲}$ می‌شود. به‌این ترتیب

$$-۱-\sqrt{۲}\leqslant a\leqslant -۱+\sqrt{۲}\Rightarrow z_{۱,۲}=$$
$$=-a+i(۱\pm\sqrt{۱-۲a-a^۲});$$

$|a|>\sqrt{۲}-۱\Rightarrow$ معادله جواب ندارد

b) معادلهٔ مفروض را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$z(|z|-a)=i$$

چون $|z|$ و a، عددهایی حقیقی‌اند، بنابراین z باید عددموهومی‌خالص باشد. فرض می‌کنیم $z=ci$، به‌دست می‌آید:

$$ci|c|-aci-i=۰\Rightarrow c|c|-ac-۱=۰$$

و معادلهٔ اخیر، با مجموعهٔ دودستگاه زیر، هم‌ارز است

$$\begin{cases}c\geqslant ۰\\ c^۲-ac-۱=۰,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}c<۰\\ -c^۲-ac-۱=۰\end{cases}$$

معادلهٔ $c^۲-ac-۱=۰$ دوریشه دارد؛ $c_{۱,۲}=\frac{۱}{۲}(a\pm\sqrt{a^۲+۴})$ (به‌ازای هرمقدار a). شرط $c\geqslant ۰$ (به‌ازای هرمقدار a) تنها با عدد $c_۱=\frac{a+\sqrt{a^۲+۴}}{۲}$ سازگار است.

معادلهٔ $a^۲=ac+۱=۰$، باشرط $a^۲-۴\geqslant ۰$، یعنی برای $|a|\geqslant ۲$، ریشهٔ حقیقی دارد و ریشه‌های آن (به‌ازای $|a|\geqslant ۲$) عبارتند از

$$c_۳=\frac{-a+\sqrt{a^۲-۴}}{۲},\quad c_۴=\frac{-a-\sqrt{a^۲-۴}}{۲}$$

روشن است که، به‌ازای $a\geqslant ۲$، هردوریشهٔ $c_۳$ و $c_۴$ ازصفر کوچکتر و به‌ازای $a\leqslant -۲$ هردوریشه ازصفر بزرگترند. به‌این ترتیب، برای معادلهٔ اصلی داریم:

به‌ازای $a<۲$، تنها یك ریشهٔ $\frac{۱}{۲}(a+\sqrt{a^۲+۴})i$؛

به‌ازای $a\geqslant ۲$، سه ریشهٔ $\frac{۱}{۲}(a+\sqrt{a^۲+۴})i$، $-\frac{۱}{۲}(a+\sqrt{a^۲-۴})i$ و $\frac{۱}{۲}(-a+\sqrt{a^۲-۴})i$.

مثال ۲۲. درستی اتحاد

$$z^{۲n+۱}+۱=(z+۱)\prod_{k=۱}^{n}\left(z^۲+۲z\cos\frac{۲k\pi}{۲\pi+۱}+۱\right)$$

و دستورهای

$$\prod_{k=۱}^{n}\cos\frac{k\pi}{۲n+۱}=\frac{۱}{۲^n},\quad \prod_{k=۱}^{n}\sin\frac{k\pi}{۲n+۱}=\frac{\sqrt{۲n+۱}}{۲^n}$$

را ثابت کنید.

حل. از آن‌جا که

$$z^{۲n+۱}+۱=(z+۱)(z^{۲n}-z^{۲n-۱}+\dots-z+۱)$$

و ریشه‌های معادلهٔ $z^{۲n+۱}+۱=۰$ با این دستور داده می‌شود:

$$z_k=\cos\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n+۱}+i\sin\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n+۱}\quad k=۰، \pm۱، \pm۲،\dots، \pm n$$

(که در آن $z_n=-۱$)، بنابراین، با تقسیم $۲n$ ریشهٔ باقی‌مانده (غیر از z_n) به n زوج دو به‌دو مزدوج $(z_{n-۱}، z_{-n})$، $(z_{n-۲}، z_{-(n-۱)})$، ...، $(z_۱، z_{-۲})$ و $(z_۰، z_{-۱})$، به‌دست می‌آید:

$$z^{۲n}-z^{۲n-۱}+\dots-z+۱=\prod_{k=۰}^{n-۱}\left(z^۲-۲z\cos\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n+۱}+۱\right)$$

وچون

$$\cos\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n+۱}=-\cos\left(\pi-\frac{(۲k+۱)\pi}{۲n+۱}\right)=-\cos\frac{۲(n-k)\pi}{۲n+۱}$$

نتیجه می‌شود:

$$z^{۲n}-z^{۲n-۱}+\dots-z+۱= \qquad (۸)$$

$$=\prod_{k=۰}^{n-۱}\left(z^۲+۲z\cos\frac{۲(n-k)\pi}{۲n+۱}+۱\right)=\prod_{k=۱}^{n}\left(z^۲+۲z\cos\frac{۲k\pi}{۲n+۱}+۱\right)$$

وبه‌این ترتیب، درستی اتحاد موردنظر ثابت شد.

اگر در (۸) قرار دهیم $z=۱$، به‌دست می‌آید:

$$۱=\prod_{k=۱}^{n}۲\left(۱+\cos\frac{۲k\pi}{۲n+۱}\right)=\prod_{k=۱}^{n}\left(۲\cos\frac{k\pi}{۲n+۱}\right)^۲=$$

$$=۲^{۲n}\left(\prod_{k=۱}^{n}\cos\frac{k\pi}{۲n+۱}\right)^۲$$

و درنتیجه

$$\prod_{k=۱}^{n}\cos\frac{k\pi}{۲n+۱}=\frac{۱}{۲^n}$$

اکنون در (۸)، $z=-۱$ قرار می‌دهیم:

$$۲n+۱=\prod_{k=۱}^{n}۲\left(۱-\cos\frac{۲k\pi}{۲n+۱}\right)=\prod_{k=۱}^{n}\left(۲\sin\frac{k\pi}{۲n+۱}\right)^۲=$$

$$=۲^{۲n}\left(\prod_{k=۱}^{n}\sin\frac{k\pi}{۲n+۱}\right)^۲$$

و از آن‌جا $\prod_{k=۱}^{n} sin\frac{k\pi}{۲n+۱}=\frac{\sqrt{۲n+۱}}{۲^{n}}$.

تکلیف ۱.

۱. محاسبه کنید: $i^{۳}$، $i^{۴}$، $\frac{۱}{i^{۳}}$، $i^{۲۳۱}$، $i^{۳۱۸}$.

۲. مطلوب است $z_{۱}+z_{۲}$، $z_{۱}-z_{۲}$ و $z_{۱}z_{۲}$، اگر

۱) $z_{۱}=۱$، $z_{۲}=۱+i$;   ۲) $z_{۱}=-i+۳$، $z_{۲}=۲i+۱$

۳. مزدوج هریك از این عددها را پیدا کنید:

۱) $۲+۳i$;   ۲) $۲i$;   ۳) ۳;   ۴) $\frac{۱}{i^{۳}}$;

۵) $(۱+i)(۲+۳i)$;   ۶) $(۱+i)^{۲}$

۴. عددها را به‌صورت جبری بنویسید:

۱) $\frac{۱}{i}$;   ۲) $(۲i)^{۳}$;   ۳) $\frac{۱+i}{۲i+۱}$;   ۴) $\frac{۳+i}{(۱+i)(۱-۲i)}$;

۵) $\frac{۲-۱۷i}{۳}-\frac{۲+i}{۳+i}$;   ۶) $\frac{۲-i}{i+۲}+(i-۱)^{۲}$

۵. عمل‌ها را انجام دهید:

۱) $(۲+۳i)(۳-۲i)+(۲-۳i)(۳+۲i)$;

۲) $[(a-bi)+(۳a-۲bi)]i$;

۳) $(۱+i)^{۳}-(۱-i)^{۳}$;   ۴) $\frac{۳+i}{۳-i}+\frac{۳-i}{۳+i}$;

۵) $\frac{(۱+i)(۲+i)}{۲-i}-\frac{(۱-i)(۲-i)}{۲+i}$;

۶) $(۲-i)^{۲}+(۱+i)^{۴}-\frac{۷-i}{۲+i}$

تکلیف ۲.

۱. محاسبه کنید: $i^{۵}$، $i^{۶}$، $i^{۸}$، $\frac{۱}{i^{۷}}$، $i^{۱۱۱}$، $i^{۲۰۲۴}$.

۲. مطلوب است $z_۱+z_۲$، $z_۱-z_۲$ و $z_۱z_۲$ به‌شرط

۱) $z_۱=۱-۲i$، $z_۲=۱+۲i$; ۲) $z_۱=۲+i$، $z_۲=۳i+۱$

۳. مزدوج عدد را پیدا کنید:

۱) $i(۱+i)$; ۲) $-۳i$; ۳) -۲; ۴) $\frac{۱}{i^{۲۳}}$;

۵) $(۲-i)(i+۳)$; ۶) $(۱-i)^۲$

۴. عدد را به‌صورت جبری بنویسید:

۱) $\frac{۵i}{۲+i}$; ۲) $\frac{۱۸}{\sqrt{۵}-۲i}$; ۳) $\frac{۳+۴i}{i}$ ۴) $\frac{۲+i}{۳i-۱}+(۲i-۱)^۲$;

۵) $\frac{(۲i+۳)^۲}{i-۱}-\frac{i}{i+۱}$; ۶) $(۱-i)^۹$

۵. عمل‌ها را انجام دهید:

۱) $(۳+۴i)(۴-۳i)+(۳-۴i)(۴+۳i)$;

۲) $(۱-i)^۴+(۱+i)^۴$; ۳) $(۱-i)(۴+۳i)(۲+i)(۳+i)$;

۴) $\frac{۲-i}{۲+i}+\frac{۲+i}{۲-i}$; ۵) $\frac{(۲+i)^۳-(۲-i)^۳}{(۲+i)^۲-(۲-i)^۲}$;

۶) $\frac{\sqrt{۱+m}+i\sqrt{۱-m}}{\sqrt{۱+m}-i\sqrt{۱-m}}-\frac{\sqrt{۱-m}+i\sqrt{۱+m}}{\sqrt{۱-m}-i\sqrt{۱+m}}$

تکلیف ۳.

۱. این عددهای مختلط را، با نقطه‌هایی، روی صفحه نشان دهید:

$$۱+i،\ ۲i،\ -۳،\ ۲i-۳،\ \frac{۱}{۱+i}$$

۲. مدول و آرگومان عدد مختلط را پیدا کنید:

۱) $-i$; ۲) ۲; ۳) $۲-i$; ۴) $\frac{۱}{i+۱}$;

۵) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$; ۶) $(i+۱)(i-۲)$

۳. عدد را به‌صورت مثلثاتی بنویسید:

$$۱)\ i،\ \frac{۱}{۲}،\ \sqrt{۳}،\ -۲،\ -۵i;\quad ۲)\ -۴+۴i،\ \frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}i;$$

$$۳)\ (۱+۲i)(۱-i);\quad ۴)\ \frac{۱}{i-۱}،\ \frac{۱-i}{۳+i};\quad ۵)\ \cos\frac{\pi}{۱۰}+i\sin\frac{\pi}{۱۰};$$

$$۶)\ \cos\frac{\pi}{۳}-i\sin\frac{\pi}{۳};\quad ۷)\ ۱+\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴};\quad ۸)\ ۲+i\sin\frac{\pi}{۶}$$

۴. عدد را به‌صورت جبری بنویسید:

$$۱)\ (۲+i)^{۶}،\ \frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\cos\frac{۳\pi}{۴}+i\sin\frac{۳\pi}{۴}\right)،\quad (-۱+i\sqrt{۳})^{۶۰};$$

$$۲)\ \left(\frac{i+۱}{۱-i}\right)^{۱۰۰}\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)،\ (۲-۲i)^{۷}\left(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{۱-i}\right)^{۴۰}$$

تکلیف ۴.

۱. نقطه‌های متناظر این عددها را، روی صفحه، پیدا کنید:

$$-\frac{i}{۲}،\ ۲،\ ۱-i،\ \frac{i}{۱+i}،\ (۱-i)^{۴}$$

۲. مدول و آرگومان عدد مختلط را پیدا کنید:

$$۱)\ -۴i;\quad ۲)\ ۵+i\sqrt{۳};\quad ۳)\ i;\quad ۴)\ -۷;\quad ۵)\ ۳-۲\sqrt{۲}i;$$
$$۶)\ (۳+i):(۴-i)$$

۳. عددها را به‌صورت مثلثاتی بنویسید:

$$۱)\ ۲i،\ ۵،\ -۲i،\ -۳;\qquad ۲)\ \frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{i}{۲}،\ ۲+i;$$

$$۳)\ (۱-i)(۲+i);\quad ۴)\ \cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴}،\ -۳\left(\cos\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶}\right);$$

$$۵)\ (۲+i):(۱-i)،\ ۱-\sin\alpha+i\cos\alpha\left(۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}\right)$$

۴. عددها را به‌صورت جبری بنویسید:

$$۱)\ (۱+i)^{۳۰}،\ (۱-i\sqrt{۳})^{۱۵};$$

$۲)\ \left(-\cos\frac{\pi}{۱۰}-i\sin\frac{\pi}{۱۰}\right)^{۱۵},\ \left(\frac{۱-i}{۱+i}\right)^{۳};$

$۳)\ \left(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{i-۱}\right)^{۲۰},\ \frac{۱}{(\sqrt{۳}-i)^{۱۷}};\quad ۴)\ (۱+i)^{۸}(۱-i\sqrt{۳})^{۶}$

تکلیف ۵.

۱. همهٔ ریشه‌های nام عدد a را پیدا کنید و تعبیر هندسی آن‌ها را بدهید:

$۱)\ a=-۱,\ n=۳;\quad ۲)\ a=۱+i\sqrt{۳},\ n=۲;$

$۳)\ a=۱+i,\ n=۴;\quad ۴)\ a=۲,\ n=۴$

۲. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌ها را در صفحهٔ xOy پیدا کنید، اگر

$۱)\ |z|=۱;\quad ۲)\ |z+۲|=۲;\quad ۳)\ |۲z-۳|\leqslant ۱;$

$۴)\ \operatorname{Im} z>۲;\quad ۵)\ \operatorname{Re} z<۰;\quad ۶)\ ۴>|z+۲i|\geqslant ۳;$

$۷)\ \frac{\pi}{۴}\leqslant\arg z<\frac{۲\pi}{۳};\quad ۸)\ \arg z=\frac{\pi}{۴};\quad ۹)\ |z+۲i|=|z|;$

$۱۰)\ ۱+z=|z+i|;\quad ۱۱)\ |z+۲|>|z|;$

$۱۲)\ |z-۱|=|z+۱|=|z+۱-۲i|$

۳. معادله را حل کنید:

$۱)\ z^{۴}-۱۶=۰;\quad ۲)\ z^{۲}+z+۵=۰;\quad ۳)\ z+|z|=۳;$

$۴)\ z^{۲}=\bar{z}^{۲}$

۴. معادلهٔ خط راست $y=kx+b$ را (k و b، عددهایی حقیقی‌اند)، به‌صورت مختلط بنویسید.

۵. همهٔ عددهای حقیقی x را پیدا کنید که در این نابرابری صدق کنند:

$$|۴i-۱-\log_{۲}x|\geqslant ۵$$

تکلیف ۶.

۱. همهٔ ریشه‌های nام عدد a را پیدا کنید و تعبیر هندسی آن‌ها را بدهید:

$۱)\ a=-۱,\ n=۲;\quad ۲)\ a=۴,\ n=۵;\quad ۳)\ a=i,\ n=۳;$

$۴)\ a=i-۱,\ n=۳;\ ۵)\ a=-i,\ n=۴;\ ۶)\ a=i-۲,\ n=۴$

۲. روی صفحهٔ xOy مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی را معین کنید که برای آن‌ها داشته باشیم:

$$۱)\ |z-۱+i|\leqslant ۲;\quad ۲)\ |z-۲-۳i|>۱;\quad ۳)\ |z|>۲+\operatorname{Im} z;$$

$$۴)\ \operatorname{Re} z\leqslant ۲;\quad ۵)\ \begin{cases}|z|\geqslant ۲\\ \frac{\pi}{۶}<\arg z\leqslant\frac{\pi}{۳};\end{cases}\quad ۶)\ |۳z-۴|\geqslant ۱;$$

$$۷)\ -\operatorname{Re} z+|z|\leqslant ۰;\quad ۸)\ ۰\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant ۱;$$

$$۹)\ \frac{\pi}{۴}\leqslant\arg(z+۱-i)\leqslant\frac{۳\pi}{۴};\quad ۱۰)\ |z+i|=|z-i|;$$

$$۱۱)\ ۲\leqslant|۲z+۱|\leqslant ۴;\quad ۱۲)\ |z|>|z+۱|$$

۳. معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ z^{۳}=۲۷;\quad ۲)\ z^{۲}+۳z+۴=۰;\quad ۳)\ z+|z|=۲;$$

$$۴)\ z^{۳}=-i$$

۴. معادلهٔ دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}+۲x=۰$ را به‌صورت مختلط بنویسید.

۵. همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(z+i)^{۴}-(z-i)^{۴}=۰$ را پیدا کنید.

تکلیف ۷.

۱. اگر $z=x+iy$، عدد $(z)^{-۲}+(\bar{z})^{-۲}$ را به صورت جبری بنویسید.

۲. تعبیر هندسی نامعادله را بدهید. علامت برابری با چه شرط‌هایی پیش می‌آید؟

$$۱)\ |z_{۱}+z_{۲}|\leqslant|z_{۱}|+|z_{۲}|;\quad ۲)\ |z_{۱}-z_{۲}|\geqslant\big||z_{۱}|-|z_{۲}|\big|$$

۳ ثابت کنید، این دستگاه، جواب ندارد:

$$|z+۱-i|=\sqrt{۲},\ \operatorname{Re} z\geqslant ۲$$

۴. نقطه‌های $z_{۱}=۱+i$ و $z_{۲}=۲-۳i$ روی صفحهٔ مختلط داده شده‌اند. همهٔ عددهای مختلطی را پیدا کنید که متناظر با نقطه‌های نیمساز زاویهٔ $z_{۱}Oz_{۲}$ باشند.

۵. اگر $|z_۱|=|z_۲|=|z_۳|=۱$ و $z_۱+z_۲+z_۳=۰$، ثابت کنید، نقطه‌های $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ راس‌های یک‌مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهند که در دایره‌ای به‌شعاع واحد محاط شده است.

تکلیف ۸.

۱. باشرط $(۱+i)^n=(۱-i)^n$، همهٔ عددهای طبیعی n راپید کنید.

۲. ثابت کنید: $\overline{z_۱z_۲z_۳}=\bar{z}_۱\bar{z}_۲\bar{z}_۳$.

۳. همهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ مختلط را پیدا کنید که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$۱)\ \begin{cases}\arg z=\dfrac{\pi}{۶}\\ \log_{\frac{۱}{۲}}|z-۱|\geqslant ۰\end{cases} \quad ; \quad ۲)\ |\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|=۱$$

۴. درستی این اتحاد را تحقیق کنید و معنای هندسی آن‌را بدهید:

$$|z_۱+z_۲|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=۲(|z_۱|^۲+|z_۲|^۲)$$

۵. ثابت کنید، اگر $|z_۱|=|z_۲|=|z_۳|\neq ۰$، آن‌وقت

$$\arg\frac{z_۳-z_۲}{z_۳-z_۱}=\frac{۱}{۲}\arg\frac{z_۲}{z_۱}$$

تکلیف ۹.

۱. دستگاه $\begin{cases}z^۲+|z|=۰\\ \bar{z}=-۴z\end{cases}$ را حل کنید.

۲. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ z^۶=۱;\quad ۲)\ ۱۶z^۴+۴z^۲+۱=۰;\quad ۳)\ (z+۱)^۸=(z-۱)^۸;$$

$$۴)\ z^۲-(۲+۳i)z+۴i-۲=۰;\quad ۵)\ z^۳-۴z^۲-۴z-۵=۰;$$

$$۶)\ (z^۲+z+۱)(z^۲+z+۲)=۱۲$$

۳. مطلوب است باقی‌ماندهٔ تقسیم $z^۴+۲z^۳-۱۳z^۲-۱۴z+۲۴$ بر

$$۱)\ z-i;\quad ۲)\ z+i$$

۴. $z^۴+۴$ را به‌ضرب عامل‌های خطی تجزیه کنید.

۵. عددمختلط a را طوری پیدا کنید که، این‌معادله، دست کم یک ریشهٔ حقیقی داشته باشد:

$$z^۲+(a+۱)z+a^۲=۰$$

تکلیف ۱۰.

۱. این دستگاه را حل کنید:

$$z+۲w=۱+i،\ \ ۳z+iw=۲-۳i$$

۲. معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ z^۲-۳z+۳+i=۰;\quad ۲)\ (z^۲+z)^۴=۱;\quad ۳)\ ۲z^۶=-۵;$$
$$۴)\ \bar{z}=z^{n-۱}(n\in\mathbf{N});\quad ۵)\ z^۳+۸z^۲+۱۵z+۱۸=۰;$$
$$۶)\ (z^۲+۳z+۶)^۲+۲z(z^۲+۳z+۶)-۳z^۲=۰$$

۳. از تقسیم چندجمله‌ای درجهٔ nام $P_n(z)$ $(n\geqslant ۲)$، بر $z-i$ به‌باقی‌ماندهٔ A و از تقسیم بر $z+i$ به‌باقی‌ماندهٔ B رسیده‌ایم. باقی‌ماندهٔ حاصل از تقسیم $P_n(z)$ بر $z^۲+۱$ را پیدا کنید.

۴. $z^{۲n}-۱$ را به‌ضرب عامل‌های خطی تجزیه کنید.

۵. ثابت کنید، برای این‌که ریشه‌های معادلهٔ

$$z^۲+۲z+a=۰،\ \ a\in\mathbf{R}$$

عددهایی حقیقی و از لحاظ قدرمطلق متفاوت باشند، لازم و کافی است که معادلهٔ

$$(۱+a)(z^۲+۲z+a)-۲(a-۱)(z^۲+۱)=۰$$

دارای ریشه‌های حقیقی نباشد.

تمرین‌ها

۱. این عمل‌ها را انجام دهید:

$$۱)\ \frac{۴+i}{۴-i}+\frac{۴-i}{۴+i};\qquad ۲)\ \frac{۱}{۲i}\left(i^۷-\frac{۱}{i^۷}\right);$$
$$۳)\ ۳(۱+i)^۴-۵(۱+i)^۳+۳(۱+i)^۲+۴(۱+i)-۲;$$

۴) $(۱-i)^{۴}(\sqrt{۳}+i)^{۶}$; ۵) $\frac{(۱+i)^{۱۰}}{(\sqrt{۳}+i)^{۹}}$; ۶) $(-۱+i\sqrt{۳})^{۹۰}$;

۷) $\left(\frac{۱+i}{۱-i}\right)^{۳۳}+(۱-i)^{۱۰}+(۲+۳i)(۲-۳i)+\frac{۱}{i}$;

۸) $\left(\cos\frac{\pi}{۳}-i\sin\frac{\pi}{۳}\right)i^{۵}(۱+\sqrt{۳}i)^{۷}$; ۹) $\left(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{۱-i}\right)^{۳۰}$;

۱۰) $\frac{\cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}}{۵\left(\cos\frac{۷\pi}{۶}+i\sin\frac{۷\pi}{۶}\right)}\left(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳}\right)(-۴i)$;

۱۱) $۱+(۱+i)+(۱+i)^{۲}+(۱+i)^{۳}+\dots+(۱+i)^{۲۰}$;

۱۲) $\frac{(۱-i)^{۵}-۱}{(۱+i)^{۵}+۱}$; ۱۳) $\frac{(۱+i)^{۱۰۰۰}}{(۱-i)^{۹۹۸}}$;

۲. مقدار عبارت را پیدا کنید:

۱) $z^{۴}+iz^{۳}-(۱+۲i)z^{۲}+۳z+۱+۳i$ و $z=۲+۳i$;

۲) $(z-z^{۲}+۲z^{۳})(۲-z+z^{۲})$ و $z=\frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}i-۱)$.

۳. مدول و آرگومان اصلی عددمختلط را پیدا کنید:

۱) $-\sin\frac{\pi}{۸}-i\cos\frac{\pi}{۸}$; ۲) $\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴}$; ۳) $-۲+۲\sqrt{۲}i$;

۴) $\frac{۱+\cos\alpha+i\sin\alpha}{۱+\cos\alpha-i\sin\alpha}$، $۰\leqslant\alpha<۲\pi$;

۵) $۴-۳i$; ۶) $۱-\sin\alpha+i\cos\alpha$، $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$.

۴. عدد را به‌صورت مثلثاتی بنویسید:

۱) $i^{۲}+\frac{۱}{i^{۲}}$; ۲) $\cos\frac{\pi}{۴}-i\sin\frac{\pi}{۴}$; ۳) $i^{۴}+i^{۳}+i^{۲}+i+۱$;

۴) $۱+\cos۴۰^{\circ}+i\sin۴۰^{\circ}$; ۵) $\left(\frac{۱+i\sqrt{۳}}{۲}\right)^{-۲}$;

$$۶)\ \cos\frac{\varphi}{۲}+i\sin\frac{\varphi}{۲},\quad ۰<\varphi<\frac{\pi}{۲};\qquad ۷)\ -۳\left(\cos\frac{\pi}{۳}+i\sin\frac{\pi}{۳}\right);$$

$$۸)\ \sin\alpha+i(۱-\cos\alpha),\ ۰<\alpha<\frac{\pi}{۲};\qquad ۹)\ \sin\frac{\pi}{۶}+i\sin\frac{\pi}{۶};$$

$$۱۰)\ \cot g\,\alpha+i,\ \pi<\alpha<۲\pi,$$

۵. درستی این برابری‌ها را ثابت کنید:

$$۱)\ \bar z_۱+\bar z_۲=\overline{z_۱+z_۲};\qquad ۲)\ \frac{\bar z_۱}{\bar z_۲}=(z_۱ : z_۲),\ z_۲\neq ۰;$$

$$۳)\ \bar z_۱\bar z_۲=\overline{z_۱z_۲};\quad ۴)\ \overline{(\bar z)}=z;\quad ۵)\ \bar z_۱-\bar z_۲=\overline{z_۱-z_۲};$$

$$۶)\ \bar z z=|z|^۲;$$

$$۷)\ |z_۱\bar z_۲+۱|^۲+|z_۱-z_۲|^۲=(|z_۱|^۲+۱)(|z_۲|^۲+۱);$$

$$۸)\ |z_۱\bar z_۲-۱|^۲-|z_۱-z_۲|^۲=(|z_۱|^۲-۱)(|z_۲|^۲-۱);$$

$$۹)\ |z_۱+z_۲|^۲=(|z_۱|+|z_۲|)^۲-۲[|z_۱\bar z_۲|-\mathrm{Re}\,(z_۱\bar z_۲)];$$

$$۱۰)\ |z_۱+z_۲|^۲=(|z_۱|-|z_۲|)^۲+۲[|z_۱\bar z_۲|+\mathrm{Re}\,(z_۱\bar z_۲)].$$

۶. z را ریشهٔ معادلهٔ $x^۳+px^۲+qx+r=۰$ می‌گیریم (p، q و r عددهایی حقیقی‌اند). ثابت کنید $\bar z$ هم جوابی ازاین معادله است.

۷. می‌دانیم $\bar z\neq z$. ثابت کنید: $\arg\bar z=۲\pi-\arg z$.

۸. می‌دانیم $w=۸z^۵+۶z^۳+z^۲+۱$. ثابت کنید:

$$\bar w=۸z^۵+\overline{۶z^۳}+\overline{z^۲}+۱$$

۹. عبارت‌ها را ساده کنید:

$$۱)\ \frac{z^۲+\frac{۱}{z}}{z+\frac{۱}{z}-۱},\ z\neq ۰;\qquad ۲)\ \frac{z^۴-۴z^۳+۴z^۲-۴z+۳}{z^۴-۵z^۳+۵z^۲-۵z+۴};$$

$$۳)\ \frac{\sqrt{۱+a^۲}+ia}{a-i\sqrt{۱+a^۲}};\qquad ۴)\ \left(\frac{۱+i\,tg\,\alpha}{۱-i\,tg\,\alpha}\right)^n-\frac{۱+i\,tg\,\alpha n}{۱-i\,tg\,\alpha n};$$

$$۵)\ \frac{۱}{z_۱+z_۲}\left(\frac{۱}{z_۱^۲}+\frac{۱}{z_۲^۲}\right)+\frac{۲}{(z_۱+z_۲)^۲}\left(\frac{۱}{z_۱}+\frac{۱}{z_۲}\right).$$

۱۰. می‌دانیم $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ و $۰\leqslant\varphi<۲\pi$. مطلوب است آرگومان هریك ازعددهای

۱) $z^۲+z$; ۲) $z^۲-z$; ۳) $z^۲+\bar{z}$

۱۱. اگر $z+\frac{۱}{z}=۱$، مقدار $z^{۱۹۸۰}+\frac{۱}{z^{۱۹۸۰}}$ را پیدا کنید.

۱۲. ثابت کنید، عدد $w=\frac{۱-z}{۱+z}$، تنها وقتی یك عددموهومی خالص است که داشته باشیم: $|z|=۱$.

۱۳. همهٔ نقطه‌ها را روی صفحهٔ مختلط پیدا کنید، به‌شرطی‌که

۱) $۱+۳z-۲i \quad (|z|=۵)$; ۲) $۱+۲z \quad (|z|=۱)$;
۳) $۳z \quad (|z|=۱)$

۱۴. مجموعهٔ نقطه‌های z را روی صفحهٔ مختلط پیدا کنید:

۱) $۱\leqslant|z+۲+i|\leqslant۲$; ۲) $\left|\frac{z-۱}{z+۱}\right|\leqslant۱$; ۳) $۱<\operatorname{Re}z<۲$;
۴) $\frac{\pi}{۳}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{۲}$; ۵) $|z-i|+|z+i|=۴$;
۶) $\operatorname{Im}\overline{(z^۲+\bar{z})}=۲-\operatorname{Im}z$; ۷) $|z-۱|=|z+۲|=|z-i|$;
۸) $\operatorname{Im}\left(\frac{۱}{z}\right)<-\frac{۱}{۲}$; ۹) $|z-۱|<|z-i|$;
۱۰) $\log_{\sqrt{۳}}\frac{|z|^۲-|z|+۱}{۲+|z|}<۲$; ۱۱) $(۱-i)\bar{z}=(۱+i)z$;
۱۲) $\operatorname{Im}\frac{z-۱+i}{z-۳i}=۰$; ۱۳) $|z-۱|^۲+|z+۱|^۲=۵$;
۱۴) $\log_{\frac{۱}{۲}}|z-۲|>\log_{\frac{۱}{۲}}|z|$; ۱۵) $\sin|z|>۰$;
۱۶) $\operatorname{Im}z^۲>۲$; ۱۷) $\lg|z+i|\leqslant۱$;
۱۸) $\frac{۱}{۴}<\operatorname{Re}\left(\frac{۱}{\bar{z}}\right)+\operatorname{Im}\left(\frac{۱}{\bar{z}}\right)<\frac{۱}{۲}$.

۱۵. به‌شرط $|z-۲+۲i|=۱$، حداقل $|z|$ را پیدا کنید.

۱۶. اگر $\left|z+\frac{۱}{z}\right|=۲$، آن‌وقت $|z|$ را پیدا کنید.

۱۷. دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داده شده است $(z_۱\neq z_۲)$. ثابت کنید، دومثلثی که راس‌های آن‌ها، متناظرند با عددهای مختلط

$$۱)\ ۰، ۱، z_۱ \text{ و } ۰، z_۱، z_۱z_۲; \qquad ۲)\ ۰، ۱، z_۲ \text{ و } ۰، z_۱، \frac{z_۱}{z_۲}$$

با یکدیگر متشابه‌اند.

۱۸. اگر نقطهٔ $z=۲$ روی محیط دایره‌ای به مرکز O به‌شعاع ۲ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، $\arg z(z-۱)$ چگونه تغییر می‌کند؟

۱۹. چند عدد نخستین از دنبالهٔ $\left(۱+\frac{i}{n}\right)^n$ را محاسبه کنید و روی صفحهٔ مختلط نشان دهید.

۲۰. $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ سه عدد مختلط دوبه‌دو متمایز و $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ سه‌عدد حقیقی و مثبت‌اند؛ در ضمن $t_۱+t_۲+t_۳=۱$. ثابت کنید، عدد مختلط $t_۱z_۱+t_۲z_۲+t_۳z_۳$ در درون یا روی محیط مثلث به‌راس‌های $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ قرار دارد.

۲۱. ثابت کنید:

$$۱)\ |z_۱-z_۲|\leqslant|z_۱|+|z_۲|; \quad ۲)\ \big||z_۱|-|z_۲|\big|\leqslant|z_۱|+|z_۲|;$$

$$۳)\ \big||z_۱|-|z_۲|\big|\leqslant|z_۱-z_۲|.$$

۲۲. با استفاده از دستور مواور ثابت کنید:

$$۱)\ \sin ۴\varphi=۸\cos^۳\varphi\sin\varphi-۴\cos\varphi\sin\varphi،$$
$$\cos ۴\varphi=۸\cos^۴\varphi-۸\cos^۲\varphi+۱;$$

$$۲)\ \sin ۵\varphi=۵\sin\varphi\cos^۴\varphi-۱۰\cos^۲\varphi\sin^۳\varphi+\sin^۵\varphi،$$
$$\cos ۵\varphi=\cos^۵\varphi-۱۰\cos^۳\varphi\sin^۲\varphi+۵\cos\varphi\sin^۴\varphi;$$

$$۳)\ \sin\varphi+\sin ۲\varphi+\dots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{n\varphi}{۲}\sin\frac{(n+۱)\varphi}{۲}}{\sin\frac{\varphi}{۲}}.$$

$$۱+\cos\varphi+\cos ۲\varphi+\dots+\cos n\varphi=\frac{\cos\frac{n\varphi}{۲}\sin\frac{(n+۱)\varphi}{۲}}{\sin\frac{\varphi}{۲}}.$$

۲۳. این معادله‌ها را حل کنید:

$$۱)\ z^{۲}+|z|=۰;\quad ۲)\ z^{۴}=\overline{z^{۴}};\quad ۳)\ \bar{z}=z;\quad ۴)\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{۴}=۱;$$

$$۵)\ \bar{z}=-z;\quad ۶)\ \bar{z}=۲-z;\quad ۷)\ \bar{z}=-۴z;\quad ۸)\ z^{۲}+\bar{z}=۰;$$

$$۹)\ z^{۲}+|z|^{۲}=۰;\quad ۱۰)\ z^{۲}+|z|=۰;$$

$$۱۱)\ ۲|z|-۴az+۱+ia=۰,\ a\geqslant ۰;\quad ۱۲)\ z|z|+az+i=۰.$$

۲۴. معادلهٔ $(۱-i)^{n}=۲^{n}$ را حل کنید $(n\in\mathbf{Z})$.

۲۵. دستگاه شامل معادله‌های $z^{۳}+\overline{w^{۷}}=۰$ و $z^{۵}w^{۱۱}=۱$ راحل کنید.

۲۶. A_k $(k=۱,۲,\dots,n)$، راس‌های n ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌شعاع واحدند. مطلوب است:

$$۱)\ |A_۱A_۲|^{۲}+|A_۱A_۳|^{۲}+\dots+|A_۱A_n|^{۲};$$

$$۲)\ |A_۱A_۲|\cdot|A_۱A_۳|\times\dots\times|A_۱A_n|$$

۲۷. ثابت کنید، حاصل‌ضرب هر دو ریشه از معادلهٔ $z^{n}-۱=۰$ $(n\geqslant ۲)$، به‌نوبهٔ خود، ریشه‌ای از این معادله است.

۲۸. دو انتهای پاره‌خط راستی را، با دوعدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داده‌اند. مطلوب است عدد مختلط‌متناظر با: ۱) نقطهٔ وسط پاره‌خط‌راست؛ ۲) نقطه‌ای از پاره‌خط راست که آن‌را به‌نسبت ۱:۴ (از $z_۱$ به‌طرف $z_۲$) تقسیم می‌کند.

۲۹. سه راس متوالی یك متوازی‌الاضلاع، در نقطه‌های

$$۱)\ z_۱=۰,\ z_۲=۱,\ z_۳=۱+i;\quad ۲)\ z_۱,\ z_۲,\ z_۳,\ z_۱\neq z_۲\neq z_۳$$

قرار دارند. عدد مختلط متناظر با راس چهارم متوازی‌الاضلاع راپیدا کنید.

۳۰. مرکز مربعی در نقطهٔ $z_۰=۱+i$ و یکی از راس‌های آن در نقطهٔ $z_۱=۱-i$ قرار دارند. عددهای مختلط متناظر با راس‌های دیگرمربع را پیدا کنید.

۳۱. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که:

۱) سه‌نقطهٔ متناظر با سه‌عدد مختلف مختلط، روی یك‌خط راست باشند؛

۲) چهار نقطهٔ متناظر با چهار عدد مختلط دو به‌دو متمایز، روی‌محیط یك دایره باشند.

۳۲. $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ سه عدد مختلط دو به دو متمایزند. ثابت کنید، ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{۱}{z-z_۱}+\frac{۱}{z-z_۲}+\frac{۱}{z-z_۳}=۰$$

متناظر با نقطه‌هایی از صفحه‌اند که در درون یا روی ضلع‌های مثلث با راس‌های $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ قرار دارند.

۳۳. همهٔ ریشه‌های nام عدد a را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $a=i-۱$، $n=۳$؛ ۲) $a=۳+۲i$، $n=۷$؛

۳) $a=۲-۲i\sqrt{۳}$، $n=۲$؛ ۴) $a=۲i$، $n=۵$؛

۵) $a=۴-۴\sqrt{۳}i$، $n=۵$؛ ۶) $a=۵$، $n=۳$

۳۴. ثابت کنید، معادلهٔ خط راست $Ax+By+C=۰$ را، که در آن A و B و C عددهایی حقیقی‌اند، می‌توان به‌صورت $\bar{a}z+a\bar{z}+۲C=۰$ نوشت که، در آن، $a=A+iB$ و $z=x+iy$.

۳۵. ثابت کنید، رابطهٔ $z\bar{z}+(۱-i)z+(۱+i)\bar{z}=۰$ که، در آن، $z=x+iy$، معرف دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x+۲y=۰$ است.

۳۶. $z_۱$ و $z_۲$ دوعدد مختلف متمایز و $|z_۱+z_۲|=|z_۱-z_۲|$. ثابت کنید، چهارضلعی به راس‌های متناظر با عددهای ۰، $z_۱$، $z_۲$ و $z_۱+z_۲$، یك مستطیل است.

۳۷. ثابت کنید، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{۱}{z-a_۱}+\frac{۱}{z-a_۲}+\dots+\frac{۱}{z-a_n}=۰$$

که در آن $a_۱$، $a_۲$، …، a_n عددهای مختلط مفروض‌اند، متعلق به کوچکترین چندضلعی محدبی هستند که شامل نقطه‌های $a_۱$، $a_۲$، …، a_n است.

۳۸. ثابت کنید:

$$\frac{۳۸۰+۸۷z+۳z^{۳}}{(۵-z)(۲+z)(۹+z^{۲})}=\frac{۵}{۵-z}+\frac{۲}{۲+z}+\frac{۲۰}{۹+z^{۲}}$$

۳۹. ثابت کنید، برای عدد مفروض $z_{۰}$ و چندجمله‌ای

$$P_{n}(z)=z^{n}+a_{n-۱}z^{n-۱}+\dots+a_{۰}$$

نمایش $(z-z_{۰})^{n}+A_{n-۱}(z-z_{۰})^{n-۱}+\dots+A_{۰}$، منحصر به‌فرد است، یعنی ضریب‌های $A_{n-۱}$، $A_{n-۲}$، ...، $A_{۰}$، به‌صورت یك‌ارزشی به‌دست‌می‌آیند.

۴۰. ثابت کنید، چندجمله‌ای $P_{n}(z)\not\equiv ۰$، نمی‌تواندبرای همهٔ عددهای مختلط برابر صفر شود.

۴۱. ثابت کنید، به‌شرط $z\neq ۱$ داریم:

$$۱+z+z^{۲}+\dots+z^{n}=\frac{۱-z^{n+۱}}{۱-z},\ \ n\geqslant ۱$$

۴۲. ثابت کنید، عدد مختلط z $(z\neq -۱)$ را تنها وقتی می‌توان به‌صورت عدد $z=\frac{۱-ix}{۱+ix}$ نوشت (x، عددی حقیقی است) که $|z|=۱$.

۴۳. این معادله‌ها را حل کنید:

۱) $z^{۲}+۲\bar{z}=۰$;   ۲) $\frac{۱}{z-i}+\frac{۲+i}{۱+i}=\sqrt{۲}$;

۳) $z^{۸}-۱۷z+۱۶=۰$;   ۴) $(۳+۴i)^{n-۱}-(۱+i)^{n}=۵^{n}$;

۵) $\left(\frac{۱-ix}{۱+ix}\right)^{۴}=i$، $x\in\mathbf{R}$;   ۶) $z^{۴n}-۴z^{n}-۱=۰$، $n\geqslant ۱$;

۷) $(z^{۲}-z+۱)^{۴}-۶z^{۲}(z^{۲}-z+۱)^{۲}+۵z^{۴}=۰$;

۸) $z^{۴}+(z-۴)^{۴}=۳۲$;   ۹) $(a-z)^{۴}+(b-z)^{۴}=(a+b-۲z)^{۴}$;

۱۰) $(۸z^{۲}+۷)^{۲}(۴z+۳)(z+۱)=\frac{۹}{۲}$;

۱۱) $z^{۳}+۳z^{۲}+۳z+۳=۰$;

۱۲) $z^{۴}-۴z^{۳}+۶z^{۲}-۴z-۱۵=۰$.

۴۴. ثابت کنید، همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$a(z-b)^n+c(z-d)^n=۰$$

(a، b، c و d عددهای مختلط‌مفروض‌اند) یا روی محیط یك دایره و یا روی یك خط راست قرار دارند.

۴۵. باشرط $p^۲-۴q<۰$، معادلهٔ $z^۴+pz+q=۰$ راحل کنید.

۴۶. همهٔ مقدارهای حقیقی پارامتر a را طوری پیدا کنید که ریشه‌های

۱) معادلهٔ $(a-۱)z^۴-۴z^۲+a+۲=۰$، موهومی خالص باشند؛

۲) معادلهٔ $(a-۳)z^۴-۲(۳a-۴)z^۲+۷a+۶=۰$ مختلط باشند.

۴۷. اگر $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n ریشه‌های غیرواحد معادلهٔ $z^{n+۱}=۱$ باشند، ثابت کنید:

$$(۱-z_۱)(۱-z_۲)\cdots(۱-z_n)=۱$$

۴۸. با چه شرطی، معادلهٔ

$$z^۴+pz^۲+q=۰،\quad q\in\mathbf{R}،\quad p\in\mathbf{R}$$

۱) تنها دارای ریشه‌های حقیقی است؛ ۲) ریشهٔ حقیقی ندارد؛

۳) دارای ریشه‌های موهومی خالص است.

۴۹. ریشه‌های مشترك این معادله‌ها را پیدا کنید:

$$z^۳+۲z^۲+۲z+۱=۰،\quad z^{۱۹۸۲}+z^{۱۰۰}+۱=۰$$

۵۰. به‌ضرب عامل‌های خطی تبدیل کنید:

۱) $۴z^۴-۹$; ۲) $(z^۲+z)^۲+۴(z^۲+z)-۱۲$;

۳) $(z^۲+۴z+۸)^۲+۳z(z^۲+۴z+۸)+۲z^۲$;

۴) $(z+۱)(z+۲)(z+۳)(z+۴)-۲۴$;

۵) $z^{۲n}+۱$; ۶) $z^{۱۰}+z^۵+۱$.

۵۱. همهٔ عددهای حقیقی x را پیدا کنید، به‌شرطی که

۱) $|۱+۴i-۲^{-x}|\leqslant ۵$; ۲) $\left|\frac{۱+i\sqrt{۷}}{۴}-\cos x\right|\leqslant ۱$;

۳) $۱-\log_۲\frac{|x+۱+۲i|-۲}{\sqrt{۲}-۱}\geqslant ۰$

۵۲. ثابت کنید، این دو نامعادله هم‌ارزند:

$$log_۲\frac{۳|z-۱|-۲}{|z-۱|+۴}>۱ \quad و \quad |z-۱|>۱۰$$

۵۳. این معادله را، برای همهٔ مقدارهای حقیقی $a\geqslant ۱$ حل کنید:

$$z+a|z+۱|+i=۰$$

۵۴. این معادله را حل کنید:

$$z^۴+(۲a+b)z^۳+(a^۲+۸a+۱۳)z^۲+$$
$$+(۲a^۲+۱۲a+۱۴)z+۲a^۲+۸a+۶=۰$$

(a و b، عددهایی حقیقی‌اند)؛ به‌شرطی که یکی از ریشه‌های آن برابر $۱-i$ باشد.

۵۵. این معادله را حل کنید:

$$z=\left(۲-\frac{z+۱}{z-۷}\right)^۲$$

به‌شرطی که، عدد $۴i+۳$، ریشه‌ای از آن باشد.

۵۶. این دستگاه را حل کنید:

$$\left|\frac{z-۴}{z-۶-۵i}\right|=۲، \quad \left|\frac{z-۱+۴i}{z-۸i}\right|=\frac{۳}{۲}$$

پاسخ‌ها وراهنمائی‌ها

تکلیف ۱.

۱. $-i، ۱، -i، -۱$. **۲.** ۱) $۲+i، -i، ۱+i$؛ ۲) $i+۴$؛ $-۳i+۲، ۵i+۵$. **۳.** ۱) $۲-۳i$؛ ۲) $-۲i$؛ ۳) ۳؛ ۴) $-i$؛ ۵) $-۱-۵i$؛ ۶) $-۲i$. **۴.** ۱) $۰-i$؛ ۲) $۰-۸i$؛ ۳) $\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۵}i$؛ ۴) $\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۵}i$؛ ۵) $-\frac{۱}{۳۰}-\frac{۱۷۳}{۳۰}i$؛ ۶) $\frac{۳}{۵}-\frac{۱۴}{۵}i$.

۵. ۱) ۲۴؛ ۲) $۳b+۴ai$؛ ۳) $۴i$؛ ۴) $\frac{۸}{۵}$؛ ۵) $\frac{۱۴}{۵}i$؛

۶) $-\frac{۱۸}{۵}-\frac{۱۱}{۵}i.$

تکلیف ۲.

۱. i، -۱، i، $-i$، ۱. ۲. ۱) ۲، $-۴i$، $۲-۲i$، $-۱+۷i$.
۳. ۱) $-۱-i$; ۲) $۴i$; ۳) -۲; ۴) $-i$، ۵) $۷+i$;
۶) $۲i$. ۴. ۱) $۱-۲i$; ۲) $۲\sqrt{۵}+۴i$; ۳) $۴-۳i$;
۴) $-\frac{۲۳}{۸}-\frac{۳۹}{۸}i$; ۵) $۳-۹i$; ۶) $۱۶-۱۶i$. ۵. ۱) ۴۸;
۲) -۸; ۳) $۴۰+۳۰i$; ۴) $\frac{۶}{۵}$; ۵) $\frac{۱۱}{۴}$; ۶) $۲m$.

تکلیف ۳.

۲. ۱) ۱، $\frac{۳\pi}{۲}+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۲) ۲، $۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۳) $\sqrt{۵}$،
$\frac{۳\pi}{۲}+\arccos\frac{۲}{\sqrt{۵}}+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۷\pi}{۴}+۲\pi k(k\in\mathbf{Z})$;
۵) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}, \frac{۳\pi}{۴}+۲\pi k(k\in\mathbf{Z})$; ۶) $\sqrt{۱۰}$، $\pi+\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}+۲\pi k$
$(k\in\mathbf{Z})$. ۳. ۱) $\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۱}{۲}(\cos ۰+i\sin ۰)$، $\sqrt{۳}(\cos ۰+i\sin ۰)$،
$۲(\cos\pi-i\sin\pi)$، $۵\left(\cos\frac{۳\pi}{۲}+i\sin\frac{۳\pi}{۲}\right)$; ۲) $۴\sqrt{۲}\Big(\cos\frac{۳\pi}{۴}+$
$+i\sin\frac{۳\pi}{۴}\Big)$، $\frac{\sqrt{۲}}{۳}\left(\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴}\right)$; ۳) $\sqrt{۱۰}\Big[\cos\left(\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)+$
$+i\sin\left(\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\right)\Big]$; ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left(\cos\frac{۵\pi}{۴}+i\sin\frac{۵\pi}{۴}\right)$،
$\frac{۱}{\sqrt{۵}}\left[\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)+i\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)\right]$;
۵) $\cos\frac{\pi}{۱۰}+i\sin\frac{\pi}{۱۰}$; ۶) $\cos\frac{۵\pi}{۳}+i\sin\frac{۵\pi}{۳}$;

۷) $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\left(\cos\arcsin\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}+i\sin\arcsin\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}\right)$;
۸) $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}\left(\cos\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}+i\sin\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۱۷}}\right)$. ۴۰ ۱) $-۱۱۷+۴۴i$، $-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}i$، $۲^{۶۰}$; ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}+i\frac{\sqrt{۲}}{۲}$، $۲^{۱۰}+۲^{۱۰}i$، $-۲^{۱۹}-۲^{۱۹}\sqrt{۳}i$.

تکلیف ۴.

۳۰ ۱) ۴، $\frac{۳\pi}{۲}+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۲) $\sqrt{۲۸}$، $\arcsin\sqrt{\frac{۳}{۲۸}}+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۳) ۱، $\frac{\pi}{۲}+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۴) ۷، $\pi+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$; ۵) $\sqrt{۱۷}$، $\frac{۳\pi}{۲}+\arcsin\frac{۳}{\sqrt{۱۷}}+۲\pi k(k\in\mathbf{Z})$; ۶) $\sqrt{\frac{۱۰}{۱۷}}$، $\arcsin\frac{۷}{\sqrt{۱۷۰}}+۲\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$. ۳۰ ۱) $۲\left(\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}\right)$، $۵(\cos ۰+i\sin ۰)$، $۲\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+i\sin\frac{۳\pi}{۲}\right)$، $۳(\cos\pi+i\sin\pi)$;
۲) $\cos\frac{۱۱\pi}{۶}+i\sin\frac{۱۱\pi}{۶}$، $\sqrt{۵}\left(\cos\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۵}}+i\sin\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)$;
۳) $\sqrt{۱۰}\left[\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+\arcsin\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)+i\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\arcsin\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)\right]$;
۴) $\cos\frac{۷\pi}{۴}+i\sin\frac{۷\pi}{۴}$، $۳\cos\frac{۷\pi}{۶}+i\sin\frac{۷\pi}{۶}$; ۵) $\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}\left(\cos\arcsin\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}+i\sin\arcsin\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\right)$; ۶) $\sqrt{۲(۱-\cos\alpha)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\alpha}{۲}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\alpha}{۲}\right)\right]$. ۴۰ ۱) $-۲^{۱۵}i$، $-۲^{۱۵}$; ۲) -۱;

۳) $۲^{۹}-۲^{۹}\sqrt{۳}i$، $-۲^{-۱۸}\sqrt{۳}+۲^{-۱۸}i$; ۴) ۱۰۲۴.

تکلیف ۵.

۱. ۱) -۱، $\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$، $\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$; ۲) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\frac{i}{\sqrt{۲}}$، $-\sqrt{\frac{۳}{۲}}-\frac{i}{\sqrt{۲}}$; ۳) $\sqrt[۸]{۲}\left(\cos\frac{۸k+۱}{۱۶}\pi+i\sin\frac{۸k+۱}{۱۶}\pi\right)$ $(k=۰، ۱، ۲، ۳)$; ۴) $\sqrt[۴]{۲}$، $-\sqrt[۴]{۲}$، $\sqrt[۴]{۲}i$، $-\sqrt[۴]{۲}i$.

۲. ۱) محیط دایرهٔ به‌شعاع واحد و به‌مرکز نقطهٔ $z=۰$؛ ۲) محیط دایرهٔ به‌شعاع ۲ و به‌مرکز نقطهٔ $z=-۲$؛ ۳) همهٔ نقطه‌های واقع دردرون و روی محیط دایرهٔ به‌شعاع $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز نقطهٔ $z=\frac{۳}{۲}$؛ ۴) همهٔ نقطه‌های بالای خط راست $y=۲$؛ ۵) همهٔ نقطه‌های سمت‌چپ خط‌راست $x=۰$؛ ۶) همهٔ نقطه‌های واقع دردرون حلقهٔ بین دودایرهٔ هم‌مرکز، به‌مرکز نقطه $z=-۲i$ وشعاع‌های ۳ و ۴، و، همچنین، نقطه‌های‌واقع برمحیط دایرهٔ کوچکتر؛ ۷) همهٔ نقطه‌های واقع در درون زاویهٔ به راس $z=۰$ و به اندازهٔ $\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۴}=\frac{۵\pi}{۱۲}$ ونقطه‌های واقع برنیم‌خط راست $\arg z=\frac{\pi}{۴}$؛ ۸) نیم خط راست به‌مبداء $z=۰$ که با جهت مثبت محورحقیقی، زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازد؛ ۹) خط راست $y=-۱$؛ ۱۰) نقطهٔ $(۰، ۰)$؛ ۱۱) همهٔ نقطه‌های $(x، y)$ که، برای آن‌ها، $x>-۱$؛ ۱۲) نقطهٔ $(۱، ۰)$.

۳. ۱) ۲، -۲، $۲i$، $-۲i$; ۲) $\frac{۱}{۲}(-۱\pm i\sqrt{۱۹})$; ۳) $\frac{۳}{۲}$; ۴) $z=x\ (x\in\mathbf{R})$، $z=iy\ (y\in\mathbf{R})$. **۴.** $k(z+\bar{z})+۲b+i(z-\bar{z})=۰$. **۵.** $۰<x\leqslant\frac{۱}{۱۶}$، $x\geqslant۴$.

تکلیف ۶.

۱۰۱ ۱) $i, -i$; ۲) $\sqrt[۵]{۴}\left(\cos\frac{۲\pi k}{۵}+i\sin\frac{۲\pi k}{۵}\right)$ $(k=۰, ۱, ۲, ۳, ۴)$; ۳) $-i, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}i, \frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}i$; ۴) $\frac{\sqrt[۴]{۴}}{۲}(۱+i), \sqrt[۶]{۲}\left(-\cos\frac{\pi}{۱۲}+i\sin\frac{\pi}{۱۲}\right), \sqrt[۶]{۲}\left(\sin\frac{\pi}{۱۲}-i\cos\frac{\pi}{۱۲}\right)$, $\sin\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲\sqrt{۲}}, \cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲\sqrt{۲}}$; ۵) $\pm\left(\cos\frac{\pi}{۸}-i\sin\frac{\pi}{۸}\right)$, $\pm\left(\cos\frac{۳\pi}{۸}+i\sin\frac{۳\pi}{۸}\right), \sin\frac{\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}, \cos\frac{\pi}{۸}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$; ۶) $\sqrt[۸]{۵}\left(\cos\frac{\varphi+۲\pi k}{۵}+i\sin\frac{\varphi+۲\pi k}{۵}\right)$, $\varphi=\pi-\arcsin\frac{۱}{\sqrt{۵}} (k=۰, ۱, ۲, ۳)$.

۱۰۲ ۱) محیط دایرهٔ به‌شعاع ۲ و مرکز $(۱, -۱)$؛ ۲) مجموعهٔ نقطه‌های واقع دربیرون دایرهٔ به شعاع ۲ وبه مرکز $(۲, ۳)$ ونقطه‌های واقع برمحیط این‌دایره؛ ۳) مجموعهٔ نقطه‌های‌واقع‌در بالای سهمی $y=\frac{۱}{۴}x^{۲}-۱$؛ ۴) مجموعهٔ نقطه‌های (x, y) که، برای آن‌ها، داریم: $x\leqslant ۲$؛ ۵) نقطه‌های واقع دربیرون دایرهٔ به‌شعاع ۲ وبه‌مرکز نقطهٔ $z=۰$ ونقطه‌های درون زاویهٔ به‌راس $z=۰$ وبه‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۶}$؛ نقطه‌های واقع بر نیم‌خط راست $\arg z=\frac{\pi}{۳}$ (به‌ازای $|z|\geqslant ۲$)؛ به نقطه‌های واقع بر کمان دایرهٔ $|z|=۲$ واقع دردرون دایرهٔ مذکور؛ ۶) نقطه‌های واقع برمحیط دایرهٔ به‌شعاع $\frac{۱}{۳}$ و به‌مرکز نقطهٔ $z=\frac{۴}{۳}$؛ ۷) نیم خط‌راست Ox، یعنی مجموعهٔ نقطه‌های $(x, ۰)$ باشرط $x\geqslant ۰$؛ ۸) مجموعهٔ نقطه‌های (x, y) باشرط $۰\leqslant y\leqslant ۱$ و $|x|<\infty$؛ ۹) نقطه‌های واقع دردرون زاویهٔ به‌راس $(-۱, ۱)$ و

محدود به‌خط‌های راست $y=-x$ و $y=x+۲$، درضمن $y\geqslant ۱$؛ ۱۰) محور Ox، یعنی مجموعهٔ نقطه‌های $(x, ۰)$ با شرط $|x|<\infty$؛ ۱۱) نقطه‌های واقع دردرون حلقهٔ به‌مرکز $\left(-\frac{۱}{۲}, ۰\right)$ و شعاع‌های ۱ و ۲ و نقطه‌های واقع برمحیط این دایره‌ها؛ ۱۲) نوار $x<-\frac{۱}{۲}$، یعنی مجموعهٔ نقطه‌های (x, y) باشرط $x<-\frac{۱}{۲}$ و $|y|<\infty$.

$$۳.\ ۱)\ ۳,\ -\frac{۳}{۲}+\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}i,\ -\frac{۳}{۲}-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}i;\ ۲)\ \frac{-۳\pm i\sqrt{۷}}{۲};$$
$$۳)\ ۱;\quad ۴)\ i,\ \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{i}{۲}.\quad ۴.\ z\bar{z}+z+\bar{z}=۰.\quad ۵.\ ۰,\ \pm ۱$$

تکلیف ۷.

۱. $\frac{۲x^۲-۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲}$. ۲. راهنمائی: ۱) درهر مثلث، یک ضلع از مجموع دوضلع دیگر کوچکتر است. علامت برابری، تنها وقتی برقراراست که $\mathrm{Arg}z_۱=\mathrm{Arg}\,z_۲$؛ ۲) راهنمائی. درمثلث، هرضلع ازتفاضل دوضلع دیگر، بزرگتر است. علامت برابری تنها وقتی برقرار است که $\mathrm{Arg}z_۱=\mathrm{Arg}z_۲$. ۴. $\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}(\sqrt{۱۳}+۲\sqrt{۲}+(\sqrt{۱۳}-۳\sqrt{۲})i)t$ باشرط $t>۰$.

تکلیف ۸.

۱. $n=۴k$ $(k\in\mathrm{N})$. ۳. ۱) وتر AB ازدایرهٔ به‌شعاع واحد و به مرکز نقطهٔ $(۱, ۰)$ به‌نحوی که باقطر دایره زاویه‌ای برابر $\frac{\pi}{۶}$ بسازد و، درضمن $A(۰, ۰)$ و B نقطه‌ای در مربع اول؛ ۲) مربع با راس‌های $(۱, ۰)$، $(۰, ۱)$، $(-۱, ۰)$، $(۰, -۱)$. ۴. مجموع مجذورهای دوقطر متوازی‌الاضلاع، برابراست بامجموع مجذورهای چهارضلع آن.

تکلیف ۹.

۱. ۵. ۲. ۱) ± 1، $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$؛

۲) $\pm\left(\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. راهنمائی. ثابت کنید، همهٔ جواب‌های معادلهٔ $z^2=a+bi$ را (a و b، عددهایی حقیقی‌اند)، می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$z_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),\ b\geqslant 0,$$

$$z_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),\ b<0;$$

۳) 0، $\pm i$، $\pm\frac{i\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$، $\pm\frac{i\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$. راهنمائی: $w=\frac{z+1}{z-1}$ بگیرید و معادلهٔ $w^8=1$ را حل کنید؛ ۴) $2+i$، $2i$؛ ۵) 5، $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$؛ ۶) 1، -2، $\frac{-1\pm\sqrt{19}i}{2}$. ۳. ۱) $38-15i$؛ ۲) $38+16i$.

۴. حاصل‌ضرب چهار عامل $(z-1-i)$، $(z-1+i)$، $(z+1-i)$ و $(z+1+i)$. ۵. اگر a عدد حقیقی باشد: $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$ و اگر a مختلط باشد $a=(1\pm\sqrt{3}i)t$ $(t\in\mathbf{R})$.

تکلیف ۱۰.

$1.\ z_1=1-i, z_2=i.\ 2.\ 1)\ 2-i, 1+i,\ 2)\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2},$
$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}i}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}i}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}+$
$+\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{17}}}i, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}-\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{17}}}i,$

$$-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}}-\sqrt{\frac{۲}{۱+\sqrt{۱۷}}}i، -\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}}+$$
$$+\sqrt{\frac{۲}{۱+\sqrt{۱۷}}}i.$$

راهنمائی: $w=z+z^۲$ بگیرید ومعادلهٔ $w^۴=۱$ را حل کنید؛

$$۳)\ \sqrt[۶]{\frac{۵}{۲}}\cdot\frac{۱}{۲}(\pm\sqrt{۳}+i)، \pm\sqrt[۶]{\frac{۵}{۲}}i، \sqrt[۶]{\frac{۵}{۲}}\cdot\frac{۱}{۲}(\pm\sqrt{۳}-i);\ \ ۴)\ ۰،$$
$$cos\frac{۲\pi}{۳}k+isin\frac{۲\pi}{۳}k(k=۰، ۱، ۲،\ldots، n-۱)$$

راهنمائی: جواب معادله را به‌صورت مثلثاتی، $z=r(cos\varphi+isin\varphi)$، جست‌وجو کنید؛

$۵)\ -۶، -۱\pm\sqrt{۲}i;$ $۶)\ -۳\pm\sqrt{۳}، -۱\pm\sqrt{۵}i.$

$$۳.\ \frac{B-A}{۲}iz+\frac{A+B}{۲}.\quad ۴.\ \prod_{k=۱}^{۲n}\left[z-\left(cos\frac{k\pi}{n}+isin\frac{k\pi}{n}\right)\right].$$

تمرین‌ها

$۱.۱)\ \frac{۳۰}{۱۷};$ $۲)\ -۱;$ $۳)\ ۰;$ $۴)\ ۲۵۶;$ $۵)\ -\frac{۱}{۱۶};$
$۶)\ ۲^{۹۰};$ $۷)\ ۱۳-۳۲i;$ $۸)\ ۱۲۸i;$ $۹)\ -۲^{۱۹}(۱+i\sqrt{۳});$
$۱۰)\ -\frac{۲}{۵}-\frac{۲\sqrt{۳}i}{۵};$ $۱۱)\ (۱+۲^{۱۰})i-۲^{۱۰};$ $۱۲)\ -\frac{۱+۳۲i}{۲۵};$
$۱۳)\ -۲i.$ $۲.۱)\ -۹۲-۱۵۶i;$ $۲)\ ۷.$ $۳.۱)\ ۱، \frac{۹\pi}{۸};$
$۲)\ ۱، \frac{۷\pi}{۸};$ $۳)\ ۴، \frac{۲\pi}{۳};$ $۴)\ ۱، \alpha;$ $۵)\ ۵، -\mathrm{arc}tg\frac{۳}{۴};$
$۶)\ \sqrt{۲(۱-sin\alpha)}، \frac{\pi}{۴}+\frac{\alpha}{۲}.$ $۴.۱)\ ۲(cos\pi+isin\pi);$ $۲)\ cos\frac{۷\pi}{۴}+$
$+isin\frac{۷\pi}{۴};$ $۳)\ cos۰+isin۰;$ $۴)\ ۲cos۲۰^\circ(cos۲۰^\circ+isin۲۰^\circ);$

۵) $\cos\frac{۵\pi}{۳}+i\sin\frac{۵\pi}{۳}$; ۶) $\cos\frac{\varphi}{۲}+i\sin\frac{\varphi}{۲}$; ۷) $۳\left(\cos\frac{۴\pi}{۳}+i\sin\frac{۴\pi}{۳}\right)$;

۸) $۲\sin\frac{\alpha}{۲}\left(\cos\frac{\alpha}{۲}+i\sin\frac{\alpha}{۲}\right)$; ۹) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴}\right)$;

۱۰) $\frac{۱}{|\sin\alpha|}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$. ۹·۱) $z+۱$; ۲) $\frac{z-۳}{z-۴}$;

۳) i; ۴) ۰; ۵) $\frac{۱}{z_۱}+\frac{۱}{z_۲}$.

۱۰·۱) به‌ازای $۰\leqslant\varphi\leqslant\pi$: $\frac{۳\varphi}{۲}$، به‌ازای $\pi<\varphi<۲\pi$: $\frac{۳\varphi}{۲}-\pi$ و به‌ازای $\varphi=\pi$ نامعین است؛ ۲) به‌ازای $۰<\varphi<۲\pi$: $\frac{۱}{۲}(\pi+۳\varphi)$ و به‌ازای $\varphi=۰$ نامعین است؛ ۳) به‌ازای $۰\leqslant\varphi<\frac{\pi}{۲}$ و $\pi<\varphi<\frac{۵\pi}{۳}$: $\frac{\varphi}{۲}$، به‌ازای $\frac{\pi}{۳}<\varphi<\pi$ و $\frac{۵\pi}{۳}<\varphi<۲\pi$: $\frac{\varphi}{۲}+\pi$ و به‌ازای $\varphi=\frac{\pi}{۳}$، $\varphi=\pi$ و $\varphi=\frac{۵\pi}{۳}$ نامعین است. ۱۱·۲. ۱۳·۱) محیط دایرهٔ به‌شعاع ۱۵ و به‌مرکز $z=۱-۲i$؛ ۲) محیط دایرهٔ به‌مرکز $z=۱$ و به شعاع ۲؛ ۳) محیط دایرهٔ به‌شعاع ۳ و به‌مرکز $z=۰$؛ ۱۴·۱) مجموعهٔ نقطه‌های واقع در بین دو دایرهٔ هم مرکز به‌شعاع‌های ۱ و ۲ و به مرکز درنقطهٔ $z=۲+i$ (محیط دایره‌ها جزو این مجموعه نیست)؛ ۲) نیم‌صفحهٔ $x\geqslant ۰$؛ ۳) نوار $۱<x<۲$، یعنی مجموعهٔ نقطه‌های بین دوخط راست موازی $x=۱$ و $x=۲$؛ ۴) زاویهٔ به‌راس $z=i$ و به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۳}=\frac{\pi}{۶}$، که یکی ازضلع‌های آن برمحور موهومی قراردارد؛ ۵) محیط بیضی $\frac{x^۲}{۳}+\frac{y^۲}{۴}=۱$؛ ۶) هذلولی $xy=-۱$؛ ۷) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث با راس‌های $z_۱=-۲$، $z_۲=i$، $z_۳=i$؛ ۸) درون دایرهٔ به شعاع

واحد ومرکز $z=-i$؛ ۹) همهٔ نقطه‌های واقع درزیرخط راست $y=x$؛ ۱۰) همهٔ نقطه‌های واقع دردرون دایرهٔ به‌شعاع ۵ وبه مرکز $z=۰$؛ ۱۱) نقطهٔ $z=۰$؛ ۱۲) همهٔ نقطه‌های خط راست $y=۴x-۳$؛ ۱۳) محیط دایرهٔ $x^۲+y^۲=\frac{۳}{۲}$؛ ۱۴) همهٔ نقطه‌های نیم صفحهٔ $x>۱$، به‌استثنای نقطه $z=۲$؛ ۱۵) همهٔ نقطه‌های درون دایرهٔ به‌شعاع π به‌جز نقطهٔ $z=۰$ و، همچنین، همهٔ نقطه‌های حلقهٔ $۲\pi n<|z|<۳\pi n$ $(n\in\mathbf{N})$؛ ۱۶) همهٔ نقطه‌های درون هذلولی $xy=۱$؛ ۱۷) همهٔ نقطه‌های درون دایرهٔ به‌شعاع ۱۰ وبه‌مرکز $z=-i$، به‌جز نقطهٔ $z=-i$؛ ۱۸) همهٔ نقطه‌های بیرون دایرهٔ به‌شعاع $\sqrt{۲}$ وبه مرکز $z=۱+i$، و نقطه‌های درون دایرهٔ به‌شعاع $۲\sqrt{۲}$ و به‌مرکز $z=۲+۲i$.

۱۵. $۲\sqrt{۲}-۱$. **۱۶.** $|z|=۱$. **۱۸.** به‌اندازهٔ ۴π بزرگ می‌شود. **۱۹.** $۱+i$، $\frac{۳}{۴}+i$، $\frac{۲}{۳}+\frac{۲۶}{۲۷}i$، $\frac{۱۶}{۲۵۶}+\frac{۱۵}{۱۶}i$. **۲۳.** ۱) ۰، $\pm i$؛ ۲) $x\ (x\in\mathbf{R})$، $iy\ (y\in\mathbf{R})$، $x(۱+i)\ (x\in\mathbf{R})$، $x(۱-i)\ (x\in\mathbf{R})$؛ ۳) $x\ (x\in\mathbf{R})$؛ ۴) ۱، ۰، -۱؛ ۵) $xi\ (x\in\mathbf{R})$؛ ۶) $۱+xi\ (x\in\mathbf{R})$؛ ۷) ۰؛ ۸) ۰، -۱، $\frac{۱}{۲}\pm i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$؛ ۹) $xi\ (x\in\mathbf{R})$؛ ۱۰) ۰، $\pm i$؛

۱۱) به‌ازای $۰\leqslant a\leqslant\frac{۱}{۲}$ جواب ندارد و به‌ازای $a>\frac{۱}{۲}$:

$$z=\frac{۴a+\sqrt{۴a^۲+۳}}{۴(۴a^۲-۱)}+\frac{۱}{۴}i$$؛ ۱۲) به‌ازای $a\leqslant -۲$:

$$z=\frac{۱}{۲}\left(-a\pm\sqrt{a^۲-۴}\,i\right)$$، به‌ازای $-۲<a<۰$ جواب ندارد. و

به‌ازای $a\geqslant ۰$: $z=\frac{۱}{۲}(a-\sqrt{a^۲-۴}\,i)$؛ ۲۴) $n=۰$؛

۲۵) $(i,۱)$، $(-۱,i)$.

۲۶. ۱) $۲n$; ۲) n. **۲۸.** ۱) $\frac{z_۱+z_۲}{۲}$; ۲) $\frac{۴}{۵}z_۱+\frac{۱}{۵}z_۲$.

۲۹. ۱) i; ۲) $z_۱ - z_۲ + z_۳$. **۳۰.** $z_۱ = -۱ + i$، $z_۲ = ۱ + ۳i$،
$z_۳ = ۳ + i$. **۳۱.** ۱) $\operatorname{Im}\left(\frac{z_۳ - z_۱}{z_۲ - z_۱}\right) = ۰$;
۲) $\operatorname{Im}\left[\frac{z_۱ - z_۳}{z_۱ - z_۴}\left(\frac{z_۲ - z_۳}{z_۲ - z_۴}\right)^{-۱}\right] = ۰$ **۳۳.** ۱) $\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۲}(۱ + i)$،
$\sqrt[۶]{۲}\left(-\cos\frac{\pi}{۱۲} + i\sin\frac{\pi}{۱۲}\right)$، $\sqrt[۶]{۲}\left(\sin\frac{\pi}{۱۲} - i\cos\frac{\pi}{۱۲}\right)$;
۲) $z_k = \sqrt[۱۴]{۱۳}\left(\cos\frac{\varphi_k}{۷} + i\sin\frac{\varphi_k}{۷}\right)$، $\varphi_k = ۲k\pi + \arccos\frac{۳}{۷۳}$
$(k \in \mathbf{Z}،\ ۰ \leqslant k \leqslant ۶)$; ۳) $\sqrt{۳} - i$، $-\sqrt{۳} + i$; ۴) $z_k =$
$= \sqrt[۵]{۲}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۱۰} + \frac{۲k\pi}{۵}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۱۰} + \frac{۲k\pi}{۵}\right)\right)(k \in \mathbf{Z}،\ ۰ \leqslant k \leqslant ۴)$;
۵) $z_k = \sqrt[۵]{۸}\left(\cos\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{۲}{۵}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{۳} + \frac{۲k\pi}{۵}\right)\right)(k \in \mathbf{Z}،\ ۰ \leqslant k \leqslant ۴)$
۶) $z_k = \sqrt[۳]{۵}\left(\cos\frac{۲k\pi}{۳} + i\sin\frac{۲k\pi}{۳}\right)(k \in \mathbf{Z}،\ ۰ \leqslant k \leqslant ۲)$. **۴۳.** ۱) ۰،
-۲، $۱ + \sqrt{۳}i$، $۱ - \sqrt{۳}i$; ۲) $\frac{\sqrt{۲} - ۲}{۹ - ۶\sqrt{۲}} - \frac{۷\sqrt{۲} - ۱۰}{۹ - ۶\sqrt{۲}}i$; ۳) ± ۱،
$\pm i$، ± ۲، $\pm ۲i$; ۴) $n = ۱$; ۵) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{۱۶}$، $-\operatorname{tg}\frac{۵\pi}{۱۶}$، $-\operatorname{tg}\frac{۹\pi}{۱۶}$،
$-\operatorname{tg}\frac{۱۳\pi}{۱۶}$; ۶) $\sqrt[n]{\frac{۱ + \sqrt{۲\sqrt{۲} - ۱}}{\sqrt{۲}}}\left(\cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n}\right)$،
$\sqrt[n]{\frac{\sqrt{۲\sqrt{۲} - ۱} - ۱}{\sqrt{۲}}}\left(\cos\left(\frac{۲k + ۱}{n}\pi\right) + i\sin\left(\frac{۲k + ۱}{n}\pi\right)\right)$،
$\sqrt[n]{۱ + \sqrt{۲}}\left(\cos\frac{(۲k + ۱)\pi \pm \operatorname{arc\,tg}\sqrt{۱ + ۲\sqrt{۲}}}{n} +\right.$
$\left. + i\sin\frac{(۲k + ۱)\pi \pm \operatorname{arc\,tg}\sqrt{۱ + ۲\sqrt{۲}}}{n}\right)(k \in \mathbf{Z}،\ ۰ \leqslant k \leqslant n - ۱)$;

۷) $۱، i، -i، \frac{۱+\sqrt{۵}\pm\sqrt{۲+۲\sqrt{۵}}}{۲}, \frac{۱\pm i\sqrt{۲\sqrt{۲}+۱}}{۲}$;

۸) $۳، ۱، ۲\pm ۵i$; ۹) $a، b، \frac{۱}{۲}(a+b)\pm\frac{۱}{۱۴}(a-b)\sqrt{۷}i$;

۱۰) $-\frac{۱}{۲}, -\frac{۵}{۴}, -\frac{۷+۲i\sqrt{۲}}{۸}$. راهنمائی: $w=۴z^{۲}+۷z$;

۱۱) $-۱-\sqrt[۳]{۲}، -۱+\frac{\sqrt[۳]{۲}}{۲}\pm i\frac{\sqrt[۳]{۲}\sqrt{۳}}{۲}$; ۱۲) $۵، -۳، ۱\pm ۴i$.

۴۵. $\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{۲}-\frac{p}{۴}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{۲}-\frac{p}{۴}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{۲}-\frac{p}{۴}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{۲}-\frac{p}{۴}}$.

۴۶. ۱) $a>۲$; ۲) $-۲<a<\frac{۱}{۲}$. ۴۸. ۱) $p^{۲}-۴q\geqslant ۰$ $(p\leqslant ۰، q\geqslant ۰)$; ۲) $p^{۲}-۴q<۰$ یا $p^{۲}-۴q\geqslant ۰$ $(p>۰، q>۰)$; ۳) $p^{۲}-۴q\geqslant ۰\ (p>۰، q>۰)$. ۴۹. $-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i، -\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$. ۵۰. ۱) $(\sqrt{۲}z+i\sqrt{۳})(\sqrt{۲}z-i\sqrt{۳})(\sqrt{۲}z+\sqrt{۳})\times$ $\times(\sqrt{۲}z-\sqrt{۳})$; ۲) $(z+۲i)(z-۲i)(z-۲)(z+۲)$;

۳) $(z^{۲}+۵z+۸)(z^{۲}+۶z+۸)=\left(z-\frac{۵-i\sqrt{۷}}{۲}\right)\left(z-\frac{۵+i\sqrt{۷}}{۲}\right)$ $\times(z+۴)(z+۲)$; ۴) $z(z+۵)\left(z-\frac{-۵+i\sqrt{۱۵}}{۲}\right)\times$ $\times\left(z-\frac{-۵-i\sqrt{۱۵}}{۲}\right)$; ۵) $\prod_{k=۰}^{۲n-۱}\left(\cos\frac{\pi+۲k\pi}{۲n}+i\sin\frac{\pi+۲k\pi}{۲n}\right)$;

۶) $\prod_{k=۰}^{۴}\left(\cos\frac{\frac{۴\pi}{۳}+۲k\pi}{۵}+i\sin\frac{\frac{۴\pi}{۳}+۲k\pi}{۵}\right)\left(\cos\frac{\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi}{۵}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi}{۵}\right)$. ۵۱. ۱) $-۲\leqslant x<\infty$; ۲) $\left[-\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi;\right.$

$\frac{۲\pi}{۳}+۲k\pi\Big]$ $(k\in\mathbf{Z})$; ۳) $-۱\leqslant x<۱$، $-۱<x\leqslant ۱$.

۵۳. $z=-۱-i$ به‌ازای $a=۱$، $z=-۲-i$ به‌ازای $a=\sqrt{۲}$،

$z_{۱,۲}=\frac{-a^۲\pm a\sqrt{۲-a^۲}}{a^۲-۱}-i$ به‌ازای $۱<a<\sqrt{۲}$;

و به‌ازای $a>\sqrt{۲}$ جواب ندارد.

۵۴. $z_{۱,۲}=-۱\pm i$، $z_۳=-a-۱$، $z_۴=-a-۳$.

۵۵. $z_۱=۳+۴i$، $z_۲=۳-۴i$، $z_۳=۷\frac{۱۹}{۲۵}$. ۵۶. $z_۱=۱۰+۸i$،

$z_۲=۴\frac{۱۸}{۲۵}+۴\frac{۴}{۸۵}i$.

ضمیمه‌ای برای فصل پنجم

چند مسأله

۱. مجموعهٔ A، شامل عددهای طبیعی مختلف است. تعداد عضوهای مجموعهٔ A، ازهفت بیشتر وکوچکترین مضرب مشترك همهٔ آن‌ها برابر ۳۹۰ است. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك هر دو عدد از مجموعهٔ A، عددی غیراز واحد است. حاصل‌ضرب همهٔ عددهای مجموعهٔ A، بر ۱۶۰ بخش‌پذیر نیست و، درضمن، برابر توان چهارم هیچ عدد درستی نمی‌شود. عضوهای‌مجموعهٔ A را پیدا کنید.

پاسخ: {۳۹۰، ۱۹۵، ۱۳۰، ۷۸، ۶۵، ۳۹، ۳۰، ۱۵}.

۲. چند واگون‌قطار را، برای جابه‌جایی حیوانات اختصاص‌داده‌اند. درایستگاه A، در هر واگون، ۱۲ حیوان جا دادند. در ایستگاه B، تعدادی از آن‌ها را پیاده‌کردند بقیهٔ حیوانات را، به‌طور مساوی، در واگون‌ها تقسیم کردند، ولی تعداد واگون‌ها، ۲ واحدکمتر شد. در ضمن معلوم شد، تعداد حیوانات در هر واگون، عددی اول و تعداد واگون‌ها، ۱۴ واحد از تعداد حیوانات هر واگون‌کمتر است. در ایستگاه A، چند حیوان در واگون‌ها جا داده‌اند؟

پاسخ: ۶۰ حیوان.

۳. در روزنامهٔ دیواری مدرسه اطلاع دادند که، دانش‌آموزان موفق یك‌کلاس، درنیم‌سال دوم، بین ۲/۹ درصد تا ۳/۱ درصد، نسبت‌به‌نیم‌سال اول، افزایش یافته است. دانش‌آموزان هرکلاس نمی‌توانند از ۴۰ نفر بیشتر باشند. تعداد دانش‌آموزان این‌کلاس را پیدا کنید.

پاسخ: ۳۳ یا ۳۴ نفر.

۴. ضمن مسابقهٔ اسکی اطلاع دادندکه، از بین داوطلبان مسابقه، بین

۹۶/۸ درصد تا ۹۷/۲ درصد افراد برای مسابقه حاضر شده‌اند. حداقل تعداد داوطلبان مسابقه را پیدا کنید.

پاسخ: ۳۲ نفر.

۰۵ تراش‌کاری، سفارشی برای چند قطعه دریافت‌کرد. تراش‌کار دوم، در این مدت ۱۸ قطعه را تراش داد و، با یك ساعت‌کار کمتر، نصف همان سفارش را انجام داد. اگر تراش‌کار اول، محصول‌کار خود را، درهرساعت ۲ قطعه افزایش دهد، آن‌وقت در مدتی که قطعه را می‌تراشد، تراش‌کار اول می‌تواند سفارش را انجام دهد و ۵ قطعهٔ اضافی هم آماده کند. به‌تراش‌کار، چند قطعه سفارش داده شده است؟

پاسخ: ۳۰ قطعه.

۰۶ مجموعه‌ای را در واگون‌هایی که، هر کدام ظرفیت ۸۰ تن‌داشتند، جا دادند، ولی یکی از واگون‌ها، پر نشد. آن‌وقت، واگون‌های با ظرفیت هر کدام ۶۰ تن را انتخاب کردند؛ در این حالت به ۸ واگون بیشتر نیاز داشتند و، در ضمن، بازهم یکی از واگون‌ها، پر نشد. سرانجام، محموله را در واگون‌های ۵۰ تنی جا دادند که، درنتیجه، بازهم ۵ واگون اضافی‌لازم بود، ولی همهٔ واگون‌ها با ظرفیت کامل خود پر شدند. محموله، چند تن بوده است؟

پاسخ: ۱۷۵۰ تن.

۰۷ عده‌ای سرباز در ستونی با ردیف‌های ۸ نفری ایستادند، ولی‌یکی از ردیف‌ها، کامل‌نشد. سپس، در ردیف‌های ۷ نفری‌منظم‌شدند، همهٔ‌ردیف‌ها کامل شد، ولی تعداد ردیف‌ها، دو واحد بیشتر شد. اگر همین سربازها، در ردیف‌های ۵ نفری قرار می‌گرفتند، تعداد ردیف‌ها، بازهم ۷ واحد اضافه می‌شد و، درضمن، یکی از ردیف‌ها ناقص بود. تعداد سربازها راپیدا کنید.

پاسخ: ۱۱۹ نفر.

۰۸ گروهی دانش‌آموز پسر و دختر، در مسابقه‌های گروهی شطرنج شرکت‌کردند. پسرهای این گروه، در مجموع ۶۰ دور و دخترهای‌این گروه

۴۰ دور بازی داشتند. از همهٔ پسرهایی که در دورهای بازی شرکت کرده بودند، پسرها در ۴۵ درصد بازی‌ها بردند و، از همهٔ دخترهایی که در بازی شرکت داشتند، ۵۰ درصد دخترها باختند. تعداد باخت‌های پسرها، ۷ واحد بیشتر از تعداد تساوی‌های دختران بود. برای هر برد یك امتیاز و برای هر تساوی نیم‌امتیاز به‌حساب می‌آورند؛ باخت امتیازی ندارد؛ افراد یك گروه باهم بازی نمی‌کنند. اگر تمامی این گروه ۵۲ امتیاز آورده باشد، پسرهای این گروه چند امتیاز آورده‌اند؟

پاسخ: ۳۶ امتیاز.

۹. تعداد کتاب‌های علمی - فنی کتابخانه، $\frac{۱۱}{۱۳}$ تعداد کتاب‌های هنری آن است. برای بردن کتابخانه به‌شهر دیگری، کتاب‌ها را در دو واگون جا دادند: در واگون اول $\frac{۱}{۱۵}$ کتاب‌های علمی-فنی و $\frac{۱۸}{۱۹}$ کتاب‌های هنری و بقیهٔ کتاب‌ها را درواگون دوم گذاشتند. از هر نوع کتاب، چندکتاب در کتابخانه‌وجود دارد، به‌شرطی که‌تعدادکتاب‌های‌واگون اول بیش از ۱۰۰۰۰ و تعدادکتاب‌های‌واگون دوم، کمتر از ۱۰۰۰۰ باشد؟

پاسخ: ۹۴۰۵ کتاب، ۱۱۱۱۵ کتاب.

۱۰. دو گروه، روی‌هم شامل ۲۷ نفرند. اگر از تعداد افرادگروه‌دوم، ۱۲ نفرکم کنیم، آن‌وقت تعداد افرادگروه اول از ۲ برابر تعداد افرادگروه دوم بیشتر می‌شود. اگر از تعداد افرادگروه اول ۱۰ نفرکم کنیم، آن‌وقت تعداد افراد گروه دوم، از ۹ برابر تعداد افراد گروه اول بیشتر می‌شود. در هر گروه، چند نفر است؟

پاسخ: در گروه اول ۱۱ نفر و درگروه دوم ۱۶ نفر.

۱۱. هریك از کارگران باید ۳۶ قطعهٔ یکسان آماده‌کنند. کارگر اول، ۴ دقیقه بعد از دومی به کار مشغول شد و $\frac{۱}{۳}$ کار را، به‌طور هم‌زمان، انجام دادند. وقتی که‌کارگر اول وظیفهٔ خود را انجام داد، بعداز دو دقیقه، دوباره

به‌کار پرداخت و، تا لحظه‌ای که دومی کار خود را تمام کرد، دوقطعهٔ دیگرهم آماده کرد. هر کار گر، ساعتی چند قطعه را آماده می کند؟

پاسخ: اولی ۲۰، دومی ۱۸.

۱۲. از نقطهٔ A به‌سمت نقطهٔ B، که فاصله‌ای برابر ۷۰ کیلومتردارند، دوچرخه‌سواری حرکت کرد. بعد از گذشت زمانی، موتورسیکلت‌سوار با سرعت ۵۰ کیلومتر درساعت از A به‌سمت B به‌راه افتاد. موتورسیکلت‌سوار درفاصلهٔ ۲۰ کیلومتری ازنقطهٔ A، به‌دوچرخه‌سوار رسید. موتورسیکلت‌سوار به B رسید، ۴۸ دقیقه استراحت کرد و به‌طرف A برگشت و ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه بعد از آغاز حرکت دوچرخه‌سوار، به‌او رسید. سرعت دوچرخه‌سوار چقدر است؟

پاسخ: ۲۵ کیلومتر در ساعت.

۱۳. قایقی از بندر A به‌طرف بندر B به‌راه افتاد؛ $7\frac{1}{2}$ ساعت بعد از آن، قایق‌موتوری از بندر A خارج شد. قایق‌موتوری، در وسط راه از A به B، به قایق رسید. وقتی قایق موتوری به B رسید، قایق پاروئی هنوز $\frac{3}{10}$ مسیر را در جلو خود داشت. قایق پاروئی، برای رسیدن از A به B، به‌چه‌زمانی نیاز دارد، به‌شرطی که سرعت هر دو قایق در تمامی طول مسیر یکنواخت باشد؟

پاسخ: ۲۵ ساعت.

۱۴. دانش‌آموز در ایستگاه A از تراموا پیاده شد و با پای پیاده به مدرسه‌رفت؛ ولی اگردرایستگاه B از تراموا پیاده می‌شد و بقیهٔ راه را با پای پیاده به‌مدرسه می‌رفت، ۱ دقیقه وقت کمتر صرف می کرد. اگر دانش‌آموز، از ایستگاه A تا مدرسه را، با سرعت دو برابر برود، آن‌وقت در همان مدتی که برای رفتن تراموا از A به B لازم است، به مدرسه می‌رسد. اگر فاصلهٔ A تا مدرسه ۳۰۰ متر و فاصلهٔ B تا مدرسه ۱۰۰ متر باشد، سرعت پیادهٔ دانش‌آموز را پیدا کنید.

پاسخ: ۳ کیلومتر در ساعت.

۱۵. از دو نقطهٔ A و B، در یک لحظه و به سمت یکدیگر، دوچرخه‌سوار و اتوبوس حرکت کردند. زمانی که دوچرخه‌سوار برای رسیدن از A به B لازم دارد، ۲ ساعت و ۴۰ دقیقه بیشتر از زمانی است که اتوبوس برای رسیدن از B به A صرف می‌کند. مجموع این دو زمان، $۵\frac{۱}{۳}$ برای زمانی است که از آغاز حرکت دوچرخه‌سوار و اتوبوس، تا لحظهٔ برخورد آن‌ها طول می‌کشد. دوچرخه‌سوار برای رفتن از A به B، و اتوبوس برای رفتن از B به A، به‌چه زمانی نیاز دارند؟

پاسخ: ۴ ساعت؛ $\frac{۴}{۳}$ ساعت.

۱۶. قایق از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B و در جهت حرکت آب، پیش می‌رود. هم‌زمان با آن، قایق‌موتوری از B به‌طرف A و درخلاف جهت‌حرکت آب، به‌راه افتاد که باید پس‌ازرسیدن به A، بدون توقف، به‌سمت B برگردد و، دوباره، به‌محض رسیدن B، بدون‌هیچ توقفی، به‌طرف A بیاید. قایق‌موتوری، درمسیر آخر خود، درجایی با قایق‌معمولی برخورد می‌کند که، قایق‌معمولی، $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ از A تا B را طی‌کرده است. سرعت حرکت قایق معمولی‌درجهت حرکت آب، ۹ برابر سرعت آن ضمن حرکت در خلاف جهت آب است. وقتی که هم قایق‌موتوری و هم قایق معمولی در جهت حرکت آب، پیش می‌روند، سرعت قایق موتوری چند برابر سرعت قایق معمولی است؟

پاسخ: $\frac{۳۲}{۹}$.

۱۷. توقف‌گاه‌های A، B، C و D روی یک‌جادهٔ مستقیم و پشت‌سرهم قرار دارند. فاصلهٔ از نقطهٔ A تا توقف گاه‌های B، C و D، به نسبت: ۱:۴:۷ می‌باشد. اتوبوس‌هایی، با فاصله‌های زمانی برابر و با سرعت یکسان از D به‌طرف A حرکت‌می‌کنند. سه‌پیاده در زمان‌های برابر از A به‌طرف D در طول جاده

و با سرعتی یکسان به‌راه می‌افتند. پیادهٔ اول، بعداز خروج از A و قبل از رسیدن به B، با ۲ اتوبوس برخورد می‌کند. پیادهٔ دوم، ضمن عبور از A تا C، از کنار ۴ اتوبوس می‌گذرد. پیاده سوم وقتی به D می‌رسد که از این توقف‌گاه، اتوبوس‌های نوبتی حرکت کرده‌اند. پیادهٔ سوم، ضمن خروج از A تا رسیدن به D با چند اتوبوس برخورد دارد؟

پاسخ: ۷ اتوبوس.

۱۸۰ پیاده، دوچرخه‌سوار و موتورسیکلت‌سوار، با سرعت‌های ثابت، روی جاده‌ای در یك جهت حرکت می‌کنند. در لحظه‌ای که دوچرخه و موتورسیکلت، دریك‌نقطه قرار دارند، پیاده ۱۰ کیلومتر جلوتر از آن‌هاست. وقتی موتورسیکلت به‌پیاده می‌رسد، دوچرخه در ۵ کیلومتری عقب‌آن‌هاست. وقتی‌که دوچرخه به‌پیاده برسد، موتورسیکلت چند کیلومترجلوتر از آن‌هاست؟

پاسخ: ۱۰ کیلومتر.

۱۹۰ قایق موتوری از نقطهٔ A و در جهت حرکت آب به طرف نقطهٔ B حرکت کرد. هم‌زمان با آن، قایق‌عادی از B به‌طرف A (درخلاف‌جهت حرکت آب) به‌راه افتاد. وقتی‌که قایق‌موتوری به B رسید بلافاصله برگشت و با قایق عادی در یك لحظه به A رسید. سرعت حرکت آب، ۳ کیلومتر در ساعت است. سرعت خاص هریك از دو قایق را پیدا کنید، به‌شرطی‌که سرعت قایق موتوری، ۲ کیلومتر بیشتر از سرعت قایق عادی باشد.

پاسخ: ۹ کیلومتر در ساعت، ۷ کیلومتر در ساعت.

۲۰۰ روستای A در زمین مسطح، در ۸ کیلومتری جادهٔ قرار دارد. جاده، که به‌طور مستقیم ادامه دارد، از نقطهٔ B می‌گذرد. سرعت اتومبیل‌در جاده، دوبرابر سرعت آن درخارج جاده است. می‌دانیم، اگر از A به‌طور مستقیم به‌نقطه‌ای مانند C (غیراز B) درکنار جاده برویم و، سپس، از آن‌جا خود را به B برسانیم، نسبت به‌حالتی که مستقیماً از A به B برویم، وقت کمتری صرف نمی‌شود. فاصلهٔ A تا B چقدر است؟

پاسخ: $۸ \leqslant d \leqslant \frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$.

۲۱. روستای A در فاصله‌ای از جاده قرار دارد. نقطهٔ B در کنار جاده (به‌طور مستقیم ادامه دارد)، در فاصلهٔ ۱۰ کیلومتری A واقع است. سرعت حرکت اتومبیل در جاده، سه برابر سرعت آن در خارج جاده‌است. می‌دانیم اگر از A خود را به‌نقطه‌ای مانند C در کنار جاده برسانیم و، سپس از آن جاده، روی جاده به B برویم، زمان لازم از زمانی که به‌طور مستقیم از A به B برویم (برای هر نقطهٔ دلخواه C) کمتر نیست. فاصلهٔ A تا جاده چقدر است؟

پاسخ: $\frac{۲۰\sqrt{۲}}{۳} \leqslant d \leqslant ۱۰$.

۲۲. قطار سریع‌السیر، فاصلهٔ بین دو شهر را، ۴ ساعت زودتر از قطار باری و ۱ ساعت زودتر از قطار مسافری می‌پیماید. می‌دانیم سرعت قطار باری، $\frac{۵}{۸}$ سرعت قطار مسافری و ۵۰ کیلومتر در ساعت کمتر از سرعت قطار سریع‌السیر است. سرعت قطار باری و سرعت قطار سریع‌السیر را پیدا کنید.

پاسخ: ۵۰ کیلومتر در ساعت، ۱۰۰ کیلومتر در ساعت.

۲۳. به‌فاصلهٔ ۴ ثانیه از یکدیگر، دو دوچرخه‌سوار در مسیر مسابقه حرکت‌می‌کنند، دوچرخه‌سوار اول ۷/۰۵ متر و در ثانیه‌های بعدی، هر ثانیه ۰/۲ متر بیشتر از ثانیه قبلی پیش می‌رود. دوچرخه‌سوار دوم، در ثانیهٔ اول ۱۰/۲۵ متر و درهر ثانیه بعدی، ۰/۱ متر بیشتر از ثانیهٔ قبل‌از آن، سرعت دارد. در چه‌فاصله‌ای از نقطهٔ آغاز حرکت، دوچرخه‌سوارها، برای باردوم به‌هم می‌رسند.

پاسخ: ۱۴/۴ کیلومتر.

۲۴. از دو نقطهٔ A و B و در یك لحظه، موتورسیکلت و دوچرخه به‌طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. موتورسیکلت در دقیقهٔ اول ۴۵۰ متر و در دقیقه‌های بعدی، هردقیقه ۳۰ متر بیشتراز دقیقهٔ قبلی حرکت‌می‌کند. دوچرخه در شش دقیقهٔ اول با سرعت ۶۰ متر دردقیقه و در دقیقه‌های بعدی، هردقیقه ۱۰متر بیشتراز دقیقهٔ‌قبلی، حرکت‌می‌کند. اگرفاصلهٔ A تا B برابر ۴۳۵۰متر

باشد، دوچرخه بعداز پیمودن چه‌فاصله‌ای به‌موتورسیکلت می‌رسد؟

پاسخ: ۹۳۰ متر.

۲۵. اتومبیلی در یك جادهٔ کوهستانی حرکت می‌کند. بعد از رسیدن بـه نقطهٔ A، در ثانیهٔ اول ۳۰ متر و در هر ثانیه بعدی ۲ مترکمتر از ثانیهٔ قبل سرعت داشت. ۹ ثانیه بعداز عبور اتومبیل از نقطهٔ A، اتوبوسی که‌در فاصلهٔ ۲۵۸ متری جلو آن قرارداشت، به‌طرف اتومبیل حرکت کرد. اتوبوس در ثانیهٔ اول ۲ متر و در هر ثانیهٔ بعدی یك متر بیشتر از ثانیهٔ قبلی حرکت می‌کرد. اتوبوس بعداز پیمودن چه‌فاصله‌ای به‌اتومبیل می‌رسد؟

پاسخ: ۲۰ متر.

۲۶. سه آلیاژداریم. آلیاژاول‌شامل ۶۰ درصدآلومی‌نیوم، ۱۵درصد مس و ۲۵ درصد منیزیوم؛ آلیاژ دوم شامل ۳۰ درصد مس و ۷۰ درصـــد منیزیوم و آلیاژ سوم شامل ۴۵ درصدآلومی‌نیوم‌و ۵۵ درصد منیزیوم‌است. می‌خواهیم، از آن‌ها، آلیاژ جدیدی شامل ۲۰ درصد مس درست کنیم. در این آلیاژ، حداقل و حداکثر میزان آلومی‌نیوم چقدر است؟

پاسخ: ۱۵ درصد، ۴۰ درصد.

۲۷. سه آلیاژ داریم. آلیاژ اول ۳۰ درصد نیکل و ۷۰ درصد مس؛ دومی ۱۰درصد مس و ۹۰درصد منگنز و سومی ۱۵درصد نیکل، ۲۵ درصد مس و ۶۰ درصـــد منگنز دارد. می‌خواهیم از آن‌هـــا، آلیاژ تازه‌ای شامل ۴۰ درصد منگنز درست‌کنیم. در این آلیاژ، حداقل درصد مس چقدراست؟ حداکثر آن چطور؟

پاسخ: ۴۰ درصد، $۴۳\frac{۱}{۳}$ درصد.

۲۸. دوظرف‌شامل ۴ کیلوگرم و ۶ کیلوگرم محلول‌اسید باغلظت‌های مختلف در اختیار داریم. اگر آن‌هـــا را باهم مخلوط کنیم، محلولی شامـــل ۳۵ درصد اسید به‌دست می‌آیـــد؛ ولی اگر از دو ظرف به‌وزن‌هـــای برابر انتخاب و به‌هم مخلوط‌کنیم، محلولی با ۳۶ درصد اسید آماده می‌شود. در هرظرف چندکیلوگرم اسید وجود دارد؟

پاسخ: ۱/۶۴ کیلوگرم، ۱/۸۶ کیلوگرم.

۲۹. در دو بشکه، ۱۶ کیلوگرم محلول نمک ریخته‌ایم. به‌هر دو بشکه آب اضافه می‌کنیم تا درصد نمک موجود در بشکهٔ اول به $\frac{1}{m}$ و درصد نمک در بشکهٔ دوم به $\frac{1}{n}$ تقلیل یابد. در مورد عددهای m و n تنها می‌دانیم:

$$m \cdot n = m + n + ۳$$

حداقل آبی که در دو بشکه ریخته‌ایم، روی هم چقدر است؟

پاسخ: ۸۰ کیلوگرم.

۳۰. دو آلیاژ شامل روی، مس و قلع در اختیار داریم. آلیاژ اول ۲۵ درصد روی و آلیاژ دوم ۵۰ در صد مس دارد. در صد قلع در اولی، دو برابر درصد قلع در دومی است. ۲۰۰ کیلوگرم اولی و ۳۰۰ کیلوگرم دومی، روی‌هم آلیاژی با ۲۸ درصد قلع داده‌اند. در آلیاژ جدید چند گرم مس وجود دارد؟

پاسخ: ۲۲۰ کیلوگرم.

۳۱. میوهٔ تازه ۷۲ درصد و میوهٔ خشک ۲۰ درصد آب دارد. از ۲۰ کیلوگرم میوهٔ تازه، چند کیلوگرم میوهٔ خشک به‌دست می‌آید؟

پاسخ: ۷ کیلوگرم.

۳۲. سه‌شمش داریم، اولی ۵ کیلوگرم و دومی ۳ کیلوگرم؛ هر کدام از آنها دارای ۳۰ درصد مس هستند. اگر اولی را با دومی مخلوط کنیم، شمشی با ۵۰ درصد، و اگر دومی را با سومی مخلوط کنیم، شمشی با ۶۰ درصد مس به‌دست‌می‌آید. وزن شمش‌سوم و درصدمس آن‌را پیدا کنید.

پاسخ: ۱۰ کیلوگرم، ۶۹ درصد.

۳۳. دو شمش طلا و نقره در اختیار داریم. درصد طلای شمش‌اول، ۲/۵ برابر درصد طلای شمش دوم است. اگر دو شمش را یکی‌کنیم، در شمش حاصل، ۴۰ درصد طلا وجود دارد. وزن شمش اول، چند برابر شمش دوم است، به‌شرطی که بدانیم، اگر از دو شمش به‌وزن‌های برابر انتخاب

کنیم، شمشی به‌دست می‌آید که ۳۵ درصد طلا دارد.

پاسخ: ۲ برابر.

۳۴. دومحلول اسیدگوگرد و آب در اختیار داریم: اولی ۴۰درصد و دومی ۶۰ درصد. دو محلول را مخلوط و، سپس، ۵ کیلوگرم آب خالص به آن اضافه کرده‌ایم، محلولی ۲۰ درصد به‌دست آمده است. اگر به‌جای ۵ کیلوگرم آب خالص، ۵ کیلوگرم محلول ۸۰ درصد اضافه می‌کردیم، به محلول ۷۰ درصد می‌رسیدیم. محلول‌های ۴۰ درصد و ۶۰ درصد، چقدر وزن داشته‌اند؟

پاسخ: ۱ کیلوگرم و ۲ کیلوگرم.

۳۵. دوآلیاژ چدن، که‌وزن آن یکی بود، ولی مقدار کروم آن‌ها اختلاف داشت، باهم مخلوط کردیم: آلیاژی به‌دست آوردیم که دارای ۱۲ کیلوگرم کروم بود. اگر وزن آلیاژ اول دوبرابر بود وزن کروم آلیاژ حاصل، ۱۶ کیلوگرم می‌شد. می‌دانیم در آلیاژ اول، مقدار کروم، به‌اندازه ۵ درصد از آلیاژ دوم کمتر است. درصد کروم را درهر یك از دوآلیاژ پیدا کنید.

پاسخ: ۵ درصد و ۱۰درصد.

۳۶. ۴۳ تن بار را باید با سه وانت‌بار جابه‌جا کرد. وانت‌بار اول، درهرساعت، ۵ تن بار را جابه‌جا می‌کند؛ وانت‌بار دوم درهرساعت d تن کمتر ازاولی وسومی $2d$ تن کمتر ازاولی، بارجابه‌جامی کنند. ابتدا وانت‌بارهای اول و دوم، باهم، آغاز به‌کارکردند و ۱۸ تن بار جابه‌جا شد. سپس بقیهٔ بار به‌عهدهٔ دووانت باراولی و سومی گذاشته شدکه باهم کار را انجام دادند. مقدار d $(0<d<2)$ چقدرباشد تا جابه‌جائی باردر ۴ ساعت‌به پایان برسد، به‌شرطی که‌کار، بدون وقفه ادامه داشته باشد.

پاسخ: $d=1$.

پایان