Subject:
Year Month Day

آمار :

جمع آوری اطلاعات ← طبقه بندی اطلاعات ← توصیف

نتیجه گیری اطلاعات ← استنباط، احتمال

اطلاعات یا داده‌ها : ۱) گسسته : با اعداد صحیح نمایش داده می‌شود ۱، ۲، ... مانند تعداد دانش‌آموزان یک مدرسه

۲) پیوسته : با اعداد اعشاری یا در صورت گرد شدن به یک داده‌ها به فرم اعداد اعشاری هم هستند مانند وزن، طول عمر لامپ

شاخص‌های آماری ۱) تمرکز : میانگین، میانه، نما

۲) پراکندگی : دامنه تغییرات، انحراف از معیار، واریانس

جامعه	میانگین	واریانس
N پارامتر	μ	σ^2
نمونه	Sample	
n آماره	$\bar{x}$	S^2

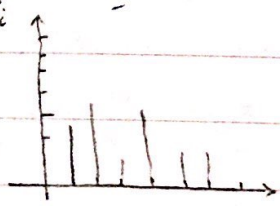
مثال : تعداد مرخصی‌های سرپاخوردگی به توسط ۵۰ خانواده استفاده می‌شود عبارتند از :

۷, ۵, ۳, ۳, ۴, ۵, ۳, ۲, ۸, ۶, ۶, ۲, ۴, ۴

۳, ۶, ۸, ۴, ۷, ۴, ۵, ۴, ۶, ۴, ۵, ۲, ۳, ۴, ۲, ۷, ۳, ۵, ۴, ۶, ۲, ۲, ۳, ۴, ۵, ۴, ۸, ۴, ۳, ۲, ۴, ۶, ۴, ۵, ۷, ۸

چند درصد از خانواده‌ها در ماه بیشتر از ۳ مرخص استفاده می‌کنند ؟ ۴۰ درصد

x_i	f_i فراوانی	r_i فراوانی نسبی	g_i	q_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
۲	۸	۰/۱۶	۸	۰/۱۶	۱۶	۳۲
۳	۱۰	۰/۲۰	۱۸	۰/۳۶	۳۰	۹۰
۴	۱۲	۰/۲۴	۳۰	۰/۶	۴۸	۱۹۲
۵	۷	۰/۱۴	۳۷	۰/۷۴	۲۵	۱۲۵
۶	۵	۰/۱۰	۴۲	۰/۸۴	۳۰	۱۸۰
۷	۴	۰/۰۸	۴۶	۰/۹۲	۲۸	۱۹۶
۸	۴	۰/۰۸	۵۰	۱/۰۰	۳۲	۲۵۶
جمع	$n=50$	۱			۲۱۹	۱۰۲۱



اندازه قطاع $360^\circ \times r_i$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year Month Day

میانگین $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{219}{50} = 4.38$

میانه ← عدد وسطی داده‌ها (مرد)
← معدل دو عدد وسطی (زوج)

مرد $50 \Rightarrow m = \frac{x_{25} + x_{26}}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$

نما یا مد ← عددی که داده‌ی بیشتری را داراست ← $\frac{M_1 + M_2}{2}$ ← دو عدد

اگر ۲ عدد از نظر تعداد برابر بودند: دو نما داریم که M_1 و M_2

$M = 4$

دامنه تغییرات: $D = x_{max} - x_{min} = 8 - 2 = 6$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{50-1}\left[1121 - \frac{1}{50}(219)^2\right] \qquad S = \sqrt{S^2}$$

دامنه چندک: مرزهای ۴۰٪ مشاهدات مرتب شده که به ترتیب شده‌اند.

۳۶ ۴۱ ۴۷ ۵۰ ۴۳ ۴۴ ۴۸ ۴۶ ۴۵ ۴۷ ۴۴ ۴۲ ۴۵ (۵۲)

۴۰ ۳۸ ۴۳ ۴۲ ۴۸ ۴۵ ۴۰ ۴۱ ۴۷ ۴۶ ۴۴ ۴۲ ۳۰ ۲۹

۴۳ (۴۱) ۴۰ ۳۲ ۳۴ ۴۱ ۴۲ ۴۴ ۳۱ ۳۷

ملاحظات: معمولاً تعداد طبقات ۵ تا ۲۵ تا است.

تعداد طبقات $K = 3.322 \log_{10}^{n} + 1$ دستور استرجس

مثال $k = 1 + 3.322 \log_{10}^{40} = 6.322 = 7$

S میزان تغییرات داده $= \frac{1}{2} = 0.5$

$min = 21 - 0.5 = 20.5$

$max = 52 + 0.5 = 52.5$

دامنه $R = max - min = 32$

w طول طبقه $= \frac{R}{K} = \frac{32}{7} = 4.5 \simeq 5$

Scanned with CamScanner

۳۵

طبقات	x_i	f_i	$r_i = \frac{f_i}{n}$	g_i	$s_i = \frac{g_i}{n}$	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
۲٫۸ – ۲۵٫۸	۲۳	۴	۰٫۰۷۸	۴	۰٫۰۷۸	۹۲	۱۵۸۷
۲۵٫۸ – ۳۰٫۵	۲۸	۶	۰٫۱۵	۹	۰٫۲۲۵	۱۶۸	۴۷۰۴
۳۰٫۵ – ۳۵٫۵	۳۳	۱۰	۰٫۲۵	۱۹	۰٫۴۷۵	۳۳۰	۱۰۸۹۰
۳۵٫۵ – ۴۰٫۵	۳۸	۸	۰٫۲۰	۲۷	۰٫۶۷۵	۳۰۴	۱۱۵۵۲
۴۰٫۵ – ۴۵٫۵	۴۳	۶	۰٫۱۵	۳۳	۰٫۸۲۵	۲۵۸	۱۱۰۹۴
۴۵٫۵ – ۵۰٫۵	۴۸	۵	۰٫۱۲۵	۳۸	۰٫۹۵	۲۴۰	۱۱۵۲۰
۵۰٫۵ – ۵۵٫۵	۵۳	۲	۰٫۰۵	۴۰	۱	۱۰۶	۵۶۱۸
جمع		۴۰	۱			$\sum f_i x_i$ ← ۱۴۷۵	$\sum f_i x_i^2$ ۵۶۹۹۵

آن طبقه که

متحصف طبقات تکرر

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{۱۴۷۵}{۴۰} = ۳۶٫۸۷۵$$

نخستین رده‌ای که S_i آن بزرگتر یا مساوی ۰٫۵ است را رده‌ی میانه می‌نامیم: ← فراوانی تجمعی رده ماقبل میانه

$$m = L_{۰٫۵} + \frac{(۰٫۵n - g_{۰٫۵})w}{f_{۰٫۵}} \leftarrow \text{طول طبقات} = ۳۵٫۵ + \frac{(۰٫۵ \times ۴۰ - ۱۹)۵}{۸} = ۳۶٫۱۲۵$$

کران پایین رده میانه ← فراوانی رده میانه

$$D = R - ۳۱$$

$$\text{واریانس } S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\left[\sum f_i x_i^۲ - \frac{۱}{n}(\sum f_i x_i)^۲\right] = \frac{۱}{۳۹}\left[۵۶۹۹۵ - \frac{۱}{۴۰}(۱۴۷۵)^۲\right] = ۴۴٫۰۹۶$$

$$S = \sqrt{S^۲} = \sqrt{۴۴٫۰۹۶} = ۸٫۱۳$$

ابتدا رده‌ای که دارای بیشترین فراوانی است را رده‌ی میانه می‌نامند.

ماقبل

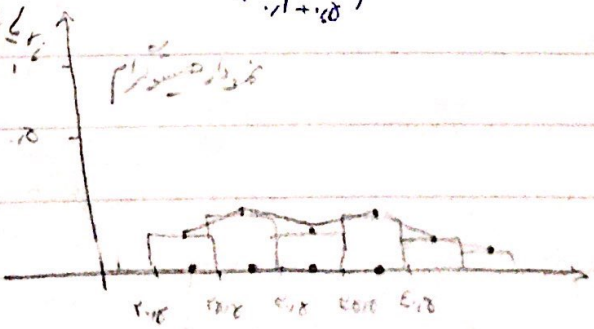
$$M = L_{M_۱} + \left(\frac{D_۱}{D_۱ + D_۲}\right)w \qquad M = ۳۰٫۵ + \left(\frac{۰٫۱}{۰٫۱ + ۰٫۱۵}\right)۵ = ۳۲٫۸۶۲$$

بعد

$D_۱ = ۰٫۲۵ - ۰٫۱۵ = ۰٫۱$

$D_۲ = ۰٫۲۵ - ۰٫۱ = ۰٫۱۵$

چند ضلعی فراوانی یا چندبر



Scanned with CamScanner

ص ۴

Subject
Year Month Day

- داده‌ی گسسته و داده پیوسته را با ذکر مثال توضیح دهید.

۲۰ عدد

۱۲ ۱۴ ۱۵ ۱۴ ۱۲ ۱۲ ۱۲ ۱۵ ۱۳ ۱۶ ۱۱ ۱۱ ۱۷ ۱۲

۱۳ ۱۲ ۱۴ ۱۱ ۱۰ ۱۲

جواب صفحه بعد

فضای نمونه: مجموعه تمام حالات ممکن یک آزمایش $= S$

انواع فضای نمونه: متناهی / نامتناهی (شمارش پذیر، شمارش ناپذیر)

پیشامد: هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه یک پیشامد می‌شوند.

الف) پرتاب سکه $S = \{H, T\}$

ب) پرتاب یک تاس $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ج) پرتاب دو تاس $S = \{(1,1)\ (1,2)\ \dots\ (1,6)$ ... $(6,1)\ \dots\ (6,6)\}$

د) پرتاب سکه تا آمدن شیر $S = \{H, TH, TTH, \dots\}$

ه) دمای بدن $= [36, 42]$

و) طول عمر لامپ تولیدی یک کارخانه $S = [0, 1000]$ ساعت

Scanned with CamScanner

فصل ۵

Subject:
Year Month Day

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ $\quad P(S) = 1$ $\quad P(A_i) \geq 0$ $\quad P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$ (اشتراک تهی)

مبانی احتمال { رخدادهای تعدد شناختی / مبنای تعدد شناختی

در پرتاب دو بار یک سکه احتمال آمدن حداقل یک شیر ؟

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

تمرین: بهتر این است که احتمال آمدن عدد فرد زوج در برابر عدد مرد است . احتمال آمدن عدد بیشتر از ۳ در پرتاب این تاس ؟

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$w + 2w + w + 2w + w + 2w = 1 \rightarrow 9w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{9}$

$A = \{4, 5, 6\}$

$P(A) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

در پرتاب یک جفت تاس احتمال آمدن مجموع ۷ ؟

$S = \{(1,1), \dots (1,6), \dots\}$ $\quad 6^2 = 36$

$A = \{(1,6)(6,1), (5,2), (2,5), (4,3), (3,4)\}$ $\quad n(A) = 6$ $\quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

جعبه‌ای شامل ۳ توپ سفید، ۴ توپ سیاه، ۵ توپ قرمز یک توپ به تصادف برمی‌داریم . احتمال آنکه قرمز باشد ؟

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{12}$

احتمال آنکه سفید باشد ؟ $\quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{12}$

۳ سفید
۴ سیاه
۵ قرمز

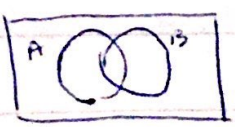
$3 + 4 + 5 = 12$

$n(S) = 12$

احتمال بر حسب پیشامد :

$P(A') = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Scanned with CamScanner

Subject:
Year Month Day

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ اگر $A \cap B = \emptyset$ ناسازگارند A, B بین اجتماع دو پیشامد

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

۵۰۵

یک جفت تاس را پرتاب می‌کنیم احتمال آمدن مجموع ۷ یا مجموع بیش از ۱۰ را بیابید.

A: مجموع ۷ — B: مجموع بیش از ۱۰ — اجتماع

$n(S) = ۳۶$

$A = \{(۱,۶), (۲,۵), (۳,۴), (۴,۳), (۵,۲), (۶,۱)\}$ $n(A) = ۶$

$B = \{(۵,۶), (۶,۶), (۶,۵)\}$ $n(B) = ۳$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{۶}{۳۶} + \frac{۳}{۳۶} = \frac{۹}{۳۶}$

اگر سکه‌ای را ۶ بار پرتاب کنیم احتمال آمدن حداقل یک شیر؟

$n(S) = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۶ = ۶۴$

$P(A) = ۱ - P(A') = ۱ - \frac{۱}{۶۴} = \frac{۶۳}{۶۴}$

حداقل یک شیر — اصلا شیر نیاید — هیچ شیری نیاید

در یک زندان $\frac{۲}{۳}$ دارای سن کمتر از ۲۵ سال

$\frac{۳}{۵}$ مرد

$\frac{۵}{۸}$ زن یا دارای سن حداقل ۲۵ احتمال اینکه یک زندانی که به تصادف انتخاب می‌شود زن باشد یا حداقل سن ۲۵ سال چقدر است؟

$P(A) = \frac{۲}{۳}$ سن کمتر ۲۵ — $P(A') = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$ سن حداقل ۲۵

$P(B) = \frac{۳}{۵}$ مرد — $P(B') = ۱ - \frac{۳}{۵} = \frac{۲}{۵}$ زن

$P(B' \cup A') = \frac{۵}{۸}$ دارای سن حداقل ۲۵ یا زن

$P(B' \cap A') = ?$ $\Rightarrow P(B' \cup A') = P(B') + P(A') - P(B' \cap A') \Rightarrow \frac{۵}{۸} = \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۳} - P(A' \cap B')$

$\Rightarrow P(A' \cap B') = \frac{۱۳}{۱۲۰}$

Scanned with CamScanner

حل ۷

احتمال آنکه هواپیمای صید تایید طراحی را سلامت کند ۰/۶ ، احتمال استفاده از سوخت کند ۰/۴
هر دو را کند ۰/۱۱

الف) احتمال آنکه لااقل یکی از دو تأیید را کند چقدر است؟

ب) " " تنها یکی " " " ؟

$P(A)=0.14$ $P(B)=0.34$ $P(A\cap B)=0.11$

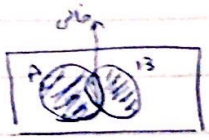
الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.14+0.34-0.11=0.29$

$P(A\Delta B)=P((A\cup B)-P(A\cap B))=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.29-0.11=0.18$

ب) $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$

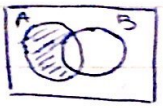
$(A-B)\cup(B-A)$

خواص



$P(A-B)=P(A)-P(B)$ به شرطی که $B\subseteq A$

$P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$



تمارین صفحه‌ی بعد

قاعده شمارش:

الف) اصل ضرب: انجام دو یا چند عمل پیاپی که اول به m حالت و دوم به n حالت $\Rightarrow mn$ برگزید

ب) اصل جمع: انجام دو یا چند عمل که به طریق اول یا دوم صورت نپذیرد $\Rightarrow m+n$ برگزید

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت در صورتی که الف) تکرار ارقام مجاز باشد ب) تکرار ارقام مجاز نباشد

با تکرار $3\times4=12$

بدون تکرار $3\times3=9$

به چند طریق می‌توان از بین ۴ دانشجوی ماهیدشت و ۵ دانشجوی ورزان، ۲ دانشجو انتخاب کرد به طوری که نفر اول به عنوان سرپرست و نفر دوم به عنوان دستیار چه هر دو نفر از یک دانشگاه باشند؟

دستیار سرپرست

هر دو ماهیدشت $4\times3=12$ $\quad 12+20=32$

یا

هر دو ورزان $5\times4=20$

Subject:
Year Month Day

- یک تاس سالم را چهار بار پرتاب می‌کنیم احتمال اینکه در هیچ یک از پرتاب ها عدد مضرب ۳ مشاهده نشود.

پرتاب اول	دوم	سوم	چهارم
۶	۶	۶	۶
۴	۴	۴	۴

۱،۲،۳،۴،۵،۶

$n(S) = 6\times6\times6\times6 = 6^4$

$n(A) = 4\times4\times4\times4 = 4^4$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4^4}{6^4}$

- تعداد اعداد ۳ رقمی بدون تکرار که با ارقام ۱،۲،۳،۴،۵ داده می‌توان ساخت را بدست آورید به طوری که

الف) اعداد فرد باشند

$4 \times 4 \times 3 \ (C^5_1) = 48$ (یکی از اعداد فرد به صفر تبدیل نشود)

ب) اعداد بزرگتر ۳۳۰ باشند

$2\times5\times4 \ (C^5_1) + 1\times2\times4 \ (C^3_1) = 48$

پ) زوج باشند ۰ = ۴۸ − ۴۸ = فرد − کل = اعداد زوج

$= 52$

کل $= 5\times5\times4 = 100$

جایگشت ← بدون تکرار ← $n!$

با تکرار ← $r=n$ ← ترتیب مهم است

$n = n_1 + \cdots + n_k \quad \binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

تبدیل ← بدون تکرار ← $P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

با تکرار ← $r>n$ ← ترتیب مهم است ← n^r

ترکیب ← بدون تکرار ← $C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

با تکرار $r>n$ ← ترتیب تراریزی مهم است ← $\binom{n+r-1}{r}$

جایگشت: (صف بندی، چیدمان، arenge) ترتیب تراریزی مهم

بدون تکرار: n تا عضو متمایز داریم، n تا را ترتیب می‌کنیم

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\times3\times2\times1$

$n \ (n-1) \ (n-2) \ \cdots \ 2 \ 1$

با تکرار: n تا عضو داریم n_1 تا از نوع اول

n_2 تا از نوع دوم

$\binom{n}{n_1\, n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

Scanned with CamScanner

Subject
Year Month Day

- با حروف a,b,c چند کلمه سه حرفی می‌توان نوشت ؟ ۳! abc, acb, bac, bca, cab, cba

- ۴ پزشک و ۵ مهندس می‌خواهند دور یک میز گرد هم قرار بگیرند.

الف) احتمال اینکه مهندس‌ها در یک طرف و پزشک‌ها در طرف دیگر میز قرار بگیرند.

ب) احتمال اینکه یک در میان در میز قرار بگیرند. M P M P M P M P M

ج) احتمال اینکه دو مهندس به خصوص همواره در کنار هم قرار بگیرند (مثل یک نفر)

د) احتمال اینکه دو مهندس هیچ‌گاه کنار هم قرار نگیرند.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲! \times ۵! \times ۲!}{۹!}$ (۲! پزشک، ۵! مهندس، ۲! جایگشت‌های دو گروه)

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۴! \times ۵!}{۹!}$

$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۲! \times ۸!}{۹!} = \frac{۲}{۹}$

$P(C)' = ۱ - P(C) = ۱ - \frac{۲}{۹} = \frac{۷}{۹}$

- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه BALL را بیابید

$\binom{۴}{۱\ ۱\ ۲} = \frac{۴!}{۱!\,۱!\,۲!} = \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$ (B, A, L)

- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه PEPPER را بیابید

$\binom{۶}{۳\ ۲\ ۱} = \frac{۶!}{۳!\,۲!\,۱!} = ۶۰$ (P, E, R)

- من می‌خواهم ۳ کتاب ریاضی، ۵ کتاب معادلات و ۴ کتاب آمار را در کنار یکدیگر در یک قفسه مرتب کنم. احتمال اینکه هر ۳ کتاب ریاضی پهلوی هم قرار بگیرند.

RRR MMMMM AAAA

$n(S) = \binom{۱۴}{۳\ ۵\ ۴} = \frac{۱۴!}{۳!\,۵!\,۴!}$ (R, M, A)

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\frac{۱۰! \times ۴!}{۱۴!}}{\frac{۱۴!}{۳! \times ۵! \times ۴!}} = \frac{۱}{۲۲}$

نامتمایز {R, R, R} MMMMM AAAA

$n(A) = \binom{۱۰}{۱\ ۵\ ۴} = \frac{۱۰!}{۱!\,۵!\,۴!}$

- حروف: a b c d e

تبدیل

بدون تکرار: چند کلمه دو حرفی بدون تکرار می‌توان ساخت ؟ $n=۵ \quad r=۲ \quad {}^۵P_۲ = \frac{۵!}{(۵-۲)!} = \frac{۵!}{۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۳!} = ۲۰$

باتکرار: چند کلمه دو حرفی با تکرار می‌توان ساخت ؟ $n=۵ \quad r=۲ \quad ۵^۲ = ۲۵$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year Month Day

ترکیب { بدون تکرار : هیچ‌کدام دوتوی بدون تکرار می‌توان ساخت ترتیب مرا بیری حروف مهم نباشد
با تکرار : هیچ‌کدام ۷ حرفی می‌توان ساخت

$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$ $\quad n=5,\ r=2$

$\binom{n+r-1}{r} = \binom{5+7-1}{7} = \binom{11}{7} = \frac{11!}{7!\,4!} = \frac{11\times10\times9\times8\times7!}{7!\times4\times3\times2} = 330$ $\quad n=5,\ r=7$

- تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی معادله $x_1+x_2+\dots+x_n=r$ را بیابید. (ترکیب با تکرار) $\binom{n+r-1}{r}$ جواب

مثال) $x_1+x_2+x_3=7$ $\quad x_i\geq 0$

$\binom{3+7-1}{7}$

- از بین ۴ پزشک و ۳ پرستار می‌خواهیم یک کمیته ۴ نفری تشکیل دهیم:

الف) احتمال اینکه اعضای کمیته شامل ۲ پزشک و ۲ پرستار باشد را بیابید

ب) احتمال اینکه اعضای کمیته شامل حداقل ۲ پرستار باشد را بیابید.

الف) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}}$ (پزشک، پرستار)

ب) $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{2}}{\binom{7}{4}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{3}}{\binom{7}{4}}$ (پزشک، پرستار) (۲ تا پرستار، ۳ تا پرستار)

- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی ۳ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است ۶ مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه ۲ آبی و ۱ سبز انتخاب شود را بیابید.

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{4}{3}}{\binom{12}{6}}$

ب) احتمال اینکه از هر رنگ به تعداد مساوی انتخاب شود را بیابید.

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{4}{2}}{\binom{12}{6}}$

* تا این جا مدل احتمال را روی فضای نمونه متناهی بررسی کردیم با توجه به نمودار زیر می‌خواهیم مدل احتمال را روی فضاهای نمونه نامتناهی بررسی کنیم.

مدل احتمال (فضای نمونه) { متناهی
نامتناهی { شمارا
ناشمارا

Scanned with CamScanner

Subject
Year Month Day

* نامتناهی شمارا

- سکه‌ای را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک شیر مشاهده کنیم و سپس توقف می‌کنیم.

S	H	TH	TTH	TTTH	...
$P(e_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	... $\frac{1}{2^n}$

$\sum P(e_i) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

الف) احتمال اینکه تعداد فردی پرتاب لازم باشد تا شیر بیاید.

$P(A) = P(e_1) + P(e_3) + P(e_5) + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$

ب) احتمال اینکه حداقل ۷ پرتاب لازم باشد تا شیر بیاید.

$P(B) = \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{\frac{1}{2^7}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^6}$

نکته: فرمول تصاعد $S = a + ar + ar^2 + \dots$

جمله اول $= a$
قدرنسبت $= r$
$|r|<1 \rightarrow S = \frac{a}{1-r}$

* مدل احتمال روی فضای نمونه‌ای نامتناهی نامشمارا

$P(A) = \frac{\text{طول یا مساحت یا حجم ناحیه } A}{\text{طول یا مساحت یا حجم فضای نمونه}}$

- عددی را به تصادف از بازه $[1,4]$ انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه عدد انتخابی در بازه $[2,5]$ باشد.

$P(A) = \frac{\text{طول بازه } [2,5]}{\text{طول بازه } [1,4]} = \frac{5-2}{4-1} = \frac{1}{2}$

ب) احتمال اینکه عدد انتخابی در بازه $[2,3]$ باشد.

$P(A) = \frac{\text{طول بازه } [2,3]}{\text{طول بازه } [1,4]} = \frac{0}{3} = 0$

- از داخل دایره‌ای به شعاع R نقطه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه فاصله نقطه انتخابی تا مرکز دایره کمتر از فاصله آن تا محیط دایره باشد را بیابید.

$P(A) = \frac{\text{مساحت دایره به شعاع } \frac{R}{2}}{\text{مساحت دایره به شعاع } R} = \frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi(R)^2} = \frac{\frac{R^2}{4}}{R^2} = \frac{1}{4}$

احتمال شرطی: $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ اولین به وقوع داده توی مخرج است.

(با شرط اینکه A رخ داده باشد)

- یک تاس سالم را احتمال رخداد عدد زوج دوبار عدد فرد می‌اندازیم، بدست بیاورید.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 1 \quad w = \frac{1}{9}$

الف) احتمال رخداد عدد زوج $P(C) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$

ب) اگر بدانیم عدد حاصل از پرتاب اول ۳ برابر بود، احتمال رخداد یک عدد زوج را بیابید.

B: عدد زوج
A: عدد ۳ برابر بود

S	1	2	3	4	5	6
احتمال	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

$A = \{2,5,1\} \rightarrow P(A) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

$B = \{2,4,6\}$ لازم نداریم

$A \cap B = \{4,2\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{5}$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year Month Day

	w'	
۳	۴	۲
w	B	R

$n' = ۹$

- جعبه‌ای شامل ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و دو مهره قرمز است. از این جعبه یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر این مهره سفید نباشد احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بیابید. سیاه باشد \ سفید نباشد \ سه سیاه قرمز

$$P(B \mid w') = \frac{P(B \cap w')}{P(w')} = \frac{P(B)}{P(w')} = \frac{\frac{۴}{۹}}{\frac{۶}{۹}} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

نکته ۱

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- در فعال تبل آمر ۲ مهره به تصادف یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب کنیم مطلوب است:

(الف) احتمال اینکه مهره انتخاب اول سفید و مهره انتخاب دوم سیاه باشد؟

(ب) احتمال اینکه مهره احتمالی اول سیاه و مهره احتمالی دوم قرمز باشد؟

	B	R
۳	۴	۲

$\rightarrow$

	B	R
۲	۴	۲

حل الف) $P(w_1 \cap B_2) = P(w_1) \cdot P(B_2 \mid w_1)$

احتمال سفید در انتخاب اول $\hookrightarrow \frac{۳}{۹} \times \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۶}$

یعنی در انتخاب اول حذف شده.

یا

درست $P(B_2 \cap w_1) = P(B_2) \cdot P(w_1 \mid B_2)$

$$\frac{۴}{۹} \times \frac{۳}{۸} = \frac{۱}{۶}$$

	B	R
۳	۴	۲

	B	R
۳	۳	۲

حل ب) $P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2 \mid B_1)$

$$= \frac{۴}{۹} * \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۹}$$

متغیرهای تصادفی: تابعی است که به هر نقطه از فضای نمونه یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.

- متغیر تصادفی را تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ بار پرتاب (یک سکه) تعریف کنید.

S: TTT HTT THT TTH HTH HHT THH HHH

X متغیر تصادفی: تعداد شیرهای مشاهده شده در ۳ بار پرتاب

X	۰	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳
احتمال	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

Scanned with CamScanner

S	TTT	HTT, THT, TTH	HHT, HTH, THH	HHHT	HHHH
x	۰	۱	۲	۳	
احتمال	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	

- در مثال بالا از روی جدول $P(x=۲) = \frac{۳}{۸}$ احتمال اینکه تعیر تصادفی x دقیقا ۲ باشد.
احتمال اینکه متغیر تصادفی x حداکثر برابر یک باشد $P(x \leq ۱) = P(x=۰) + P(x=۱)$
$= \frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۸} = \frac{۴}{۸}$

- ۳ مهره به شماره‌های ۱و۲و۳ را در سه جعبه به شماره‌های ۱و۲و۳ به طور تصادفی می‌ریزیم به گونه‌ای که هر جعبه تنها شامل یک مهره باشد.
اگر متغیر تصادفی x برابر تعداد جعبه‌ها باشد (منظور از جور مهره‌ای است که در جعبه‌ای متناظر خودش قرار گرفته است)
مطلوب است:
الف) احتمال اینکه دقیقا یک جور داشته باشیم
ب) احتمال اینکه حداقل دو جور داشته باشیم. (۲ تا و از ۲ تا بیشتر)

S	۱۲۳	۱۳۲	۲۱۳	۲۳۱	۳۱۲	۳۲۱
x	۳	۱	۱	۰	۰	۱

الف) $P(x=۱) = \frac{۳}{۶} = P(\{۱۳۲, ۲۱۳, ۳۲۱\})$

ب) $P(x \geq ۲) = P(x=۳) = \frac{۱}{۶}$

$S_x = \{۰, ۱, ۳\}$ برد تابع متغیر تصادفی x یا فضای نمونه‌ای S_x

S_x	۰	۱	۳
$P(x)$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۳}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$

- سکه‌ای که شانس مشاهدی شیر در آن دو برابر خط است را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا یک خط مشاهده کنیم و سپس توقف می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی M برابر تعداد پرتاب‌های لازم تا زمینی به یک خط باشد احتمال اینکه حداقل ۴ پرتاب لازم باشد را بیابید.

در هر پرتاب یا شیر یا خط

S T HT HHT HHHT HHHHT ...

M ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

S_M $\frac{۱}{۳}$ $(\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})$ $(\frac{۲}{۳})^۲(\frac{۱}{۳})$ $(\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳})$ $(\frac{۲}{۳})^۴(\frac{۱}{۳})$

S	H	T
	۲w	w

$۳w = ۱ \rightarrow w = \frac{۱}{۳}$

خط $\rightarrow \frac{۱}{۳}$

شیر $\rightarrow \frac{۲}{۳}$

$P(M \geq ۴) = P(۴) + P(۵) + P(۶) + \cdots = (\frac{۲}{۳})^۳(\frac{۱}{۳}) + (\frac{۲}{۳})^۴(\frac{۱}{۳}) + \cdots$

$= (\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^۳ \left(۱ + \frac{۲}{۳} + (\frac{۲}{۳})^۲ + \cdots\right) = (\frac{۱}{۳})(\frac{۲}{۳})^۳ \left[\frac{۱}{۱ - \frac{۲}{۳}}\right] = (\frac{۲}{۳})^۳ = \frac{۸}{۲۷}$

تصاعد هندسی

آمار و احتمال — صفحه ۱

Subject:
Year Month Day

متغیر تصادفی گسسته:

S	e_1
$P(X=x)$	P_1

$P(X=e_1)=P_1$

متغیر تصادفی

تابع احتمال: یعنی تابع احتمال متغیر تصادفی X در هر عضو x از فضای نمونه برابر است با احتمال آن عضو $f(x)=P(X=x)$

تابع توزیع تجمعی: $F_X(x)=P(X\le x)$

شرط تابع $\sum f_X(x)=1$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم و متغیر تصادفی X را برابر مجموع اعدادی که تاس مشاهده شده در نظر می‌گیریم.

الف) تابع احتمال X را به دست آورید.

ب) احتمال اینکه مجموع اعدادی دو تاس حداکثر ۴ شود را بیابید.

ج) " " " " " بین ۶ و ۹ شود را بیابید.

د) تابع توزیع تجمعی X را به دست آورید.

S	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$f_X(x)=P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ب) $P(X\le 4)=P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)=f_X(2)+f_X(3)+f_X(4)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}$

ج) $P(6<x<9)=f_X(7)+f_X(8)=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$

د) $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ \frac{1}{36} & 2\le x<3\\ \frac{3}{36} & 3\le x<4\\ \frac{6}{36} & 4\le x<5\\ \frac{10}{36} & 5\le x<6\\ \frac{15}{36} & 6\le x<7\\ \frac{21}{36} & 7\le x<8\\ \frac{26}{36} & 8\le x<9\\ \frac{30}{36} & 9\le x<10\\ \frac{33}{36} & 10\le x<11\\ \frac{35}{36} & 11\le x<12\\ \frac{36}{36}=1 & 12\le x\end{cases}$

مثال: تابع زیر را در نظر بگیرید. $F_Y(y)=k\left(\frac{1}{7}\right)^y \quad y=0,1,2,\dots$

الف) مقدار k را چنان بیابید که $f_Y(y)$ تابع احتمال متغیر گسسته باشد.

ب) احتمالات زیر را بیابید. $P(Y\ge\frac{11}{3})\ ,\ P(Y\le\frac{5}{2})$

الف) $\sum_{y\in Y} f_Y(y)=1 \Rightarrow f_Y(0)+f_Y(1)+f_Y(2)+\dots=1$

$k\left(\frac{1}{7}\right)^0+k\left(\frac{1}{7}\right)^1+k\left(\frac{1}{7}\right)^2+\dots+k\left(\frac{1}{7}\right)^n+\dots=1$

$k\left[1+\left(\frac{1}{7}\right)^1+\left(\frac{1}{7}\right)^2+\dots\right]=1$ ← تصاعد هندسی

$k\left(\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\right)=1 \Rightarrow k=\frac{6}{7}$ ← $\frac{\text{جمله اول}}{1-\text{قدرنسبت}}$

$f_Y(y)=\frac{6}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^y$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year Month Day

$$P(y \le \tfrac{15}{4}) = P(y=0) + P(y=1) + P(y=2) = f_y(0) + f_y(1) + f_y(2) = \frac{5}{7}\left[1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{49}\right] = \frac{215}{216}$$

$$P(Y \ge \tfrac{11}{12}) = P(y=4) + P(y=5) + \cdots = \sum_{y=4}^{\infty} \binom{5}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^y = \frac{5}{7}\,\frac{(1/7)^4}{1-\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \frac{1}{2496}$$

مثال: فرمول برای تابع احتمال تعداد شیرهای سکه‌ای را ۴ مرتبه پرتاب می‌کنیم به دست آورید سپس تابع توزیع تجمعی آن را بیابید و در آخر نمودارهای تابع احتمال و تابع توزیع تجمعی را رسم کنید.

تعداد برتاب یک سکه

$$n(S) = 2^4 = 16$$

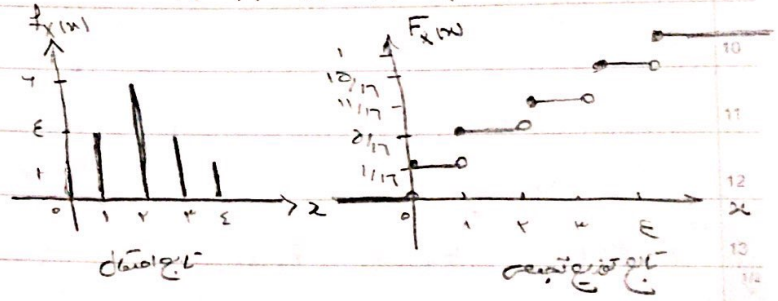
تعداد شیرهای شاهده شده = X متغیر تصادفی

الف) $f_X(x) = P(X=x) = \dfrac{\binom{4}{x}}{2^4}$

$x = 0, 1, 2, 3, 4$

S_x	0	1	2	3	4
	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16} & 0 \le x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \le x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \le x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \le x < 4 \\ \frac{16}{16}=1 & 4 \le x \end{cases}$$



نکته: هر گونه احتمالی را می‌توان از روی تابع توزیع حساب کرد (لازم به ذکر است این احتمالات از روی تابع احتمال هم قابل محاسبه‌اند)

مثال قبل $\rightarrow F_X(x) = P(X \le x)$ حداکثر x

$$F_X(2) = \frac{11}{16}$$

$$F_X(\bar{2}) = \frac{5}{16}$$

$$f_X(2) = P(X=2) = F_X(2) - F_X(\bar{2}) = \frac{11}{16} - \frac{5}{16} = \frac{6}{16}$$

دقیقاً 2

منفی در علامت بالای a یعنی منفی است مثلاً منفی در منفی مثبت

$$P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a \le x < b) = F(\bar{b}) - F(\bar{a})$$

$$P(a < x \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(a \le x \le b) = F_X(b) - F_X(\bar{a})$$

$$P(x > a) = 1 - P(x \le a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(x = b) = F_X(b) - F_X(\bar{b})$$

Scanned with CamScanner

Subject:
Year Month Day

یک کلاس آمار ۸ شاگرد دارد که ۵ نفر آن‌ها ۱۹ ساله و ۳ نفر آن‌ها ۲۱ ساله است. از این کلاس ۲ شاگرد به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و متغیر تصادفی x را برابر میانگین سن دو شاگرد انتخابی در نظر می‌گیریم. تابع احتمال و تابع توزیع متغیر تصادفی x را بدست آورده و احتمال $P(19<x<21)$ را بدست آورید.

$$n(S) = \binom{8}{2}$$

x	۱۹	۲۰	۲۱
$P_X(x)=P(x=x)$	$\frac{\binom{5}{2}\binom{0}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$	$\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$	$\frac{\binom{5}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

x میانگین سن دو شاگرد انتخابی $= 19, 20, 21$

$\frac{19+19}{2} = 19$ $\quad \frac{21+21}{2} = 21$ $\quad \frac{21+19}{2} = 20$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<19 \\ \frac{10}{28} & 19 \le x < 20 \\ \frac{25}{28} & 20 \le x < 21 \\ 1 & 21 \le x \end{cases}$$

از روی تابع توزیع

$$P(A<x<B) = F_X(\bar{19}) - F(A) = \frac{25}{28} - \frac{10}{28} = \frac{15}{28}$$

توزیع احتمالات پیوسته :

$f_X(x)$: تابع چگالی احتمال (معمولاً در مورد آن صحبت می‌شود)

$F_X(x)$ تابع توزیع

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \qquad \forall x \in R \quad f_X(x) \ge 0$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2} & 1<x<10 \\ 0 & \text{o.w} \rightarrow \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار c را تعیین کنید.

ب) تابع توزیع X را بیابید.

ج) $P([x]=3)$ ، $P(1<x\le 5)$ ، $P(x>2)$

حل الف $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{10} \frac{c}{x^2}dx + \int_{10}^{+\infty} 0\,dx = c\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)_1^{10} = -c$

$$= -c\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{1}\right) = -c\left(\frac{9}{10}\right) \Rightarrow c = \frac{10}{9}$$

حل ب) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{x}\right) & 1 \le x < 10 \\ 1 & 10 \le x \end{cases}$

Scanned with CamScanner

$-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}-1\right)$

$1 \leq x < 10 \longrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{1} \cdot dt + \int_{1}^{x} \frac{10}{9t^2} dt = \frac{10}{9}\left(\frac{-1}{t}\right)_1^x = \frac{10}{9}\left(\frac{-1}{x} - \frac{-1}{1}\right)$

$\longrightarrow F_X(x) = \frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

ج) $P(x>1) = \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{10} \frac{10}{9x^2} dx + \int_{10}^{+\infty} \cdot dx = ?$ روش اول

$P(x>1) = 1 - P(x<1) = 1 - F(1) = 1 - \left[\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{1}\right)\right] = 1 - \left[\frac{10}{9}\times\frac{1}{1}\right] = \frac{8}{9}$ روش دوم

$P(1<x\leq 5) = F(5) - F(1) = \left(\frac{10}{9}\left[1-\frac{1}{5}\right]\right) - \left(\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{1}\right)\right) = \frac{8}{9}$

$P([x]=2) = P(2\leq x<4) = F(4) - F(2) = \left(\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right) - \left(\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{36}$

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2e^{-2x} & x>0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

الف) مقدار c

ب) تابع توزیع

ج) $P(x>5)$

حل الف) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \longrightarrow \int_{-\infty}^{0} \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} cx^2e^{-2x}dx = 1$ ؟

$\Rightarrow c\left(\frac{-x^2}{2}e^{-2x} - \frac{x}{4}e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x}\right)_0^{+\infty} \Rightarrow \frac{-ce^{-2x}}{8}\left(4x^2+2x+1\right)\Big|_0^{-\infty} \Rightarrow c\left(0-(-1)\right) = 1$

$\Rightarrow \frac{c}{8} = 1 \Rightarrow c = 8$

x^2	e^{-2x}	$\int e^u du = e^u$
$2x$	$-\frac{1}{2}e^{-2x}$	$-\frac{1}{2}\int e^{-2x} = -\frac{1}{4}e^{-2x}$
2	$\frac{1}{4}e^{-2x}$	
0	$-\frac{1}{8}e^{-2x}$	

حل ب) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-2x}\left(4x^2+2x+1\right) & x\geq 0 \end{cases}$

$x\geq 0 \longrightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 8t^2e^{-2t}dt = -e^{-2t}\left(4t^2+2t+1\right)\Big|_{-\infty}^{x} = \left(-e^{-2x}\left(4x^2+2x+1\right)\right) - (-1)$

$= 1-e^{-2x}\left(4x^2+2x+1\right)$

ج) $P(x>5) = 1 - P(x\leq 5) = 1 - F(5) = 1 - \left[1-e^{-10}\left(500+10+1\right)\right] = 511e^{-10}$

Scanned with CamScanner

Subject
Year Month Day

امید ریاضی:

میانگین یا متوسط انتظار را از تعداد متغیر تصادفی X

متغیر تصادفی
$E(X) = \mu = \mu_X$

گسسته:

$f_X(x)$	e_1	e_2	e_n
$f_X(x)$	P_1	P_2	$P_n \quad \sum P_n = 1$

$$E(X) = \sum x f_X(x)$$

پیوسته:

$f_X(x)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

* می‌خواهیم ۳ نفر را از بین ۵ مهندس و ۳ تکنسین انتخاب کنیم. امید ریاضی تعداد مهندسین انتخابی را در بین این سه نفر بیابید.

(گسسته)

$$f_X(x) = \frac{\binom{3}{3-x}\binom{5}{x}}{\binom{8}{3}}$$

X	0	1	2	3
$P(X=x) = f_X(x)$	$\frac{\binom{3}{3}\binom{5}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$	$\frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$	$\frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}$	$\frac{\binom{3}{0}\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}$

$$E(X) = 0\times\frac{1}{56} + 1\times\frac{15}{56} + 2\times\frac{30}{56} + 3\times\frac{10}{56} = \frac{105}{56} = 1.9$$

فرض کنید متغیر تصادفی X نشان‌گر طول عمر لامپ برحسب سال باشد. متوسط طول عمر لامپ را بیابید.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x^2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\, dx + \int_{0}^{+\infty} -x \frac{1}{2} e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x^2}^{u}} dx = +\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{\overbrace{-\frac{1}{2}x^2}^{u}} \underbrace{(-x)dx}_{du}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^{+\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

واریانس $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = E(x^2) - (E(x))^2$

میانگین جامعه $\mu_X = E(x)$

گسسته:
$$\begin{cases} E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) \\ E(X) = \sum x f(x) \end{cases}$$

پیوسته:
$$\begin{cases} E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx \\ E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Subject
Year Month Day

بقیه سوال *

$$E(x^2) = 0^2 \frac{1}{56} + 1^2 \times \frac{15}{56} + 2^2 \times \frac{30}{56} + 3^2 \times \frac{10}{56} = \frac{225}{56}$$

$$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{225}{56} - \left(\frac{105}{56}\right)^2 = \frac{12675}{3136} = 0.4042$$

توزیع احتمالات توام دو متغیره :

مثال: از داخل جعبه‌ای که شامل ۳ لامپ آبی، ۲ لامپ قرمز و ۴ لامپ سبز است، ۲ لامپ به تعداد یک به یک و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم X = تعداد لامپ‌های آبی مشاهده شده در دو لامپ انتخابی، Y = تعداد لامپ‌های قرمز مشاهده شده در دو لامپ انتخابی

الف) تابع احتمال توام X و Y را بدست آورید. $f_{x,y} = p(x,y)$

ب) $p(x+y \leq 1)$ را بدست آورید.

$S_x = \{0,1,2\}$ $S_y = \{0,1,2\}$

۹ = کل لامپ‌ها $n(S) = \binom{9}{2}$

y \ x	0	1	2
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

← اتفاق نمی‌افتد

$$f_{x,y}(0,0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} \quad \text{(آبی، قرمز، سبز)}$$

$$f_{x,y}(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$$

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{4}{2-(x+y)}}{\binom{9}{2}}$$

$$f_{x,y}(1,0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$$

$$f_{x,y}(1,1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{0}}{\binom{9}{2}}$$

ب) $p(x+y \leq 1) = f_{x,y}(0,0) + f_{x,y}(0,1) + f_{x,y}(1,0) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}$

پس از نوشتن جدول توزیع احتمالات توام دو متغیره می‌توان توزیع‌های حاشیه‌ای تک تک متغیرها را مانند مثال زیر بدست آورد.

y \ x	0	1	2	$f_y(y)$
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
$f_x(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

y	0	1	2
$f_y(y)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$

x	0	1	2
$f_x(x)$	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$

توزیع‌های حاشیه‌ای x و y

Scanned with CamScanner

Subject
Year Month Day

$E(Y) = \sum_{y} y\, f_Y(y) = 0\times\frac{21}{36} + 1\times\frac{14}{36} + 2\times\frac{1}{36} = \frac{16}{36}$ $\quad E(Y^2) = \sum y^2 f(y) = 0\times\frac{21}{36} + 1\times\frac{14}{36} + 4\times\frac{1}{36} = \frac{18}{36}$

$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{18}{36} - (\frac{16}{36})^2 = \frac{392}{36^2} = 0.3$

$E(X) = \sum_{x\in X} x\, f_X(x) = 0\times\frac{15}{36} + 1\times\frac{18}{36} + 2\times\frac{3}{36} = \frac{24}{36}$

$E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) = 0^2\times\frac{15}{36} + 1^2\times\frac{18}{36} + 2^2\times\frac{3}{36} = \frac{30}{36}$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{30}{36} - (\frac{24}{36})^2 = 0.138$

$E(XY) = \sum_{\substack{x\in X\\ y\in Y}} xy\, f_{XY}(x,y) = 0\times0\times\frac{6}{36} + 0\times1\times\frac{8}{36} + 0\times2\times\frac{1}{36} + 1\times0\times\frac{12}{36} + 1\times1\times\frac{6}{36} + 1\times2\times\frac{5}{36} + 2\times0\times\frac{3}{36} + 2\times1\times0 + 2\times2\times0 = \frac{6}{36}$

امید ریاضی تواَم X و Y

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{6}{36} - (\frac{24}{36})(\frac{16}{36}) = -0.12$

میزان همراهی متغیرهای تصادفی X و Y را نشان می‌دهد

کوواریانس X,Y ⇒

- if $Cov(X,Y) > 0$: در جهت ≡ با افزایش یا کاهش X و Y نیز افزایش یا کاهش می‌یابد
- if $Cov(X,Y) < 0$: خلاف جهت ≡ " " " X و Y نیز کاهش یا افزایش می‌یابد

میزان همبستگی

$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}} = \frac{-0.12}{\sqrt{0.3}\sqrt{0.138}} = -0.4$

از آن جا که توزیع‌های آماری بسیاری دارای ضوابط مشخص هستند برخی توزیع‌های احتمال را طبقه‌بندی شده بررسی خواهیم کرد.

الف) توزیع‌های احتمال گسسته : توزیع احتمال یکنواخت، برنولی، دوجمله‌ای، فوق هندسی، پوآسون، دوجمله‌ای منفی، هندسی

ب) " " پیوسته : توزیع نمایی، یکنواخت پیوسته، نرمال

توزیع یکنواخت گسسته :

x	x_1	x_2	...	x_n
$f_X(x) = P(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	...	$\frac{1}{k}$

$f_X(x) = \frac{1}{k} \quad x\in X$

$\mu_X = E(X) = \frac{x_1}{k} + \frac{x_2}{k} + \cdots + \frac{x_n}{k} = \frac{\sum_{x\in X} x}{k}$

$E(X^2) = \frac{\sum x^2}{k}$

$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\sum x^2}{k} - \frac{(\sum_{x\in X} x)^2}{k^2}$

Scanned with CamScanner

مثال برتاب یک تاس

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f_x(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(x) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{1}{6}\times\frac{21}{2} = \frac{7}{2}$

$Var = ? \quad E(x^2) - (E(x))^2 = 2.5$

y \ x	۰	۱	$f_y(y)$
۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳
۱	۰.۴	۰.۲	۰.۶
۲	۰.۱	۰	۰.۱
$f_x(x)$	۰.۶	۰.۴	

برای جدول توزیع احتمالات تمام زیر، امید ریاضی را بیابید.

$E(y) = 0.3\times 0 + 0.6\times 1 + 2\times 0.1 = 0.8$

$E(y^2) = 0^2\times 0.3 + 1^2\times 0.6 + 2^2\times 0.1 = 0.6 + 0.4 = 1$

$Var(y) = E(y^2) - (E(y))^2 = 1 - 0.64 = 0.36$

$E(x) = 0.6\times 0 + 0.4\times 1 = 0.4$

$E(x^2) = 0^2\times 0.6 + 1^2\times 0.4 = 0.4$

$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = 0.4 - (0.4)^2 = 0.4 - 0.16 = 0.24$

$E(XY) = \sum xy f_{x,y}(x,y) = 0\times 0\times 0.1 + 0\times 1\times 0.2 + 1\times 0\times 0.4 + 1\times 1\times 0.2 + 2\times 0\times 0.1 + 2\times 1\times 0.1 =$

$Cov(x,y) = E(XY) - E(x)E(y) = 0.2 - 0.4\times 0.8 = 0.2 - 0.32 = -0.12$

$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(y)}} = \frac{-0.12}{\sqrt{0.24}\sqrt{0.36}} = \frac{-0.12}{0.48\times 0.6} = -0.4$

توزیع برنولی: انجام یک بار آزمایش که شامل احتمال پیروزی p است و متغیر تصادفی X می‌تواند ۰ یا ۱ باشد

شکست $= 1 - p = q$

$X \sim B(1,p)$

$f_x(x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0, 1$

$\mu_{x(x)} = E(X) = p \qquad Var(x) = pq$

مثال: یک تاس را یک مرتبه پرتاب می‌کنیم مطلوب است تابع احتمال، میانگین، واریانس توزیع و احتمال آنکه عدد ۴ مشاهده شود.

$X = \begin{cases} 1 & \text{عدد ۴ مشاهده شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

$p = \frac{1}{6}$ احتمال پیروزی دقیقاً $x=1$ $\qquad X \sim B(1, \frac{1}{6})$

$q = \frac{5}{6}$ احتمال شکست دقیقاً $x=0$

$f_x(x) = (\frac{1}{6})^x (\frac{5}{6})^{1-x} \qquad x = 0, 1 \qquad \mu_x(x) = E(X) = p = \frac{1}{6} \qquad Var_x(x) = pq = \frac{1}{6}\times\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

$p(x=0) = f_x(0) = \frac{5}{6}$ عدد ۴ مشاهده نشود $\qquad p(x=1) = f_x(1) = \frac{1}{6}$ عدد ۴ مشاهده شود

$p(x=4)$ تاریم $\Leftarrow x=0$

Subject
Year Month Day

توزیع دوجمله‌ای : انجام مستقل n آزمایش برنولی

$X \sim B(n,p)$ $\quad q = 1-p$

احتمال پیروزی در هر آزمایش برنولی

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad x = 0,1,2,\dots,n$$

$$\mu_X(x) = E(X) = np$$

$$Var(X) = npq$$

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^{n-x} b^x$$

مثال : سکه‌ای با شانس مشاهده شیر در آن دو برابر خط است را چهار مرتبه پرتاب می‌کنیم. متغیر تصادفی x را تعداد شیرهای مشاهده شده در ۴ مرتبه پرتاب سکه در نظر می‌گیریم. مطلوب است تابع احتمال، میانگین و واریانس متغیر تصادفی x، همچنین احتمال اینکه دقیقاً ۳ شیر در چهار پرتاب مشاهده شود را بیابید.

	H	T
	$2w$	w

$2w + w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{3}$ $\quad p = \frac{2}{3} = .\overline{6}$ $\quad q = \frac{1}{3}$

$$X \sim B\left(4, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_X(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} \qquad x = 0,1,2,3,4$$

$$\mu_X(x) = E(x) = np = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$Var(x) = npq = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

$$P(X=3) = f_X(3) = \binom{4}{3} p^3 q^{4-3}$$

n	r	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
5	0						0.0102
	1						0.0768
	5						0.2304
10	0						0.7730
	1						0.9222
	10						1.000
15	0						
	1						
	15						
20	0						
	1						
	20						

$n = 5$

$x = 0,1,2,3,4,5$

$P(X \le 3) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3)$

$P(x > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - .7730$

Scanned with CamScanner

مثال: بسکتبالیست ۶۰٪ از توپ‌هایش گل می‌شود اگر او ۵ پرتاب مستقل انجام دهد و موفقیت برای او گل شدن توپ باشد در این صورت تابع احتمال، میانگین و واریانس آن و احتمال اینکه حداکثر ۳ پرتاب گل شود را بیابید.

$p = \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۶}{۱۰} = ۰.۶$ $\quad q = ۰.۴$ $\quad n = ۵$

$X \sim B(n,p)$ یا $X \sim B(۵, ۰.۶)$

$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{۵}{x} (۰.۶)^x (۰.۴)^{۵-x}$

$\mu_x = E(X) = np = ۵ \times \frac{۶}{۱۰} = ۳$

$Var(X) = npq = ۵ \times \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} = ۱.۲$

$P(X \le ۳) = f_X(۰) + f_X(۱) + f_X(۲) + f_X(۳) = ۰.۶۸۳$ جدول

$P(X=۰) + P(X=۱) + P(X=۲) + P(X=۳)$

یک آزمون انگلیسی شامل ۲۰ سوال ۵ گزینه‌ای است که در هر سوال تنها یک گزینه درست می‌باشد. شخصی که اصلا انگلیسی نمی‌داند در این آزمون شرکت می‌کند و سوالات را به تصادف پاسخ می‌دهد. $r=۹$

$X \sim B(۲۰, ۰.۲)$ جدول $n=۲۰$ $\quad p = \frac{۱}{۵} = ۰.۲$ $\quad q = ۰.۸$

الف) انتظار داریم که چند سوال را درست پاسخ دهد. انتظار = امید ریاضی

$E(X) = np = ۲۰ \times ۰.۲ = ۴$

ب) احتمال اینکه حداقل ۱۰ سوال را پاسخ دهد. $= ۰.۰۰۲۶$

$P(X \ge ۱۰) = ۱ - (X < ۱۰) = ۱ - (X \le ۹) = ۱ - ۰.۹۹۷۴ =$

ج) احتمال اینکه بین ۲ تا ۷ سوال را پاسخ دهد.

$P(۲ < X < ۷) = P(۲ < X \le ۶) = P(X \le ۶) - P(X \le ۲)$

$= ۰.۹۱۱۳ - ۰.۲۰۷۱ = ۰.۷۰۷۲$ $\quad n=۲۰$ $\quad p=۰.۲$ $\quad r=۶$ $\quad r=۲$ جدول

د) احتمال اینکه دقیقا به ۹ سوال پاسخ درست بدهد.

$P(X=۹) = P(X \le ۹) - P(X \le ۸) = ۰.۹۹۷۴ - ۰.۹۹۰۰ = ۰.۰۰۷۴$

توزیع فوق هندسی:

N کل جمعیت

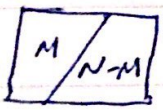
n یک نمونه تصادفی

x پیروزی

$n-x$ شکست

$$f_X(x) = \frac{\binom{n}{x}\binom{N-n}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad X \sim h(N,n,x)$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{n \times M}{N} \qquad \sigma_X^۲ = \frac{n M}{N} \times \left(۱ - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-۲}{N-۱}\right)$$



Scanned with CamScanner

مثال: در انتخاب ۵ مقاله از بین ۴۰ مقاله که ۳ تای آن ها خراب است، احتمال این را بیابید که حداکثر یک مقاله انتخاب شده خراب باشد؟

$$P(x \le 1) = f_x(0) + f_x(1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{37}{5}}{\binom{40}{5}} + \frac{\binom{3}{1}\binom{37}{4}}{\binom{40}{5}} = 0.9635$$

پواسون:

آزمایش‌هایی که تعداد موفقیت‌ها در یک فاصله زمانی یا فضای مشخص را بدهند یک آزمایش پواسون نامیده می‌شود. فاصله‌ی زمانی مثل ثانیه، دقیقه، ساعت و فضای مثل فاصله، سطح یا ... برای مثال: اگر متغیر تصادفی X تعداد تلفن‌ها در یک ساعت به دفتر یک شرکت یا X تعداد غلط‌های تایپی در هر صفحه‌ی کتاب یا X تعداد تصادف‌هایی باشد که در یک ساعت معین از یک چهارراه عبور می‌کند، آنگاه X یک متغیر تصادفی پواسون است.

$X \sim P(\lambda)$ یعنی X یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λ است

$$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$\mu_x = E(X) = \lambda$

$\sigma_x^2 = Var(X) = \lambda$

X یا تعداد موفقیت‌ها در یک بازه زمانی — λ یا بازه زمانی — بطور متوسط — تعداد مشخص

مثال: به دستگاه چاپ کپی‌برداری در هر ماه دو بار سرویس می‌شود.

الف) احتمال اینکه در یک ماه کمتر از دو بار سرویس شود.

$$P(x<2) = P(x=0) + P(x=1) = f_x(0) + f_x(1) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} = 0.406$$

ب) احتمال اینکه در سه ماه این چاپگر حداقل ۲ بار سرویس شود را بیابید.

$\lambda = 3 \times 2 = 6$

$$P(y \ge 2) = 1 - P(y<2) = 1 - \left(f_y(0) + f_y(1)\right) = 1 - \left(\frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!}\right) = 0.9826$$

مثال: به طور متوسط در هر ۱۰ دقیقه، ۶ مشتری به پای صندوق پرداخت یک فروشگاه می‌رسند.

الف) احتمال اینکه در ۱۰ دقیقه حداکثر ۴ مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

ب) احتمال اینکه در ۵ دقیقه حداقل دو مشتری به پای صندوق برسند را بیابید.

$$P(x<4) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = f_x(0) + f_x(1) + f_x(2) + f_x(3) + f_x(4)$$

$$= \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!} + \frac{e^{-6}6^2}{2!} + \frac{e^{-6}6^3}{3!} + \frac{e^{-6}6^4}{4!} = 0.2851$$

$$P(x \ge 2) = 1 - P(x<2) = 1 - \left(P(x=0) + P(x=1)\right) = 1 - \left(\frac{e^{-3}3^0}{0!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!}\right) =$$

$$1 - 0.1991 = 0.8009$$

آزمایش

10 min → 4

5 min → 2

Scanned with CamScanner

Subject
Year Month Day

توزیع نرمال :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\mu_x = E(x) = \mu$$

$$\sigma^2 = Var(x)$$

توزیع نرمال استاندارد :

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \qquad Z \sim N(0,1)$$

$$f_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

مقادیر جدول توزیع نرمال استاندارد برای $P(Z \leq a)$ نوشته شده‌اند.

مستقیماً از روی جدول $P(Z \leq a)$

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a)$$

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a)$$

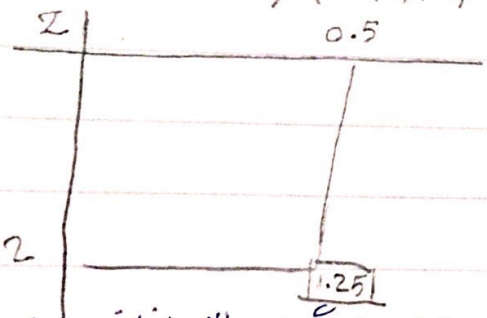
مثال: اگر $X \sim N(10, 14)$ ← $P(8 < x \leq 15) = ?$ ابتدا از روی جدول

$\mu = 10$ $\quad \sigma^2 = 14$

ابتدا با تغییر متغیر $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ توزیع نرمال را استاندارد می‌کنیم :

$$P(8 < x \leq 15) = P\left(\frac{8-10}{4} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{15-10}{4}\right) = P(-0.5 < Z \leq 1.25)$$

$$= P(Z \leq 1.25) - P(Z \leq -0.5) = 0.8944 - 0.3085 = 0.5859$$



مثال: قطر داخلی بلبرینگ‌های تولیدی یک کارخانه ساخته می‌شود. دارای توزیع نرمال با میانگین ۳۰ و انحراف معیار ۰٫۲ است. احتمال اینکه قطر داخلی یک بلبرینگ بیشتر از ۲۹٫۹۸ باشد را بیابید.

$\mu = 30$ $\quad \sigma = 0.2$

$$P(x > 29.98) = P\left(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{29.98-30}{0.2}\right) = P(Z > -1) = 1 - P(Z \leq -1)$$

$$= 1 - 0.1587 = 0.8413$$

Scanned with CamScanner

یک کارگاه لوله‌هایی تولید می‌کند که طول آن‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰/۵ سانتی‌متر است. مطلوب است:

الف) چند درصد لوله‌ها دارای طولی بین ۷/۵ تا ۹ سانتی‌متر هستند؟

$X \sim N(8, 0.5^2)$ یعنی $\mu = 8$ و $\sigma = 0.5$

$$P(7.5 < X < 9) \times 100 = P\left(\frac{7.5-8}{0.5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{9-8}{0.5}\right) = P(-1 < Z < 2) \times 100$$

$$= P(Z<2) - P(Z<-1) = 0.9772 - 0.1587 = 0.8185$$ (استانداردسازی)

$$= 0.8185 \times 100 = 81.85\%$$

ب) اگر یک سفارش این کارگاه ۲۰۰ لوله تولید کند چند تعداد آن‌ها طولی بیشتر از ۹/۲ سانتی‌متر دارند؟

$$P(X > 9.2) \times 200 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9.2-8}{0.5}\right) = P(Z > 2.4) = 1 - P(Z \le 2.4) = 1 - 0.9918 = 0.0082$$

$$0.0082 \times 200 = 1.64 \simeq 2$$ لوله

ج) ۹۷/۵٪ از لوله‌های تولید شده در این کارگاه طولشان از چه مقداری کمتر است؟

$$\frac{97.5}{100} = P(X < a) \quad \text{(از نظر)} \quad \text{(تعداد)}$$

$$0.975 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-8}{0.5}\right) \Rightarrow \frac{a-8}{0.5} = 1.96 \Rightarrow a = 8.98$$

د) اگر ۵ لوله را یک به یک و با جایگذاری انتخاب کنیم احتمال اینکه حداکثر یک عدد از آن‌ها دارای طولی بیشتر از ۹ سانتی‌متر باشد را بیابید.

$$p = P(X > 9) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9-8}{0.5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$ (= P(Z>2))

$Y \sim B(n, p)$: $P(Y \le 1) = \binom{5}{0} p^0 q^5 + \binom{5}{1} p^1 q^4 =$

Subject:
Year Month Day

یک کارگاه لوله‌هایی تولید می‌کند که طول آن‌ها دارای توزیع نرمال با میانگین ۸ و انحراف معیار ۰٫۵ متر است. مطلوب است:

الف) چند درصد لوله‌ها دارای طولی بین ۷٫۵ تا ۹ متر هستند؟

$X \sim N(8, 0.5^2)$ $\mu = 8$ $\sigma = 0.5$

$P(7.5 < X < 9) \times 100 = P\left(\frac{7.5-8}{0.5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{9-8}{0.5}\right) \times 100 = P(-1 < Z < 2) \times 100$

$= P(Z<2) - P(Z<-1) = 0.9772 - 0.1587$ (استانداردسازی)

$= 0.8185 \times 100 = 81.85\%$

ب) اگر در یک روز این کارگاه ۲۰۰ لوله تولید کند چه تعداد آن‌ها طولی بیشتر از ۹٫۲ متر دارند؟

$P(X \geq 9.2) \times 200 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9.2-8}{0.5}\right) = P(Z > 2.4) = 1 - P(Z \leq 2.4) = 1 - 0.9918 = 0.0082$

$0.0082 \times 200 = 1.64 \simeq 2$ لوله

ج) در یک روز ۹۷٫۵٪ از لوله‌های تولید شده در این کارگاه طولشان از چه مقداری کمتر است؟

$\frac{97.5}{100} = P(X < a)$? $\xrightarrow{1.96}$ $0.975 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-8}{0.5}\right) \Rightarrow \frac{a-8}{0.5} = 1.96 \Rightarrow a = 8.98$

د) اگر ۵ لوله را یک به یک و با جایگذاری انتخاب کنیم احتمال اینکه حداکثر یک عدد از آن‌ها دارای طولی بیشتر از ۹ متر باشد را بیابید.

نرمال — تعداد

$p = P(X > 9) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9-8}{0.5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$ (= P(Z>2))

$Y \sim B(5, p)$: $P(Y \leq 1) = \binom{5}{0} y(0) + \binom{5}{1} y(1) =$

Scanned with CamScanner