امتحان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۹۲)

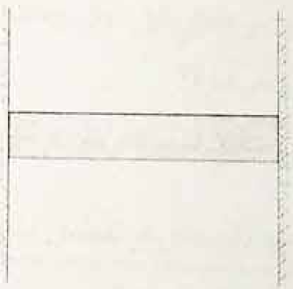
۹۲/۳/۱۷
مدت امتحان: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱) میله‌ای یک‌نواخت به طولِ ℓ و سطحِ مقطعِ A بینِ دو دیوارِ ثابت مقید شده است. فاصله‌ی دو دیوار ثابت و برابر با ℓ است. در این حالت از طرفِ دیوارها نیرویی به میله وارد نمی‌شود. اگر میله را به طور یک‌نواخت تادمای $\Delta\theta$ (با بُعدِ Θ) گرم کنیم، میله می‌خواهد منبسط شود ولی دیوارها مانع می‌شوند. در این مسئله می‌خواهیم ببینیم چه نیرویی از طرفِ دیوار به میله وارد می‌شود، مدولِ یانگِ میله Y (با بُعدِ $ML^{-1}T^{-2}$) و ضریبِ انبساطِ طولیِ میله α (با بُعد Θ^{-1}) است.

الف) با استفاده از تحلیلِ ابعادی کلی‌ترین چیزی که در موردِ نیروی وارد بر میله F بر حسبِ ℓ، A، $\Delta\theta$، Y و α می‌توان به دست آورد چیست؟

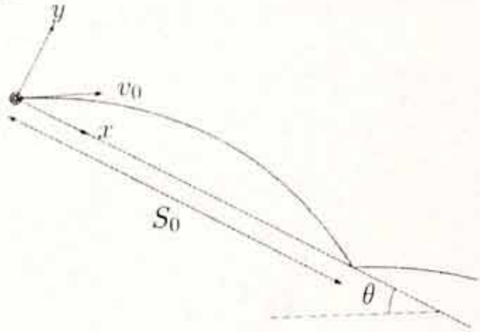
ب) فرض کنید تابعیتِ نیرو بر حسبِ کمیت‌های داده‌شده تحلیلی باشد و $\Delta\theta$ را آن‌قدر کوچک بگیرید تا بتوان از مرتبه‌های دو و بالاترِ $\Delta\theta$ چشم‌پوشی کرد. در این‌صورت نیروی وارد بر میله F را بر حسبِ ℓ، A، $\Delta\theta$، Y و α به دست آورید.

ج) اگر به جای یک میله دو میله بین دو دیوار قرار دهیم نیروی کلّ وارد بر دو میله چه‌قدر است؟ با استفاده از این نتیجه نیروی وارد بر میله F را بر حسبِ ℓ، A، $\Delta\theta$، Y و α به دست آورید.



مسئله‌ی ۲۷)

از رویِ سطحِ شیب‌داری با شیبِ θ توپی را با سرعتِ اولیه‌ی افقی‌یِ v_0 پرتاب می‌کنیم.



الف) بُردِ توپ رویِ سطحِ شیب‌دار یعنی اولین جایی که توپ به سطحِ شیب‌دار می‌خورد، S_0، چه‌قدر است؟

ب) فرض کنید برخوردِ توپ با سطحِ شیب‌دار کش‌سان باشد، یعنی مولفه‌ی مماسی‌یِ سرعتِ توپ با سطحِ شیب‌دار عوض نمی‌شود و مولفه‌یِ عمودی‌یِ سرعتِ توپ با سطحِ شیب‌دار برعکس می‌شود. پس از برخوردِ اول بُردِ توپ رویِ سطحِ شیب‌دار یعنی فاصله‌یِ بینِ محلِ برخوردِ توپ بینِ این مرحله و مرحله‌یِ قبل، S_1، چه‌قدر است؟

ج) اگر v_0 دو برابر شود $\frac{S_1}{S_0}$ چه‌قدر می‌شود؟

د) S_n یعنی فاصله‌ای که توپ رویِ سطحِ شیب‌دار بینِ n اُمین و $n+1$ اُمین برخورد طی می‌کند، چه‌قدر است؟

ه) در n اُمین برخورد توپ در چه فاصله‌ای از نقطه‌یِ ابتدایی به سطحِ شیب‌دار می‌خورد؟ در n هایِ بزرگ $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ تقریباً چه‌قدر است؟

راه‌نمایی: این روابط ممکن است به دردِ شما بخورد، ممکن هم هست که نخورد.

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

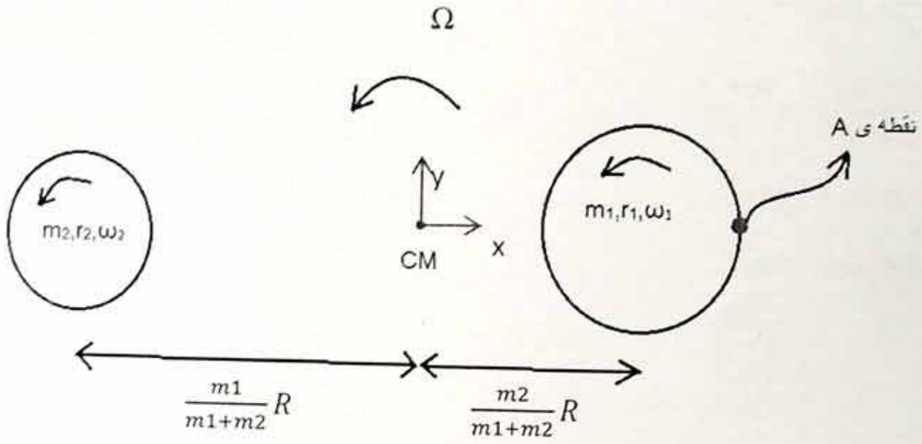
$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

مسئله ی ۳)

دو جسم مطابق شکل در نظر بگیرید به جرم های m_1 , m_2 و شعاع های r_1 , r_2 که هر کدامشان با سرعت های زاویه ای ω_1 , ω_2 در حال چرخش به دور خود هستند . علاوه بر این هر دو جسم با سرعت زاویه ای Ω در حال چرخش حول مرکز جرم (CM) هستند. تمام چرخش ها در صفحه x-y صورت می گیرد. * در تمام سوال $\omega_1 , \omega_2 > \Omega > 0$

* پاسخ ها را تا حد امکان ساده کنید.

* از روابطی که در انتهای سوال داده شده می توانید استفاده کنید.



الف) مکان نقطه ی A را در دستگاه مختصات دکارتی بدست آورید .

(فرض کنید در لحظه ی $t = 0$ ، نقطه ی A در روی محور X ها باشد ($Y = 0$))

ب) سرعت نقطه ی A را بدست آورید .

ج) شتاب نقطه ی A را بدست آورید.

د) رابطه ی شعاع انحنای مسیر بر حسب سرعت و شتاب به صورت $\rho = \frac{|v|^3}{|\vec{a} \times \vec{v}|}$ است . شعاع انحنای مسیری که نقطه ی A طی می کند را بر حسب زمان بدست آورید.

هـ) به ازای $m_1 = m_2$ و $r_1 = r_2$ و $R = 4r_1$ و $\omega_1 = \omega_2$ و برای دو حالت $\begin{cases} \omega1 = \Omega \\ \omega1 = 2\Omega \end{cases}$ مسیر نقطه ی A را در یک دوره ی نوسان مجموعه ، $(\frac{2\pi}{\Omega})$ ، رسم نمایید.

و) (در این قسمت فقط $m_1 = m_2$ و $r_1 = r_2$ و $R = 4r_1$) کمترین و بیشترین مقدار شعاع انحنا در چه زمان هایی به وجود می آید ؟ شعاع انحنا را در این زمان ها بدست آورید.

*ممکن است روابط زیر در حل مسئله مفید باشند.

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha \pm \beta}{2})\cos(\frac{\alpha \mp \beta}{2})$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha + \beta}{2})\sin(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

مسئله‌ی ۴)

میله‌ای نارسانا به طول $2a$ با چگالی بار الکتریکی یکنواخت، روی محور z و در محدوده‌ی $-a < z < a$ قرار دارد. کل بار الکتریکی میله، برابر با Q است.

الف) $\vec{E}_Q(r,\theta)$، میدان الکتریکی ناشی از میله را در نقطه ای به مختصات کروی (r,θ) به دست آورید.

ب) حال علاوه بر میله، حلقه‌ای به شعاع a در نظر بگیرید که محور آن منطبق بر محور z است و مرکز حلقه، مبدأ مختصات است. حلقه دارای بار الکتریکی کل $-Q$ است که به طور یکنواخت در طول آن توزیع شده است. $\vec{E}(r,\theta)$، میدان الکتریکی کل ناشی از حلقه و میله را برای نقاط دور از مبدأ مختصات، تا اولین مرتبه‌ی غیر صفر نسبت به $\frac{a}{r}$ به دست آورید.

می توانید از پاسخ انتگرال‌های زیر استفاده کنید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$\int cos^2 x \; dx = \frac{1}{2}(x + sin\,x\,cos\,x) + C$$

$$\int cos^3 x \; dx = sin\,x - \frac{1}{3}sin^3 x + C$$

$\frac{۱۱/۵}{۲۴} = ۴۷/۹ \%$

نمره سوم سامی

بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۲)

۹۲/۵/۲۴

مدت امتحان : ۴ ساعت

۵/۵

مسئله‌ی ۱

الف) جسمی به شکلِ کره‌ای به شعاع R که دمایش را مقدارِ معین T ثابت نگه داشته‌ایم در معرضِ جریانِ مایعی قرار می‌دهیم. سرعتِ این مایع در فاصله‌های دور از جسم مقدارِ یک‌نواخت v و دمایش به اندازه‌ی ΔT سردتر است. می‌خواهیم آهنگ انتقالِ گرما از جسم به مایع، h، را به دست آوریم. (۳ نمره)

آقا مهدی

می‌دانیم انتقال گرما به اختلاف دمای جسم و مایع، ΔT، طولِ مشخصه‌ی جسم، R، سرعتِ مایع، v، ظرفیت گرمایی‌ِ ویژه‌ی مایع بر واحد حجم، c، و هدایت گرمایی‌ِ مایع k بستگی دارد. بُعد انرژی‌ِ گرمایی‌ِ مبادله‌شده را H و بُعدِ دما را θ بگیرید. در این صورت $[h] = HT^{-1}$، $[c] = HL^{-3}\theta^{-1}$، و $[k] = HL^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$ است. با استفاده از تحلیلِ ابعادی کلی‌ترین رابطه‌ی بینِ این کمیت‌ها را به دست آورید.

ب) اگر سرعتِ مایع دو برابر و طولِ مشخصه‌ی جسم (شعاعِ کره) سه برابر شود، آهنگ انتقالِ گرما h_1 می‌شود و اگر سرعتِ مایع سه برابر و طولِ مشخصه‌ی جسم (شعاعِ کره) دو برابر شود، آهنگِ انتقالِ گرما h_2 می‌شود. $\frac{h_1}{h_2}$ چه‌قدر است؟ (۲ نمره)

$v \propto 2$ $\quad R \propto 3$ $\quad h_1$

$v \propto 3$ $\quad R \propto 2$

مسئله‌ی ۲

۳۰/۹

آقا محمودی

جسمی را رویِ زمین مطابقِ شکل با سرعتِ اولیه‌یِ v_0 و زاویه‌یِ α نسبت به اُفق و به سمتِ شرق پرتاب می‌کنیم. با در نظر گرفتنِ نیرویِ کوریولیس (در چارچوبِ چسبیده به زمین) قانونِ نیوتنِ حاکم بر حرکتِ پرتابه

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg\mathbf{k} - 2m\omega\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{r}}$$

می‌شود.

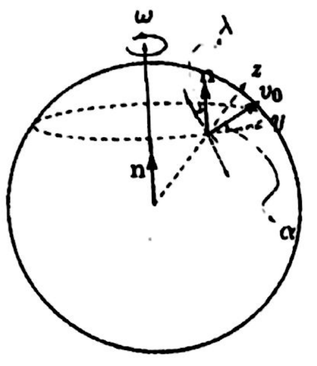
$$\omega := \omega\mathbf{n} = \omega(-\mathbf{i}\cos\lambda + \mathbf{k}\sin\lambda)$$

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\sin\alpha\,\mathbf{k}$$

که ω بردارِ سرعتِ زاویه‌ایِ زمین و $\mathbf{r}$ بردارِ مکانِ پرتابه و $\mathbf{v}_0$ سرعتِ اولیه‌ایِ پرتابه است. نقطهٔ شروعِ پرتابه را مبدا مختصات، محورِ z را عمود بر سطحِ زمین، و محورِ y را مماس بر زمین و در جهتِ شرق بگیرید. فرض کنید بُردِ آن‌قدر زیاد نیست که انحنای زمین مهم باشد، بنا بر این برایِ به دست‌آوردنِ بُردِ پرتابه، زمین را کاملاً تخت بگیرید. به خاطرِ نیرویِ کوریولیس که خیلی کوچک می‌گیرید، بُردِ پرتابه کمی عوض می‌شود.

الف) با در نظر گرفتنِ نیرویِ کوریولیس تا مرتبه‌یِ اول، اندازه‌یِ بُردِ پرتابه چه‌قدر عوض می‌شود؟ (۷ نمره)

ب) به ازایِ چه مقداری از زاویه‌یِ پرتاب، α، بُردِ پرتابه بیشینه می‌شود. محاسبه‌یِ خود را تا مرتبه اولِ اختلال انجام دهید. ~~(۳ نمره)~~ (۲ نمره)



۸/۱۰

مسئله ۳

منبع نور لیزری با طول ناچیز در نظر بگیرید که در مبدأ مختصات قراردارد و نور را فقط در راستای طول خود منتشر می‌کند. لیزر با سرعت زاویه‌ای ω، در جهت مثلثاتی، در صفحه‌ی $x-y$ دوران می کند. در لحظه‌ی $t=0$، جهت انتشار نور در جهت محور x است. لایه ای از ابر، در صفحه‌ی $y=d$ قرار دارد. در این مسئله، حرکت لکه‌ی نور را روی این لایه‌ی ابر بررسی می‌کنیم.

الف) اگر سرعت انتشار نور بی‌نهایت باشد، $v_\infty(x)$، سرعت حرکت لکه‌ی نور روی ابر را بر حسب x به دست آورید. (۱ نمره)

اعتراض

حال سرعت انتشار نور را مقدار ثابت c بگیرید.

ب) فوتونی که در لحظه‌ی t_0، که $0 < t_0 < \frac{\pi}{\omega}$، از لیزر خارج می‌شود، در زمان t'_0 و در فاصله‌ی افقی x_0 به سطح ابر می‌رسد. t'_0 و x_0 را به دست آورید. (۲ نمره)

پ) $v(x)$، سرعت حرکت لکه‌ی نور روی ابر را بر حسب x محاسبه کنید و نمودار $v(x)$ بر حسب x را رسم کنید. (۴ نمره)

ت) در صفحه‌ی $x-t$، نمودار حرکت لکه‌ی نور بر روی ابر را رسم کنید. (۳ نمره)

توضیح: در نمودار های رسم شده در بخش‌های (پ) و (ت)، مختصات نقاط با اهمیت نمودار، می بایستی بر حسب داده‌های مسئله مشخص شده باشد.

۱۰/

مسئله‌ی ۴

یک لایه‌ی دو قطبی با چگالی دوقطبی الکتریکی در واحد سطح با اندازه‌ی ثابت D بر سطح رویه ای گسترده شده است. رویه با معادله‌ی $z = f(\rho)$ در مختصات استوانه ای داده می‌شود. جهت بردار چگالی دوقطبی الکتریکی $\vec{D}$ در هر نقطه، در راستای عمود بر سطح رویه است، طوری که مؤلفه ی z آن نامنفی است.

الف) $\hat{n}$، بردار یکّه‌ی عمود بر سطح رویه را در مختصات استوانه‌ای بنویسید. (۱ نمره)

ب) $\phi(z,\rho,\varphi)$، پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای خارج رویه به مختصات استوانه‌ای (z,ρ,φ) را به صورت یک رابطه‌ی انتگرالی بر حسب تابع f و مشتقات آن بنویسید. رابطه‌ی به دست آمده را تا حد امکان ساده کنید. (۲ نمره)

اختصاصی

حال با استفاده از رابطه‌ی به دست آمده در (ب)، موارد زیر محاسبه کنید.

پ) اگر رویه نیم کره‌ای به به مرکز مبدأ مختصات و در ناحیه‌ی $z < 0$ باشد، پتانسیل الکتریکی را در مبدأ مختصات به دست آورید. (۲ نمره)

ت) اگر رویه یک سطح مخروطی با معادله‌ی $f(\rho) = -\alpha + \beta\rho$ باشد که α و β ثوابت مثبتی هستند، پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ای روی محور z محاسبه کنید. (۳ نمره)

ث) اگر رویه صفحه‌ی $z = 0$ باشد، پتانسیل الکتریکی را در تمام فضا محاسبه کنید. (۲ نمره)

راهنمایی: پتانسیل الکتریکی ناشی از یک دوقطبی الکتریکی $\vec{p}$ که در مبدأ مختصات قرار دارد، در نقطه‌ای که با بردار مکان $\vec{r}$ مشخص می‌شود، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{p}.\vec{r}$$

لیستی از انتگرال‌های مفید:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$\int \frac{xdx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} + C$$

$$\int cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x + sin\,x\,cos\,x) + C$$

$$\int cos^3 x\ dx = sin\,x - \frac{1}{3}sin^3 x + C$$

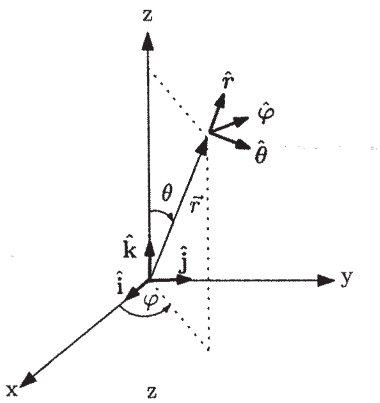
بسمه تعالی

امتحان ترم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۲)

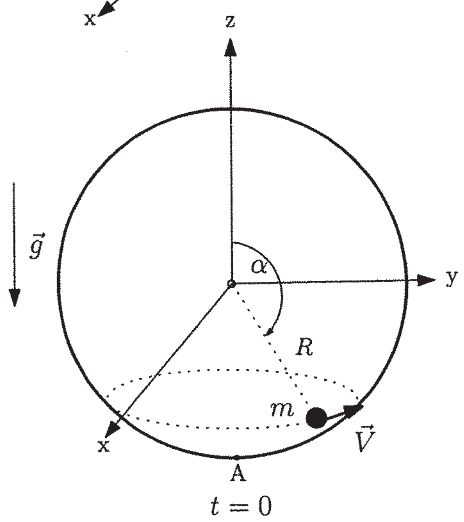
۹۲/۵/۳۱

وقت: ۴ ساعت

مسئله‌ی ۱



آ) بردارهای یکه‌ی $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$ مختصات کروی که به ترتیب در جهت افزایش r، θ و φ هستند و دو به دو بر یکدیگر عمودند را بر حسب بردارهای یکه‌ی دکارتی $\hat{i}$، $\hat{j}$ و $\hat{k}$ و زاویه‌های θ و φ بنویسید. مشتق زمانی بردارهای یکه‌ی $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$ را به دست آورید. (۱/۵ نمره)



ب) مؤلفه‌های کروی بردار سرعت و شتاب یک ذره را در مختصات کروی بر حسب r، θ، φ و مشتقات زمانی آن‌ها به دست آورید. (۱/۵ نمره)

ذره‌ای به جرم m در لحظه‌ی $t=0$ مطابق شکل از نقطه‌ای واقع بر سطح داخلی کره‌ای به شعاع R که شعاع واصل به این نقطه با محور z زاویه‌ی α می‌سازد با سرعت اولیه‌ی $\vec{V}=V\hat{\varphi}$ پرتاب می‌شود. کره ساکن است و سطح داخلی آن بدون اصطکاک است.

پ) در لحظه‌ی t که مختصات کروی مکان ذره (R,θ,φ) است قانون دوم نیوتن را در راستای $\hat{r}$، $\hat{\theta}$ و $\hat{\varphi}$ بنویسید. (۱/۵ نمره)

ت) علاوه بر انرژی مکانیکی کمیت بقادار دیگری به شکل $mR^2\dot{\varphi}f(\theta)$ در این مسئله وجود دارد. $f(\theta)$ را به دست آورید. (۰/۵ نمره)

ث) نیروی قائم وارد بر ذره از طرف سطح کره را بر حسب زاویه‌ی θ و سایر کمیت‌های معلوم به دست آورید. (۱ نمره)

ج) رابطه‌ای به صورت $\frac{1}{2}m\dot{z}^2=U(z)$ به دست آورید که $z=R\cos\theta$. $U(z)$ در مورد محدوده‌ی مجاز حرکت ذره در راستای z چه می‌گوید؟ (۲ نمره)

چ) چه شرطی بین مکان و سرعت اولیه‌ی ذره، α و V، برقرار باشد تا ذره بتواند روی سطح داخلی کره از تراز افقی اولیه (که در شکل با دایره‌ی نقطه‌چین مشخص شده) بالاتر برود؟ (۱/۵ نمره)

ح) چه شرطی بین مکان و سرعت اولیه‌ی ذره، α و V، برقرار باشد تا ذره بتواند در حین حرکت روی سطح داخلی کره در نقطه‌ای از مسیر، از سطح جدا شود؟ (۳/۵ نمره)

خ) هنگامی که ذره در نزدیکی نقطه‌ی A حرکت می‌کند زمان تناوب حرکت‌اش چقدر است؟ (۲ نمره)

مسئله‌ی ۲

مطابق شکل مکعب کوچکی به جرم m می‌تواند داخلِ شیارِ سطح شیب‌داری که روی میز چرخانی نصب شده به پایین بلغزد. سطح شیب‌دار به میز چسبیده و طول و شیب آن l و θ است. دیواره‌های جانبی شیار بدون اصطکاک‌اند ولی کف شیار اصطکاک دارد. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین کف شیار و مکعب μ است. در وضعیتی که میز با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد مکعب از نقطه‌ی A داخل شیار رها می‌شود.

آ) معادلات حرکت را بنویسید و $\ddot{r}$ را بر حسب r و سایر پارامترهای داده شده به دست آورید.

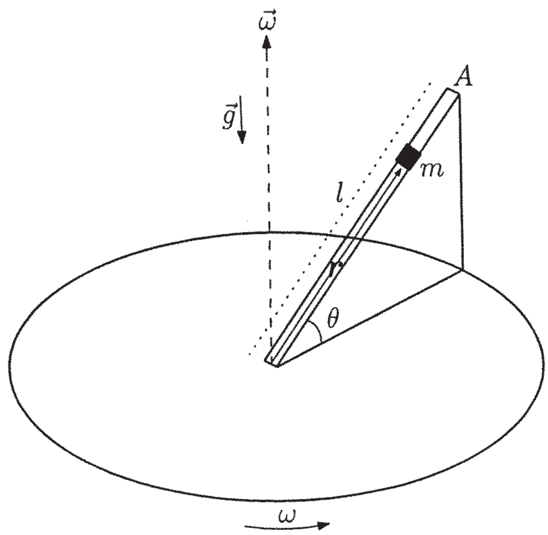
(۴٫۵ نمره)

ب) $r(t)$ را به دست آورید. (۱ نمره)

پ) زمان رسیدن مکعب به پایین سطح شیب‌دار چقدر است؟ (۱ نمره)

ت) نیروی قائم وارد بر مکعب از سوی کف و دیواره‌های جانبی شیار را بر حسب زمان به دست آورید. (۱٫۵ نمره)

ث) ω چقدر باشد تا مکعب پس از رها شدن، به پایین نلغزد و برای این منظور اگر شرطی لازم است، چیست؟ (۲ نمره)

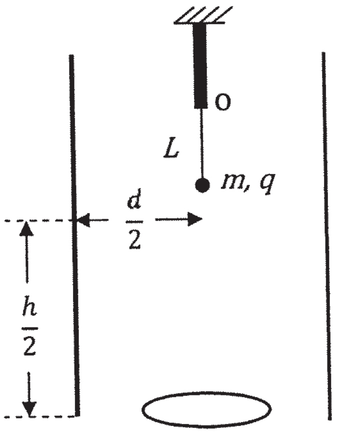


راهنمایی: در صورت نیاز می‌توانید از مؤلفه‌های شتاب در مختصات کروی که در قسمت ب) مسئله قبل به دست آوردید استفاده کنید. همچنین جواب معادله‌ی دیفرانسیل $\ddot{r}(t) = 2\beta\dot{r}(t) + \Omega^2 r(t) + \gamma$ که β، Ω و γ ضرایب ثابتی هستند عبارت است از $r(t) = e^{\beta t}[A\cosh(\sqrt{\beta^2+\Omega^2}\,t) + B\sinh(\sqrt{\beta^2+\Omega^2}\,t)] - \frac{\gamma}{\Omega^2}$.

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ یادآوری

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$

یک خازن تخت با صفحات موازی مطابق شکل به طور قائم در هوا (که ضریب گذردهی آن ϵ_0 است) در نظر بگیرید. هریک از صفحات خازن مربعی به ضلع h و فاصله بین دو صفحه d است به طوری که $d<<h$.



گلوله کوچکی به جرم m و بار الکتریکی q متصل به نخی به طول L است و در نقطه O به پایه‌ای وصل است. وقتی خازن بدون بار است گلوله مقابل مرکز صفحات مربعی خازن قرار دارد یعنی فاصله‌اش از هر صفحه‌ی خازن $\frac{d}{2}$ و ارتفاعش تا لبه‌ی پایینی خازن $\frac{h}{2}$ است. حلقه‌ای به شعاع $\frac{d}{4}$ در لبه پایینی خازن وجود دارد که مرکز آن وقتی خازن بدون بار است زیر گلوله متصل به نخ قرار دارد. در این مسئله از اثر بارهای تصویری صرفنظر کنید.

آ) هنگامی که خازن به اختلاف پتانسیل V_0 وصل می‌شود زاویه انحراف نخ وقتی گلوله در حالت تعادل است از راستای قائم اولیه چقدر می‌شود؟

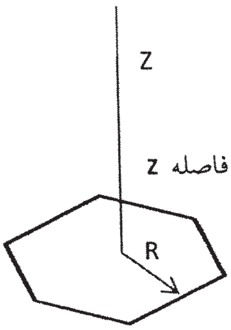
ب) گلوله متصل به نخ را از وضعیت تعادل قسمت آ) به مقدار بسیار جزئی منحرف و رها می‌کنیم. زمان تناوب حرکت نوسانی حول وضعیت تعادل اولیه را بدست آورید.

ت) وقتی که گلوله مانند قسمت آ) در حال تعادل است نخ را قطع می‌کنیم. بیشینه V_0 چقدر باشد تا گلوله از داخل حلقه عبور و به حلقه برخورد نکند.

ث) فرض کنید به جای اعمال اختلاف پتانسیل ثابت، در لحظه‌ی $t=0$ درست بعد از قطع کردن نخ متصل به گلوله‌ی باردار، اختلاف پتانسیل $V(t) = V_0 sin\omega t$ به صفحات خازن اعمال گردد. چه شرطی بین ω و سایر کمیتهای معلوم برقرار باشد تا گلوله از داخل حلقه عبور و به حلقه برخورد نکند؟ این شرط را بصورت $sinx > f(x)$ بنویسید و با رسم $f(x)$ و $sin(x)$ در یک نمودار، محدوده ω را روی نمودار مشخص نمایید. جواب‌های تقریبی ω_1 و ω_2 را به ترتیب در حالت‌های حدی $g \ll h\omega^2$ و $g \gg h\omega^2$ بدست آورده و حاصلضرب $\omega_1\omega_2$ را محاسبه کنید. g شتاب جاذبه زمین می‌باشد.

مسئله‌ی ۴

- پاسخ هایتان را تمیز و مرتب و دقیق بنویسید. کوچکترین اشتباهی از جمله محاسباتی یا علمی قابل پذیرش نیست.



الف) میدان الکتریکی حلقه ای به شکل n ضلعی منتظم را که چگالی بار طولی λ دارد را به فاصله z روی محور آن بدست آورید. (2 نمره) طول دایره ی محاطی n ضلعی(دایره درون n ضلعی) R را فرض کنید.

ب) در این قسمت صفحه ای به شکل n ضلعی منتظم با چگالی بار سطحی σ در نظر بگیرید و میدان الکتریکی را به فاصله z روی محور آن بدست آورید. (3 نمره) طول دایره ی محاطی n ضلعی را R فرض کنید.

ج) پاسخ قسمت ب را وقتی که n به بی نهایت میل می کند تا اولین مرتبه ی غیر صفر از $\frac{1}{n}$ بدست آورید. (3 نمره)

د) (در این قسمت گرانش را هم در نظر بگیرید) فرض کنید بار نقطه ای مثبت q را در فاصله ی تعادل آن از صفحه ی مورد نظر در قسمت ج قرار می دهیم . با کمی تغییر از نقطه ی تعادلش در راستای z ، فرکانس نوسانات آن را بدست آورید. (2 نمره)

راهنمایی :

برخی از انتگرال هایی به فرم $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ را می توانید با تغییر متغییر x = a tan (φ) بر حسب متغییر φ حل کنید.

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2|$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a^2+x^2} = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$if\ (x \ll 1) \rightarrow \tan^{-1}x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

بسمه تعالی

۹۲/۶/۶

وقت: ۴ ساعت

آزمون مرحله‌ی چهارم المپیاد فیزیک (تابستان ۹۲)

مسئله‌ی ۱

فنری به طول کشیده نشده ی l_0 و ثابت فنر k_0 در نظر بگیرید که در حالت کشیده نشده، دارای چگالی جرم در واحد طول یکنواخت λ_0 است. فنر درون لوله‌ی بلند بدون اصطکاکی قرار داده شده است و ابتدای فنر در مبدأ مختصات به ابتدای لوله محکم شده است. این مجموعه در صفحه‌ی $z = 0$ قرار دارد و حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. در این مسئله فنر را در حالت تعادل در نظر می‌گیریم، به این معنی که فرض می‌کنیم فاصله‌ی یک نقطه‌ی مشخص از فنر از محور دوران با زمان تغییر نمی کند. در این مسئله، توزیع کشش در طول فنر و چگالی جرمی در واحد طول فنر را در حالت تعادل به دست خواهیم آورد.

فنر را مجموعه‌ای از تعداد زیادی فنر بسیار کوچک در نظر بگیرید که به صورت سری به هم متصل شده‌اند و به ترتیب افزایش فاصله از محور دوران، شماره گذاری شده اند. (اولین فنر با $i = 1$ مشخص شده است.) فنر کوچک i ام، دارای طول کشیده نشده‌ی Δx_i است؛ در حالت کشیده نشده در فاصله‌ی x_i از محور دوران قرار دارد و در حالت تعادل به فاصله‌ی $x_i{}'$ از این محور می‌رسد. نیروی کشش در ابتدای بخش iام از فنر برابر با T_i است.

الف) k_i، ثابت فنر بخش i ام از فنر چه‌قدر است؟ (۱ نمره)

ب) رابطه‌ای بین T_i و T_{i+1} و سایر پارامترهای بحث شده بنویسید. (۱ نمره)

پ) $x_i{}'$ را بر حسب x_i ، T_j ها، Δx_j ها ($1 \le j \le i$) و سایر داده‌های مسئله بنویسید. (۲ نمره)

ت) اگر $T(x)$ نیروی کشش فنر بر حسب x ، موضع نقطه‌ای از فنر در حالت کشیده نشده باشد، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر $T(x)$ را بر حسب x، l_0، λ_0، k_0 و ω بنویسید. (۲ نمره)

ث) $T(x)$ را بیابید. (۴ نمره)

ج) نقطه‌ای از فنر را در نظر بگیرید که در حالت کشیده نشده در فاصله‌ی x از محور دوران قرار داشته است. $x'(x)$ فاصله‌ی نهایی این نقطه از فنر از محور دوران را برحسب x به دست آورید. (۲ نمره)

چ) $\lambda(x')$، چگالی جرم در واحد طول فنر در حالت تعادل را به دست آورید. (۲ نمره)

ح) یک فرکانس آستانه‌ی ω_m وجود دارد که با فرض‌های این مسئله، به ازای فرکانس های بزرگتر یا مساوی این فرکانس، در نقطه‌ی از فنر نیروی کشش فنر نامتناهی می‌شود. این فرکانس را بیابید. (۱ نمره)

راهنمایی: صورت کلی پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2}+ay=b$ که $a>0$ و b مقادیر ثابتی هستند، به صورت $y=A\cos\gamma x+B\sin\gamma x+C$ است که A، B، C و γ مقادیر ثابتی هستند. همچنین صورت کلی پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2}-ay=b$ که $a>0$ و b مقادیر ثابتی هستند، به صورت $y=A\,\mathrm{e}^{\gamma x}+B\mathrm{e}^{-\gamma x}+C$ است که A، B، C و γ مقادیر ثابتی هستند.

مسئله‌ی ۲

دو قطبی الکتریکی با گشتاور دو قطبی الکتریکی $\vec{p} = p\hat{x}$ در مبدأ مختصات قرار دارد. حلقه‌ای نارسانا و بدون بار به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r_0 در نظر بگیرید که محور آن منطبق بر محور z است و مهره ای نارسانا با بار q و جرم m، مقید به حرکت روی آن است. از اصطکاک حلقه و مهره و از نیروی گرانش صرف نظر کنید. محل مهره روی حلقه، با زاویه‌ی φ' در مختصات استوانه‌ای مشخص می‌شود.

الف) در وضعیتی که مهره در زاویه‌ی φ' قرار دارد، $\phi(r, z, \varphi)$ پتانسیل الکتریکی را در نقطه ای دلخواه از فضا به مختصات استوانه‌ای (r, z, φ) به دست آورید. (۱ نمره)

ب) $U(\varphi')$ ، انرژی پتانسیل مهره را بر حسب φ' بنویسید. (۱ نمره)

فرض کنید مهره از نقطه‌ای از حلقه با زاویه‌ی φ_0 رها شود.

پ) $v(\varphi')$، سرعت مهره را در زاویه‌ی φ' به دست آورید. (۱ نمره)

ت) $N(\varphi')$، نیروی وارد از حلقه بر مهره را بر حسب φ' به دست آورید. (۲ نمره)

ث) در چه شرایطی نیروی وارد از طرف حلقه بر مهره، صفر می‌شود؟ (۱ نمره)

حال مسئله را بدون حلقه در نظر بگیرید. یعنی فرض کنید همان دوقطبی الکتریکی در مبدأ مختصات قرار دارد و بار الکتریکی نقطه‌ای q به جرم m از نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r} = r_0\hat{y}$ رها می‌شود و تنها نیروی وارد بر آن نیروی الکتریکی ناشی از دو قطبی الکتریکی است.

ج) مسیر حرکت بار q را به دست آورید، سپس نمودار مؤلفه‌ی x بردار مکان بار q را به صورت تقریبی بر حسب زمان رسم کنید. (نیازی به مدرج کردن دقیق محور زمان نیست.) (۴ نمره)

یک حلقه‌ی نارسانا به مرکزِ مبدأ مختصات در صفحه‌ی xy قرار دارد. شعاعِ حلقه R است. چگالی بارِ خطی حلقه $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin^2\theta$ است که λ_0 ثابتی مثبت و θ مطابقِ شکل زاویه‌ی شعاع با محورِ x است. بارِ نقطه‌ای q به جرم m در مبدأ مختصات به حالتِ تعادل قرار دارد.

الف) اگر بار نقطه‌ای مثبت باشد بسامدِ زاویه‌ای نوسان‌های کوچکِ بار در راستای x وقتی در همین راستا اندکی از حالت تعادل جابجا شود، چقدر است؟ (۳ نمره)

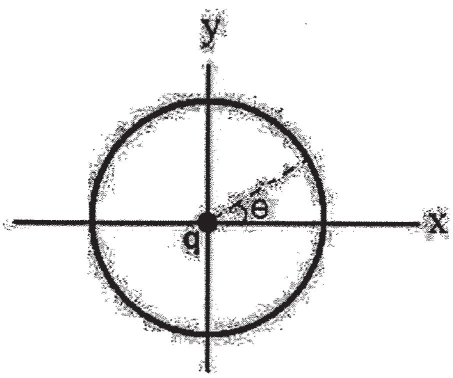
ب) اگر بار نقطه‌ای مثبت باشد بسامدِ زاویه‌ای نوسان‌های کوچکِ بار در راستای y وقتی در همین راستا اندکی از حالت تعادل جابجا شود، چقدر است؟ (۳ نمره)

پ) اگر بار نقطه‌ای منفی باشد بسامدِ زاویه‌ای نوسان‌های کوچکِ بار در راستای z وقتی در همین راستا اندکی از حالت تعادل جابجا شود، چقدر است؟ (۲/۵ نمره)

ت) فرض کنید:

$$\begin{cases} q = 3 \times 10^{-18}\,(C) \\ \lambda_0 = 7 \times 10^{-15}\,\left(\frac{C}{m}\right) \\ \epsilon_0 = 9 \times 10^{-11}\,\left(\frac{F}{m}\right) \\ R = 1\,(mm) \\ m = 2 \times 10^{-29}\,kg \end{cases}$$

مقادیرِ عددی بسامدهای زاویه‌ای قسمت‌های قبل را حساب کنید. (۱/۵ نمره)



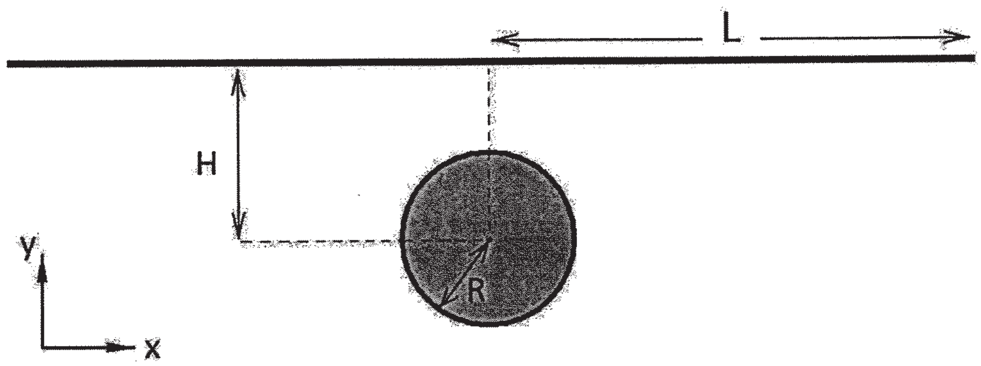
در صورت نیاز برای $n \geq 1$:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

مسئله ۴

یک پوسته‌ی کروی رسانا با شعاعِ R به زمین متصل شده و دارای پتانسیلِ الکتریکی صفر است. در مقابلِ این کره و به فاصله‌ی H از مرکزِ آن، سیمِ نارسانایی به طولِ 2L قرار دارد که حاملِ بارِ الکتریکی با چگالی خطی یکنواختِ λ است. عمودمنصفِ سیم از مرکزِ کره می‌گذرد.



الف) مبدأ مختصاتِ دکارتی را مرکزِ کره و جهتِ محورها را مطابقِ شکل بگیرید. مکانِ هندسی بارهای تصویری داخلِ کره را بیابید. اگر طولِ سیم بی‌نهایت باشد، این معادله چه شکلِ هندسی‌ای را بیان می‌کند؟ (۳ نمره)

ب) مقدار کلِ بارِ القایی روی پوسته را بیابید. اگر طولِ سیم بی‌نهایت باشد، مقدارِ بارِ القایی روی پوسته چقدر است؟ (۱ نمره)

حالا می‌خواهیم نیروی وارد بر سیم از طرف کره را حساب کنیم.

پ) مؤلفه‌ی عمودی (در راستای y) میدانِ الکتریکی ناشی از سیم را در نقطه‌ای به مختصاتِ $(x, y, 0)$ حساب کنید. (۲ نمره)

ت) فرض کنید $H = \sqrt{2}\,R$ است. همچنین فرض کنید $L \gg R$، طوری که می‌توان از مرتبه‌ی دوم و بالاتر $\frac{R}{L}$ چشم پوشید. نیروی کلِ وارد بر سیم را حساب کنید. (۴ نمره)

در صورت نیاز:

- مکان و مقدار بار تصویری یک بار نقطه‌ای مانند q که به فاصله‌ی d از مرکز یک پوسته‌ی کروی رسانا به شعاع R و دارای پتانسیل صفر قرار دارد به ترتیب برابر $\frac{R^2}{d}$ (از مرکز کره) و $-\frac{qR}{d}$ است.
-

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$\int \frac{a^2dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+2a^2}} = \tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{x^2+2a^2}})$$

کسری کهالی

امتحان نهایی دوره تابستانی المپیاد فیزیک ۹۲

مسئله‌یِ 1) ژانگولر مکانیکی

تعداد زیادی دانه‌های شن را روی یک صفحه نوسان کننده افقی ریخته‌ایم. جرم صفحه بسیار بزرگتر از دانه‌های شن است. صفحه در راستای قائم با معادله $y = A\sin\omega t$ نوسان می کند. برخورد دانه‌های شن با صفحه کشسان است. تحت شرایط معینی ممکن است حرکت صفحه نوسان کننده و برخی از دانه‌ها طوری تنظیم شود که دانه‌ها تا ارتفاع قابل توجهی، که به مراتب از A بزرگتر است، به بالا بپرند. به هر کدام از این وضعیت‌ها یک مد تشدیدی می‌گوییم. در این مسئله دو تا از این مدها را بررسی می‌کنیم. در یک مد خاص یک دانه شن همواره در یکی از دو انتهای مسیر نوسانی صفحه، یعنی در لحظه‌ای که سرعت صفحه صفر است، با آن برخورد می‌کند.

a) مقادیر ممکن برای ارتفاع پرش دانه‌های شن در این مد را به دست آورید. (۳ نمره)

در مد دیگری یک دانه شن در یک پرش تا ارتفاع h_1 و در پرش بعدی تا ارتفاع h_2 $(h_2 > h_1)$ بالا می‌رود. در پرش اول هنگام برخورد صفحه به طرف پایین حرکت می‌کند. برخورد بعدی در موضعی که قرینه موضع نوسانی صفحه هنگام برخورد قبلی است و در حالی که صفحه با همان سرعت به سمت بالا حرکت می‌کند، رخ می‌دهد.

b) مقادیر ممکن برای h_1 و h_2 را به دست آورید. (۲ نمره)

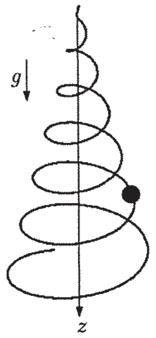
c) مقادیر ممکن برای سرعت صفحه نوسان کننده هنگام برخورد با دانه شن را به دست آورید. (۱ نمره)

d) مقادیر ممکن برای فاز نوسان (کمیت ωt) در هنگام برخورد صفحه با دانه شن را به دست آورید. (۲ نمره)

e) حداقل دامنه نوسان چقدر باشد تا اصولا این مد قابل رخ دادن باشد؟ (۱ نمره)

f) نشان دهید تحت شرایط معینی این مد بخشی از حالت‌های مد قبلی را شامل می‌شود. (۱ نمره)

مسئله‌ی 2) جاده ایمن مارپیچ

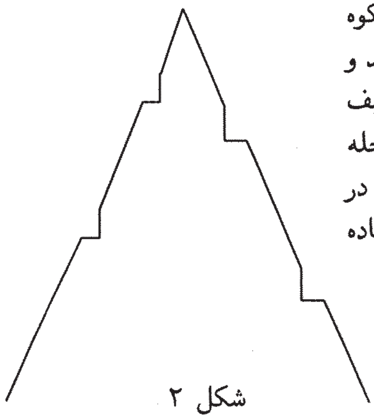


شکل ۱

مفتول نازکی مطابق شکل ۱ به صورت یک مارپیچ پهن شونده با معادلات $z = \alpha\phi$ و $r = \beta\phi$ در آمده است که (r, ϕ, z) مختصات استوانه‌ای هستند (مختصات قطبی در صفحه x-y به انضمام مختصه z). مهره کوچکی به جرم m از مبدا مختصات حرکت خود را شروع می‌کند و تحت اثر نیروی وزن خود روی این مفتول سر می‌خورد.

a) مولفه‌های سرعت و شتاب در جهت $\hat{r}$، $\hat{\phi}$ و $\hat{z}$ را بر حسب ϕ و مشتقات آن به دست آورید. (۲ نمره)
b) کمیت $\dot{\phi}^2$ را به عنوان تابعی از ϕ به دست آورید. (۲ نمره)
c) یک معادله انتگرالی بنویسید که از حل آن $\phi(t)$ به دست آید. (۱/۵ نمره)
d) کمیت $\ddot{\phi}$ را به عنوان تابعی از ϕ به دست آورید. (۱/۵ نمره)
e) مولفه‌های نیرویی که مفتول به m وارد می‌کند یعنی N_r، N_ϕ و N_z را به عنوان توابعی از ϕ به دست آورید. (۲ نمره)

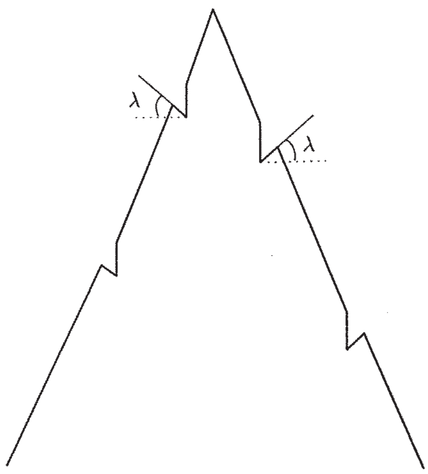
حال جاده‌ای به شکل مسیر فوق تصور کنید که بر بدنه یک کوه مخروطی احداث شده است. قله کوه را مبدا مختصات بگیرید و فرض کنید معادلات $z = \alpha\phi$ و $r = \beta\phi$ خط وسط جاده را توصیف می کنند. مقطع قائم جاده مطابق شکل ۲ است. در این مرحله فرض کنید جاده شیب عرضی ندارد یعنی عمود بر سطح جاده در صفحه $\hat{z}$ و $\hat{\phi}$ است و با $\hat{z}$ زاویه γ دارد، که زاویه شیب طولی جاده نسبت به افق است.


شکل ۲

f) $\sin\gamma$ را به صورت تابعی از ϕ به دست آورید. (۲ نمره)

اگر قطعه کوچک بدون اصطکاکی مثل یک تکه یخ را از قله رها کنیم که با لبه‌های جاده هم برخوردی نداشته باشد نمی‌تواند مسیری به مشخصات فوق (مشابه مهره روی مفتول) را طی کند، یعنی به کناره‌ها منحرف شده و از جاده خارج می‌شود. حال فرض کنید می خواهیم آنچنان شیب عرضی در جاده ایجاد کنیم که قطعه فوق بدون تماس با هیچ لبه‌ای همواره روی خط وسط جاده حرکت کند. برای ایجاد شیب عرضی λ باید عمود بر سطح جاده مطابق شکل ۳ در هر نقطه به اندازه زاویه λ حول $\hat{\phi}$ چرخیده باشد.

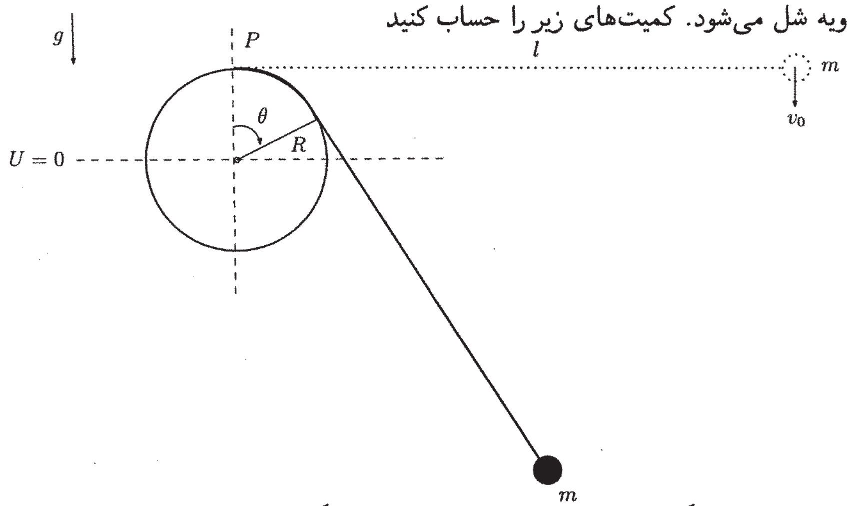
g) شیب عرضی λ را به عنوان تابعی از ϕ به دست آورید. (۴ نمره)



شکل ۳

مسئله‌یِ 3) نخ پیچان

نخی به طول l از یک سر به نقطه P در بالای یک استوانه ثابت به شعاع R بسته شده و سر دیگر آن به جرم نقطه‌ای m بسته شده است. شتاب ثقل به طرف پایین است. در حالی که نخ افقی است جرم m را با سرعت اولیه v_0 به طرف پایین پرتاب می‌کنیم تا نخ به دور استوانه بپیچد. وضعیت دستگاه در یک لحظه دلخواه با زاویه θ نسبت به امتداد قائم تعیین می‌شود. اندازه v_0 چنان است که نخ تا زاویه $\theta = 3\pi/2$ شل نمی‌شود و در این زاویه شل می‌شود. کمیت‌های زیر را حساب کنید



a) E انرژی دستگاه (مبدا پتانسیل را زاویه $\theta = \pi/2$ بگیرید.) (۲ نمره)

b) v_0 سرعت اولیه ذره. (۱ نمره)

c) l_m، کمینه طول l برای آن‌که این اتفاق بیفتد. (۱/۵ نمره)

d) کمیت $\dot{\theta}^2$ به عنوان تابعی از θ. (۱/۵ نمره)

e) کمیت $\ddot{\theta}$ به عنوان تابعی از θ. (۱ نمره)

f) کمیت $\ddot{x}$ به عنوان تابعی از θ. (۱ نمره)

g) کمیت $\ddot{y}$ به عنوان تابعی از θ (x و y مختصات دکارتی نسبت به مرکز استوانه هستند). (۱ نمره)

h) کمیت T، کشش نخ به عنوان تابعی از θ. (۱ نمره)

ترتیب محاسبه کمیتها به روش حل بستگی دارد، اما در پاسخنامه هر یک را دقیقا مشخص کنید و تا جای ممکن ساده کنید. فقط به پاسخ نهایی صحیح برای هر کمیت نمره داده می‌شود.

مسئله ۴)

مایع رسانایی با چگالی جرم در واحد حجم ρ در ظرف بسیار وسیعی ریخته شده است. مایع به پتانسیل الکتریکی صفر متصل شده است. کره‌ی رسانایی به شعاع a بالای سطح مایع قرار دارد، طوری که مرکز آن روی محور z و در نقطه‌ای با $z = d$ قرار دارد. شتاب گرانش g در جهت $-\hat{z}$ برقرار است و در حالتی که کره‌ی رسانا در پتانسیل صفر قرار دارد، سطح مایع، صفحه‌ی $z = 0$ است. کره را به پتانسیل الکتریکی V متصل می‌کنیم. با تغییر پتانسیل کره‌ی رسانا، سطح مایع تغییر شکل می‌دهد. در این مسئله، شکل سطح مایع را در این حالت بررسی خواهیم کرد. در سراسر این مسئله، فرض کنید $a \ll d$ و تمامی محاسبات را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{a}{d}$ انجام دهید. همچنین تغییر ارتفاع هر نقطه از سطح را کوچک بگیرید، طوری که بتوان محاسبات الکترو ایستایی را با فرض مسطح بودن سطح مایع انجام داد.

الف) کل بار الکتریکی موجود روی سطح کره‌ی رسانا را به دست آورید. (۱ نمره)

ب) $\sigma(r)$، چگالی سطحی بار الکتریکی القا شده روی سطح مایع رسانا را در نقطه ای از سطح رسانا که در فاصله‌ی r از محور z قرار دارد محاسبه کنید. (۲ نمره)

پ) $\vec{f}(r)$، نیروی الکتریکی وارد بر واحد سطح رسانا را در نقطه ای از سطح رسانا که در فاصله‌ی r از محور z قرار دارد، بیابید. (۱ نمره)

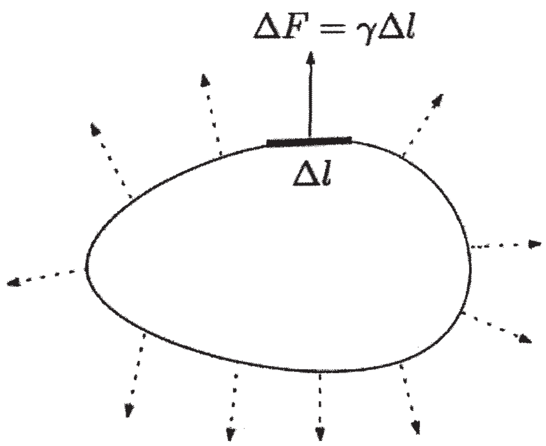
ت) با صرف نظر کردن از نیروی کشش سطحی مایع، معادله‌ی سطح مایع را به صورت $z = h(r)$ بیابید. (۲ نمره)

ث) در بخش های قبلی مسئله، فرض شد که در محاسبه‌ی نیروهای الکتریکی می‌توان از تغییر شکل سطح مایع صرف نظر کرد. این فرض را به صورت شرطی روی پارامترهای مسئله بنویسید. (۱ نمره)

فرض کنید که به جای کره‌ی رسانا، یک بار نقطه‌ای با بار الکتریکی q قرار دارد و مایع دارای ثابت کشش سطحی γ است که $\gamma \ll \rho g d^2$. همچنان می‌توانید تغییر شکل سطح را به اندازه‌ای کوچک بگیرید که بتوان محاسبات الکتروایستایی را با فرض مسطح بودن سطح مایع انجام داد.

ج) $h(r)$ را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{\gamma}{\rho g d^2}$ بیابید. (۳ نمره)

توضیح: کشش سطحی مایع عاملی است که می‌خواهد سطح آزاد مایع را به حداقل برساند. اگر جزء کوچکی از مایع را در نظر بگیرید نیرویی که قسمت‌های مجاور این جزء به آن وارد می‌کنند مماس بر سطح آزاد و عمود بر مرزهای این جزء با قسمتهای مجاور و به سمت خارج این جزء است. مقدار نیرو، ΔF، متناسب با طول مرز، Δl، است و ضریب تناسب که موسوم به کشش سطحی است با γ نمایش داده می‌شود.



مسئله ۵)

صفحه‌ی $z = 0$ دارای چگالی بار سطحی ثابت σ است. بار نقطه‌ای $-q$ روی محور z و در $z = d$ قرار دارد.

الف) میدان الکتریکی را در تمام فضا به دست آورید. (۱ نمره)

ب) حلقه‌ای فرضی، به شعاع r_0 در نظر بگیرید که هم محور با محور z است و مرکز آن بر نقطه‌ای با $z = z_0$ واقع شده است. شار الکتریکی گذرنده از حلقه را بیابید. (۲ نمره)

پ) معادله‌ی خطوط میدان الکتریکی را به صورت $f(r, z) = C$ در مختصات استوانه‌ای بنویسید. (۱ نمره)

ت) خطوط میدانی که با فاصله‌ی r از محور z از صفحه‌ی $z = 0$ خارج می شوند که $r_{min} < r < r_{max}$، به بار نقطه‌ای $-q$ منتهی می‌شوند. معادلاتی بنویسید که از روی آن ها بتوان r_{min} و r_{max} را به دست آورد. معادلات را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویسید. (۱/۵ نمره)

ث) شکل خطوط میدان الکتریکی را رسم کنید. (۳ نمره)

ج) فرض کنید به جای صفحه‌ی نارسانا، صفحه‌ای رسانا و بسیار بزرگ در $z = 0$ قرار داشته باشد که پیش از آن که بار نقطه‌ای $-q$ در نزدیکی آن قرار داده شود. دارای چگالی بار سطحی ثابت σ است و سپس همان بار نقطه‌ای $-q$ روی محور z و در $z = d$ قرار داده می‌شود. شکل خطوط میدان الکتریکی را رسم کنید. (۱/۵ نمره)

بسمه تعالی

وقت: ۳٫۵ ساعت

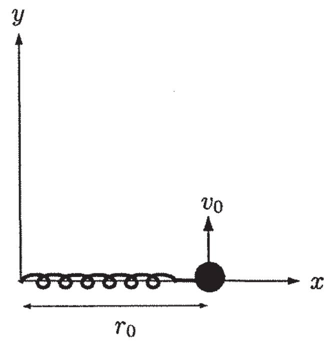
امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۹۲)

مسئلهی ٦)

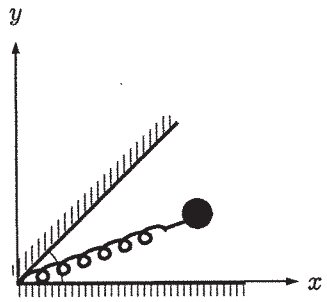
الف) مطابقِ شکل ذرهای به جرمِ m با فنری با ضریبِ سختیِ k و طولِ آزادِ صفر به مبدا ِ مختصات وصل شده است، به طوریکه نیرویی که فنر به آن وارد میکند $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ است. این ذره از نقطهیِ $\mathbf{r}_0 = r_0\mathbf{i}$ با سرعتِ اولیهیِ $v_0\mathbf{j}$ پرتاب میشود. مکانِ ذره

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

را به دست آورید. معادلهیِ مسیرِ ذره را نیز به دست آورید. به ازایِ چه شرطی رویِ v_0، r_0، k، و m ذره در اوایلِ حرکت به مبدا نزدیک میشود. در همهیِ بخشهایِ مسئله حرکت در صفحهیِ افقی (صفحهیِ $x-y$) است و اصطکاکِ بینِ ذره و صفحهیِ افقی ناچیز است. (۲ نمره)



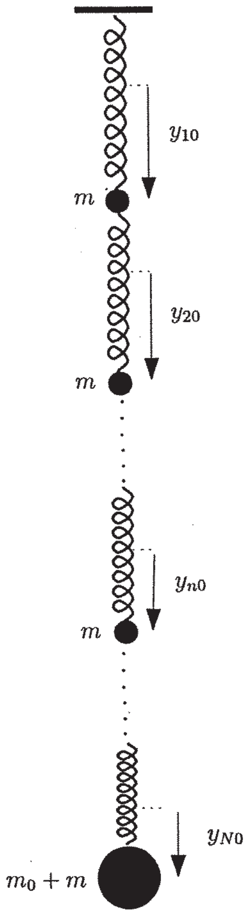
ب) حالا فرض کنید شرایطِ اولیه حرکتِ ذره همان مقادیرِ بندِ قبل است ولی ذره مقید است که بینِ دو دیوار که با هم زاویهیِ θ میسازند، حرکت کند. برخوردِ ذره با دیوارها را کشسان بگیرید، یعنی در برخوردِ ذره با هر دیوار مولفهیِ عمود بر دیوارِ تکانهیِ ذره جهتش معکوس میشود و مولفهیِ مماسیِ تکانه تغییری نمیکند.



ب-۱) در این بخش $\theta = \pi/4$ بگیرید. مسیرِ حرکتِ ذره را به طورِ کیفی رسم کنید. در چه نقاطی و در چه زمانهایی ذره به صفحهها برخورد میکند؟ (۲ نمره)

ب-۲) در این بخش $\theta = \pi/8$ بگیرید.
آیا حرکت دوره‌ای است؟
اگر حرکت دوره‌ای نیست، چرا؟
اگر حرکت دوره‌ای است، چرا ؟ و دوره‌یِ حرکت چه‌قدر است؟ (۲ نمره)
راه‌نمایی: ممکن است کشیدنِ مسیرِ حرکتِ ذره به شما کمک کند.
ب-۳) به ازایِ چه‌مقادیری از θ حرکتِ ذره دوره‌ای است؟ (۲ نمره)
ب-۴) به ازایِ مقداری دل‌خواه برایِ θ، نزدیک‌ترین و دورترین فاصله‌ای که ذره در حینِ حرکتِ از مبدأ پیدا می‌کند، چه‌قدر است؟ (۲ نمره)

مسئله‌ی ۷)



مطابق شکل N وزنه‌ی یکسان هر یک به جرم m به N فنر یکسان بدون جرم هر یک با ثابت k متصل شده‌اند. به فنر پایینی علاوه بر وزنه‌ی به جرم m وزنه‌ی دیگری به جرم m_0 نیز متصل است. این مجموعه در میدان گرانش زمین با شتاب جاذبه‌ی g قرار دارد.

آ) در حالت تعادل ایستایی، کشیدگی هر یک از فنرها نسبت به طول عادی‌اش، $y_{10}, y_{20}, \cdots, y_{n0}, \cdots, y_{N0}$، چقدر است؟ (۲ نمره)

ب) اکنون وضعیتی را در نظر بگیرید که دستگاه در راستای قائم نوسان می‌کند و جابجایی هر یک از جرم‌ها در لحظه‌ی دلخواه t از حالت تعادل ایستایی‌اش در قسمت قبل، $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t), \cdots, y_N(t)$ است. معادلات حرکت را بنویسید. (۲ نمره)

پ) با در نظر گرفتن جوابی به صورت $y_n(t) = A\sin n\alpha \sin\omega t + B_n$ برای معادلات حرکت، B_n (که مستقل از زمان است) را به دست آورید. به معادله‌ای برسید که با حل آن α بر حسب کمیت‌های معلوم به دست می‌آید. ω را بر حسب α به دست آورید. (۳ نمره)

اکنون فنر جرم‌داری به جرم M و ثابت K در نظر بگیرید که جرم m_0 به انتهای آن متصل شده و دستگاه می‌تواند در حضور گرانش در راستای قائم نوسان کند. فنر جرم‌دار را به صورت N فنر یکسان بدون جرم که بین آن‌ها N وزنه هر یک به جرم $\frac{M}{N}$ قرار گرفته و $N \to \infty$ مدل می‌کنیم.

ت) ω از چه معادله‌ای به دست می‌آید؟ (۱ نمره)

ث) به ازای $\frac{M}{m_0} \ll 1$، ω را تا مرتبه‌ی اول $\frac{M}{m_0}$ به دست آورید. (۱ نمره)

ج) به ازای $\frac{m_0}{M} \ll 1$، ω را تا مرتبه‌ی اول $\frac{m_0}{M}$ به دست آورید. (۱ نمره)

مسئلهی ۸)

یک کرهی توپُرِ نارسانا به شعاعِ R و به مرکزِ مبدأ مختصات در نظر بگیرید. فرض کنید تمام نقاطی را که در معادلهی $x^2+y^2<b^2$ صدق می‌کنند، از کره خارج کنیم (مثلِ این است که تونلی استوانه‌ای به شعاعِ b در کره در امتداد محور z حفر کنیم و از مرکز بگذریم و به سمتِ دیگر برسیم). بارِ الکتریکی با چگالی حجمی مثبتِ ρ در داخل کره و خارج از تونل توزیع شده است. در همه‌ی قسمت‌های مسئله، فرض کنید $\frac{b}{R}$ خیلی کوچک است، به طوری که می‌توان از توانِ سوم و بالاترِ آن صرف‌نظر کرد.

الف) میدانِ الکتریکی را روی نقطه ای از محورِ z بر حسبِ مختصه z آن نقطه برای نقاطِ $-\frac{R}{2}\leq z\leq\frac{R}{2}$ حساب کنید. (۵ نمره)

ب) پتانسیلِ مرکز کره را صفر فرض کنید و پتانسیلِ الکتریکی را روی محورِ z بر حسبِ فاصله‌ی z از مرکز کره ، برای نقاطِ $-\frac{R}{2}\leq z\leq\frac{R}{2}$ حساب کنید. (۳ نمره)

بارِ الکتریکی نقطه‌ای q− به جرمِ m را که می‌تواند آزادانه روی محورِ z حرکت کند، از نقطه‌ی $(0,0,z_0)$ از حالتِ سکون رها می‌کنیم. فرض کنید $-\frac{R}{2}\leq z_0\leq\frac{R}{2}$ است. از نیروی وزن صرف‌نظر کنید.

پ) سرعتِ بارِ نقطه‌ای را بر حسبِ z بیابید. (۳ نمره)

ت) سرعتِ بارِ نقطه‌ای را هنگامِ عبور از مرکز کره بیابید. (۱ نمره)

حالا فرض کنید z_0 خیلی کوچک است.

ث) بسامدِ زاویه‌ای نوساناتِ کوچکِ بارِ نقطه‌ای در راستای z حول مرکز کره را بیابید. (۳ نمره)

بسمه تعالی

امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۹۲)

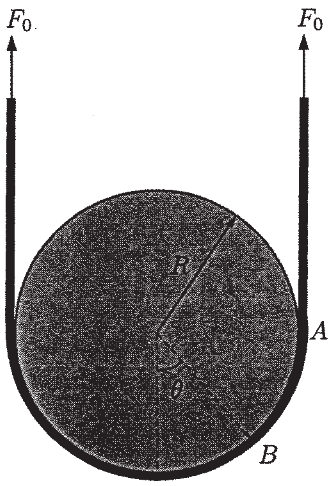
وقت: ۲/۵ ساعت

مسئله‌ی ۹

ریسمانی هم‌گن به جرمِ M و طولِ ℓ مطابقِ شکلِ (a) به طورِ متقارن به دورِ لوله‌ای استوانه‌ای به شعاعِ R که ثابت نگه داشته‌ایم، پیچیده و از هر طرف با نیروی قائمِ F_0 می‌کشیم. گرانش را در راستای قائم بگیرید و از اصطکاکِ بینِ ریسمان و لوله‌ی استوانه‌ای چشم‌پوشی کنید.

الف-۱) فرض کنید F_0 آن‌قدر هست که ریسمان کاملاً به استوانه می‌چسبد؟ در این حالت کششِ ریسمان در نقطه‌ی B که شعاعِ واصلِ آن با خطِ قائم زاویه‌ی θ می‌سازد و با $T(\theta)$ نمایش می‌دهید را بر حسبِ داده‌های مسئله به دست آورید. (۳ نمره)

الف-۲) کمینه مقدارِ F_0 چه‌قدر باشد تا ریسمان کاملاً به استوانه بچسبد؟ در این حالت که F_0 کمینه است، کششِ ریسمانِ قائم در نقطه‌ی A که ریسمان از استوانه جداشده، چه‌قدر است؟ این نیرو را T_0 بنامید. (۳ نمره)



(a)

ب) حالا فرض کنید ریسمان را کمی شُل‌تر از آن‌چه در بند قبل به دست آورید، می‌کنیم، به طوری که کششِ ریسمانِ قائم در نقطه‌ی A که ریسمان از استوانه جدا می‌شود به جایِ T_0، T_1 شود به طوری‌که $T_1 = T_0(1-\epsilon)$ شود.

ب-۱) در این حالت ریسمان مطابقِ شکلِ (b) در دو نقطه‌ی دیگرِ C و C' هم از استوانه جدا می‌شود. زاویه‌ای که شعاعِ واصلِ هر کدام از این نقاط با محورِ قائم می‌سازد را θ_0 بنامید. معادله‌ای بینِ θ_0 و ϵ به دست آورید. (۵ نمره)

راه‌نمایی- ریسمانی که مطابقِ شکلِ (c) به طورِ متقارن از دو طرف تحتِ زاویه‌ی θ_0 کشیده شده باشد و تحتِ گرانش آویزان باشد، طولش $2S_1$ است به طوری‌که بینِ θ_0

و S_1 رابطه‌یِ زیر برقرار است

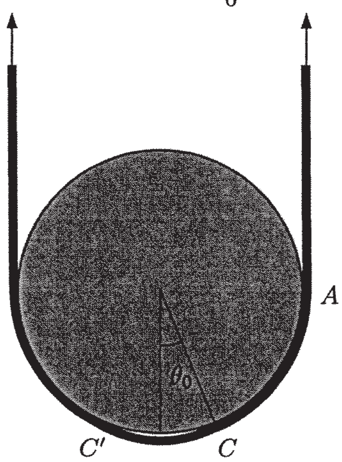
$$\tan\theta_0 = \sinh\left(\frac{R\sin\theta_0\tan\theta_0}{S_1}\right).$$

R در شکلِ (c) نشان داده شده است. علاوه بر این $\sinh(u) := \frac{e^u - e^{-u}}{2}$.

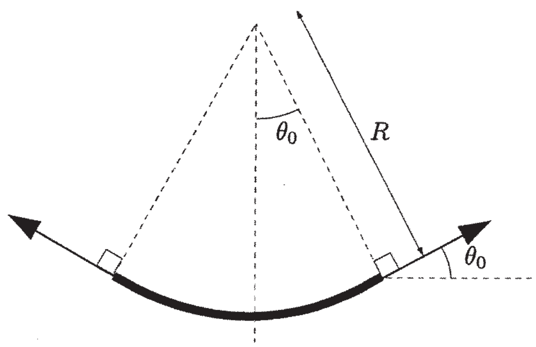
ب-۲) حالا فرض کنید $\epsilon \ll 1$. θ_0، را تا اولین مرتبه‌یِ غیرِصفر به دست آورید.
(۴ نمره)

راهنمایی- ممکن است بسط‌هایِ زیربه دردِ شما بخورد.

$$\tan\epsilon \approx \epsilon + \frac{1}{3}\epsilon^3 + \cdots,$$
$$\sinh\epsilon \approx \epsilon + \frac{1}{6}\epsilon^3 + \cdots,$$
$$\sinh^{-1}\epsilon \approx \epsilon - \frac{1}{6}\epsilon^3 + \cdots,$$



(b)



(c)

مسئله‌ی ۱۰)

مربعی توپر و هم‌گن به ضلعِ $2d$ در نظر بگیرید. در تمامِ بخش‌هایِ مسئله فرض کنید همه‌یِ این مربع در یک صفحه‌یِ عمودی $(x-y)$ است. شکل را ببینید. خمی که مربع رویِ آن حرکت می‌کند، یک شکلِ دوره‌ای دارد که برایِ $-x_0 \le x \le x_0$،

$$y(x) = a - b\cosh(\frac{x}{b}),$$

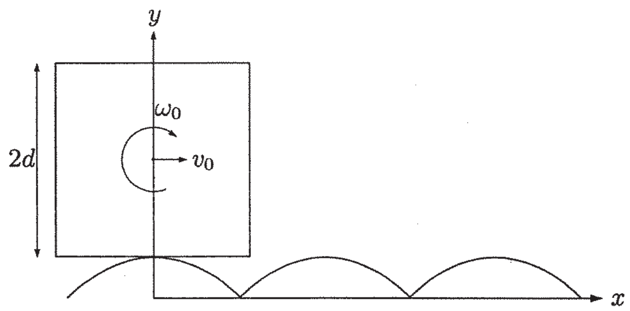
که $a = b\cosh(\frac{x_0}{b})$. سرعتِ اولیه‌یِ مرکزِ مربع

$$\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i},$$

و سرعتِ زاویه‌ایِ مربع عمود بر صفحه‌یِ مربع و

$$\omega_0 = \frac{v_0}{d}$$

است. فرض کنید ضریبِ اصطکاکِ بینِ جسم و سطحِ زیرین آن‌قدر هست که سرعتِ نقطه‌یِ تماسِ هم‌واره صفر می‌ماند.



راه‌نمایی- روابطِ زیر ممکن است به دردِ شما بخورد:

$$\sinh(u) := \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$
$$\cosh(u) := \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$
$$\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1,$$
$$\frac{d}{du}(\sinh(u)) = \cosh(u).$$

الف) طول‌هایِ a و b را آن چنان تعیین کنید که مرکزِ مربع هم‌واره رویِ یک خطِ راست حرکت کند. در بخش‌هایِ بعدیِ مسئله a و b را همین مقدارهایی که به دست آوردید بگیرید. (۲ نمره)

ب) بینِ کمیت‌هایِ انرژیِ مکانیکی، تکانه، تکانه‌زاویه‌ای نسبت به مرکزِ جرمِ مربع و تکانه‌زاویه‌ای نسبت به نقطه‌یِ تماسِ مربع کدام‌ها پایسته‌اند؟ چرا؟ توضیح دهید. سرعتِ مرکزِ مربع، v، و شتابِ مرکزِ مربع، a، را به عنوانِ تابعی از سرعتِ اولیه‌یِ مرکزِ آن v_0، d و مختصاتِ مرکزِ مربع، به دست آورید. (۶ نمره)

ج) نیروهایِ عمودیِ سطح و اصطکاکِ وارد بر جسم را بر حسبِ سرعتِ اولیه‌یِ مرکزِ آن v_0، d و مختصاتِ مرکزِ مربع، به دست آورید. (۲ نمره)