


# فصل چهارم ریاضی (۲)

## ■ مثلثات

- درس اول: واحدهای اندازه گیری زاویه  
درجه رادیان
- درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی  
 $\sin 30^\circ$   $\sin(180^\circ + 30^\circ)$
- درس سوم: توابع مثلثاتی  
 $y = \sin x$   $y = 2 \sin x$

کانال تلگرامی: @barpafile 

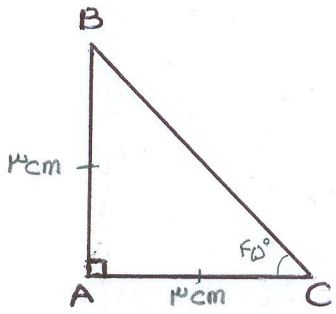
کانال نمونه سوال: @barpa

سایت فیلم آموزشی ریاضی 

"صفحه فیلم های من"

hesaban.jimdo.com

مدرس رضائی



$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

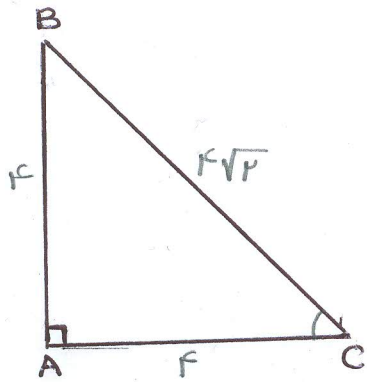
$$BC^2 = r^2 + r^2$$

$$BC^2 = 1\lambda \rightarrow BC = \sqrt{1\lambda} = r\sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{r}{r} = 1 \quad \cot 45^\circ = \frac{AC}{AB} = 1$$

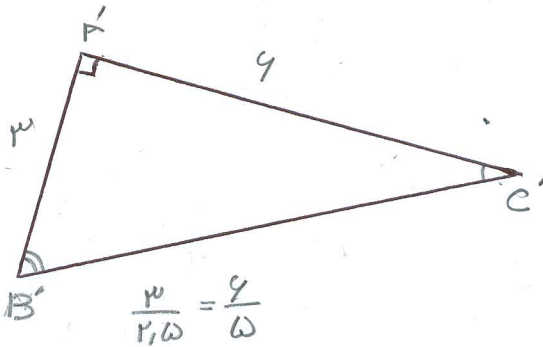
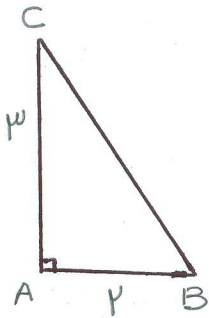


$$\sin 45^\circ = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

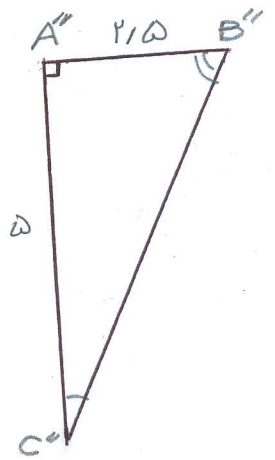
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

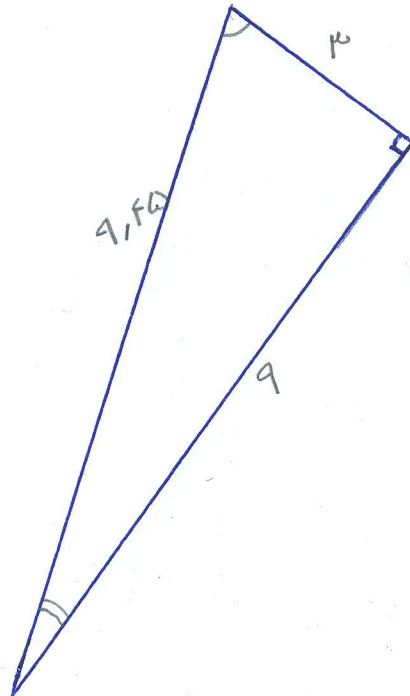
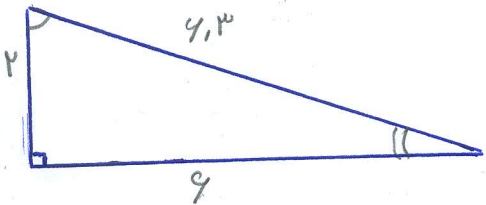
$$\cot 45^\circ = 1$$

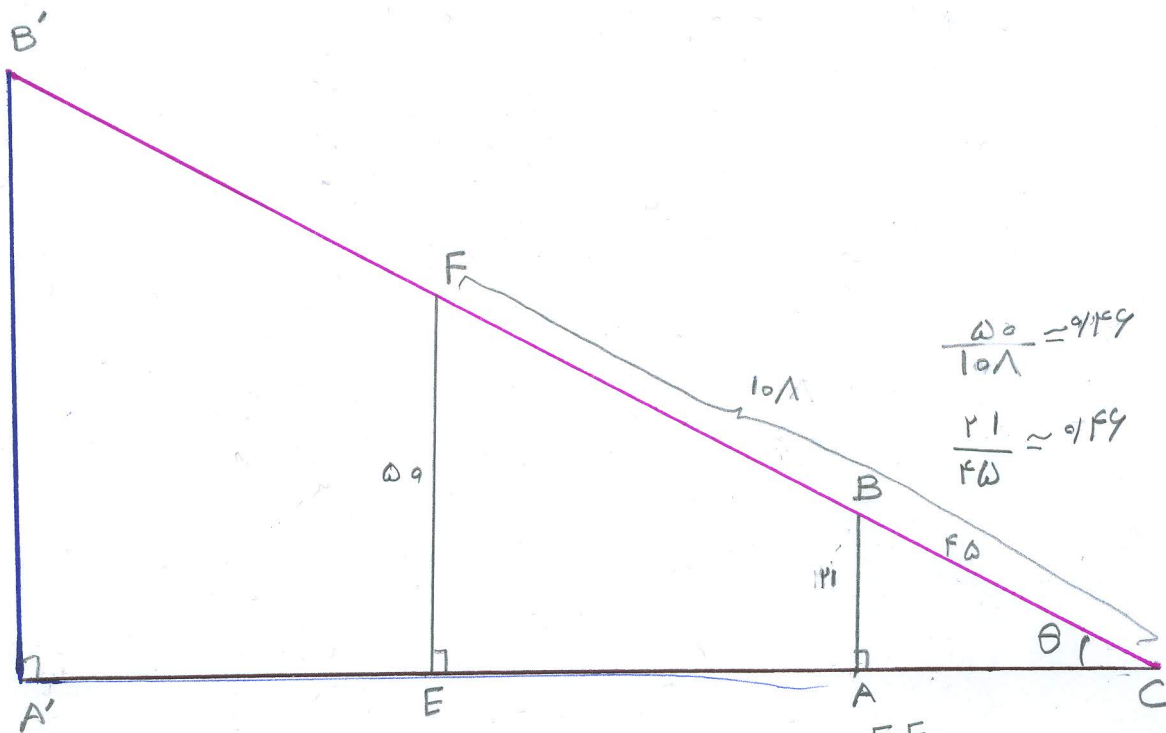


$$\frac{r}{r} = \frac{r}{r}$$



$$\frac{r}{r} = \frac{r}{r}$$





$$\frac{5.9}{10.8} = 0.546$$

$$\frac{3.1}{4.5} \approx 0.689$$

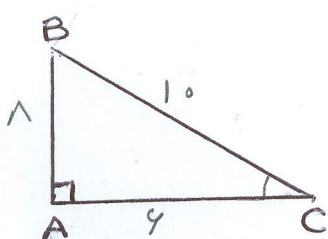
$$\sin \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FC}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{اندازه وتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{EC}{FC}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه } \theta}{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه } \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{اندازه ضلع مجاور زاویه } \theta}{\text{اندازه ضلع مقابل زاویه } \theta}$$

① در مثلث قائم الزاویه ABC ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) اگر  $AC = 6 \text{ cm}$  و  $BC = 10 \text{ cm}$  باشند، نسبت‌های مثلثاتی زاویه C را بیابید.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

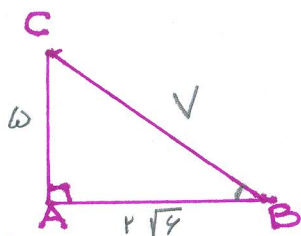
$$AB^2 + 36 = 100$$

$$AB = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sin \hat{C} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0.8 \quad \cos \hat{C} = 0.6$$

$$\tan \hat{C} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad \cot \hat{C} = \frac{3}{4}$$

② در مثلث قائم الزاویه ABC ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) و  $b = 5 \text{ cm}$  و  $\cos B = \frac{1\sqrt{6}}{V}$  می باشد.



طول وتر مثلث را بیابید.

$$\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{1\sqrt{6}}{V} \rightarrow BC = \frac{V \cdot AB}{1\sqrt{6}}$$

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

$$25 + AB^2 = \frac{49 \cdot AB^2}{24} \rightarrow \frac{24 \times 25 + 24 \cdot AB^2}{24} = \frac{49 \cdot AB^2}{24}$$

$$2500 = 25 \cdot AB^2 \rightarrow AB^2 = 100 \rightarrow AB = 10$$

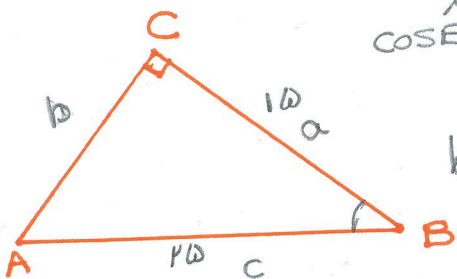
$$(1\sqrt{6})^2 + 5^2 = 14 + 25 = 39 \rightarrow BC = \sqrt{39} = V$$

③ در مثلث قائم الزاویه ABC ( $\hat{C} = 90^\circ$ ) اگر  $c = 15 \text{ cm}$  و  $\cos B = \frac{3}{5}$  باشد،

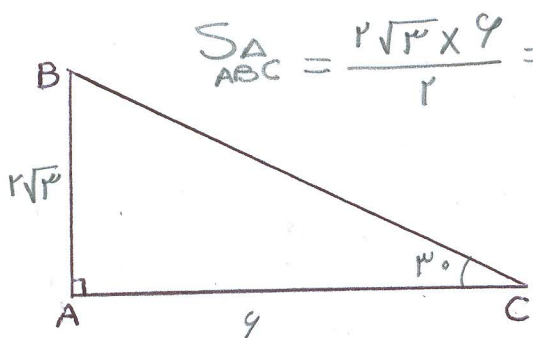
انرژی ضلع a را پیدا کنید.

$$\cos \hat{B} = \frac{BC}{AB} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BC}{15}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \rightarrow b = \sqrt{15^2 - 15^2} = \sqrt{225 - 225} = \sqrt{0} = 0$$



④ در مثلث قائم الزاویه ABC ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) اگر  $\hat{C} = 30^\circ$  و  $AC = 9 \text{ cm}$  باشد، مساحت مثلث را بیابید.



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1\sqrt{3} \times 9}{2} = 4\sqrt{3}$$

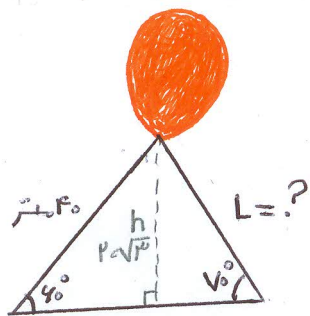
$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{BC} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{BC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{AB}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow AB = 3\sqrt{3}$$

⑤ طبق شکل مقابل، بالی به هوا فرستاده شده و توسط دو طناب به زمین متصل شده است. با توجه به اطلاعات روی شکل طول طناب BC یعنی L را بیابید. ( $\sin 70^\circ = 0.94$ )



$$\sin 70^\circ = \frac{h}{L}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{L} \rightarrow h = 2\sqrt{3}$$

$$\sin 70^\circ = \frac{h}{L} \rightarrow 0.94 = \frac{2\sqrt{3}}{L}$$

$$L = \frac{2\sqrt{3}}{0.94} = 36.8 \text{ m}$$

⑥ در شکل مقابل، درختی به ارتفاع ۳m از نقطه A با زاویه  $25^\circ$  و از نقطه B با زاویه  $55^\circ$  دیده می شود. فاصله دو نقطه A و B از یکدیگر چه قدر است؟

$(\tan 25^\circ = 0.47, \tan 55^\circ = 1.42)$

$BH + HA = AB$

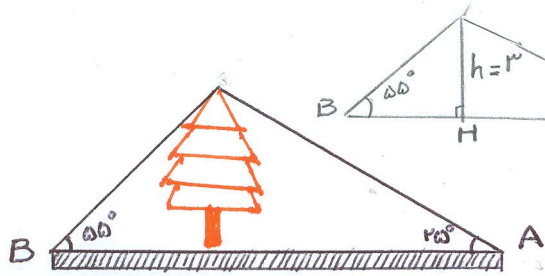
$\tan 55^\circ = \frac{3}{BH} \rightarrow 1.42 = \frac{3}{BH}$

$BH = \frac{3}{1.42} = 2.11$

$\tan 25^\circ = \frac{3}{AH} \rightarrow 0.47 = \frac{3}{AH}$

$AH = \frac{3}{0.47} = 6.38$

$\rightarrow AB = 2.11 + 6.38 = 8.49 \approx 8.5$



⑦ اگر  $AB = 38 \text{ cm}$ ،  $\hat{A} = 2^\circ$  و  $\hat{B} = 13^\circ$  باشند، ارتفاع رأس C، مساحت مثلث ABC را بیابید.

$(\cot 2^\circ = 2.9, \cot 13^\circ = 4.4)$

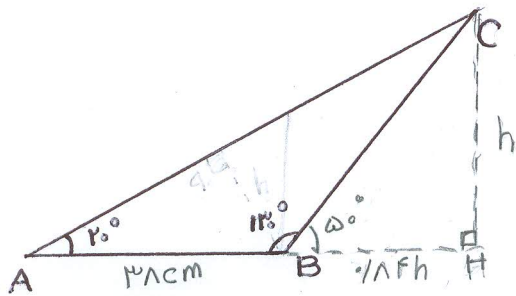
$\cot 13^\circ = \frac{BH}{CH}$

$4.4 = \frac{BH}{h} \rightarrow BH = 4.4h$

$\cot 2^\circ = \frac{AH}{CH} \rightarrow 2.9 = \frac{38 + 4.4h}{h}$

$\rightarrow 2.9h = 38 + 4.4h \rightarrow (2.9 - 4.4)h = 38$   
 $h = \frac{38}{-1.5} \approx 25$

$S_{\Delta ABC} = \frac{2 \times 38}{2} = 38 \text{ cm}^2$



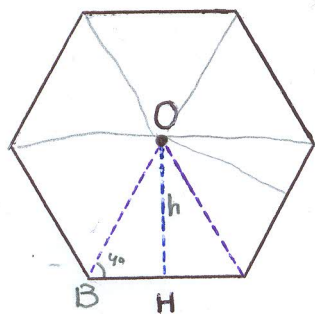
⑧ در شکل مقابل اگر  $OH = 3\sqrt{3}$  باشد، مساحت بخش ضلعی منتظم را بیابید.

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\sqrt{3} = \frac{OH}{BH} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{BH}$

$BH = 3$

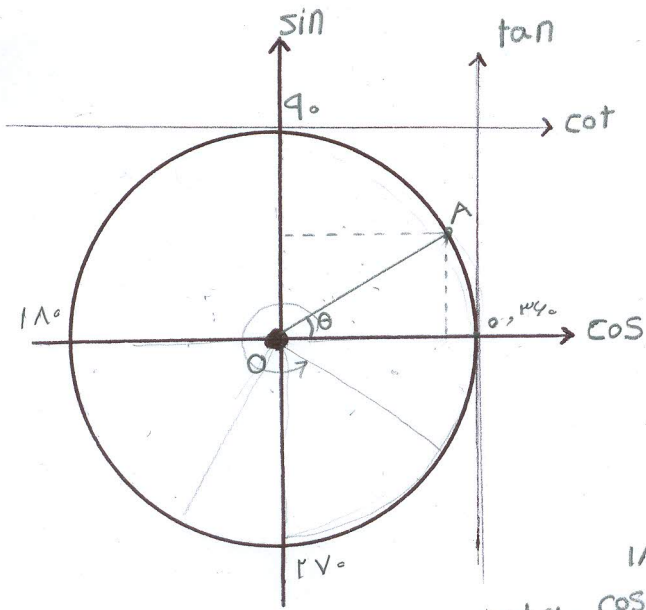
$12 \times \left( \frac{3\sqrt{3} \times 3}{2} \right) = 54\sqrt{3}$



⑨ جدول زیر را کامل کنید.

$\cot \theta$	$\tan \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$\theta$
تعریف نشده	0	1	0	$0^\circ$
$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$30^\circ$
1	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$45^\circ$
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$60^\circ$
0	تعریف نشده	0	1	$90^\circ$

دایره مثلثاتی



۱۰) در هر یک از حالات زیر، حدود زاویه  $\alpha$  را مشخص کنید.

الف)  $\cos \alpha > 0$  ربع اول و چهارم  
 $[0, 90^\circ]$   $[-90^\circ, 0]$   
 $[180^\circ, 270^\circ]$

ب)  $\sin \alpha < 0$  ربع دوم و سوم  
 $180^\circ < \alpha < 360^\circ$   $[180^\circ, 360^\circ]$

پ)  $\cos \alpha < 0, \tan \alpha > 0$  ربع دوم  
 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$   $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \sin \alpha < 0$

ت)  $\sin \alpha > 0, \cot \alpha < 0$  ربع اول  
 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$   $\cos \alpha < 0$   
 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} < 0$

ث)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$

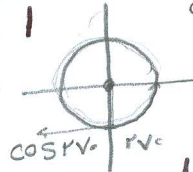
ج)  $\cos \alpha \cdot \tan \alpha < 0$   
 $\cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < 0 \rightarrow \sin \alpha < 0$   
 $180^\circ < \alpha < 360^\circ$

۱۱) حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف)  $\sin 90^\circ - 2 \cos 0^\circ + \tan 180^\circ = 1 - 2 + 1 = 0$

ب)  $3 \cos^2 180^\circ - \cos^2 45^\circ - \cot 90^\circ = 3(-1)^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 0 = 3 - \frac{2}{2} = 3 - 1 = 2$

پ)  $\frac{\sin 0^\circ + 3 \cos 90^\circ - \cot 270^\circ}{\tan 180^\circ - \sin 180^\circ + 1} = \frac{0 + 3 \times 0 - 0}{0 - 0 + 1} = 0$



۱۲) در هر مورد حدود عبارت داده شده را بیابید.

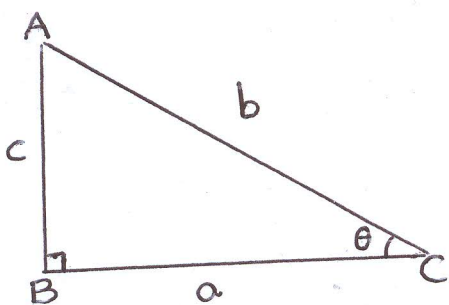
الف)  $A = \sin x + 1$   
 $-1 \leq \sin x \leq 1$   
 $0 \leq \sin x + 1 \leq 2$

ب)  $B = \frac{\sin^2 x}{r} - r$   
 $-1 \leq \sin x \leq 1$   
 $0 \leq \sin^2 x \leq 1$   
 $0 \leq \frac{\sin^2 x}{r} \leq \frac{1}{r}$   
 $-r \leq \frac{\sin^2 x}{r} - r \leq -\frac{r-1}{r}$

ب)  $D = -5 \sin^2 x + 2$   
 $-1 \leq \sin x \leq 1$   
 $-1 \leq \sin^2 x \leq 1$   
 $-5 \leq -5 \sin^2 x \leq -5$   
 $-3 \leq -5 \sin^2 x + 2 \leq 7$

ت)  $F = 2 \cos^2 x + 4$   
 $-1 \leq \cos x \leq 1$   
 $0 \leq \cos^2 x \leq 1$   
 $0 \leq 2 \cos^2 x \leq 2$   
 $4 \leq 2 \cos^2 x + 4 \leq 6$

۱۳) با استفاده از نسبت های مثلثاتی زاویه  $\theta$ ، روابط زیر را ثابت کنید.



$$b^r = a^r + c^r$$

$$\sin \theta = \frac{c}{b}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{b}$$

الف)  $\sin^r \theta + \cos^r \theta = 1$   $\left(\frac{c}{b}\right)^r + \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{c^r}{b^r} + \frac{a^r}{b^r} = \frac{c^r + a^r}{b^r} = \frac{b^r}{b^r} = 1$

ب)  $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$   $\tan \theta = \frac{c}{a}$   $\cot \theta = \frac{a}{c}$   $\tan \theta \cdot \cot \theta = \frac{c}{a} \times \frac{a}{c} = 1$

پ)  $1 + \tan^r \theta = \frac{1}{\cos^r \theta}$   $1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^r = 1 + \frac{\sin^r \theta}{\cos^r \theta} = \frac{\cos^r \theta + \sin^r \theta}{\cos^r \theta} = \frac{1}{\cos^r \theta}$

ت)  $1 + \cot^r \theta = \frac{1}{\sin^r \theta}$   $1 + \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^r = 1 + \frac{\cos^r \theta}{\sin^r \theta} = \frac{\sin^r \theta + \cos^r \theta}{\sin^r \theta} = \frac{1}{\sin^r \theta}$

۱۴) اگر  $\alpha$  زاویه حاده و  $\sin \alpha = \frac{r}{p}$ ، حاصل عبارت زیر را بیابید.

الف)  $(1 - \sin^r \alpha)(1 + \cos^r \alpha)$   
 $\cos^r \alpha$   $p - \sin^r \alpha$

$$\sin^r \alpha = \frac{r}{p}$$

$$\left(1 - \frac{r}{p}\right) \left(p - \frac{r}{p}\right)$$

$$\frac{\omega}{q} \times \frac{1}{q} = \frac{\omega}{\Delta}$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{r}{p}}{\frac{\sqrt{\omega}}{p}} = \frac{r}{\sqrt{\omega}}$$

ب)  $p \cos \alpha - \tan \alpha$   $\sin \alpha = \frac{r}{p}$

$$p \times \frac{\sqrt{\omega}}{p} - \frac{r}{\sqrt{\omega}} = \frac{r\sqrt{\omega}}{p} - \frac{r}{\sqrt{\omega}}$$

$$\frac{r\sqrt{\omega}}{p} - \frac{r\sqrt{\omega}}{\omega} = r\sqrt{\omega} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{r}{\omega} \left(\frac{\omega}{p} - 1\right)$$

$$\sin^r \alpha + \cos^r \alpha = 1$$

$$\frac{r}{p} + \cos^r \alpha = 1$$

$$\cos^r \alpha = 1 - \frac{r}{p} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{\omega}}{p}$$

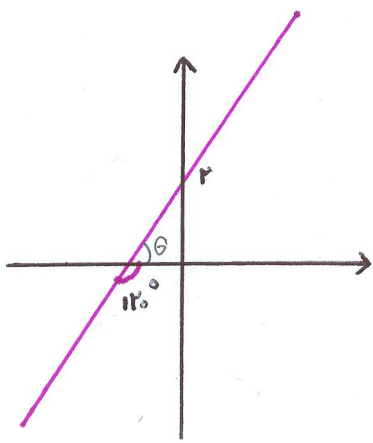
۱۵) اگر  $\cot x = -\frac{1}{p}$  باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$A = \frac{\sin x - p \cos x}{\omega \sin x + \cos x} = \frac{\frac{\sin x}{\omega} - p \cot x}{\omega + \cot x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{p}$$

$$\frac{1 - px - \frac{1}{p}}{\omega + \left(-\frac{1}{p}\right)} = \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

16) طبق شکل مقابل، معادله خط را بیابید.



$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

$a = \sqrt{3}$  شیب خط  
عرض از مبدأ 2

$$y = ax + b$$

$$y = \sqrt{3}x + 2$$

17) در هر مورد زاویه ای که خط با جهت مثبت محور xها می سازد، تعیین کنید.

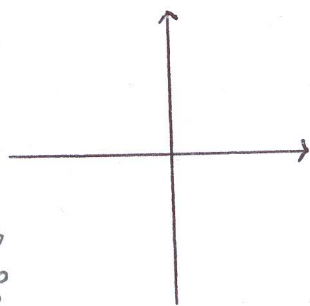
الف)  $2y - 2x = 5$

$$y = \frac{2x + 5}{2}$$

$$y = x + \frac{5}{2}$$

$$1 = \tan \theta$$

$$\theta = 45^\circ$$

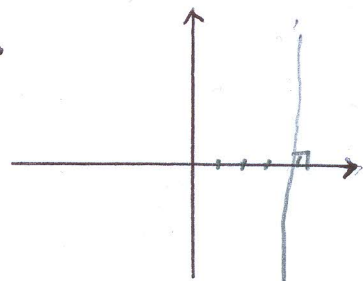


ب)  $x - 4 = 0$

$$x = 4$$

تعریف نشده

$$\theta = 90^\circ$$



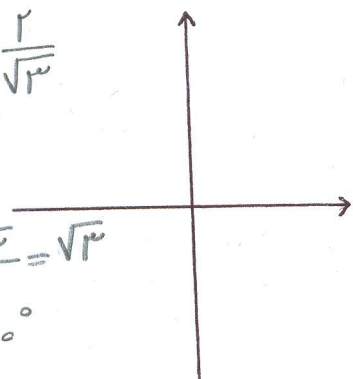
پ)  $\sqrt{3}y = 3x - 2$

$$y = \frac{3}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\theta = 60^\circ$$



ت)  $6y - \sqrt{12}x = 5$

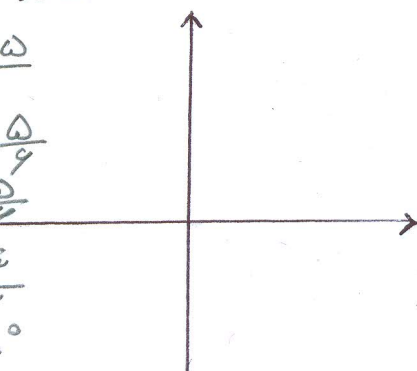
$$y = \frac{\sqrt{12}x + 5}{6}$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}x + 5}{6}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{6}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = 30^\circ$$



18) خط  $dx + (3m-1)y = 7$  با جهت مثبت محور xها زاویه  $45^\circ$  می سازد  $m$  را بیابید.

$$y = \frac{-mx + 7}{3m-1}$$

$$1 = \frac{-m}{3m-1} = \tan 45^\circ$$

$$3m-1 = -m \rightarrow 4m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{4}$$

19) خط گذرنده از دو نقطه  $B(2m-1, -2)$  و  $A(3, m-1)$  با جهت مثبت محور xها زاویه  $45^\circ$  می سازد، مقدار  $m$  را بیابید.

$$a = \frac{m-1+2}{3-2m+1} = \sqrt{3}$$

$$m+1 = (4-2m)\sqrt{3}$$

$$m+1 = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}m \rightarrow m(1+2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}-1$$

$$m = \frac{4\sqrt{3}-1}{1+2\sqrt{3}}$$



۲۰) در هر مورد به کمک روابط مثلثاتی، با توجه به نسبت مثلثاتی داده شده، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه داده شده را بیابید.

الف)  $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{10}}{10}$  ( $\alpha$  نامیه دوم)

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{10}{100}} = \sqrt{\frac{90}{100}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{-\sqrt{10}}{10}} = -3 \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{3}$$

ب)  $\tan \alpha = \frac{1}{4}$  ( $\alpha$  نامیه سوم)

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 4$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + 16 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{17} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} \Rightarrow \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

۲۱) درستی رابطه‌های زیر را تمهیق کنید.

الف)  $\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b - \sin^2 a$

$$1 - \sin^2 a - (1 - \sin^2 b) = 1 - \sin^2 a - 1 + \sin^2 b = \sin^2 b - \sin^2 a$$

ب)  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$1 + 2 \sin x \cos x$$

پ)  $\sin \beta \tan \beta = \frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta$

$$\sin \beta \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta} = \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos \beta}$$

$$= \frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta \quad \checkmark$$

ت)  $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}$

$$\frac{\cos^2 x + (1 + \sin x)^2}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x + 1 + 2 \sin x + \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{2 + 2 \sin x}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$= \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{2}{\cos x}$$

$$\text{ب) } \sin^r x + \cos^r x = 1 - r \sin^{r-1} x \cos^r x$$

$$(\sin^r x + \cos^r x)^r = \sin^r x + r \sin^{r-1} x \cos^r x + \cos^r x$$

$$1 - r \sin^{r-1} x \cos^r x = \sin^r x + \cos^r x \quad \checkmark$$

$$\text{ب) } \sin^r x + \cos^r x = 1 - r \sin^{r-1} x \cos^r x$$

$$(\sin^r x + \cos^r x)^r = \sin^r x + r \sin^{r-1} x \cos^r x + r^2 \sin^{r-2} x \cos^{2r} x + \cos^r x$$

$$1 - r \sin^{r-1} x \cos^r x - r^2 \sin^{r-2} x \cos^{2r} x = \sin^r x + \cos^r x$$

$$1 - r \sin^{r-1} x \cos^r x (\sin^r x + \cos^r x) = \sin^r x + \cos^r x$$

$$1 - r \sin^{r-1} x \cos^r x = \sin^r x + \cos^r x$$

$$\text{ج) } 1 - \cot^r \alpha = \frac{r}{\sin^r \alpha} - \frac{1}{\sin^r \alpha}$$

$$(1 - \cot^r \alpha)(1 + \cot^r \alpha) = \frac{1}{\sin^r \alpha} \left( \frac{\sin^r \alpha - \cos^r \alpha}{\sin^r \alpha} \right) \left( \frac{1}{\sin^r \alpha} \right) = \frac{(r \sin^r \alpha - 1)}{\sin^r \alpha} \left( \frac{1}{\sin^r \alpha} \right)$$

$$a^r = b + r : \text{ ثابت لشيء } b = \tan^r x + \cot^r x, a = \tan x + \cot x \text{ بالشرط (٢٢)}$$

$$a^r = \tan^r x + r \tan^{r-1} x \cot x + \cot^r x$$

$$a^r = \tan^r x + r + \cot^r x$$

$$a^r = b + r$$

$$: \text{ ثابت لشيء } a \sin^r x - b \cos^r x = a - b \quad \text{الشرط (٢٢)}$$

$$a \cos^r x + b \sin^r x = \frac{ab}{a+b}$$

$$a \left( \frac{b}{a+b} \right)^r + b \left( \frac{a}{a+b} \right)^r$$

$$= \frac{ab^r}{(a+b)^r} + \frac{ba^r}{(a+b)^r} = \frac{ab^r + ba^r}{(a+b)^r}$$

$$= \frac{ab(b+a)}{(a+b)^r} = \frac{ab}{(a+b)}$$

$$a(1 - \cos^r x) - b \cos^r x = a - b$$

$$a - a \cos^r x - b \cos^r x = a - b$$

$$a \cos^r x + b \cos^r x = b$$

$$\cos^r x (a+b) = b$$

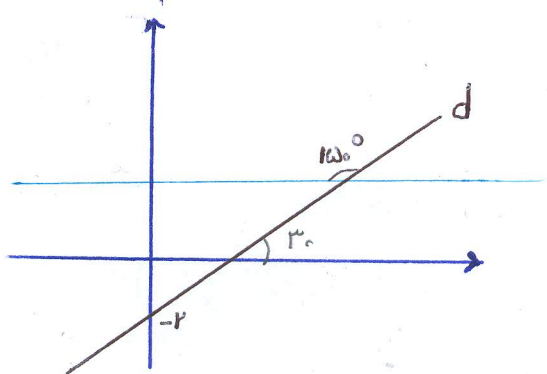
$$\cos^r x = \frac{b}{a+b}$$

$$\sin^r x = 1 - \cos^r x$$

$$\sin^r x = 1 - \frac{b}{a+b}$$

$$= \frac{a+b-b}{a+b} = \frac{a}{a+b}$$

(۲۴) در شکل مقابل، معادله خط  $d$  را بیابید.



$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - r$$

$$b = -r$$

(۲۵) اگر  $\frac{\tan \theta + r}{1 + r \tan \theta} = \frac{r}{\omega}$  و زاویه  $\theta$ ، زاویه ای در نامیه سوم باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$1 - \frac{1}{4\omega} = \frac{4r}{4\omega}$$

$$A = \sin \theta - r \cos \theta$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4\omega}} - r \times \left(-\frac{1}{\sqrt{4\omega}}\right)$$

$$= -\frac{1+r}{\sqrt{4\omega}} = -\frac{r}{\sqrt{4\omega}}$$

$$(\sin 50^\circ = 0.766, \cos 50^\circ = 0.643)$$

$$\frac{x+r}{1+rx} = \frac{r}{\omega}$$

$$\omega x + \omega = r + r^2 x$$

$$\omega = x$$

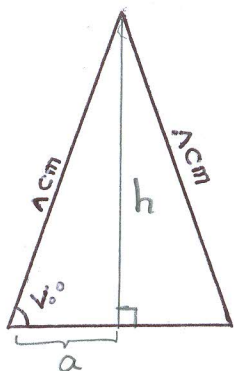
$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{4\omega}}$$

$$\tan \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$1 + r^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

(۲۶) در شکل مقابل، مساحت مثلث را بیابید.



$$\sin 40^\circ = \frac{h}{1}$$

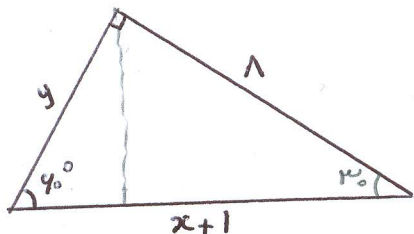
$$\cos 40^\circ = \frac{a}{1}$$

$$0.643 = \frac{h}{1} \rightarrow h = 1 \times 0.643$$

$$a = 1 \times 0.766$$

$$S = \frac{a \times h}{2} = \frac{1 \times 0.643 \times 0.766}{2}$$

(۲۷) در شکل مقابل مقادیر  $x$  و  $y$  را بیابید.



$$\sin 30^\circ = \frac{1}{r} = \frac{y}{x+1} \rightarrow ry = x+1$$

$$x = ry - 1$$

$$1^r + y^r = (x+1)^r$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{ry}{\sqrt{3}} - 1$$

$$1^r + y^r = (ry - 1 + 1)^r$$

$$1^r + y^r = ry^r \rightarrow 4r = 3y^r$$

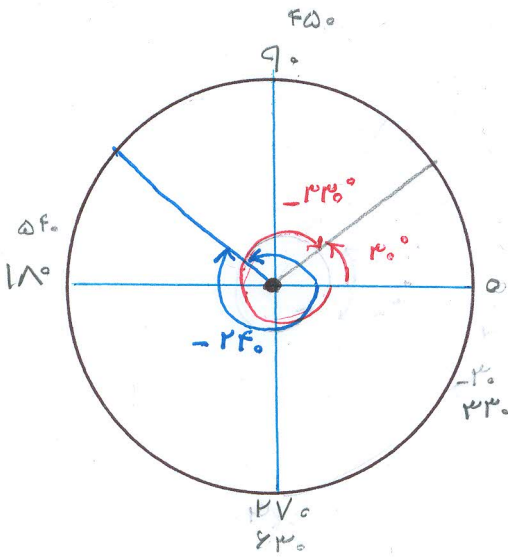
$$y^r = \frac{4r}{3} \rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

# واحد های اندازه گیری زاویه

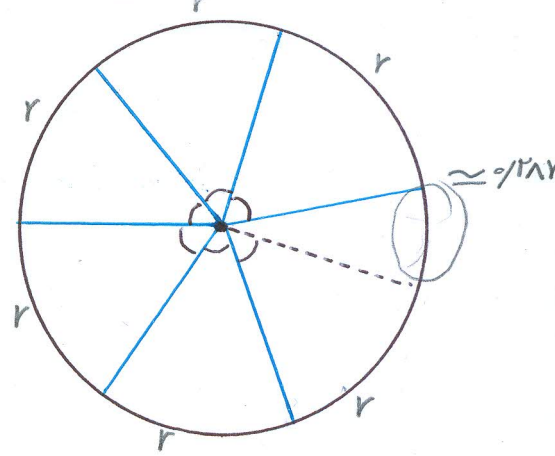
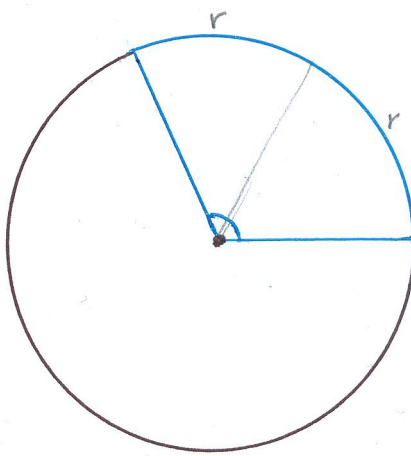
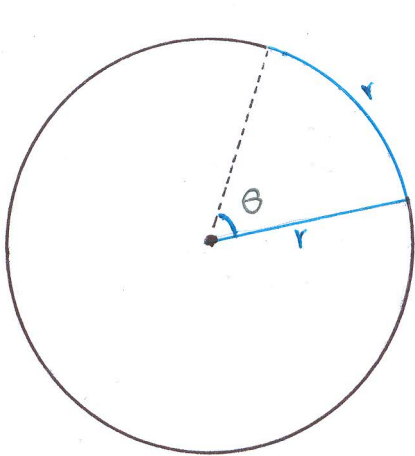
اگر محیط دایره را به ۳۶۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت آن یک درجه است.

رادیان

یک رادیان، برابر است با اندازه زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبه روی آن، با شعاع آن دایره مساوی است.



$$\frac{2\pi r}{360} = 2 \times 3.14 = 6.28$$

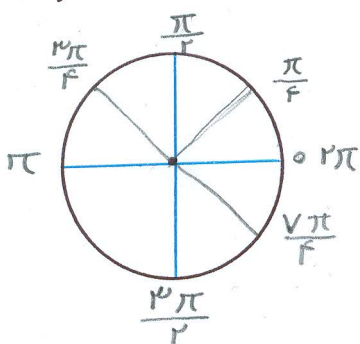


می دانیم محیط دایره برابر است با  $2\pi r$  بنابراین تناسب زیر را برای اندازه یک زاویه بر حسب رادیان با طول کمان روبه روی زاویه داریم:

$$\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} = \frac{L}{r} \quad \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

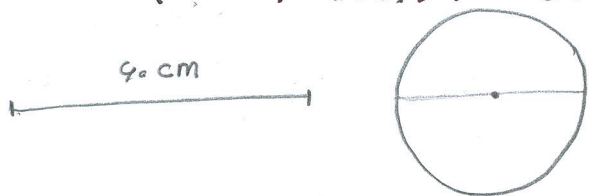
با این فرمول می توانیم بگوییم، کل محیط دایره که بر حسب درجه ۳۶۰ است،  $2\pi$  رادیان است چون:

$$\text{اندازه زاویه بر حسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}} \Rightarrow \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ رادیان}$$



به همین ترتیب می توان  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$  محیط دایره که معادل زاویه های  $90^\circ, 180^\circ, \dots$  را بر حسب رادیان بدست آورد.

① یک قطعه نخ به اندازه ۶ سانتی متر را برش داده و دو سر این نخ را بهم وصل می کنیم تا یک دایره حاصل شود. اندازه قطر و شعاع این دایره را بیابید. ( $\pi = 3$ )



$$2\pi r = 60$$

$$2 \times 3 \times r = 60$$

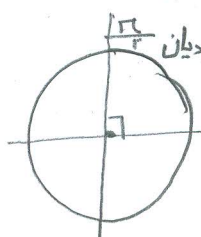
$$r = \frac{60}{6} = 10 \text{ cm}$$

$$\text{قطر } d = 20 \text{ cm}$$

② شعاع دایره مقابل برابر ۴ سانتی متر است.

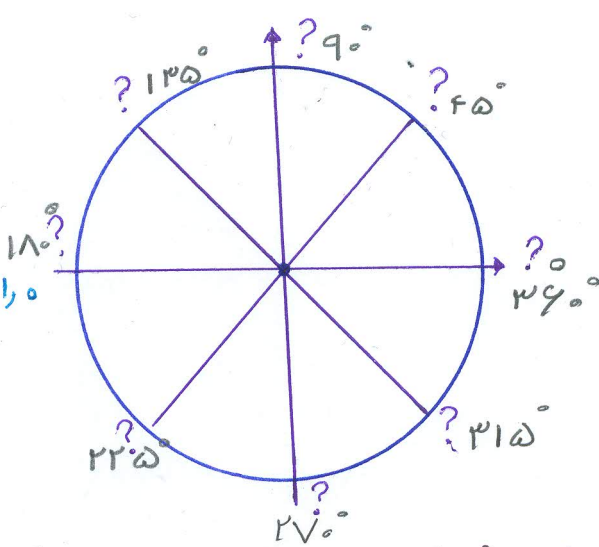
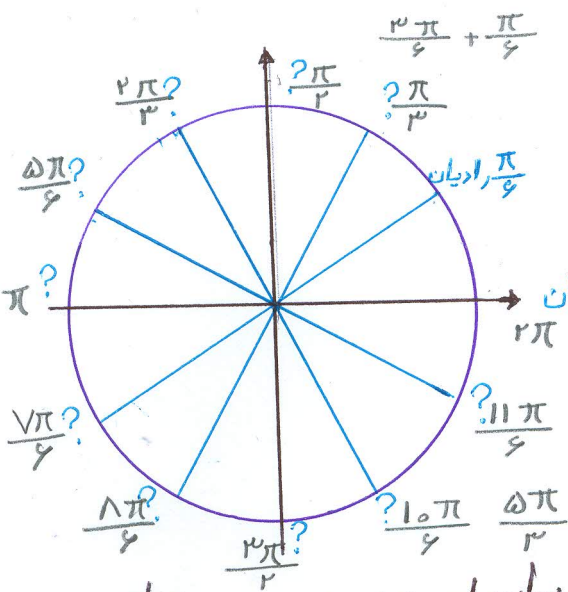
$$2 \times \pi \times 4 = 8\pi$$

ب) کمان  $\frac{1}{4}$  محیط دایره را مشخص کنید. طول این کمان چقدر است؟ این کمان مقابل چه زاویه ای بر حسب درجه و رادیان است؟



$$\frac{1}{4} \times 8\pi = 2\pi \text{ cm}$$

③ در شکل زیر، در هر یک از جاهای خالی زاویه مناسب بر حسب رادیان بنویسید.



④ می دانیم محیط دایره  $360^\circ$  و بر حسب رادیان  $2\pi$  رادیان است. پس می توانیم تناسب زیر را برای بدست آوردن زاویه بر حسب رادیان با داشتن زاویه بر حسب درجه داشته باشیم. (یا بالعکس، زاویه بر حسب درجه را با داشتن زاویه بر حسب رادیان بدست آوریم).

$$2\pi \text{ رادیان}$$

$$360^\circ \text{ درجه}$$

$$\frac{2\pi}{R} = \frac{360}{D}$$

$$\text{رادیان} \quad \text{درجه}$$

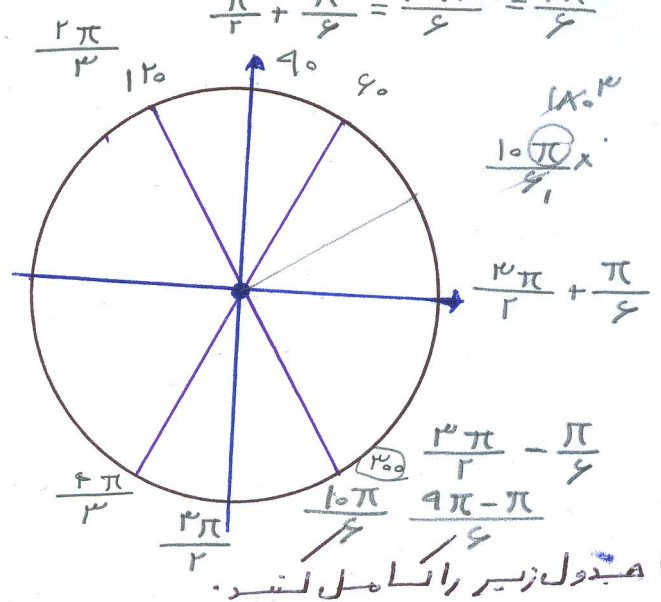
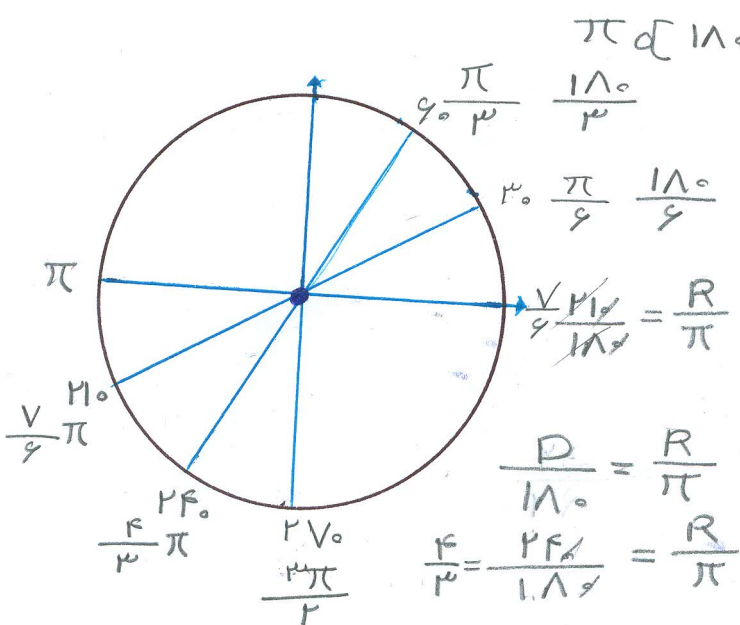
$$R \text{ (بر حسب رادیان)}$$

$$D \text{ (بر حسب درجه)}$$

$$\frac{\pi}{R} = \frac{180}{D} \rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{D}{180}$$

در شکل های زیر، زاویه ها را بر حسب درجه و رادیان بنویسید.

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$



$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$R = \frac{1}{180} \times \pi$$

D (درجه)	5°	30°	60°	120°	127.5°	135°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

$$\frac{135}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{5}{4} \times 180$$

کدام عبارت زیر درست و کدام نادرست است؟



الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقین را رادیان باشد، آنجا اندازه

قاعده این مثلث، کوچکتر از اندازه هر یک از ساق های آن است.

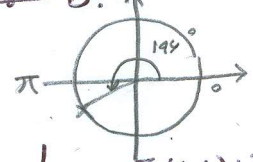
$$\frac{1}{\pi} = \frac{D}{180} \rightarrow D = \frac{180}{\pi} \approx 57$$

ب) در دایره ای به شعاع اسانتی متر، طول کمان روبه روی زاویه  $\pi$  رادیان تقریباً برابر



$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

3.14 سانتی متر است.   
 پ) اندازه کمان دایره ای به شعاع  $\pi$  که مقابل کمانی به طول  $\pi$  است، تقریباً



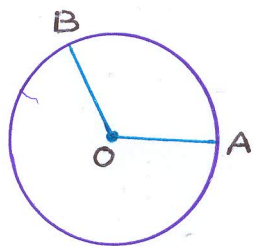
$$\frac{4 \times 180}{5} = 144$$

ت) انتهای کمان زاویه  $\frac{6\pi}{5}$  رادیان در ربع دوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

ث) زاویه های  $\frac{2\pi}{3}$  رادیان،  $\frac{\pi}{9}$  رادیان و  $\frac{7\pi}{36}$  رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل

$$\frac{\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} + \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi + 4\pi + 4\pi + 28\pi}{36} = \frac{43\pi}{9} < \pi$$

۸) بانفسی به طول ۱۰۰ سانتی متر، یک دایره به صورت زیر می سازیم، اگر طول کمان  $\widehat{AB}$  برابر ۴۰ سانتی متر باشد، اندازه زاویه مرکزی  $\widehat{AOB}$  چند درجه و چند رادیان است؟



$$100 \text{ cm} = 2\pi r$$

$$\frac{100}{2\pi} = r \rightarrow r = \frac{50}{\pi}$$

$$\frac{L}{r} = \frac{40}{\frac{50}{\pi}} = \frac{4\pi}{5}$$

$$\frac{4}{5} \times 180^\circ = 144^\circ \quad \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{4\pi}{5}}{\pi} \rightarrow D = 144^\circ$$

۹) دو شهر A و B روی کره زمین دارای طول جغرافیایی یکسان هستند. اگر عرض جغرافیایی B برابر  $52^\circ$  باشد و فاصله دو شهر A و B برابر  $335$  کیلومتر باشد، عرض جغرافیایی A تقریباً مقدار است؟ (اشعاع کره زمین  $6400$  کیلومتر و  $\pi = 3.14$  است.)

$$\frac{L}{r} = \frac{335}{6400} = 0.052 \text{ رادیان} \quad \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{0.052}{\pi} \rightarrow D = 2.98^\circ \approx 3^\circ$$

$$A: 52 + 3 = 55^\circ$$

۱۰) زاویه های داده شده بر حسب درجه را به رادیان و زاویه هایی که بر حسب رادیان داده شده بر حسب درجه بنویسید.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

ح)  $120^\circ \quad \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$   
 $180 - 60$

الف)  $\frac{\pi}{15} \quad \frac{180}{15} = 12$

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{15}}{\pi}$$

ج)  $-210^\circ - (\pi + \frac{\pi}{6}) = -\frac{7\pi}{6}$

ب)  $\frac{5\pi}{3}$

$$\frac{5}{3} \times 180 = 300^\circ$$

ح)  $-270^\circ - (\pi + \frac{\pi}{2}) = -\frac{3\pi}{2}$

پ)  $-\frac{3}{2}\pi \quad -\frac{3 \times 180}{2} = -270^\circ$

خ)  $370^\circ \quad 360 + 10$   
 $2\pi + \frac{\pi}{18} = \frac{37\pi}{18}$

ت)  $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \frac{2 \times 180}{3} = 120^\circ$

د)  $-420^\circ - (360 + 60)$

$$-(2\pi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{7\pi}{3}$$

ث)  $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} \quad \frac{11 \times 180}{6} = 330^\circ$

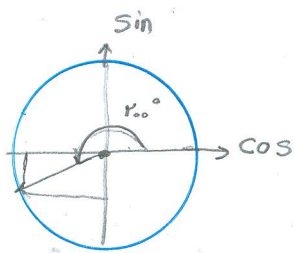
ذ)  $500^\circ \quad \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \quad \frac{500}{180} = \frac{R}{\pi}$

$360 + 140$

$$2\pi + \frac{140}{180} \times \pi = 2\pi + \frac{7}{9}\pi = \frac{25}{9}\pi$$

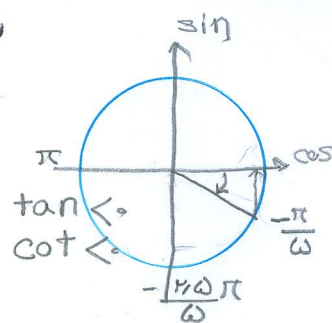
۱۱) در هر مورد مشخص کنید زاویه داده شده در کدام نامیه مثلثاتی قرار دارد و علامت نسبت‌های مثلثاتی را مشخص کنید.

الف)  $200^\circ$   
 $\cos 200^\circ < 0$   
 $\sin 200^\circ < 0$   
 $\tan 200^\circ > 0$   
 $\cot 200^\circ > 0$



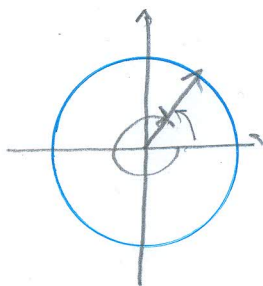
ب)  $-\frac{\pi}{5}$  رادیان

$-\frac{5\pi}{5}$   
 $\cos -\frac{\pi}{5} > 0$   
 $\sin -\frac{\pi}{5} < 0$



ت)  $300^\circ$   
 $60^\circ$

$\sin > 0$   
 $\cos > 0$   
 $\tan > 0$   
 $\cot > 0$



ب) رادیان ۲,۳

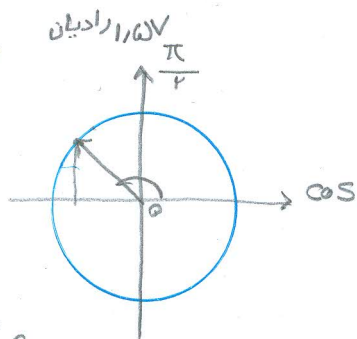
$D = \frac{2,3}{180} \times \pi$

$D = \frac{2,3}{3,14} \times 180$

$D = 132^\circ$

$\cos 2,3$  رادیان  $< 0$

$\sin > 0$   
 $\tan < 0$   
 $\cot < 0$



۱۲) حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف)  $\sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{3} + \tan^2 \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 1$

$\frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$

ب)  $\cot^2 \frac{\pi}{4} - 3 \tan \frac{\pi}{6}$

$1 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \sqrt{3}$

ت)  $\frac{\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cot^2 \frac{\pi}{6}}{\tan^2 \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2}{1 + 2 \times \frac{1}{2}}$

$\frac{\frac{3}{4} - 3}{1 + \sqrt{2}} = \frac{3 - 12}{1 + \sqrt{2}} = \frac{-9}{1 + \sqrt{2}} = \frac{9}{1 + \sqrt{2}} (1 - \sqrt{2})$

ث)  $\frac{\tan \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{4} + \tan^2 \frac{\pi}{4}}{\cot^2 \frac{\pi}{6} + 2 \sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + 2} = \frac{1}{3 + 2} = \frac{1}{5}$



(۱۳) اگر  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$  و انتهای کمان رو به روی زاویه  $\alpha$  در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\cos \alpha < 0 \rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{4}{\sqrt{2}} \rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

(۱۴) اگر  $\cos x = -\frac{4}{5}$  و  $\sin x > 0$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه  $x$  را بیابید.

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

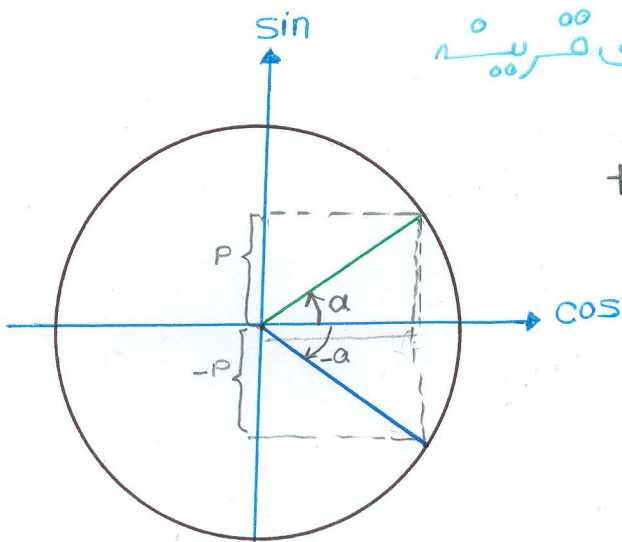
$$\sin^2 x = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\sin x = \frac{3}{5}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قریبه



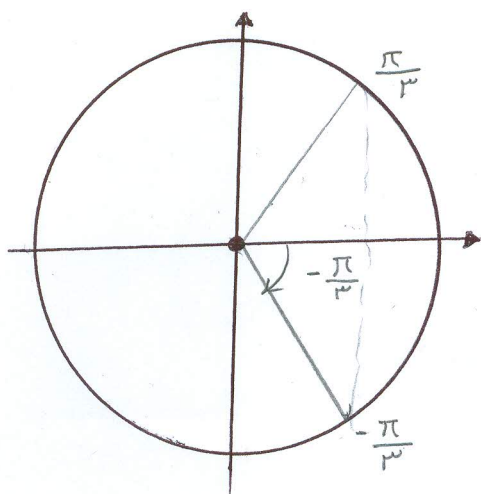
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

(۱۵) زاویه  $-\frac{\pi}{3}$  را در دایره مثلثاتی مشخص کنید. نسبت‌های مثلثاتی آن را بیابید.



$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

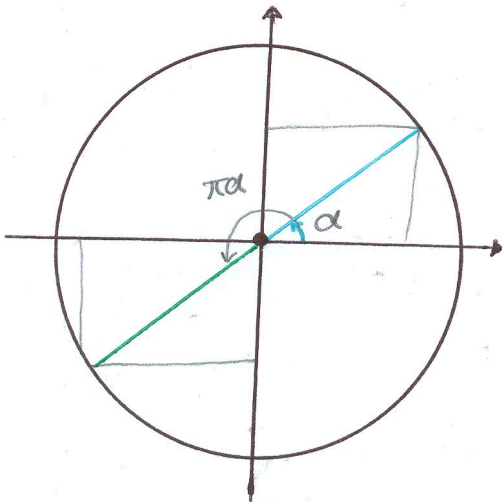
# نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\pi$ رادیان

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



(۱۸) نسبت‌های مثلثاتی زوایای خواسته شده را بدست آورید.

الف)  $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$

ب)  $240^\circ$

$$\sin \frac{\sqrt{\pi}}{6} = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\sqrt{\pi}}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\sqrt{\pi}}{6} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{\sqrt{\pi}}{6} = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

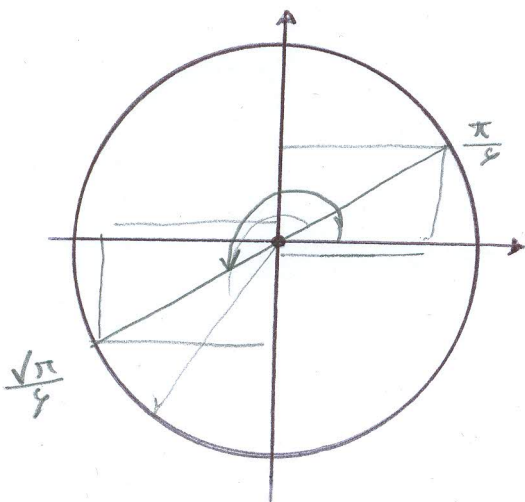
$$\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$-\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



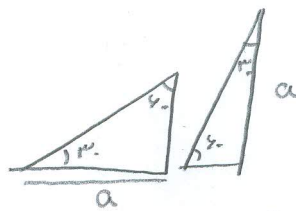
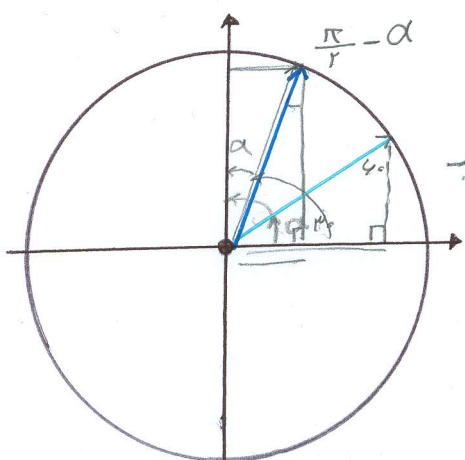
# نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$



$$\cos \alpha = a$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = a$$

(۱۹) با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمم، نسبت‌های مثلثاتی زوایای زیر را بدست آورید:  $\sin(90^\circ - 45^\circ)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(90^\circ - 45^\circ)$$

الف)  $\frac{\pi}{6}$     ب)  $45^\circ$      $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6}$

$$\frac{1}{2}$$

ب)  $90^\circ$      $\sin 90^\circ = \sin(90^\circ - 0^\circ)$

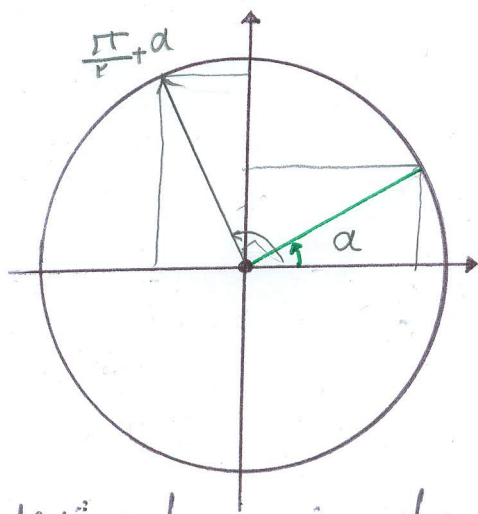
$$\sin 90^\circ = \cos(90^\circ - 0^\circ)$$

$$\cos 90^\circ = \sin(90^\circ - 0^\circ)$$

$$\tan 90^\circ = \cot(90^\circ - 0^\circ)$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

# نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{2}$ رادیان



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

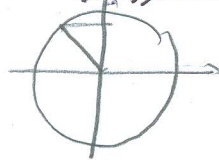
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه  $135^\circ$  را یکبار با دستورات محاسبه نسبت‌های مثلثاتی  
 زوایای مکمل و یکبار با استفاده از دستورات محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها با

اختلاف  $\frac{\pi}{2}$  رادیان بدست آورید.



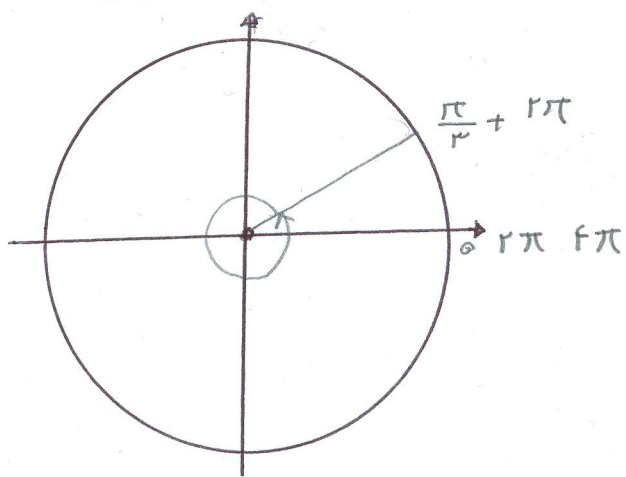
$$\sin(135^\circ) = \sin(180^\circ - 45^\circ)$$

$$\sin(135^\circ) = \sin(90^\circ + 45^\circ)$$

$$\sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نسبت‌های مثلثاتی با مجموع یا تفاضل  $2k\pi$  رادیان (ضارب زوج  $\pi$ )  
 رادیان

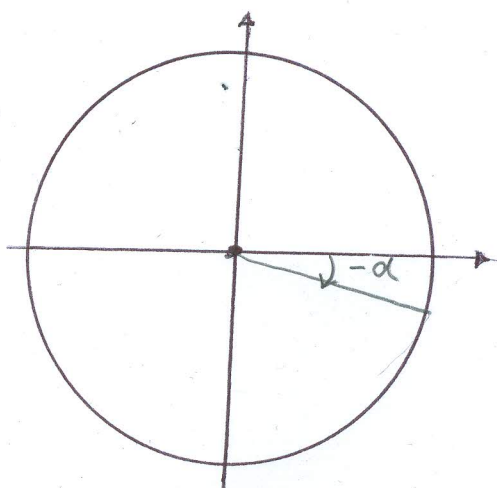


$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

۲۱) هر یک از نسبت های مثلثاتی زاویه های زیر را مشخص کنید.

الف)  $۳۰۰^\circ$

ب)  $\frac{\sqrt{۳}}{۲} \pi$

$$\sin(۳۶۰ - ۶۰) = -\sin ۶۰ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin(۲\pi + \frac{\pi}{۳}) = \sin \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(-۶۰) = +\frac{1}{۲}$$

$$\cos \frac{\pi}{۳} = \frac{1}{۲}$$

$$\tan(۶۰) = \sqrt{۳}$$

$$\tan \frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$$

$$\cot(-۶۰) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



$۳۶۰ + ۶۰$

ب)  $۴۲۰^\circ$

پ)  $-۲۲۵^\circ$

$۱۸۰ + ۴۵$

$$\sin(-۲۲۵) = -\sin ۲۲۵ = -\sin(۱۸۰ + ۴۵) = \sin ۴۵ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(-۲۲۵) = \cos ۲۲۵ = \cos(۱۸۰ + ۴۵) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-۲۲۵) = -\tan ۲۲۵ = -1$$

$$\cot(-۲۲۵) = -\cot ۲۲۵ = -1$$

۲۲) حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید.

الف)  $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ =$

$$\tan(۱۸۰ - ۴۵)$$

$$-\tan ۴۵ + \cot(۱۸۰ - ۶۰)$$

$$-\tan ۴۵ - \cot ۶۰ = -1 - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ب)  $\cos(-۱۲۰^\circ) + \cot(\frac{۴\pi}{۳}) =$

$$\cos ۱۲۰^\circ + \cot(\pi + \frac{\pi}{۳})$$

$$\cos(۱۸۰ - ۶۰) + \cot \frac{\pi}{۳} = -\frac{1}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پ)  $\cos(-۷۲^\circ) + \cot(۱۰۰^\circ - ۷۰^\circ) + \tan ۷۲^\circ - \tan(-۶۰^\circ) =$

$$\cos ۷۲^\circ + \cot(-۶۰^\circ) + \tan ۷۲^\circ + \tan ۶۰^\circ$$

$$\frac{\cos ۷۲^\circ}{\sin ۷۲^\circ} + \frac{\cot(۱۸۰ - ۶۰)}{\sin ۶۰} + \frac{\tan ۷۲^\circ}{\cos ۷۲^\circ} + \frac{\tan ۶۰^\circ}{\cos ۶۰} = 1 + \cot ۱۲^\circ - \tan ۱۲^\circ$$

$$1 - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = 1$$

ت)  $\sin(\frac{۲\omega\pi}{۳}) - \cos(\frac{۲\pi\pi}{۳}) =$

$$۲\omega \frac{\pi}{۳}$$

$$\sin(۸\pi + \frac{\pi}{۳}) - \cos(۶\pi - \frac{\pi}{۳})$$

$$= \sin \frac{\pi}{۳} - \cos \frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}{۲}$$

ث)  $\frac{\sin(\frac{۳\pi}{۴}) - \cos(\frac{۵\pi}{۶})}{\sin(-\frac{۳\pi}{۴}) + \tan(-\frac{۴\pi}{۳})} =$

$$\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{-\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}}$$

$$\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{-\tan \frac{4\pi}{۳}}{-\tan \frac{\pi}{۳}}$$

$$= \frac{\sqrt{۲} + \sqrt{۳}}{\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۳}}$$

۲۳) بدون استفاده از ماشین حساب، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف)  $\sin 174^\circ = \sin 6^\circ$

$$\frac{174 - 174}{174} \sin(2 \times 36^\circ + 12^\circ)$$

$$\sin(12^\circ) = \sin(180^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$$

ب)  $\cos(-324^\circ) = \cos 36^\circ$

$$\cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$$

پ)  $\tan(-100^\circ) = \tan 18^\circ$

$$-\tan 100^\circ = -\tan(2 \times 36^\circ - 18^\circ)$$

$$= -\tan(2 \times 36^\circ + 18^\circ)$$

$$= -\tan(180^\circ) = -\tan(36^\circ - 18^\circ)$$

ت)  $\sin 175^\circ = \sin 155^\circ$

$$\sin(170^\circ + 155^\circ)$$

$$\sin(2 \times 36^\circ + 155^\circ)$$

$$= \sin 155^\circ$$

$\sin 112^\circ = \sin(9^\circ + 3^\circ)$

$\sin 112^\circ = \cos 3^\circ$

الف)  $\sin x = \cos(90^\circ + x)$

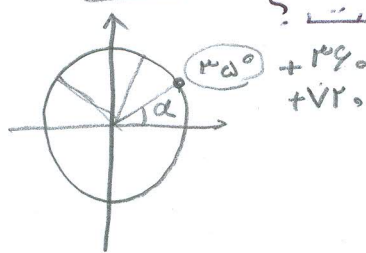
$\sin \alpha = \cos \beta$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$x + x + 90^\circ = 90^\circ$

$2x = 0^\circ$

$x = 45^\circ$



۲۴) در تساوی‌های زیر به جای  $x$ ، یک زاویه مناسب قرار دهید.

$\sin x + 4^\circ = \sin 7^\circ$

$\cos 36^\circ - x = \cos 9^\circ$

ب)  $\tan(x + \frac{\pi}{18}) = \cot(\frac{2\pi}{9} + x)$

$$\frac{3\pi}{9} \quad x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x - \frac{\pi}{9}$$

$$2x + \frac{5\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$$

$$2x = \frac{9\pi - 5\pi}{18} = \frac{4\pi}{18} = \frac{2\pi}{9}$$

$$\frac{\pi}{9} \quad x = 2^\circ$$

آیا برای زاویه  $x$  تنها یک مقدار می‌توان یافت؟

۲۵) حاصل  $f \cos 110^\circ + \sin 20^\circ + 2 \sin 14^\circ - \cos 70^\circ + 3 \sin 34^\circ$

$= f \cos(180^\circ - 70^\circ) + \sin(36^\circ - 14^\circ) + 2 \sin 14^\circ - \cos 70^\circ + 3 \sin 34^\circ$

$+ f \sin 20^\circ - \sin 20^\circ + 2 \sin 14^\circ - \sin 20^\circ - 3 \sin 20^\circ$

صفر ۱)

✓ ۲)  $\sin 20^\circ$

۳)  $-\sin 20^\circ$

۴)  $2 \sin 20^\circ$

(۲۶) حاصل  $\cos \frac{13\pi}{14} + \cos \frac{\pi}{14} + \cos \frac{5\pi}{14} + \cos \frac{7\pi}{14} + \cos \frac{9\pi}{14} - 1$  کدوم گزینه است؟

- ۱) -۲
- ۲) صفر
- ۳) -۱ ✓
- ۴)  $\frac{1}{2}$

(۲۷) بیا فرض  $\tan 35^\circ = 2a - 1$  حاصل  $\frac{\sin 145^\circ - \sin 225^\circ}{\cos 35^\circ}$  کدوم گزینه است؟

- ۱)  $2a \sqrt{\frac{\sin 35^\circ + \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}}$
- ۲)  $2a \tan 35^\circ + 1$
- ۳)  $2a - 1$
- ۴)  $2a - 1$

$\sin 145^\circ = \sin(180^\circ - 35^\circ) = \sin 35^\circ$   
 $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$   
 $-\sin 125^\circ = -\sin(90^\circ + 35^\circ) = -\cos 35^\circ$   
 $\cos 35^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ) = \sin 55^\circ$

(۲۸) حاصل عبارت  $\frac{r \sin(\frac{4\pi}{10}) + \sin(-\frac{\pi}{10}) + \sin(\frac{14\pi}{10}) - r \sin(\frac{11\pi}{10})}{\cos(-\frac{\pi}{10}) \tan(\frac{11\pi}{10}) + r \cos(\frac{4\pi}{10}) + \sin(\frac{14\pi}{10})}$  کدوم گزینه است؟

- ۱) -۱
- ۲) ۱
- ۳)  $-2 \frac{\pi}{r} (\frac{5\pi}{10}) - \frac{\pi}{10}$
- ۴)  $2 \frac{\pi}{r} (\frac{5\pi}{10}) - \frac{\pi}{10}$  ✓

$$\frac{r \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} + r \sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10} + r \sin \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{r \sin \frac{\pi}{10}}{r \sin \frac{\pi}{10}} = 1$$

(۲۹) مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

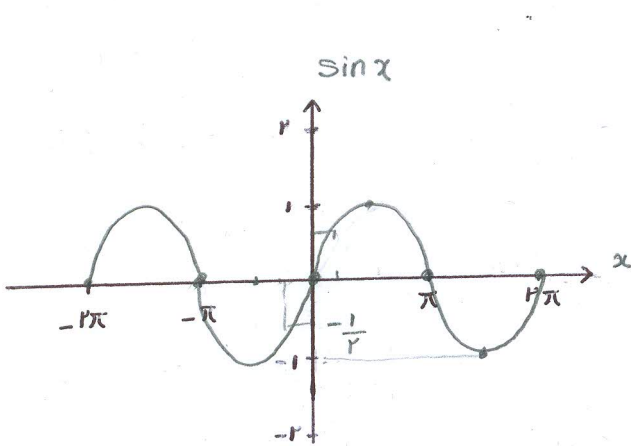
$$A = r \tan 13^\circ + \cot 5^\circ - \tan 22^\circ - 5 \tan 31^\circ - r \cot 14^\circ - r \tan 5^\circ$$

$$A = -r \cot 5^\circ + \cot 5^\circ - \tan 5^\circ + 5 \tan 5^\circ + r \tan 5^\circ - r \tan 5^\circ$$

$$= -r \cot 5^\circ + r \tan 5^\circ = -r \tan 5^\circ + r \tan 5^\circ = 0$$

# توابع مثلثاتی

اگر تابع  $f(x) = \sin x$  را در نظر بگیریم و بخواهیم آن را رسم کنیم، مانند توابع دیگر با نقطه یابی رسم می کنیم.

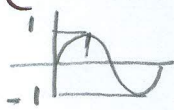


$x$	$2\pi$	$\pi$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$2\pi$
$f(x) = \sin x$	$0$	$0$	$0$	$1$	$0$	$0$

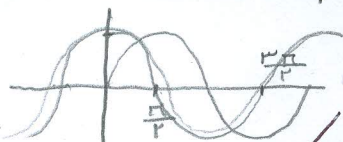
$(\frac{\pi}{2}, 1)$   
 $(\frac{3\pi}{2}, -1)$   
 $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$   
 $F = \{(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\frac{3\pi}{2}, -1), (x, \sin x)\}$

نکته: تابع  $f(x) = \sin x$  در بازه‌های  $[0, 2\pi]$ ،  $[2\pi, 4\pi]$ ، و ... و همچنین  $[-2\pi, 0]$  و  $[-4\pi, -2\pi]$  و ... تکرار می شود، یعنی یکسان است.  
دوره تناوب

نکته: تابع  $\sin x$  در بازه بسته  $[-1, 1]$  تغییر می کند کمترین مقدار برای تابع  $f(x)$ ،  $-1$  و بیشترین مقدار  $+1$  است. به کمترین مقدار یک تابع می‌نویسیم  $\min$  و به بیشترین مقدار تابع،  $\max$  می‌نویسیم.



نکته: تابع  $f(x) = \sin x$  در نقاط  $x = \frac{\pi}{2}$ ،  $\frac{5\pi}{2}$ ،  $\frac{9\pi}{2}$ ، ... بیشترین مقدار و در نقاط  $x = \frac{3\pi}{2}$ ،  $\frac{7\pi}{2}$ ،  $\frac{11\pi}{2}$ ، ... کمترین مقدار را دارد.

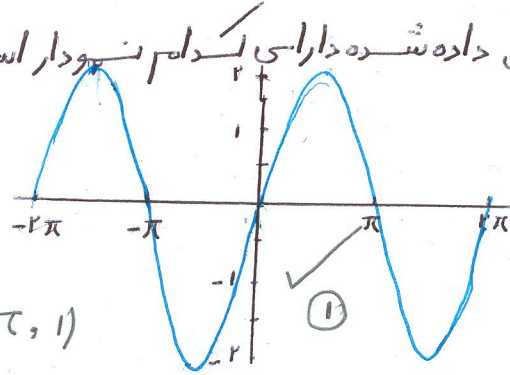


$$f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

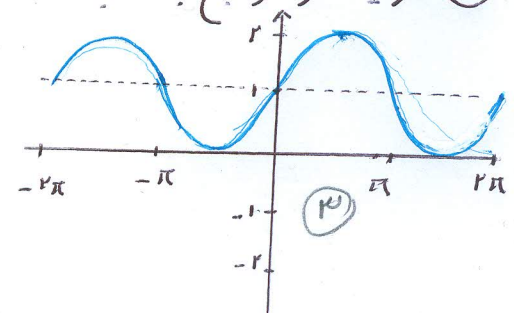
نکته: توابع سینوسی را نیز می توان با انتقال رسم کرد. نظیر توابع قدر مطلق، سهمی و رادیکالی  $f(x) + k$ ، به مقدار  $k$  جابجایی روی محور عرض‌ها و  $\sin(x + \alpha)$ ، جابجایی روی محور  $x$ ‌ها داریم.

۳۰) هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

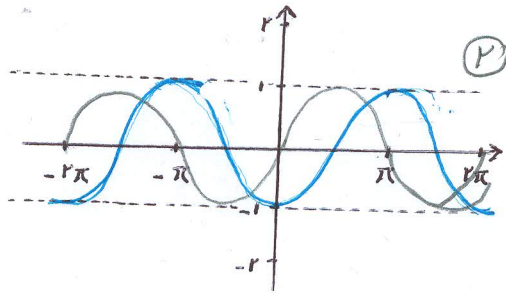
①  $y = r \sin x$



②  $y = \sin(x - \frac{\pi}{r})$

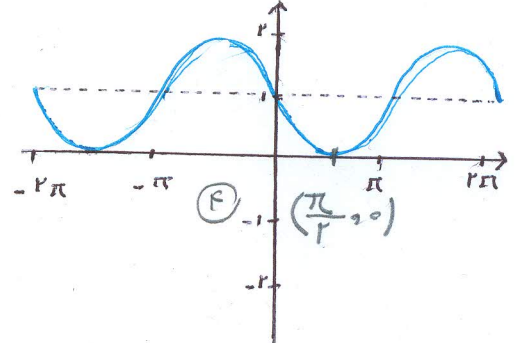


③  $y = \sin x + 1$



④  $y = -\sin x + 1$

$-\sin \frac{\pi}{r} + 1$   
 $-1 + 1 = 0$



۳۱) مقدار توابع زیر را به ازای مقادیر داده شده بیست آورید.

①  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{r})$

$x = 0, \frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{r}, \frac{\pi}{r}$

$f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{r})$

$f(\frac{\pi}{r}) = \sin(\frac{2\pi}{r} - \frac{\pi}{r}) = \sin(\frac{\pi}{r}) = \frac{1}{r}$

$f(0) = \sin(0 - \frac{\pi}{r}) = -1$

②  $f(x) = r \sin(2\pi - x)$

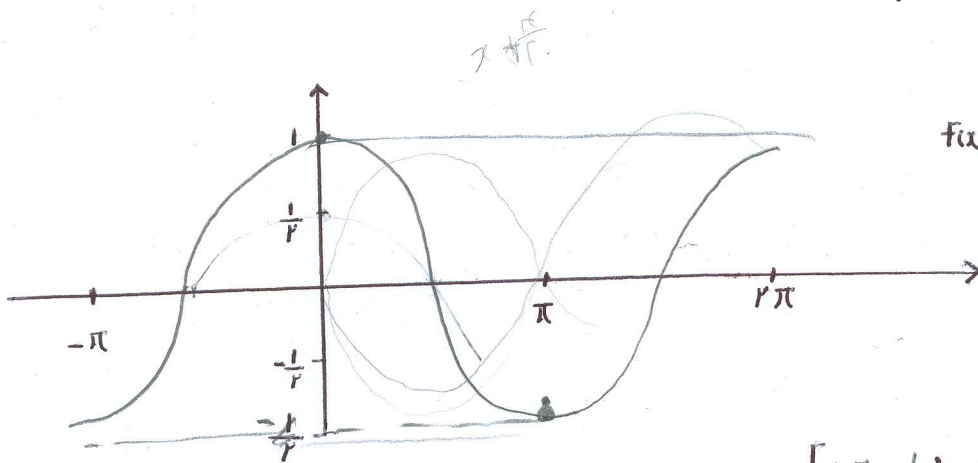
$x = \frac{\pi}{r}, \frac{2\pi}{r}, -\frac{r\pi}{r}$

$r \sin(2\pi - \frac{\pi}{r})$

$-\sin \frac{2\pi}{r} = -\frac{\sqrt{r}}{r} = -\frac{\sqrt{r}}{r}$

$-r \sin \frac{\pi}{r} = -1$

$-\sin(-\frac{r\pi}{r}) = \sin \frac{r\pi}{r} = \sin(\pi + \frac{\pi}{r})$   
تابع  $f(x) = \cos x$  را رسم نمایید.

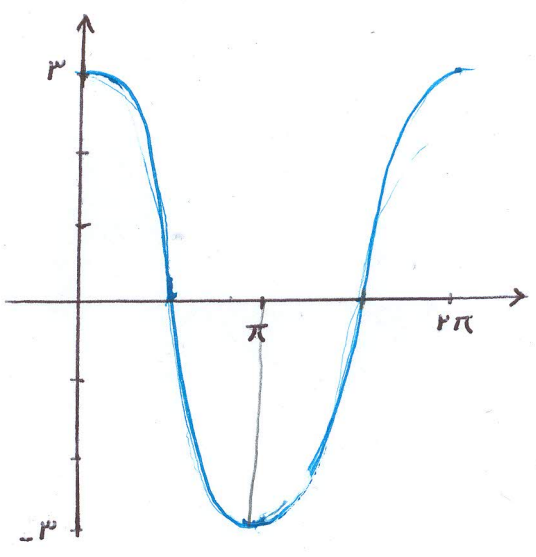


$x$	$-\frac{\pi}{r}$	$\frac{\pi}{r}$	$\pi$
$f(x) = \cos x$	$\frac{1}{r}$	$1$	$-1$

$f = \left\{ \left(-\frac{\pi}{r}, \frac{1}{r}\right), (\pi, -1), \dots, (x, \cos x) \right\}$



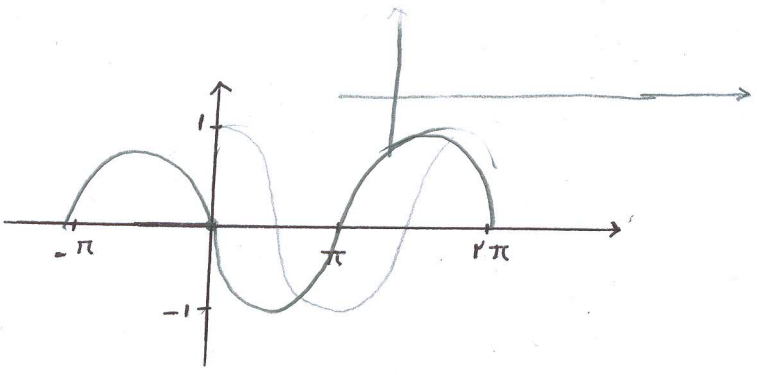
شکل زیر تابع با ضابطه  $y = r \cos x$  را نشان می‌دهد به طور مشابه هر یک از نتایج با ضابطه‌های داده شده را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید. (رسم با استفاده از نمودار تابع کسینوس انجام شود)



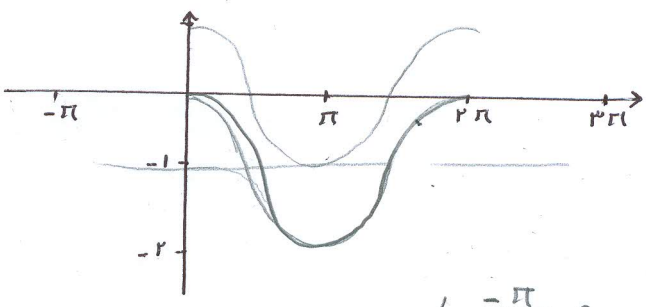
$$r \cos \pi = -r$$

$$\frac{r\pi}{r}$$

①  $y = \cos(x + \frac{\pi}{r})$



②  $y = \cos x - 1$

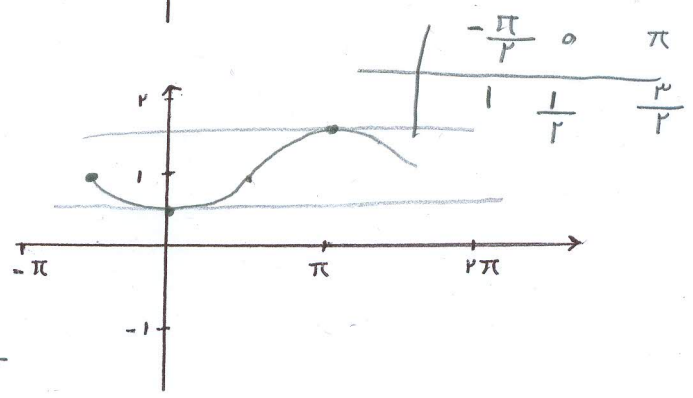


③  $y = 1 - \frac{1}{r} \cos x$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$1 \geq -\frac{\cos x}{r} \geq -\frac{1}{r}$$

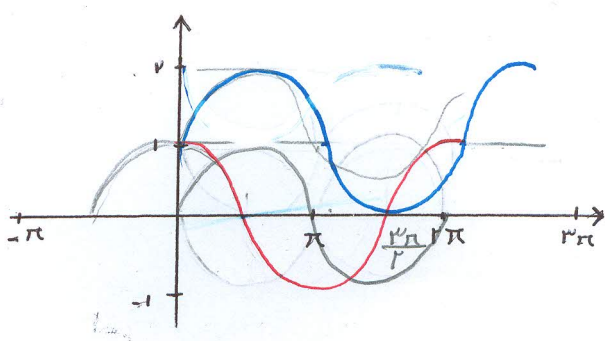
$$r \geq -\frac{\cos x}{r} + 1 \geq \frac{1}{r}$$



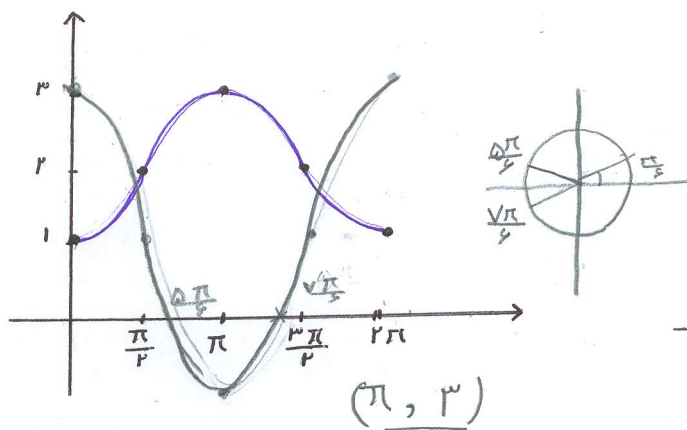
④  $y = \cos(x - \frac{\pi}{r}) + 1$

$$\frac{r\pi}{r} - \frac{\pi}{r}$$

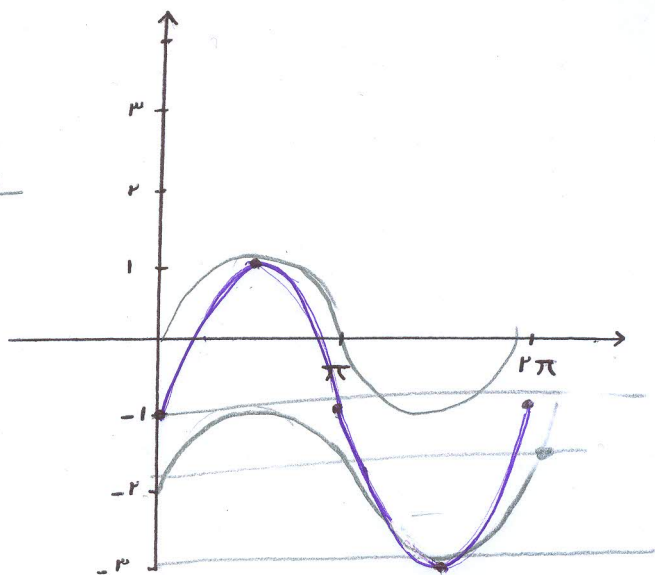
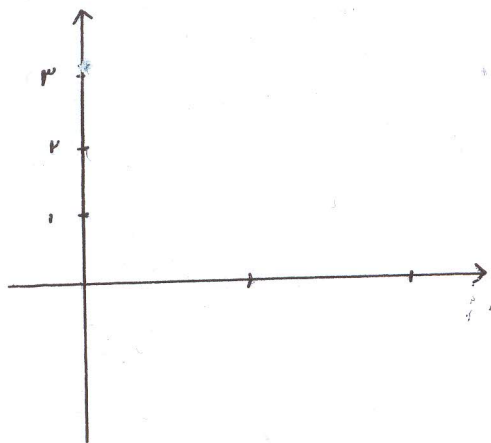
$$-1 + 1 = 0$$



۳۴) با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع یا سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

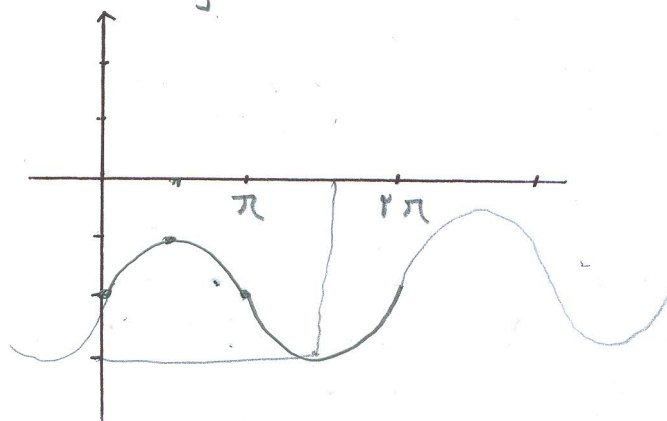


الف)  $y = 2 \cos x + 1$      $(0, 3)$      $(\pi, -1)$   
 ب)  $y = 2 - \cos x$      $(\frac{\pi}{2}, 1)$      $(2\pi, 3)$



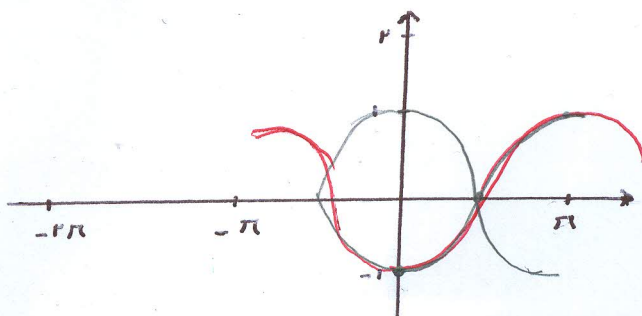
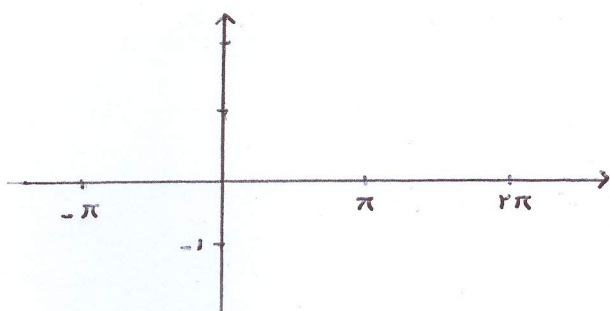
د)  $y = 2 \sin x - 1$   
 پ)  $y = \sin x - 2$

$y = \sin x - 2$



۳۵) آیا این عبارت درست است:

"برای رسم نمودار تابع  $y = -\cos x$  با ضابطه  $y = \cos x$  کافی است، نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور  $x$ ها مقرینه کنیم." بله



الف)  $\cos(-\frac{\pi}{3}) \times \cos(-\frac{\pi}{6}) + 2 \tan(-\frac{\pi}{4}) =$

$\cos \frac{\pi}{3} \times \cos(-\frac{\pi}{6}) \times \cos(-\frac{\pi}{6}) - 2 \tan \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - 2$   
 $= \frac{3}{4} - 2 = -\frac{5}{4}$

ب)  $\cot(-\frac{\pi}{6}) + \tan(-\frac{\pi}{3}) =$

$-\cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3} - \sqrt{3} = -2\sqrt{3}$

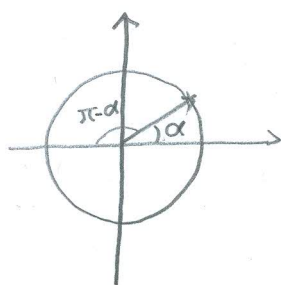
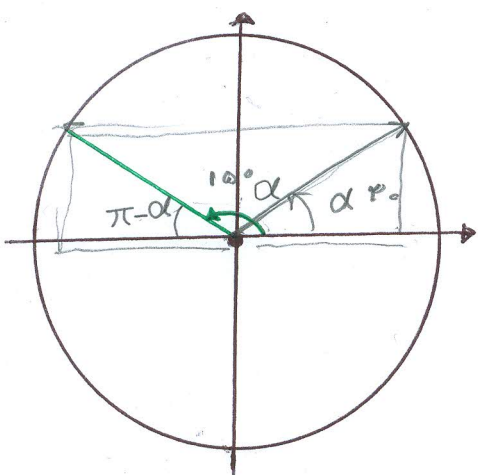
نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

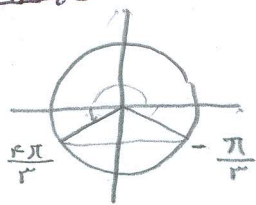
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



⑮ مکمل هر یک از زاویه‌های زیر را تعیین کنید و نسبت‌های مثلثاتی آنها را بدست آورید.

الف)  $-\frac{\pi}{3}$



$\pi - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{5\pi}{3}$

$\sin \frac{5\pi}{3} = \sin(\pi - (-\frac{\pi}{3}))$

$= \sin \alpha$   
 $= -\sin \frac{\pi}{3}$   
 $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب)  $\frac{2\pi}{3}$

$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3})$

$= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cos \frac{\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2}$

ب)  $-\frac{\pi}{4}$

$\sin \frac{5\pi}{4} = \sin(\pi - (-\frac{\pi}{4}))$

$= \sin(-\frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4}$

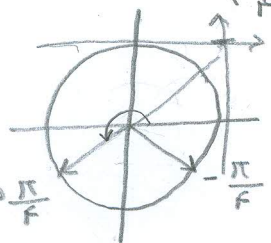
$\pi - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{5\pi}{4}$

$\cos \frac{5\pi}{4} = \cos(\pi - (-\frac{\pi}{4}))$

$= -\cos(-\frac{\pi}{4})$

$= -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan = 1$      $\cot = 1$



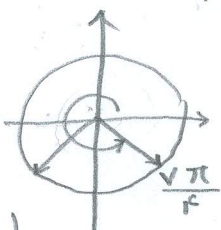
ب)  $-\frac{3\pi}{4}$

$\pi - (-\frac{3\pi}{4}) = \frac{7\pi}{4}$

$\sin(\pi - (-\frac{3\pi}{4})) = \sin(-\frac{3\pi}{4})$

$= -\sin \frac{3\pi}{4}$

$= -\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

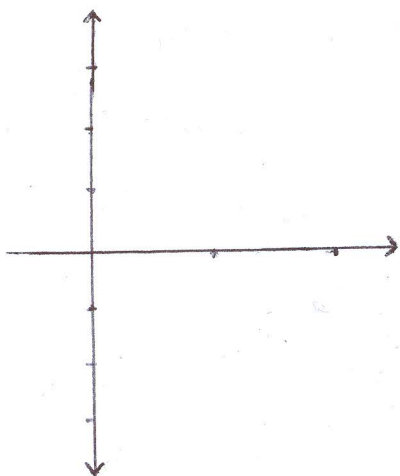


۳۶) نمودار تابع  $y = -3 \cos x$  را رسم کرده و به سوالات زیر پاسخ دهید.  
 $-1 \leq \cos x \leq 1$

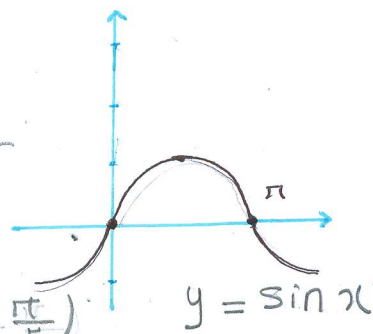
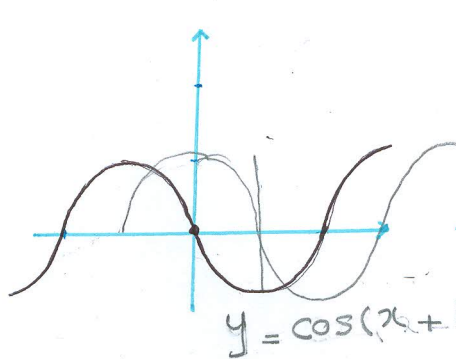
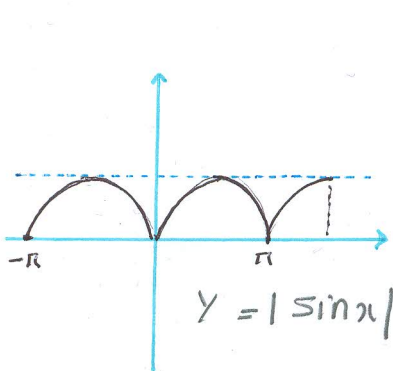
الف. دامنه تابع  $R$  و برد آن  $+$  و  $-3$  است.

ب. حداکثر مقدار تابع برابر  $3$  است و در طول‌های  $x = 2k\pi + \pi$  حاصل می‌شود.  
 حداقل مقدار تابع برابر  $-3$  است و در طول‌های  $x = 2k\pi - \pi$  حاصل می‌شود.

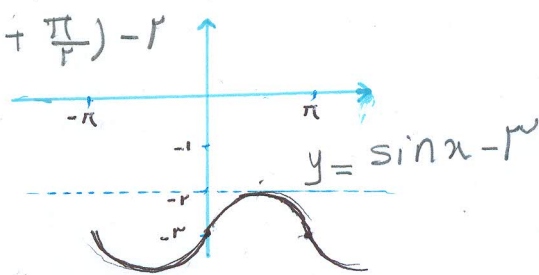
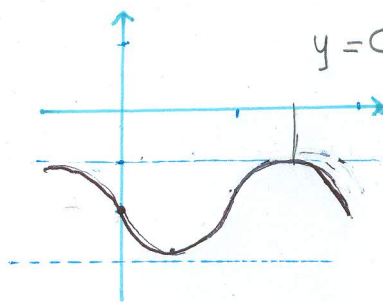
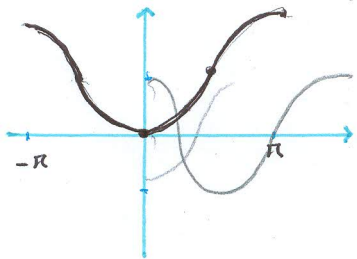
ج. نقاط در طول‌های  $x = \frac{\pm \pi}{2}, \frac{\pm 3\pi}{2}$  برابر صفر است.  
 نقاط در طول‌های  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$  برابر صفر است.



۳۷) مشخص کنید هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده مربوط به کدام نمودار است؟



$y = -\cos x + 1$



Ⓐ  $y = |\sin x|$

ⓑ  $y = +\cos(x + \frac{\pi}{4})$

Ⓒ  $y = -\sin x - 3$

Ⓓ  $y = -2 \sin x + 1$

Ⓔ  $y = -\sin(x + \pi) + 1$

Ⓕ  $y = \sin x - 3$

Ⓖ  $y = \cos(x + \pi) + 1$

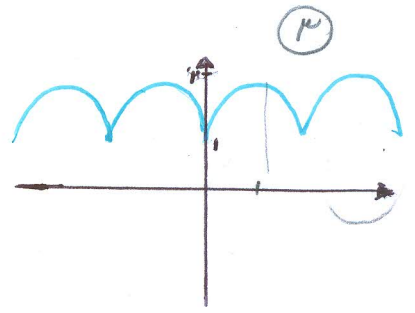
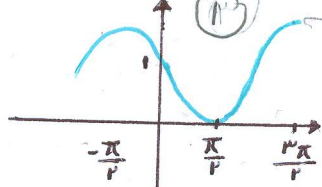
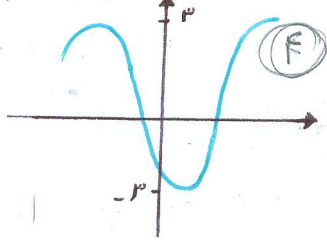
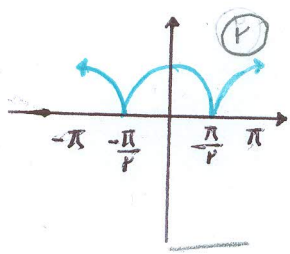
۳۸) مشخص کنید هر یک از توابع زیر مربوط به کدام نمودار است؟

۱)  $y = -\sin x + 1$   
 $(\frac{\pi}{2}, 0)$

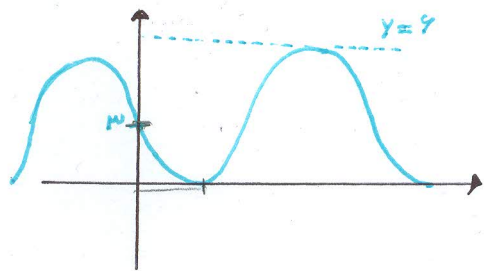
۲)  $y = |\sin(x - \frac{\pi}{2})|$   
 $(\frac{\pi}{2}, 0)$

۳)  $y = |\sin x| + 1$   
 $\frac{\pi}{2}, 2$

۴)  $y = -3 \sin(x+1)$   
 $-1 \leq \sin x \leq 1$



۳۹) قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \sin x$  به صورت مقابل است. مقادیر  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.



$(0, 3)$

$3 + b \sin 0 = 3$   
 $a = 3$

$3 + b \sin \pi = 6$

$3 + b = 6$   
 $b = 3$

۴۰) قسمتی از نمودار تابع  $y = a + b \cos x$  به صورت مقابل است. مقادیر  $a$  و  $b$  را بیابید.

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$a + b = -2$

$a + b = 3$

$2a = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{5}{2}$

$y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \cos x$

۴۱) نمودار تابع زیر را در بازه داده شده رسم کنید.

$y = 1 + \cos(x + \frac{\pi}{2})$ ;  $[-\pi, 2\pi]$   
 $-\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

