

پیوست I: چند تابع دیفرانسیل پذیر خاص روی منیفلدها

در این بخش به بررسی توابعی می پردازیم که وجود آن روی منیفلدها به ما اجازه می دهد خواص موضعی^۱ (یعنی در همسایگی هر نقطه) را به خواص سرتاسری^۲ (یعنی در کل منیفلد) تعمیم دهیم.

یادآوری می کنیم که محمل^۳ تابع $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ عبارت است از بستار^۴ مجموعه نقاطی که در آن نقاط f مخالف صفر است.

گزاره: اگر M یک منیفلد C^∞ ، U بازی از M و K زیر مجموعه فشرده ای از U باشد. آنگاه تابعی مانند $\varphi \in C^\infty(M)$ موجود است بطوریکه

$$\varphi \geq 0, \quad \varphi|_K = 1, \quad \text{Supp } \varphi \subset U$$

(لذا $\varphi = 0$ روی مرز U)

اثبات: در اینجا $\text{Supp } \varphi = \overline{\{p \in M | \varphi(p) \neq 0\}}$. فرض کنیم $p \in K$ و (x, V) یک کارت در همسایگی p باشد بطوریکه $x(p) = 0$ و $\bar{V} \subset U$. تابع $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

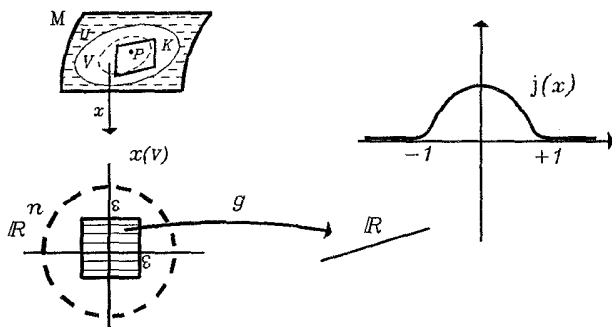
Local^۱

global^۲

Support^۳

Closure^۴

را به صورت زیر در نظر می گیریم:



شکل ۲.۱۴: نمودار سمت راست مربوط به $J(x)$ و سمت چپ مربوط به تابع حقیقی g است

در نقاط مربوط به مکعب n بعدی باز $]-\varepsilon, \varepsilon[$ داریم $g|_{]-\varepsilon, \varepsilon[} > 0$ و در نقاط دیگر $g = 0$ یک چنین تابعی همواره موجود است و می توان آنرا به صورت زیر ارائه نمود.

$$J(x) = \begin{cases} e^{-((1/(1-x))^2 + 1/(1+x))^2} & x \in]-1, 1[\\ 0 & x \notin]-1, 1[\end{cases}$$

در اینجا $J \in C^\infty(\mathbb{R})$. حال برای هر $x = (x_1, \dots, x_n)$ قرار می دهیم

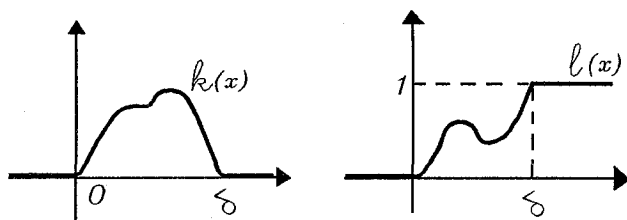
$$g(x) = J\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)J\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right) \cdots J\left(\frac{x_n}{\varepsilon}\right)$$

ε را به اندازه کافی کوچک طوری اختیار می کنیم که $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset x(V)$. حال تابع زیر را در نظر می گیریم

$$\varphi_p = g \circ x \in C^\infty(V)$$

φ_p را می توان به صورت صفر به خارج V توسعه داده و لذا می توان آنرا به توابع $C^\infty(M)$ توسیع داد. این تابع توسعه یافته را با $\tilde{\varphi}_p \in C^\infty(M)$ نمایش می دهیم. به ازاء هر نقطه $p \in K$ به این صورت $\tilde{\varphi}_p$ را می سازیم. چون K فشرده است می توان آنرا توسط

تعدادی متناهی از کارتها مانند (x_i, V_i) , $i = 1, \dots, m$ پوشانید. فرض کنیم



شکل ۲.۱۵: تابعی که به جز یک فاصله همه جا ثابت است

$$\text{Supp } \tilde{\varphi} \subset U, \quad \tilde{\varphi} \in C^\infty(M), \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_{p_1} + \dots + \tilde{\varphi}_{p_m}$$

بعلاوه $\tilde{\varphi}|_K > 0$ ، بنابراین عددی مانند $\delta > 0$ موجود است بطوریکه

$$\tilde{\varphi}|_K \geq \delta$$

حال برای ارائه φ نگاشت ℓ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\ell \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\ell(x) = \frac{\int_0^x k(t) dt}{\int_0^\delta k(t) dt}$$

در اینجا $k \in C^\infty(\mathbb{R})$ که همواره $k \geq 0$ بوده و خارج فاصله $[0, \delta]$ داریم $k = 0$

براحتی می‌توان نشان داد که تابع $\tilde{\varphi} \circ \ell = \varphi$ شرایط حکم گزاره را دارد. $\square$

خانواده توابع C^∞ از M در N را توسط $C^\infty(M, N)$ نمایش می‌دهیم. در این صورت نتیجه زیر را از گزاره بالا خاطرنشان می‌سازیم.

نتیجه: فرض کنیم U بازی از M بوده و $f \in C^\infty(U, M')$ آنگاه با تحدید U می‌توان f را به یک تابع C^∞ روی M توسیع داد. به عبارت دیگر وجود دارد بازی مانند U' ، زیر مجموعه U ، $U' \subset U$ و تابعی مانند $\tilde{f} \in C^\infty(M, M')$ بطوریکه

$$f|_{U'} = \tilde{f}|_{U'}$$

اثبات: در حقیقت چون M موضعاً فشرده می باشد، (بنابر قضیه ای در بخش توپولوژی منیفلدها هر منیفلد هاسدرف موضعاً فشرده است.)، یک همسایگی فشرده مانند K وجود دارد بطوریکه $K \subset U$. فرض کنیم U' بازی در K باشد. حال تابع φ در گزاره بالا را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\varphi|_{f(K)} = 1, \quad \text{Supp } \varphi \subset \widehat{f(U)}$$

تابع $\varphi \circ f$ برابر f روی K و بنابراین روی U' می باشد و می توان آنرا به صورت صفر به خارج U نیز توسعه داد. تابعی که به این صورت توسعه پیدا کرده است تابع مورد نظر می باشد. $\square$

تذکر: در حالت کلی نمی توان یک تابع C^∞ را که در یک باز تعریف شده است بطور C^∞ توسعه داد. بعنوان مثال تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در فاصله $[1, \infty)$ از کلاس C^∞ می باشد را در نظر بگیرید.