

## آموزش فصل دوم ریاضی (۲)

پایه یازدهم – رشته علوم تجربی

هندسه

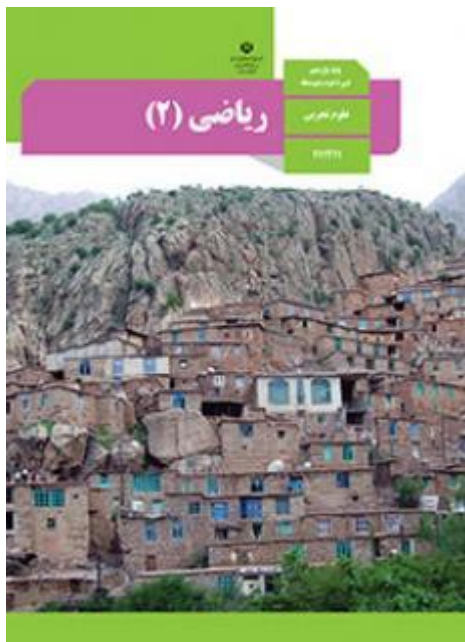
مدرس: محمد رضائی

hesaban.jimdo.com

سایت:

@barpafile

کانال تلگرامی:



فصل دوم: هندسه

ترسیمهای هندسی

استدلال و قضیه تالس

تشابه مثلثها

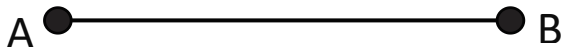


کلیه فیلم‌های من (محمد رضائی) ساخته‌ام رایگان قابل دانلود است. می‌توانید برای دانلود به سایت "فیلم آموزشی ریاضی" ([hesaban.jimdo.com](http://hesaban.jimdo.com)) و صفحه فیلم‌های من مراجعه فرمائید. یا از طریق کانال تلگرامی (@barpafile) دانلود فرمائید. برای استفاده بهتر توصیه می‌شود حتما با دیدن صورت تمرین، فیلم را متوقف کرده و خودتان حل کنید و با دیدن ادامه فیلم، پاسخ خود را بررسی کنید.

## ترسیم‌های هندسی

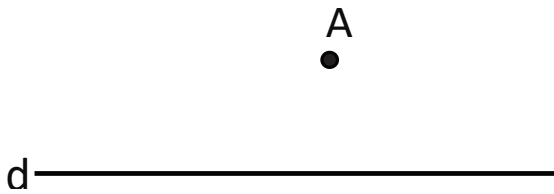
### تمرین

عمود منصف پاره خط AB را رسم کنید.



### تمرین

از نقطه A خارج از خط d بر آن عمود کنید.



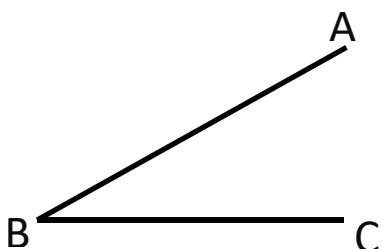
### تمرین

از نقطه A روی خط d بر آن عمود کنید.



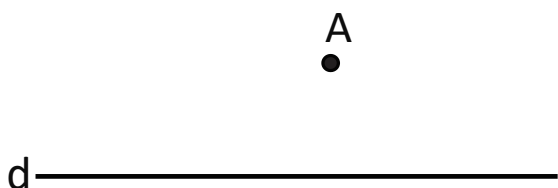
### تمرین

زاویه  $ABC$  مفروض است، نیمساز آن را رسم کنید.



### تمرین

از نقطه  $A$ ، خطی به موازات خط  $d$  رسم کنید.



### تمرین

نقطه  $D$  روی عمود منصف پاره خط  $AB$  است، ثابت کنید که فاصله آن از دو سر این پاره خط به یک اندازه است.

### نتیجه

هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر آن به یک فاصله است و بالعکس؛ هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن قرار دارد.

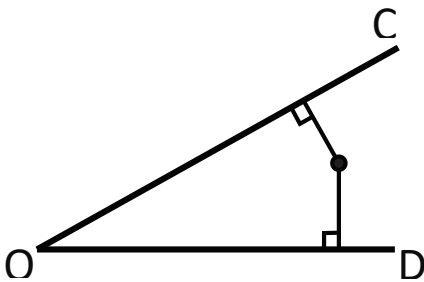
### تمرین

قضیه زیر را ثابت کنید:

"نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره خط قرار دارد اگر و فقط فاصله آن از دو سر آن پاره خط به یک اندازه باشد"

### تمرین

ثابت کنید که نقطه A روی نیمساز زاویه COD قرار دارد.



### نتیجه

هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن قرار دارد.

### تمرین

نتیجه بالا را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

### تمرین

مثلث  $ABC$  به اضلاع  $AB=3\text{cm}$  ،  $AC=4\text{cm}$  و  $BC=6\text{cm}$  را رسم کنید.

### تمرین

مثلث  $ABC$  دلخواهی رسم کنید. عمود منصف های دو ضلع آن را رسم کنید. عمود منصف ضلع سوم از محل تقاطع دو عمود منصف رسم شده می گذرد؟ چرا؟

### تمرین

مثلث  $ABC$  دلخواهی رسم کنید، نیمساز دو زاویه آن را رسم کنید. آیا نیمساز زاویه سوم از محل تقاطع این دو نیمساز می گذرد؟ چرا؟

## تمرین

فرض کنید نقطه A به فاصله  $4\text{ cm}$  از خط  $d$  است. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلث متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر  $d$  منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط مثلث (الف) را داشته باشد و طول ساق آن  $6\text{ cm}$  باشد.

پ) مثلثی که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن  $8\text{ cm}^2$  باشد.

## تمرین

خط  $d$  مفروض است. تمام نقاطی که از این خط به فاصله  $2\text{ cm}$  است، چه شکل یا شکل‌هایی را مشخص می‌کند؟

هریک از قسمت‌های زیر که خاصیتی از تناسب هستند را ثابت کنید.

الف)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow ad = bc$

ب)  $ad = bc \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

پ)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ت)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ث)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$

ج)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

چ)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b+a} = \frac{c}{d+c}$

ح)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

ح)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

جاهای خالی را با اعداد مناسب پُر کنید.

الف)  $\frac{5}{14} = \frac{15}{42} \rightarrow 5 \times \square = 15 \times \square$

ب)  $3 \times 40 = 12 \times 10 \rightarrow \frac{3}{\square} = \frac{12}{\square}$

پ)  $\frac{7}{10} = \frac{21}{30} \rightarrow \frac{10}{7} = \frac{\square}{\square}$

ت)  $\frac{6}{11} = \frac{18}{33} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{\square}{\square}, \frac{33}{11} = \frac{\square}{\square}$

ث)  $\frac{4}{14} = \frac{10}{35} \rightarrow \frac{4}{18} = \frac{\square}{\square}, \frac{18}{4} = \frac{\square}{\square}$

ج)  $\frac{5}{12} = \frac{10}{24} \rightarrow \frac{-7}{12} = \frac{\square}{\square}, \frac{5}{-7} = \frac{\square}{\square}$

اگر  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} = \frac{3}{5}$  باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف)  $\frac{c}{d-c}$

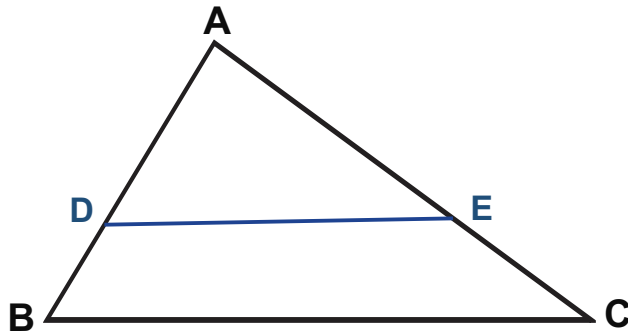
ب)  $\frac{a+b}{a-b}$

پ)  $\frac{2c-3a}{2d-3b}$



## قضیه تالس

اگر خطی موازی یکی از ضلع‌های مثلثی رسم شود، روی اضلاع دیگر آن پاره‌های متناسب ایجاد می‌کند.



$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$

## تمرین

قضیه تالس را ثابت کنید.

## استدلال

استدلال استقرایی: استدلالی که در آن بر مبنای مواردی از مشاهدات در مورد موضوعی معین، نتیجه‌گیری می‌کنیم. از جزء به کل می‌رسیم.

## تمرین

مجموع زوایای یک مثلث چند درجه است؟

استدلال استنتاجی: استدلالی است بر مبنای نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی که درسی آنها را پذیرفته‌ایم.

## تمرین

ثابت کنید مجموع زوایای داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.

مثال نقض: نوعی از استدلال است که در آن با آوردن یک مثال، یک حکم کلی رد می‌شود.

### تمرین

احکام نادرست را مشخص کنید، با آوردن یک مثال نقض نادرستی آنها را نشان دهید.

الف) همه متوازی‌الاضلاع‌ها لوزی‌اند.

ب) در هر مستطیل، قطرها با هم برابرند.

پ) هیچ عدد غیر اول که مرکب نباشد، وجود ندارد.

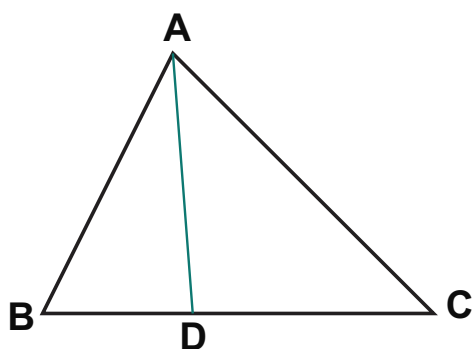
برهان خُلف: نوعی از استدلال است که در آن فرض می‌کنیم که نقیض حکم درست است. بعد با استفاده از استدلالی منطقی نشان می‌دهیم که نقیض حکم نمی‌تواند درست باشد، بعد نتیجه می‌گیریم که خود حکم درست است.

### تمرین

ثابت کنید، اگر  $n^2$  عددی فرد باشد، آن‌گاه  $n$  نیز عددی فرد است.

### تمرین

فرض کنید  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است. اگر  $BD \neq DC$  ثابت کنید:  $AB \neq AC$



قضیه دو شرطی: اگر عکس یک قضیه خود قضیه باشد، آن گاه می توان به صورت یک قضیه دو شرطی، آنها را بیان کرد. مانند قضیه فیثاغورس و عکس قضیه فیثاغورس که به صورت یک قضیه دو شرطی قابل بیان است.

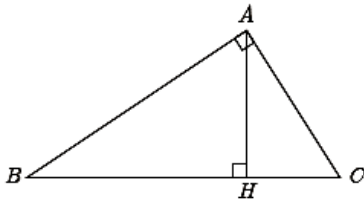
### تمرین

الف) قضیه فیثاغورس و عکس آن را بنویسید.

ب) قسمت (الف) را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

### تمرین

قضیه فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید. این قضیه دو شرطی را ثابت کنید.

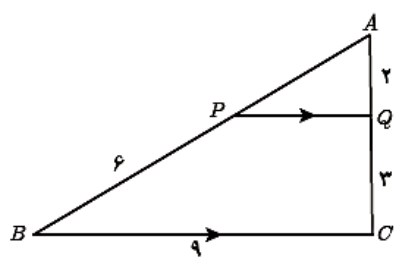


۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم الزاویه  $ABC$  را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به دست آورید.

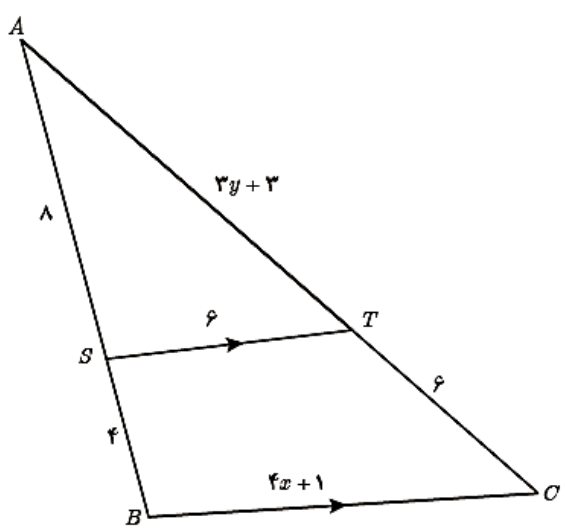
۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت  $\frac{a}{b}$  را به دست آورید.

الف)  $\frac{a}{10+a} = \frac{b}{8+b}$       ب)  $\frac{3a+10}{10+2a} = \frac{3b+7}{7+2b}$

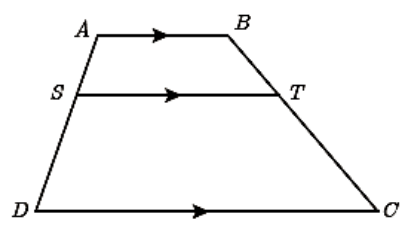
۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



۴ در شکل مقابل  $PQ \parallel BC$  است. طول پاره‌خط‌های  $AP$  و  $PQ$  را به دست آورید.



۵ در شکل مقابل  $ST \parallel BC$  است. مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



۶ در دوزنقه مقابل  $AB \parallel ST \parallel DC$  است. ثابت کنید:  $\frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$  (راهنمایی: یکی از قطر‌ها را رسم کنید.)

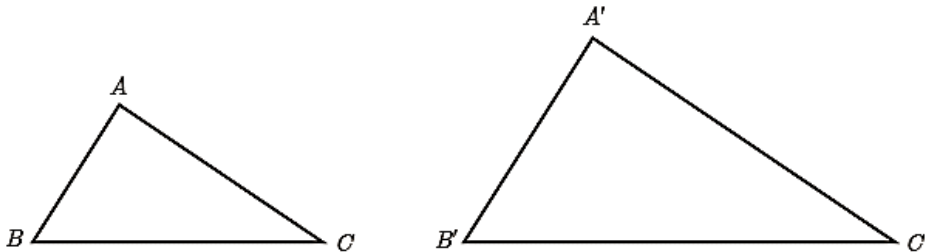
۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.  
 الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.  
 ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.  
 پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.  
 ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطه غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

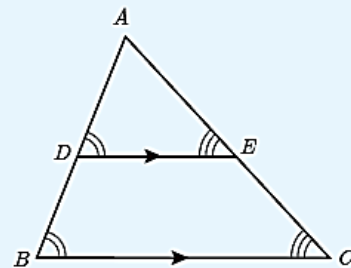
۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اول بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.  
 ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.  
 پ) در هر مثلث اندازه هر ضلع از اندازه هر ارتفاع بزرگ‌تر است.  
 ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع بر هم منطبق‌اند.

اگر دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  با هم متشابه باشند، آن گاه اضلاع شان متناسب و زوایای متناظر برابرند.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \text{ و } \hat{C} = \hat{C}' \\ \text{و} \\ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



#### قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.

#### تمرین

قضیه اساسی تشابه را بیان و اثبات کنید.



## حالت‌های تشابه دو مثلث

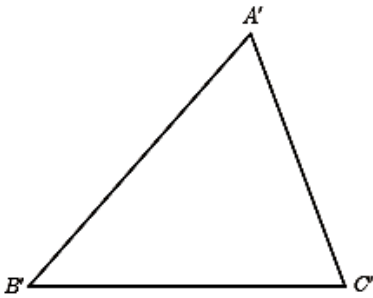
(۱) دو زاویه برابر

(۲) دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر

(۳) سه ضلع متناسب

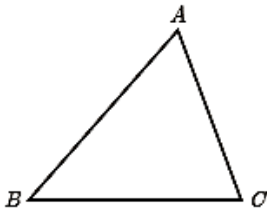
قضیه ۱: هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A} = \hat{A}' \text{ و } \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C')$$



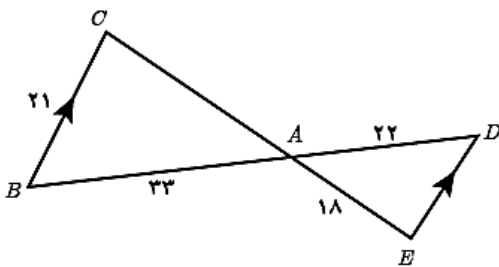
قضیه ۲: هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویه بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left( \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \right)$$



قضیه ۳: هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

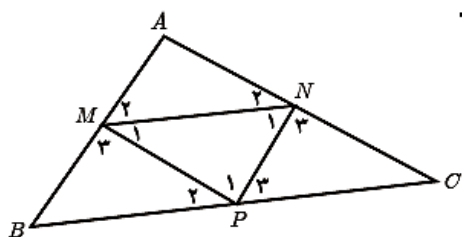
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



۱ در شکل مقابل  $BC \parallel DE$ .

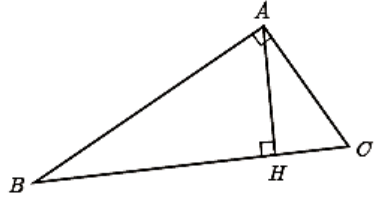
اندازه پاره خط‌های  $CA$  و  $DE$  را به دست آورید.

۲ اگر نقاط  $P$  و  $N$  و  $M$  مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث  $ABC$  باشند، ثابت کنید مثلث‌های  $ABC$  و  $MNP$  متشابه‌اند.



۳ اگر سه مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  و  $A''B''C''$  به گونه‌ای باشند که  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  و  $\triangle A'B'C' \sim \triangle A''B''C''$ ، درباره دو مثلث  $ABC$  و  $A''B''C''$  چه می‌توان گفت؟ چرا؟

فرض کنید مثلث  $ABC$  مانند شکل یک مثلث قائم الزاویه و  $AH$  ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث  $AHC$  با دو زاویه از مثلث  $ABC$  برابرند و نتیجه بگیرید:

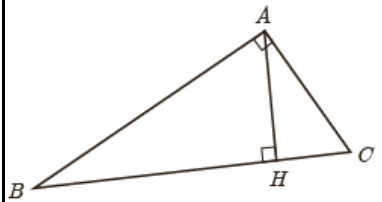
$$\triangle ABC \sim \triangle AHC$$

۲ نشان دهید دو زاویه مثلث  $AHB$  با دو زاویه از مثلث  $ABC$  برابر است و نتیجه بگیرید:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB$$

۳ از (۱) و (۲) درباره مثلث های  $AHC$  و  $AHB$  چه نتیجه ای می گیرید؟

نتیجه: در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم الزاویه به وجود می آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه اند.



$$\triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AC}{\dots} = \frac{HC}{\dots} \Rightarrow AC^2 = \dots \times \dots \quad \text{۴}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AB}{\dots} = \frac{HB}{\dots} \Rightarrow AB^2 = \dots \times \dots \quad \text{۵}$$

$$\triangle AHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AC}{\dots} = \frac{HC}{\dots} \Rightarrow AH^2 = \dots \times \dots \quad \text{۶}$$

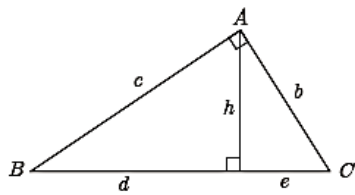
۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطه فیثاغورس را برای مثلث  $ABC$  نتیجه بگیرید.

$$BC^2 = \dots + \dots$$

۸ مساحت مثلث  $ABC$  را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$$AB \times \dots = AH \times \dots$$

در مثلث قائم الزاویه مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



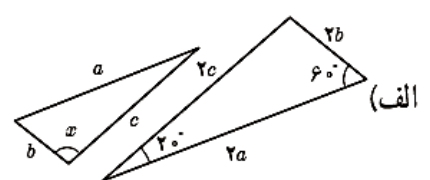
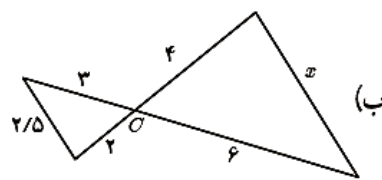
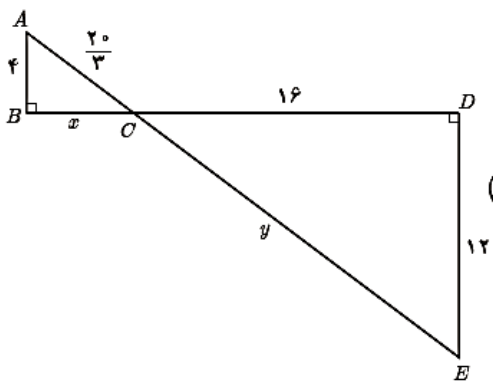
$e=?$        $d=7$        $h=5$       ۱

$c=?$        $b=?$        $e=3$        $d=5$       ۲

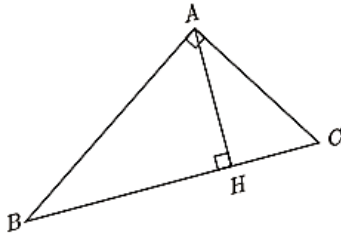
$h=?$        $b=6$        $c=8$       ۳

تمرین

۱ در هر قسمت تشابه مثلث ها را ثابت کنید و مقادیر  $x$  و  $y$  را مشخص نمایید.



۲ در مثلث قائم الزاویه روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره خط خواسته شده را به دست آورید.

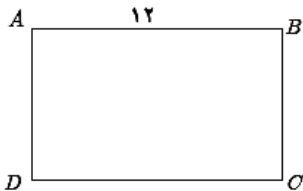


الف)  $AC=?$  و  $AB=?$  و  $AH=?$  و  $BH=9$  و  $BC=10$

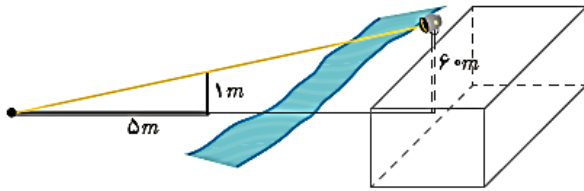
ب)  $AB=?$  و  $AH=?$  و  $BC=?$  و  $CH=2$  و  $AC=5$

پ)  $AH=?$  و  $BC=?$  و  $AC=6$  و  $AB=8$

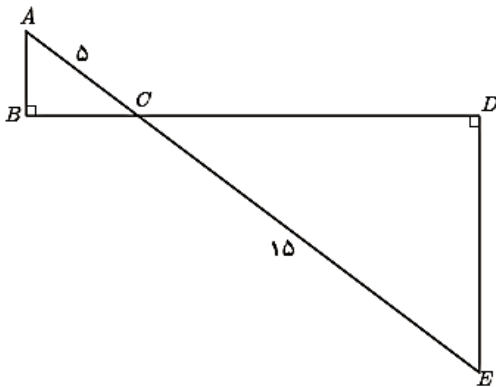
ت)  $AC=?$  و  $BC=?$  و  $BH=?$  و  $AH=6$  و  $AB=12$



۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطه A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازه عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازه عرض مستطیل را محاسبه کنید.



۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع  $6^{\circ}$  متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصله خود را تا پایه نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایه چوب برابر ۵ متر است. فاصله این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به دست آورید.

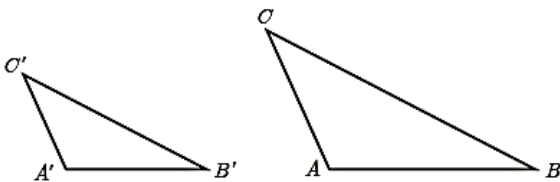
۶ دو مثلث متشابه  $ABC$  و  $A'B'C'$  را با نسبت تشابه  $K$  در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$  باشد. حال ارتفاع‌های  $AH$  و  $A'H'$  را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های  $AHB$  و  $A'H'B'$  متشابه‌اند.

ب) نسبت  $\frac{AH}{A'H'}$  را به دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های  $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$  را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  را به دست آورید.



## تمرین

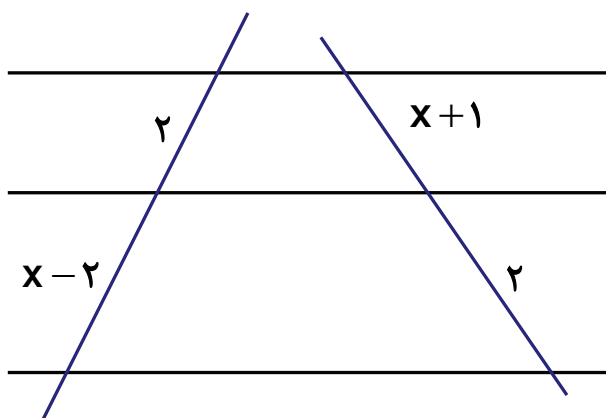
ثابت کنید در لوزی، قطرها بر هم عمودند.

## تمرین

عکس این قضیه زیر را ثابت کنید:  
"فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک اندازه است"

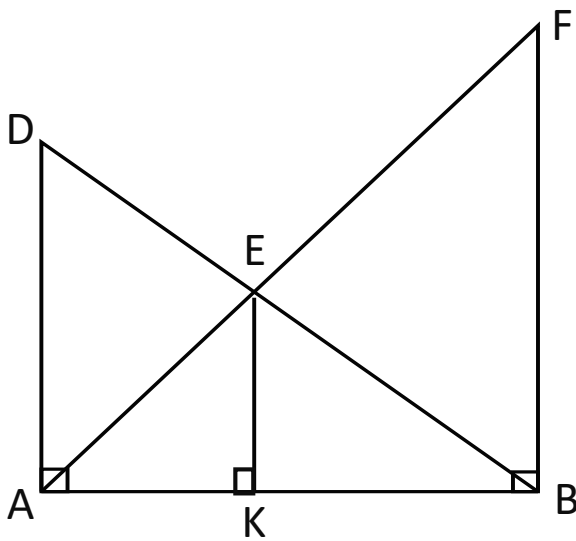
## تمرین

در شکل مقابل سه خط  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  با هم موازیند مقدار  $X$  را بدست آورید.



تمرین

در شکل مقابل DA، EK، FB بر AB عمود هستند، ثابت کنید:



الف)  $AK \cdot BE = BK \cdot DE$

ب)  $AK \cdot EF = BK \cdot AE$

پ)  $AK \cdot FB = BK \cdot DA$

تمرین

از نقطه D روی ضلع BC از مثلث ABC خطی به موازات میانه AM رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC یا امتداد آنها را در E و F قطع کند، ثابت کنید:

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AB}{AE}$$

