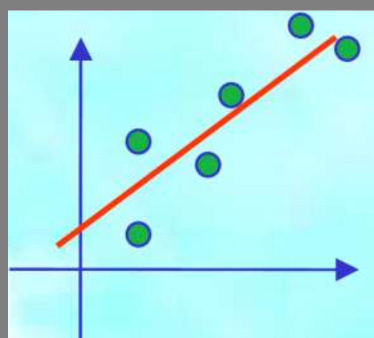
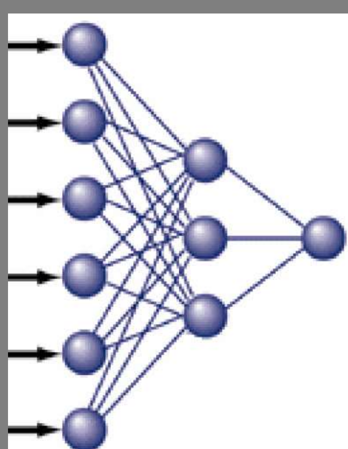
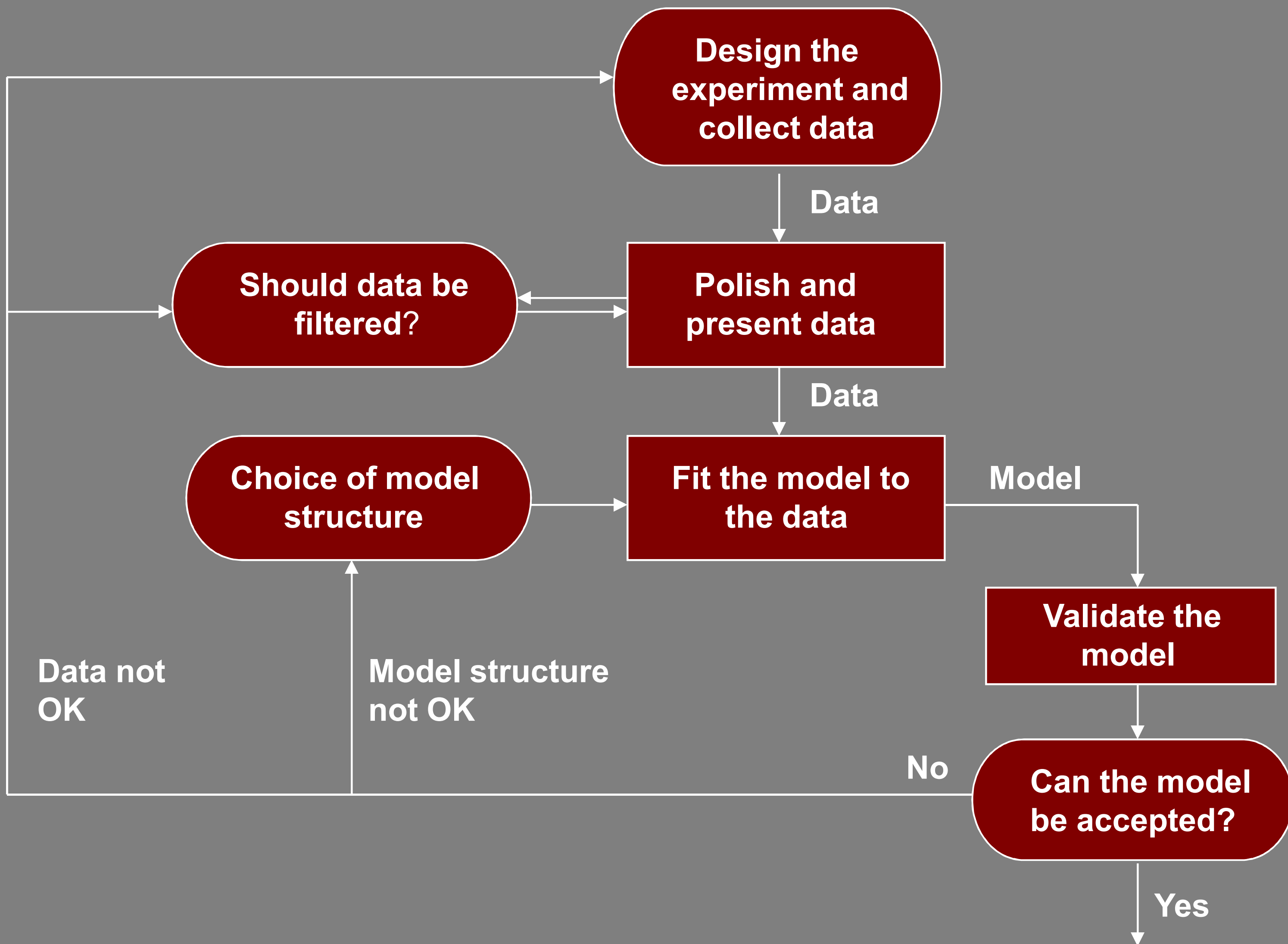
روش‌های پیش‌بینی





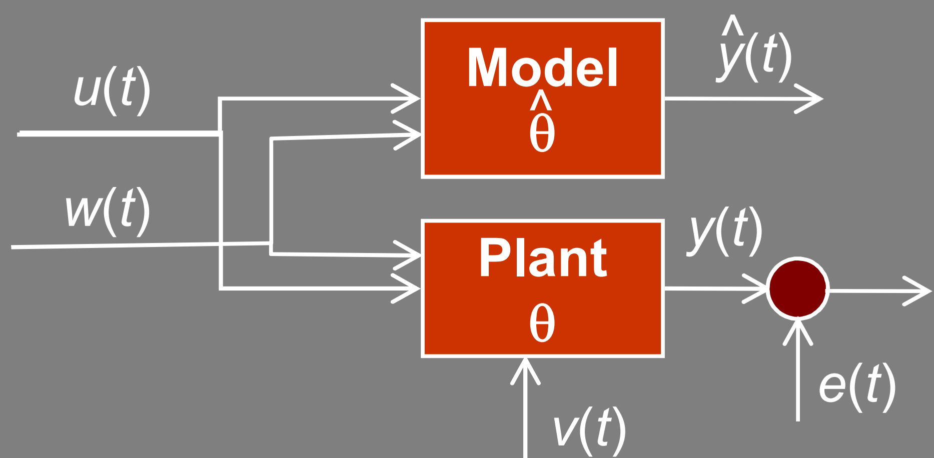
- قضاوت متخصصان (تجربه)
- روشهای خطی
  - رگرسیون خطی
  - روشهای سری زمانی
- مدل‌های غیرخطی
  - شبکه‌های عصبی مصنوعی
  - رگرسیون غیرخطی
  - استفاده از روش‌های فازی

الگوریتم مدلسازی و شناسایی سیستم



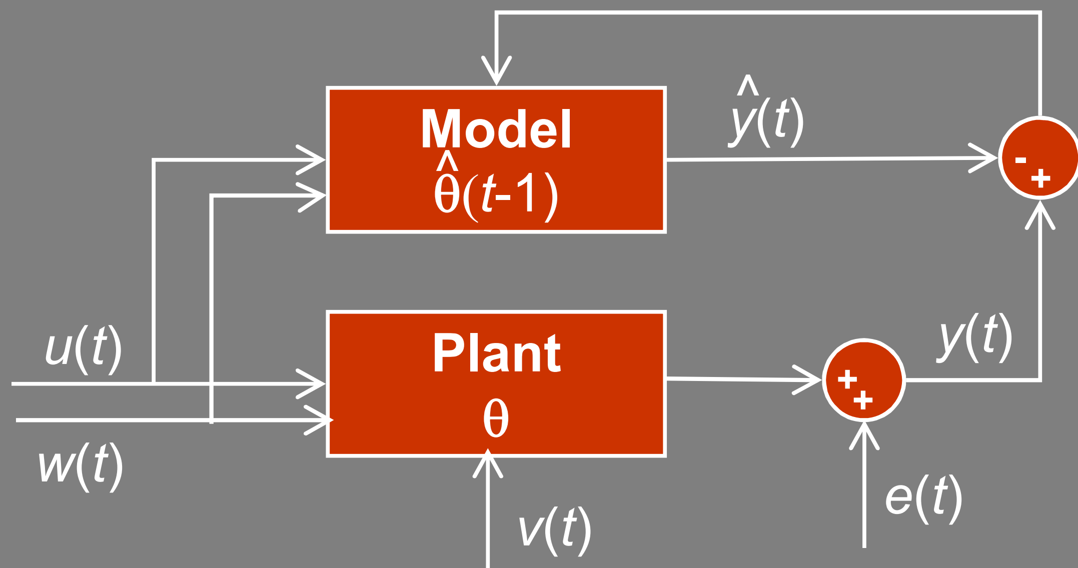
اصول شناسایی

- تخمین پارامترهای مدل با هدف کاهش اختلاف خروجی واقعی و خروجی مدل
- استفاده از اندازه‌گیری سیگنال‌های $\{x(t),\ y(t)\}$ برای شناسایی پارامترهای مجهول



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

شناسایی سیستم بصورت On-line



- $\hat{\theta},\theta$ به‌ترتیب، بردار پارامترهای واقعی و تخمین
- $u(t), w(t)$ بردارهای ورودی
- $\hat{y}(t), y(t)$ به‌ترتیب، بردار خروجی واقعی و خروجی تخمین
- $e(t)$ نویز اندازه‌گیری
- $v(t)$ اغتشاش

روش‌های مرسوم مدلسازی ریاضیاتی

- رگرسیون خطی
- سریهای زمانی
- هموارسازی نمایی عمومی
- روش فضای حالت
- روش‌های هوشمند
  - سیستم‌های خبره
  - شبکه‌های عصبی
  - سیستم‌های فازی

مثال رگرسیون خطی: پیش بینی بار الکتریکی

- وابسته به متغیرهای هواشناسی و سایر متغیرهایی که بر بار الکتریکی تاثیر می‌گذارند.

$$y(t)=a_0+a_1x_1(t)+\cdots+a_nx_n(t)+e(t)$$

- $y(t)$ = بار الکتریکی
- $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ = پارامترهای تاثیرگذار با بار الکتریکی (درجه حرارت، سرعت باد)
- $e(t)$ = یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس ثابت
- $a_0,a_1,\cdots,a_n$ = ضرایب رگرسیون

متغیرهای $x_1(t),\cdots,x_n(t)$ با انجام یکسری محاسبات آماری بر روی داده‌های گذشته شناسایی و سپس ضرایب $a_0,a_1,\cdots,a_n$ حداقل مربعات خطا برآورد می‌شوند.

سری‌های زمانی

- متغیر مطلوب بعنوان خروجی یک فیلتر خطی که یک ورودی تصادفی دارد، مدل می‌شود

بسته به نوع فیلتر خطی، چند نوع مدل بدست می‌آید:

- AR (Autoregressive)
- MA (Moving Average)
- ARMA (Autoregressive Moving Average)
- ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average)
- Transfer Function Modeling

AR (Autoregressive)

- در این مدل، مقدار فعلی خروجی بصورت ترکیب خطی وزن‌دار از مقادیر گذشته خروجی و یک نویز تصادفی می‌باشد.

$$y(t)=\phi_1 y(t-1)+\phi_2 y(t-2)+\cdots+\phi_p y(t-p)+a(t)$$

بطور خلاصه:

$$\phi(B)y(t)=a(t)$$

$$\phi(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p$$

با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری وزن‌های مدل بدست می‌آیند.

MA (Moving Average)

- در این مدل، مقدار فعلی خروجی بصورت ترکیب خطی وزن‌دار از مقادیر فعلی و گذشته یک نویز سفید می‌باشد.

$$y(t)=a(t)-\theta_1 a(t-1)-\theta_2 a(t-2)-\cdots-\theta_q a(t-q)$$

بطور خلاصه:

$$y(t)=\theta(B)a(t)$$

$$\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q$$

ARMA (Autoregressive Moving Average)

- در این مدل، مقدار فعلی خروجی بصورت ترکیب خطی وزن‌دار از مقادیر گذشته خروجی و مقادیر فعلی و گذشته یک نویز سفید می‌باشد.

$$y(t)=\phi_1 y(t-1)+\phi_2 y(t-2)+\cdots+\phi_p y(t-p)+a(t)-\theta_1 a(t-1)-\theta_2 a(t-2)-\cdots-\theta_q a(t-q)$$

بطور خلاصه:

$$\phi(B)y(t)=\theta(B)a(t)$$
$$\phi(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p$$
$$\theta(B)=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q$$

ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average)

- مدل‌های قبلی همه برای پروسه‌های Stationary استفاده می‌شوند. یعنی پروسه‌هایی که میانگین و کواریانس آنها با زمان ثابت است.
- اگر پروسه Stationary نباشد، ابتدا باید آن را به Stationary تبدیل کرد. روش: استفاده از عملگر مشتق

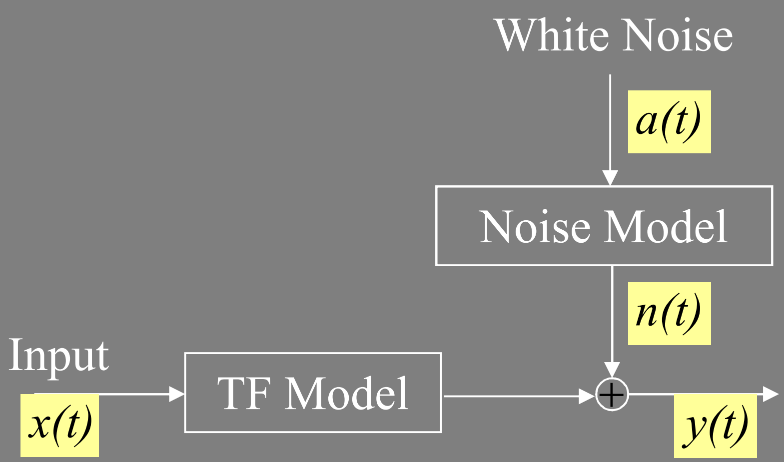
$$\nabla y(t) = y(t) - y(t-1)$$
$$\nabla^d y(t) = (1-B)^d y(t)$$

مدل پیشنهادی

$$\phi(B)\nabla^d y(t) = \theta(B)a(t)$$
$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

Transfer Function Modeling

- تاثیر هر ورودی بصورت یک تابع تبدیل نشان داده می‌شود.
- $n(t)$ نویز رنگی
- b تاخیر



$$y(t)=\frac{\omega(B)}{\sigma(B)}x(t-b)+n(t)$$

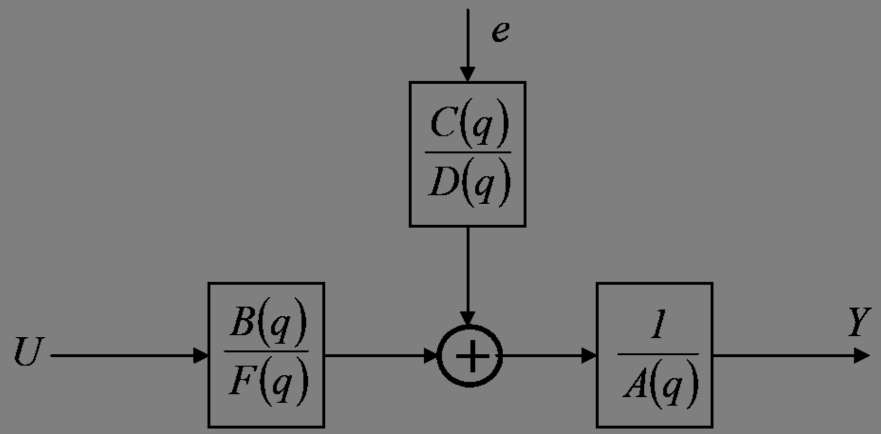
$$\omega(B)=\omega_0-\omega_1 B-\omega_2 B^2-\cdots-\omega_r B^r$$

$$\sigma(B)=1-\sigma_1 B-\sigma_2 B^2-\cdots-\sigma_s B^s$$

ساختار کلی مدل سری زمانی

$$y(t) = q^{-k} G\left(q^{-1},\theta\right) u\left(t\right) + H\left(q^{-1},\theta\right) e\left(t\right)$$

- $u(t)$ و $y(t)$ ورودی و خروجی سیستم
- G تابع تبدیل قسمت یقینی (Deterministic) سیستم است.
- H تابع تبدیل قسمت غیریقینی (Stochastic) سیستم است.
- $e(t)$ نویز سفید با میانگین صفر



مدل‌های ARX و ARMAX

$$y(t)+a_1 y(t-1)+.....+a_{na} y(t-na) \triangleq (1+a_1 q^{-1}+.....+a_{na} q^{na})y(t)$$

ARX

$$A(q)y(t)=B(q)u(t)+e(t)$$

ARMAX

$$A(q)y(t)=B(q)u(t)+C(q)e(t)$$

$$A(q)=1+a_1 q^{-1}+....+b_{na} q^{-na}$$

$$B(q)=b_1+b_2 q^{-1}+....+b_{nb} q^{-nb+1}$$

$$C(q)=1+c_1 q^{-1}+....+c_{nc} q^{-nc}$$

درجه چندجمله‌ای بیانگر تعداد پارامترهای مجهول مدل می‌باشد.

مدل‌های ARX و ARMAX

ARX: **Auto Regressive eXogenous input**

$$
\begin{aligned}
&y(t)+a_1 y(t-1)+\ldots+a_{na} y(t-na)= \\
&b_1 u(t-nk)+b_2 u(t-nk-1)+\ldots+b_{nb} u(t-nk-nb+1)+e(t)
\end{aligned}
$$

ARMAX: **Auto Regressive Moving Average eXogenous input**

$$
\begin{aligned}
&y(t)+a_1 y(t-1)+\ldots+a_{na} y(t-na)= \\
&b_1 u(t-nk)+b_2 u(t-nk-1)+\ldots+b_{nb} u(t-nk-nb+1)+ \\
&y(t)e(t)+c_1 y(t-1)e(t)+\ldots+c_{nc} y(t-nc)e(t)
\end{aligned}
$$

مدل رگرسیون خطی

- مدل پیشنهادی ARX

$$\hat{y}(t)=B(q)u(t)+\left(1-A(q)\right)y(t)$$

- پارامترهای مجهول مدل

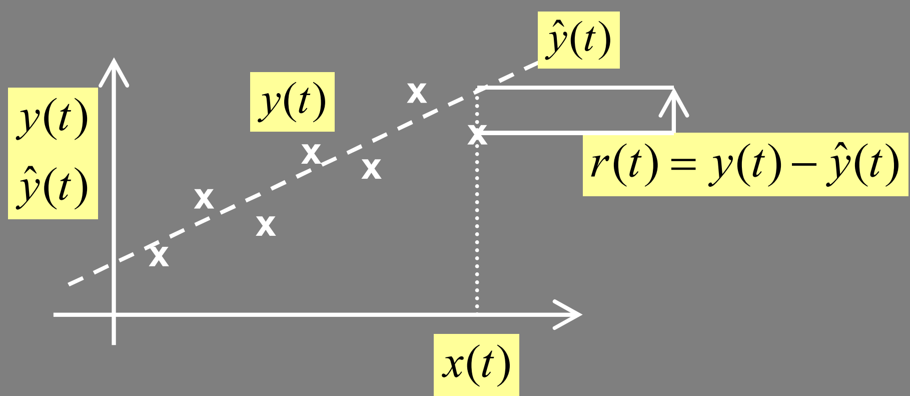
$$\boldsymbol{\theta}=[-a_1,\ldots,-a_n,b_1,\ldots,b_m]^T$$

- مدل رگرسیون خطی

$$\hat{y}(t\,|\,\boldsymbol{\theta})=\mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\theta}$$

- بردار معلوم

$$\mathbf{x}(t)=[y(t-1),\ldots,y(t-n),u(t-1),\ldots,u(t-m)]^T$$



مثال ساده

مدل رگرسیون خطی

$$\begin{bmatrix} 2 & -0.8 \\ -1.2 & 2 \\ -1 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.95 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

دو مجهول و سه نقطه داده

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & -0.8 \\ -1.2 & 2 \\ -1 & 0.85 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.95 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.26 \\ 0.85 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 6.44 & -4.85 \\ -4.85 & 5.36 \end{bmatrix}$$

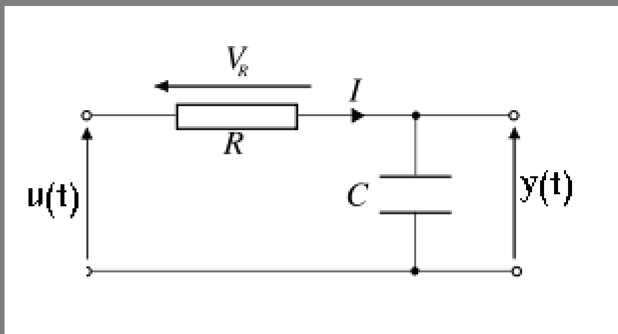
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

$$\left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4870 & 0.4404 \\ 0.4404 & 0.5848 \end{bmatrix}$$

پاسخ روش حداقل مربعات

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = [0.988 \quad 1.052]^T$$

مدلسازی مدار RC



- معادلات مدار RC سری

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

$$RC\frac{y(t+1)-y(t)}{\Delta}+y(t)=u(t)$$

$$y(t)+\left(\tfrac{\Delta}{RC}-1\right)y(t-1)=\tfrac{\Delta}{RC}u(t-1)$$

تعریف : $q^{-1}y(t)=y(t-1)$

$$A(q)y(t)=B(q)u(t)$$

$$A(q)=1+\left(\tfrac{\Delta}{RC}-1\right)q^{-1} \qquad B(q)=\tfrac{\Delta}{RC}q^{-1}$$

مدلسازی مدار RC

- فرض کنید Δ/RC=0.5

$$y(t) = 0.5y(t-1) + 0.5u(t-1)$$

- `>> X=[y(1:end-1)' u(1:end-1)];`
- `>> y1 = y(2:end)';`
- end طول بردار داده است.
- اضافه نمودن نویز تصادفی گوسین به خروجی
- `y1e = y1+0.05*randn(size(y1));`

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.5 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0.992 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ \vdots \\ 0.996 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}_e = \mathbf{y} + \aleph(0,0.01) = \begin{bmatrix} 0.037 \\ 0.510 \\ 0.774 \\ \vdots \\ 1.008 \end{bmatrix}$$

مدلسازی مدار RC

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5.3489 & 6.0078 \\ 6.0078 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5.57 \\ 6.89 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^{-1} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.194 & -0.897 \\ -0.897 & 0.799 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\mathbf{X}^T\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{y}$$

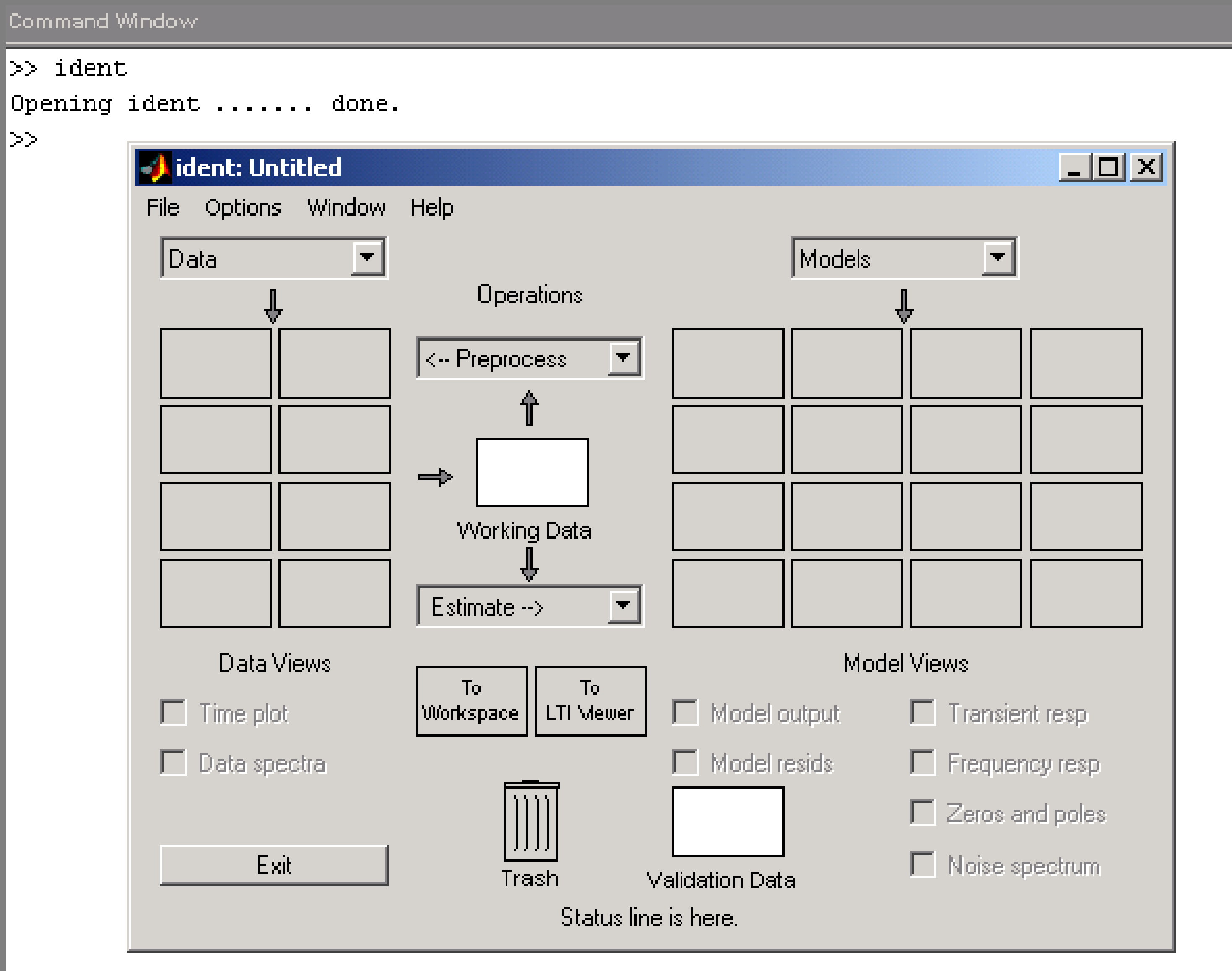
$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.4756 & 0.5173 \end{bmatrix}^T$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0.511 & 0.744 & \cdots & 0.9744 \end{bmatrix}^T$$

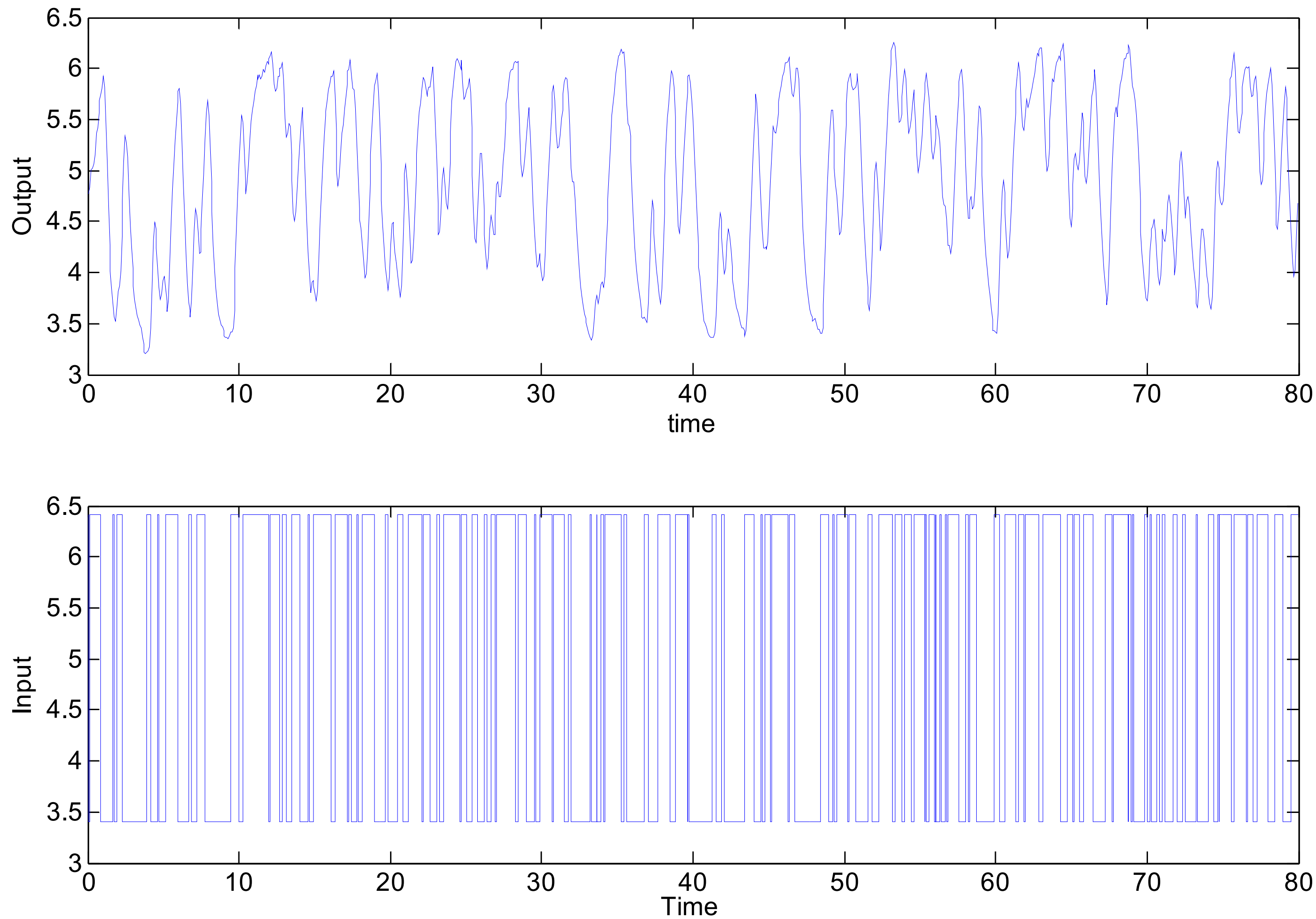
$$r = \begin{bmatrix} 0.0367 & -0.001 & 0.029 & \cdots & 0.033 \end{bmatrix}^T$$

$$\|r\|_2^2 = 0.073$$

جعبه ابزار Ident در نرم‌افزار Matlab



انتخاب ورودی-خروجی



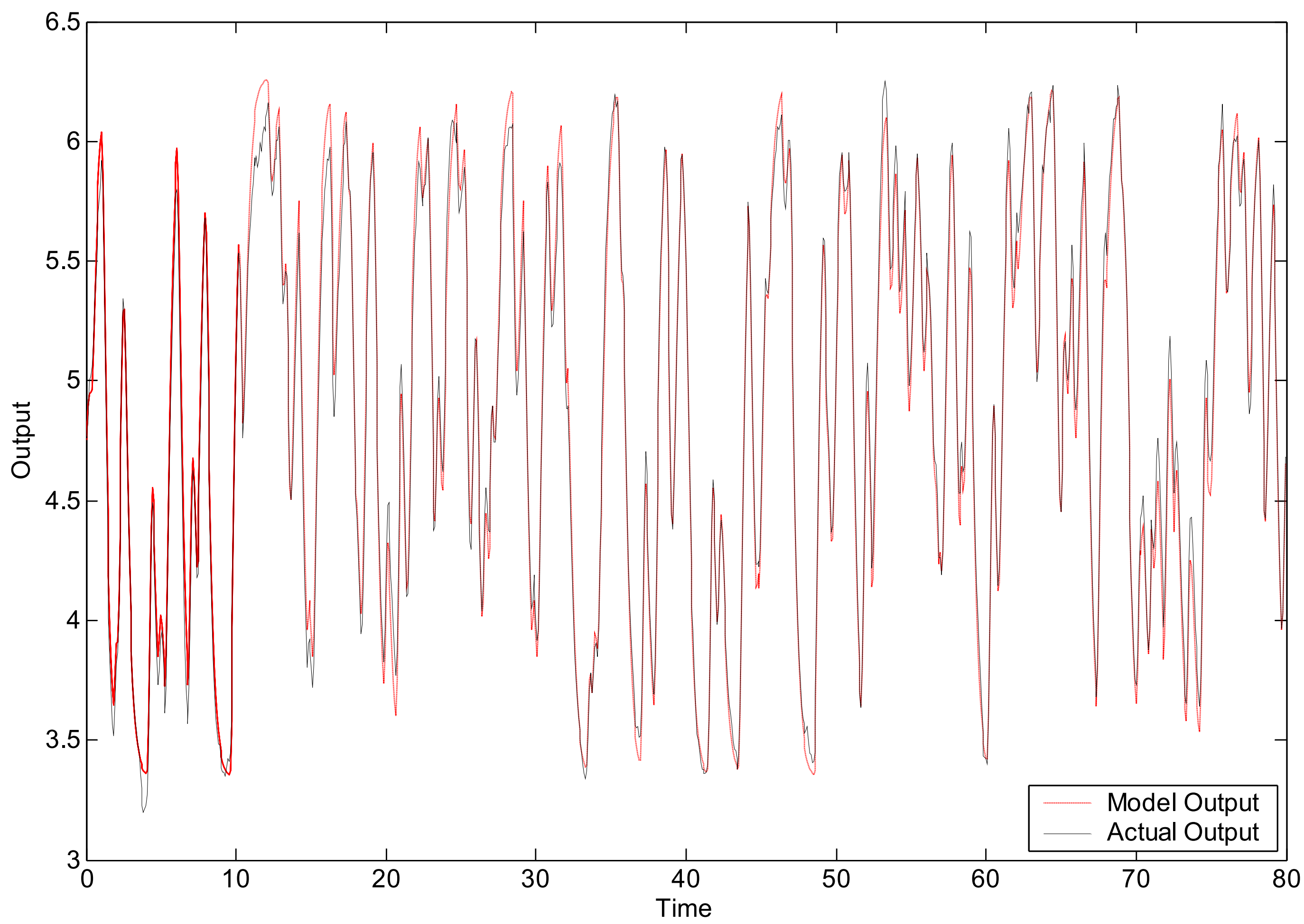
مدلسازی توسط جعبه ابزار Ident

- انتخاب نوع مدل (پارامتری مانند ARX، غیرپارامتری)
- درجه مدل پارامتری
- انتخاب مدل و کشیدن آن به داخل آیکون To workspace

Discrete-time model: A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)
A(q) = 1 - 1.126 q^-1 + 0.07693 q^-2 + 0.2463 q^-3 - 0.07202 q^-4
B(q) = 0.0007068 q^-1 + 0.005736 q^-2 + 0.06306 q^-3 + 0.0529 q^-4

Estimated using ARX from data set Dryer
Loss function 0.00150109
Sampling interval: 0.08

مقایسه پاسخ مدل و خروجی واقعی



General Exponential Smoothing

- در این مدل، مقدار فعلی خروجی با تابع زیر فرموله می‌شود:

$$y(t) = \beta(t)^T f(t) + \varepsilon(t)$$

$f(t)$ تابع

$\beta(t)$ بردار ضرایب

$\varepsilon(t)$ نویز سفید

T اپراتور ترانهاده

تخمین ضرایب با کمینه‌سازی متوسط مربعات خطا برای N نمونه حاصل می گردد.

$$\sum_{j=0}^{N-1} w^j \left[y(N-j) - f^T(-j)\beta \right]^2$$

مدلسازی با استفاده از GES

- با استفاده از بسط سری فوریه می‌توان هر تابع غیرخطی را بصورت مجموع جملات سینوسی وزن‌دار نوشت:

$$y(t)=c+\sum_{i=1}^{m}\left(a_i\, sin\left(\omega_i t\right)+b_i\, cos\left(\omega_i t\right)\right)$$

$$f(t)=\begin{bmatrix}1\\ sin\left(\omega_1 t\right)\\ cos\left(\omega_1 t\right)\\ \vdots\\ sin\left(\omega_m t\right)\\ cos\left(\omega_m t\right)\end{bmatrix}$$

- هدف یافتن بهترین ضرایب a_i, b_i است.