مختصات در $\mathbb{R}^3$ (ادامه):

معادله خط:

مشابه با فرمول معادله خط در $\mathbb{R}^2$ (صفحه) که با یک نقطه $P=(x_0,y_0)$ و شیب m نوشته می‌شد:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

در فضای $\mathbb{R}^3$ با داشتن یک نقطه $P=(x_0,y_0,z_0)$ و داشتن بردار هادی (بردار موازی با خط مدنظر، به جای شیب که در $\mathbb{R}^3$ قابل استفاده نیست) می‌توان معادله خط را نوشت:

اطلاعات موجود و معلوم:

(۱) نقطه $P=(x_0,y_0,z_0)$

(۲) بردار هادی (موازی) $\vec{m}=ai+bj+ck$ (که به فرم $\vec{m}=(a,b,c)$ نیز است)

$\Downarrow$

فرم پارامتری معادله خط

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \quad , t\in\mathbb{R}$$

یا

فرم تقارنی معادله خط

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

نکته: فرم پارامتری از این جهت نام‌گذاری شده است که از یک متغیر یا پارامتر کمکی استفاده می‌کند. این پارامتر معمولاً به لحاظ فیزیکی زمان نامیده می‌شود. (t)

با مقداردهی به t می‌توان نقاط واقع بر خط (یا صادق در فرمول خط) را پیدا کرد.

Scanned by CamScanner

مثال: معادله پارامتری خطی را بنویسید که از نقطه $(4,-3,2)$ عبور کند و موازی بردار $m=(14,7,0)$ باشد. دو نقطه دیگر واقع بر خط را بیابید.

حل: معلومات مسأله:

نقطه واقع بر خط: $P=(\overset{x_0}{4},\overset{y_0}{-3},\overset{z_0}{2})$

بردار هادی (موازی خط) $m=(\overset{a}{14},\overset{b}{7},\overset{c}{0})$

فرم پارامتری

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \Longrightarrow \begin{cases} x=14t+4 \\ y=7t+(-3) \\ z=\underbrace{\cancel{0t}}_{0}+2 \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

معادله خط

برای پیدا کردن دو نقطه واقع بر خط کافیست به t مقادیر متفاوتی بدهیم.

اگر $t=0$ $\Leftarrow$ همان نقطه P در فرض مسأله

اگر $t=1$ $\Leftarrow$ $(x=18,\ y=4,\ z=2)$

اگر $t=-1$ $\Leftarrow$ $(x=-10,\ y=-10,\ z=2)$

$\square$

پایان مثال

نکته: در فرم تقارنی اگر یکی از مولفه‌های بردار صفر باشد، مخرج صفر می‌شود. در این صورت کسر مربوط به مخرج صفر را حذف می‌کنیم و به صورت جداگانه مولفه نقطه را می‌نویسیم.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از مبداء عبور کند و موازی خط l زیر باشد:

$$l: \begin{cases} x = 5t - 3 \\ y = 3 \\ z = -2t + 7 \end{cases}$$

حل: بردار موازی خط l که موازی خط مجهول مسأله نیز است، همان ضرایب t می‌باشد پس:

$$m = (5, 0, -2) = 5i + 0j - 2k$$

مبداء: نقطه (از فرض) $= P = (0, 0, 0)$

لذا باید طبق فرم تقارنی داشته باشیم:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \Rightarrow \frac{x - 0}{5} = \cancel{\frac{y - 0}{0}} = \frac{z - 0}{-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = 0}$$ مولفه عدم تقارن

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{z}{-2} \quad \text{و} \quad y = 0$$

Scanned by CamScanner

مثال: معادله خط گذرا از نقطه (۴و۳و-۱) را بنویسید که بر خط l

$$l: \frac{x-2}{3} = \frac{4-y}{5} = \frac{2z+6}{2}$$

و بردار $\vec{a} = 2i - 3j$ عمود باشد.

حل: راه اول:

بردار موازی خط l: $(3, -5, 1)$ $(?) \Rightarrow b = 3i - 5j + k$

بردار a: $a = 2i - 3j + 0k$

پس بردار عمود بر خط l و بر بردار a حاصل ضرب خارجی آن دو است که موازی خط مجهول است:

$$m = a \times b \xlongequal{\begin{matrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{matrix}} (-3-0)i - (2-0)j + (-10+9)k$$

$$\Rightarrow m = -3i - 2j - k$$

راه دوم:

حال با داشتن بردار موازی خط و نقطه P (از فرض) مسئله معادله خط را می‌نویسیم:

$P = (4, 3, -1)$

$m = -3i - 2j - k$

$\Longrightarrow$ تقارنی (دکارتی): $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1}$

Scanned by CamScanner

مثال: معادله خط گذرا از دو نقطه $A=(۲,۰,۱)$ و $B=(۳,۲,-۲)$ را بیابید.

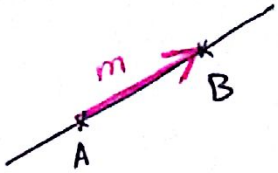
حل: معلومات مورد نیاز مسأله:

یک نقطه: هر نقطه از دو نقطه بالا، به دلخواه: $A=(\overset{x_0}{۲},\overset{y_0}{۰},\overset{z_0}{۱})$

بردار هادی

$$m=\overrightarrow{AB}\xrightarrow[\text{ابتدا}]{\text{انتهای}}(۳-۲,۲-۰,-۲-۱)$$

$$=\underset{a}{۱}i+\underset{b}{۲}j-\underset{c}{۳}k$$



لذا معادله پارامتری خط بصورت زیر است:

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \\ z=ct+z_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=۱t+۲ \\ y=۲t+۰ \\ z=-۳t+۱ \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

معادله صفحه :

معادله صفحه گذرا از یک نقطه $P=(x_0,y_0,z_0)$ واقع بر آن که یک بردار عمود (نرمال) آن $\vec{n}=(A,B,C)=Ai+Bj+Ck$ می باشد به صورت

$$Ax+By+Cz=\underbrace{Ax_0+By_0+Cz_0}_{\text{عدد}}$$

می باشد.

معلومات: یک نقطه: $P=(x_0,y_0,z_0)$

بردار عمود بر صفحه (نرمال): $n=Ai+Bj+Ck$

معادله صفحه

$$\boxed{Ax+By+Cz=\underbrace{Ax_0+By_0+Cz_0}_{D}}$$

مثال: معادله صفحه‌ای را بیابید که از نقطه $(-1,4,2)$ می‌گذرد و بردار نرمال آن $(2,3,4)$ است. محل برخورد این صفحه با محورهای مختصات را یافته و آن را رسم کنید.

حل: ① ابتدا نوشتن معادله صفحه: معلومات: نقطه $P=(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{4},\overset{z_0}{-1})$ و بردار نرمال $\vec{n}=\overset{A}{2}i+\overset{B}{3}j+\overset{C}{4}k$

لذا داریم:

$$2x+3y+4z=2\times2+3\times4+4(-1)=12$$

$$\Rightarrow \boxed{2x+3y+4z=12}$$ معادله صفحه

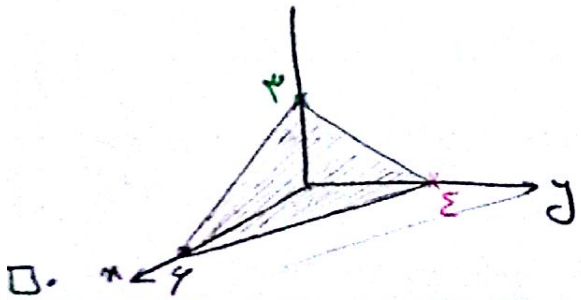
② برای نوشتن محل برخورد صفحه با محورهای مختصات یعنی محاسبه قطع های صفحه:

اگر $x=y=0$ (معادله محور z) آنگاه $4z=12$ پس $z=3$. قطع روی محور z: $(0,0,3)$

اگر $x=z=0$ آنگاه $3y=12$ پس $y=4$. قطع روی محور y: $(0,4,0)$

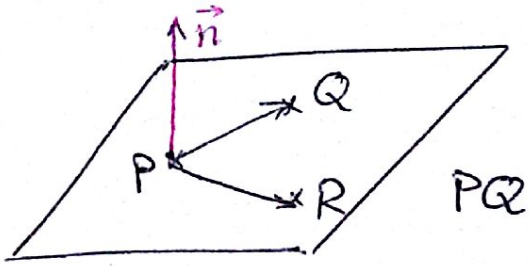
اگر $y=z=0$ آنگاه $2x=12$ پس $x=6$. قطع روی محور x: $(6,0,0)$

③ قطع‌ها را رسم می‌کنیم و صفحه گذرا از آنها را رسم می‌کنیم.



Scanned by CamScanner

مثال: معادله صفحه‌ای را پیدا کنید که از نقاط $P(1,3,2)$ ، $Q(3,-1,6)$ و $R(5,2,0)$ می‌گذرد.



حل:

$$PQ = (3-1, -1-3, 6-2) = 2i - 4j + 4k$$

$$PR = (5-1, 2-3, 0-2) = 4i - j - 2k$$

این دو بردار موازی صفحه مجهول (خواسته شده) می‌باشند. لذا بردار عمود $\vec{n}$ بصورت زیر است:

$$\vec{n} = PQ \times PR \overset{\begin{matrix} 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{matrix}}{=\!=\!=} (8+4)i - (-4-16)j + (-2+16)k = 12i + 20j + 14k$$

حال برای نوشتن معادله صفحه: معلومات: نقطه $P(1,3,2)$ و بردار نرمال $\vec{n} = 12i + 20j + 14k$:

پس:

$$\boxed{12x + 20y + 14z \underset{12\times1+20\times3+14\times2}{=\!=\!=} 100}$$

□.

Scanned by CamScanner

مثال: نقطه برخورد خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ با صفحه $2x+3y+z-11=0$ را بیابید.

ابتدا براساس معادله خط ارتباط بین x، y و z را با پارامتر کمکی t (همانند معادله پارامتری خط) می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}=t \Rightarrow x=2t+1 \\ \frac{y+1}{-1}=t \Rightarrow y=-t-1 \\ \frac{z}{3}=t \Rightarrow z=3t \end{cases} \quad (*)$$

حال عبارات حاصل را در معادله صفحه جایگذاری می‌کنیم:

$$2x+3y+z-11=0 \Rightarrow 2(2t+1)+3(-t-1)+(3t)-11=0$$

$$\Rightarrow 4t-12=0 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

با جایگذاری $t=3$ در $(*)$ نقطه مورد نظر بدست می‌آید:

$$\boxed{(x=7\ ,\ y=-4\ ,\ z=9)}$$

با جایگذاری نقطه حاصل در هر دو معادله می‌توان صحت آن را بررسی نمود.

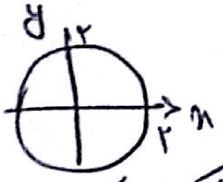
Scanned by CamScanner

استوانه ها:

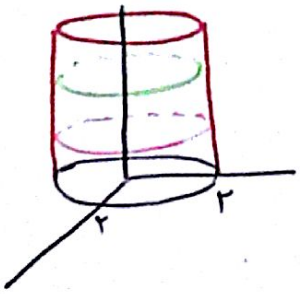
~~[illegible]~~ اگر در یک فضای سه بعدی فرمولی دو متغیره داشته باشیم به این معناست که متغیر سوم آزاد است و می‌تواند هر عددی از $\mathbb{R}$ را انتخاب کند. به لحاظ هندسی این موضوع نشان می‌دهد که در تمام صفحات عمود بر محور سوم (محور متغیر سوم) شکل فرمول دو متغیره بصورت یکسان و یک اندازه تکرار شده است یا کپی برداری شده است. به چنین سطحی یک استوانه می‌گوییم که کلی‌تر از مفهوم یک استوانه در ذهن عامه مردم است.

به صورت ریاضی فرمول $f(x,y)=0$ یا $y=f(x)$ در فضای سه بعدی استوانه‌ای است که با کپی برداری و روی هم قرار دادن شکل فرمول فوق در امتداد محور z ساخته می‌شود.

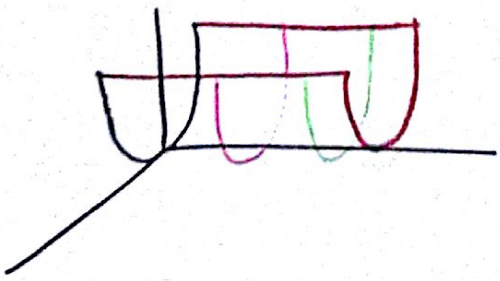
مثال ۱. $x^2+y^2=4$ در $\mathbb{R}^2$ یک دایره است:



این فرمول در $\mathbb{R}^3$، به ازای تمام صفحات رازی با صفحه کف یک دایره مانند شکل بالا است پس یک استوانه خواهد داد:



مثال ۲. $z=x^2$ در صفحه xz یک سهمی است و در $\mathbb{R}^3$ استوانه‌ای است که با کپی برداری از سهمی مذکور در امتداد محور y ساخته می‌شود:



«همانند یک ناودانی»

Scanned by CamScanner