

MIT Integration Bee

سوالات ۲۰۱۵ - بخش اول

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



@AvaEducation16



@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [REDACTED] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [REDACTED] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت 💡 نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 - بسیار ساده 🧐 جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 - ساده 🧐 جهت تثبیت مطالب
 - متوسط 🧐 جهت تمرین بیشتر مطالب
 - سخت 🧐 جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مقدمه

رقابت انتگرال که موسوم به Integration Bee است سالانه در برخی دانشگاه‌های معتبر برگزار می‌شود و دانشجویان در مدت مشخص به ۲۰ سوال که عمدتاً مربوط به انتگرال است پاسخ می‌دهند. هرچند از مشتق و انتگرال دوگانه، نظریه اعداد و سری‌ها هم مسئله غیرمستقیم مطرح می‌شود. در این بخش چند سوال از این آزمون ارائه و حل می‌شود.

۲ مسئله

حاصل انتگرال‌های زیر را بدست آورید.

الف- $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$

ب- $\int_0^8 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

ج- $\int \sec x dx$

۳ روش حل مسئله

الف-  پاسخ:

$$\begin{aligned} \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx &= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\ &= \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x + C \end{aligned}$$

ب-  پاسخ: از تغییر متغیر استفاده می‌شود.

$$u = \sqrt{x}, \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

با این متغیر، کران‌ها هم تحت تاثیر قرار می‌گیرند.

$$x = 0, \quad \Rightarrow \quad u = 0, \quad x = 8, \quad \Rightarrow \quad u = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^8 \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^{2\sqrt{2}} (\cos u)(2du) \\ &= 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \cos u du \\ &= 2 \left[\sin u \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= 2 \sin 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ج-  پاسخ: سکانت معادل $\frac{1}{\cos x}$ است.

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx \end{aligned}$$

از تغییر متغیر $u = \sin x$ استفاده می‌شود.

$$u = \sin x, \quad \Rightarrow \quad du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx &= \int \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du \\ &= \frac{1}{2} (-\ln |1 - u| + \ln |1 + u|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + u}{1 - u} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \\ \Rightarrow \int \sec x dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| + C \end{aligned}$$

رابطه فوق پاسخ مسئله است اما این رابطه به شکل‌های دیگری هم قابل نمایش است. می‌توان

صورت و مخرج کسر را در $1 + \sin x$ ضرب کرد:

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1 + \sin x)^2}{\cos^2 x} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C\end{aligned}$$

رابطه فوق نمایش دیگری از پاسخ انتگرال بود. نمایش‌های دیگر هم وجود دارد که با توجه به تعریف تانژانت برای سینوس و کسینوس قابل ارائه است.

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}, \quad \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{💡}$$

با توجه به نکته اخیر می‌توان پاسخ انتگرال را بر حسب تانژانت هم نمایش داد:

$$\int \sec x dx = \ln \left| \frac{1 + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}}{\frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}} \right| + C = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C$$

بسیاری از مردم می‌ترسند آنچه
می‌خواهند را بیان کنند، اصلاً به همین
دلیل است که به آنچه می‌خواهند
نمی‌رسند.



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com