پاسخ تمرین های سری اول

توجه کنید:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)\qquad p=2L$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\qquad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx=\frac{\text{مساحت ناحیه زیر نمودار در یک پریود}}{\text{طول بازه یک پریود}}$$

تمرین 1: سری فوریه $f(x)=x+|x|\ ,\ -1<x<1$ را بیابید.

حل:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -1<x<0\\ 2x & 0\leq x<1\end{cases}\qquad \frac{a_0}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}\qquad p=2L=2$$

$$a_n=\frac{1}{1}\int_0^1 2x\cos n\pi x\,dx \overset{\star}{=} \frac{2x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}-\frac{1}{(n\pi)^2}$$

$$a_n=\begin{cases}0 & n:\text{زوج}\\ \frac{-2}{(n\pi)^2} & n:\text{فرد}\end{cases}$$

توضیح برای محاسبه ی انتگرال ★:

مشتق	انتگرال
$2x$	$\cos n\pi x$
2	$\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$
0	$-\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x$

$$b_n=\int_0^1 2x\sin n\pi x\,dx=-\frac{2x}{n\pi}\cos(n\pi)x+\frac{2}{(n\pi)^2}\sin(n\pi)x\Big|_0^1=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

مشتق	انتگرال
$2x$	$\sin n\pi x$
2	$\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$
0	$\frac{-1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x$

درنهایت:

$$f(x)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{((2n-1)\pi)^2}\cos(2n-1)\pi x+\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi)x\right)$$

۲) سری فوریه $\begin{cases} f(x)=\cos 3x & 0<x<\pi \\ f(x)=-f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$ را بیابید.

$f(x)$ تابعی فرد با دوره تناوب $p=2\pi$ می‌باشد لذا $a_n=0$ و b_n را محاسبه می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} \cos 3x & 0<x<\pi \\ -\cos 3x & -\pi<x<0 \end{cases} \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 3x \sin nx \, dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+3)x+\sin(n-3)x\right]dx=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+3)x}{n+3}-\frac{\cos(n-3)x}{n-3}\right]\Big|_0^{1}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-6\sin n \sin 3-2n\cos n\cos 3}{n^2-9}+\frac{2n}{n-3}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-6\sin n\sin 3-2n\cos n\cos 3}{n^2-9}+\frac{2n}{n-3}\right)\sin nx$$

۳) سری فوریه $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0<x<1 \\ -x^2 & -1<x<0 \end{cases}$ را بیابید.

$f(x)$ تابعی فرد است با دوره تناوب $p=2$ پس $a_n=0$ و باید b_n حساب شود

$$b_n=2\int_0^1 x^2\sin n\pi x\,dx=\frac{-x^2}{n\pi}\cos n\pi x+\frac{2x}{(n\pi)^2}\sin n\pi x+\frac{2}{(n\pi)^3}\cos n\pi x\Big]_0^1$$

توضیح:

مشتق	انتگرال
x^2	$\sin n\pi x$
$2x$ (+)	$\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x$
2 (−)	$-\frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x$
0 (+)	$\frac{1}{(n\pi)^3}\cos n\pi x$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}+\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^3}+\frac{4}{(n\pi)^3}$$

n زوج: $b_n=\frac{8-2(n\pi)^2}{(n\pi)^3}$

n فرد: $b_n=\frac{2}{n\pi}$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{(2n-1)\pi}\sin(2n-1)\pi x+\frac{8-2(2n\pi)^2}{(2n\pi)^3}\sin(2n\pi x)\right\}$$

۴) سری فوریه $f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 1 & -1<x<0 \end{cases}$ را بیابید.

$$\frac{a_0}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=3/4$$

دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر $p=2$ است.

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx=\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,dx+\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=$$

$$\left(\frac{1}{n\pi}\sin \pi x\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right)\Big|_0^1=\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}+\frac{1}{(n\pi)^2}$$

ادامه‌ی حل سؤال ۴

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \dfrac{2}{(n\pi)^2} & n:\text{زوج} \\ 0 & n:\text{فرد} \end{cases}$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_{-1}^{0} \sin n\pi x\,dx + \int_{0}^{1} x\sin n\pi x\,dx =$$

$$\frac{-1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow b_n = \frac{-1}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(n\pi)^2}\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)$$

سؤال ۵) سری فوریه‌ی $f(x)=e^{2x}$, $-\pi<x<\pi$ را بیابید.

$$p = 2\pi, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos nx\,dx$$

فرض: $I = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos nx\,dx \Rightarrow$

مشتق	انتگرال
e^{2x}	$\cos nx$
$2e^{2x}$	$\frac{1}{n}\sin nx$
$4e^{2x}$	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$

($+$, $-$, $+\int$)

$$I = \frac{e^{2x}}{n^2}(n\sin nx + 2\cos nx) - \frac{4}{n^2}I \Rightarrow$$

$$I\left(1 + \frac{4}{n^2}\right) = \frac{e^{2x}}{n^2}(n\sin nx + 2\cos nx) \Rightarrow I = \frac{e^{2x}}{4+n^2}(n\sin nx + 2\cos nx)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} I\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2e^{2\pi}}{4+n^2}\left(2(-1)^n\right) - \frac{2e^{-2\pi}}{4+n^2}(-1)^n = \frac{2(-1)^n}{4+n^2}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin nx\,dx$$

فرض: $I = \int e^{2x}\sin nx\,dx \Rightarrow$

مشتق	انتگرال
e^{2x}	$\sin nx$
$2e^{2x}$	$-\frac{1}{n}\cos nx$
$4e^{2x}$	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

($+$, $-$, $+\int$)

$$I = \frac{e^{2x}}{n^2+4}(2\sin nx - n\cos nx)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} I\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+4}\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$

$$f(x) = \left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)\left\{\frac{1}{4\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}\left(2(-1)^n\cos nx + n(-1)^{n+1}\sin nx\right)\right\}$$

سؤال ۶) سری فوریه $f(x)=\sinh x$ ، $-\pi<x<\pi$ را بیابید.

یادآوری: $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$f(x)$ تابعی فرد است $p=2\pi$ ، $a_n=0$ و b_n ها باید تعیین شود.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\pi(\sin nx)e^x\,dx-\int_0^\pi e^{-x}\sin nx\,dx\right\}$$

فرض: $I=\int_0^\pi e^x\sin nx$

مشتق	انتگرال
e^x	$\sin nx$
e^x	$-\frac{1}{n}\cos nx$
e^x	$-\frac{1}{n^2}\sin nx$

$$I=\frac{-e^x}{1+n^2}\cos nx+\frac{e^x}{n^2}\sin nx-\frac{1}{n^2}I\Rightarrow$$

$$I=\frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx-n\cos nx)\Rightarrow$$

$$\int_0^\pi e^x\sin nx\,dx=\frac{n}{1+n^2}\left(e^\pi(-1)^{n+1}+1\right)$$

به طریق مشابه: $\int_0^\pi e^{-x}\sin nx\,dx=\frac{n}{n^2-1}\left(1+e^{-\pi}(-1)^{n+1}\right)$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{n}{1+n^2}e^\pi(-1)^{n+1}-\frac{n}{n^2-1}e^{-\pi}(-1)^{n+1}-\frac{2n}{n^2-1}\right\}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n}{1+n^2}e^\pi(-1)^{n+1}-\frac{n}{n^2-1}e^{-\pi}(-1)^{n+1}-\frac{2n}{n^2-1}\right\}\sin nx$$

سؤال ۷) سری فوریه $f(x)=\sin\lambda x$ ، $-\pi<x<\pi$ را بیابید.

$\sin$ تابعی فرد است پس $f(x)$ تابعی فرد با دوره تناوب $p=2\pi$ است.

$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin\lambda x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[\cos(\lambda-n)x-\cos(\lambda+n)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\lambda-n}\sin(\lambda-n)x-\frac{1}{\lambda+n}\sin(\lambda+n)x\right\}\Big|_0^\pi=$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\lambda-n}\sin(\lambda-n)\pi-\frac{1}{\lambda+n}\sin(\lambda+n)\pi\right\}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq\lambda}}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda-n}\sin(\lambda-n)\pi-\frac{1}{\lambda+n}\sin(\lambda+n)\pi\right\}$$