سری ها

جمع (تعداد) متناهی عدد : $1+2+3+4+5$

جمع تعداد نامتناهی عدد : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نامتناهی باشد . دراینصورت $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ را یک سری نامتناهی یا سری می‌نامیم .

به a_n جمله عمومی سری گفته می‌شود .

روش محاسبه : همانند حالت متناهی :

الف : جمع تعداد متناهی عدد : $1+2+3+4+5=\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{(1+2)}_{3}+3)}_{6}+4)}_{10}+5=15$

" حتماً پاسخ دارد "

در حالت نامتناهی نیز عمل می‌کنیم :

$a_1\,,\ a_1+a_2\,,\ a_1+a_2+a_3\,,\ \cdots\,,\ \underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_N}_{S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n}\,,\ \cdots$

مرحله الف
مجموع جزئی Nام سری →

مرحله ب →

$\Longrightarrow$ دنباله جدید حاصل می‌شود $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}=\{\sum_{n=1}^{N}a_n\}_{N=1}^{\infty}$

لذا حد این دنباله پاسخ سری خواهد بود :

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n=\lim_{N\to\infty}S_N=S$$

(این تکنیک همانند انتگرال‌های مجازی است)

[توجه: درصورتیکه حد فوق موجود باشد گوییم سری نامتناهی همگرا است به S ؛ و اگر حد موجود نباشد گوییم واگراست و اگر بی نهایت شود گوییم واگرا به ∞ است.]

یعنی ممکن است حاصل مجموع (سری) فوق قابل موجود نباشد (واگرا) .

مثال: همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی نمائید.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

حل: $S_N=\sum_{n=1}^{N} n = 1+2+3+\cdots+N = \frac{N(N+1)}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{2} = \infty \Rightarrow$ واگرا است به ∞. ☒

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

حل: $S_N=\sum_{n=1}^{N} (-1)^n = \underbrace{-1+1-1+1-\cdots+(-1)^N}_{N \text{ جمله}} = \begin{cases} -1 & N \text{ فرد} \\ 0 & N \text{ زوج} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = \lim_{N\to\infty} \begin{cases} -1 & N \text{ فرد} \\ 0 & N \text{ زوج} \end{cases} \Rightarrow$ حد موجود نیست پس واگرا است. ☒

نکته: $S_n = \underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} + a_n = S_{n-1}+a_n$

$$\Rightarrow \boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

مثال: سری‌ای بنویسید که مجموع جزئی nام آن $S_n=\frac{(-1)^n}{n+1}$ باشد.

$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

$$\Rightarrow \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$ ☒

دو نشانگر قرارداد: ★ : سری خاص
: روش بررسی

چند سری خاص و پرکاربرد:

★ ① سری توافقی : سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ را سری توافقی گوییم که واگرا است.

★ ② سری هندسی : سری $\sum_{n=0}^{\infty}ar^n=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$ را که در آن ثابت $a\neq 0$ و ثابت r (قدر نسبت سری) می‌باشند را سری هندسی می‌گوییم.

سری هندسی همگراست اگر و تنها اگر $|r|<1$ (و در غیر اینصورت واگراست)

حاصل سری در صورت همگرایی برابر است با :

$$\sum_{n=?}^{\infty}ar^n=\frac{\text{جمله اول}}{1-r}$$

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی نمایید.

الف $\sum_{n=1}^{\infty}4\left(-\frac{6}{5}\right)^n$

$a=4\ ,\ r=\frac{-6}{5}\Rightarrow |r|=\frac{6}{5}>1\Rightarrow$ واگراست

ب $\sum_{n=0}^{\infty}e^n\pi^{1-n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}e^n\pi\frac{1}{\pi^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\pi\left(\frac{e}{\pi}\right)^n\Rightarrow |r|=\frac{e}{\pi}<1\Rightarrow$ همگرا به: $\frac{\pi}{1-\frac{e}{\pi}}$

مثال: پاسخ حد زیر را بیابید.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)=\lim 2^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{8}}\cdots2^{\frac{1}{2^n}}$$

$$=\lim 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}}=2^{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}}=2^{\frac{1/2}{1-1/2}}=2^1.$$

سری هندسی

★ ③ سری تلسکوپی (توی هم رو) : سری‌هایی که در حین نوشتن S_N برای آن‌ها جملات بصورت پشت سرهم ساده می‌شوند و در پاسخ S_N برحسب یک یا چند جمله ابتدا و انتهای آن نوشته می‌شود :

مثال : سری مقابل همگرا یا واگرا است؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

حل: تجزیه کسر : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$\sum_{n=1}^{N}(\dots)$

$$\Rightarrow S_N = \underbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}_{n=1} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}_{n=2} + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}_{n=3} + \dots + \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}}_{n=N} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$ همگرا است.

مثال : همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ را بررسی نمائید.

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} Ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{N} \left(Ln(n+1) - Ln(n)\right)$$

$$= \underbrace{\cancel{Ln\,2} - \overbrace{Ln\,1}^{\text{صفر}}} + \underbrace{\cancel{Ln\,3} - \cancel{Ln\,2}} + \underbrace{\cancel{Ln\,4} - \cancel{Ln\,3}} + \dots + \underbrace{Ln(N+1) - \cancel{Ln\,N}}$$

$$\Rightarrow S_N = Ln(N+1) \Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} Ln(N+1) = \infty$$

پس واگرا است.

④ p-سری: سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$ را p-سری می‌گوییم.

توجه: p-سری همگراست اگر $p>1$ باشد و
"مهم" واگراست اگر $p \leqslant 1$ باشد.

p-انتگرال را به یاد آورید ←

مثال: $\sum \frac{1}{n}$ یک p-سری با $p=1$ و واگراست (این سری همان سری توافقی است).

مثال: $\sum \frac{1}{n^2}$ یک p-سری با $p=2>1$ همگراست.

مثال: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ یک p-سری با $p=\frac{1}{2}<1$ واگراست.

روشهای دیگر برای همگرایی یا واگرایی سری:

در بحث سری‌ها معمولاً محاسبه پاسخ آخر براحتی انجام نمی‌شود و در کاربرد این سؤال مطرح است که آیا سری اصلاً به تعدادی می‌رسد (همگراست) یا خیر (واگراست)؟
برای بررسی این موارد آزمونهای متعدد دارند که به آنها می‌پردازیم.

توجه کنید: یک روش اصلی یعنی "مجموع جزئی" و چند روش و چند نوع سری اولیه را در بالا ذکر کرده‌ام.

شرط لازم برای همگرایی:

قضیه: هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

[ع.م / عکس نقیض قضیه (آزمون جمله nام برای واگرایی):
هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.] #

جمله عمومی سری

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی نمائید.

* $\sum_{n=1}^{\infty} 1$: $\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ واگرا

* $\sum_{n=1}^{\infty} n$: $\lim_{n\to\infty} n = \infty \neq 0 \Rightarrow$ واگرا

* $\sum \frac{n}{2n+1}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ واگرا

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{1}{0}}{=} \infty \neq 0 \Rightarrow$ واگرا

در ادامه بحث به علامت جملات سری باید توجه نمود :

- همه جملات مثبت
- همه جملات منفی = - (همه جملات مثبت)
- جملات یکی درمیان + و -
- جملات با علامتهای متفاوت درهم ریخته

کمی توجه

- سریهای نامنفی و آزمونهای آنها :

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را نامنفی گوئیم هرگاه برای هر n ، $a_n \geq 0$.

∴ / دنباله $\{S_n\}$ برای این سری همواره صعودی است .

قضیه (محک همگرایی سریهای نامنفی) :

سری نامنفی $\{a_n\}$ همگراست اگر دنباله $\{S_n\}$ آن از بالا کران دار باشد .
درغیراینصورت واگراست .

مورد استفاده: زمانی که از جمله عمومی می‌توان انتگرال گرفت

آزمون انتگرال:

برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، اگر تابع f موجود باشد که برای هر $n=1,2,\cdots$، $a_n=f(n)$

و f تابع مثبت، پیوسته بر $[1,\infty)$ و نزولی باشد. آنگاه رفتار همگرایی و واگرایی

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ یکسان است.

که به این معنی که هر دو همگرا یا هر دو واگرا شوند

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید:

* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

$f(x)=\frac{1}{x\ln x} \longrightarrow$ (f برای $2\le x$ مثبت، پیوسته و نزولی است (بر عهده دانشجو)

$$\& \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx \;\xrightarrow[du=\frac{1}{x}dx]{u=\ln x \text{ ت.م}}\; \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{u}\,du \;\xrightarrow[p=1]{\text{انتگرال-}p}\; \text{واگرا}$$

پس طبق آزمون انتگرال $\sum \frac{1}{n\ln n}$ نیز واگراست. $\blacksquare$

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$

$f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} \longrightarrow$ (f برای $x\ge 1$ مثبت، پیوسته و نزولی است (بر عهده دانشجو)

$$\& \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx \;\xrightarrow[du=\frac{dx}{x^2+1}]{u=\operatorname{arctg} x \text{ ت.م}}\; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{16}\right) = \text{عدد} \Rightarrow \text{انتگرال همگراست}$$

پس طبق آزمون انتگرال $\sum \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$ نیز همگراست. $\blacksquare$

آزمون مقایسه: فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی باشند به طوری که

برای هر n (به قدر کافی بزرگ)، $a_n \leq b_n$. در این صورت،

الف) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز چنین است؛

ب) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum b_n$ نیز چنین است.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

از صفر

$$\forall n \geq 4 : \; n! > 2^n \Rightarrow \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

می‌دانیم که سری بزرگتر ($\sum (\frac{1}{2})^n$) هندسی با $|r| = \frac{1}{2} < 1$ همگراست.

پس طبق آزمون مقایسه سری کوچکتر ($\sum \frac{1}{n!}$) نیز همگراست. (قسمت الف آزمون).

* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

$$\forall n \geq 3 : \quad \frac{2^n}{n^n} = \left(\frac{2}{n}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

سری $\sum (\frac{2}{3})^n$ هندسی با $|r| = \frac{2}{3} < 1$ همگراست پس طبق آزمون مقایسه $\sum \frac{2^n}{n^n}$ نیز همگراست.

آزمون مقایسه حدی: فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند، طوری که:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = h$$ (حالتی که حد باشد)

در این صورت:

الف) اگر $0 \le h < \infty$، همگرایی $\sum b_n$، همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌نماید.

ب) اگر $0 < h \le \infty$، واگرایی $\sum b_n$، واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌نماید.

* بخصوص اگر h عدد مثبت باشد دو سری رفتار همگرایی یا واگرایی یکسان دارند.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی نمایید.

* $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

حل: با $\sum \frac{1}{n}$ شروع می‌کنیم: $(a_n=\sin\frac{1}{n}$ & $b_n=\frac{1}{n})$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\cos\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=\cos 0=1$$

چون $\sum\frac{1}{n}$ واگراست، طبق آزمون مقایسه حدی، سری $\sum\sin\frac{1}{n}$ نیز واگراست.

* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n^6-n^2+7}{4n^8+n^3}$

از سری سوال

حل: با $\sum\frac{1}{n^2}$ $\left(=\sum\frac{n^6}{n^8}\right)$ که طبق p-سری برای $p=2$ همگراست، شروع می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n^6-n^2+7}{4n^8+n^3}}{\frac{1}{n^2}}\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n^6}{4n^8}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^8}{4n^8}=\frac{5}{4}=h$$

$0<h<\infty$

طبق مقایسه حدی رفتار هر دو سری یکسان است پس سری سوال همگراست.

$$* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}} \longrightarrow \cong \sum \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

سری $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ یک p سری با $p=\frac{3}{2}>1$ همگرا است و از طرفی:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = 1$$

لذا طبق آزمون مقایسه حدی سری سؤال همگرا است. $\boxed{}$

$$* \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n} \overset{H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

چون $\sum \frac{1}{n}$ توافقی و واگرا است، طبق آزمون مقایسه حدی $\sum \frac{1}{\ln n}$ واگرا است. $\boxed{}$