پاسخ تشریحی سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۲

۱) گزینه ۱ صحیح است.

$$x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\frac{t}{3}\cdot\delta(t-k\pi)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\frac{k\pi}{3}\delta(t-k\pi)$$

سیگنال $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\pi)$ قطاری از ضربه‌ها با اندازه ۱ است که با دوره تناوب π تکرار می‌شوند. قرار گرفتن عبارت $\cos\frac{k\pi}{3}$ در کنار ضربه‌ها باعث می‌شود که دامنه ضربه‌ها به ازای هر k، به جای ۱ برابر $\cos\frac{k\pi}{3}$ شود و در نتیجه، دیگر سیگنال $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\pi)$ با دوره تناوب π تکرار نشود. اما از آنجا که طبق نکته ۶، سیگنال $\cos\frac{k\pi}{3}$ بر حسب k با دوره تناوب ۶ متناوب است (یعنی نسبت به k، ۶ تا ۶ تا تکرار می‌شود)، بنابراین اندازه ضربه‌ها نیز ۶ بار ۶ بار تکرار خواهد شد و در نتیجه دوره تناوب سیگنال $x_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\frac{k\pi}{3}\delta(t-k\pi)$ برابر $6\times\pi=6\pi$ خواهد بود.

در مورد سیگنال $x_2(t)$ داریم:

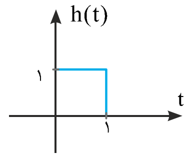
$$x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\pi t^2\cdot\delta(t-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\pi k^2\,\delta(t-k)$$

سیگنال $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k)$ قطاری از ضربه‌ها با اندازه ۱ است که با دوره تناوب ۱ تکرار می‌شوند. قرار گرفتن عبارت $\cos\pi k^2$ در کنار ضربه‌ها باعث می‌شود که دامنه ضربه‌ها به ازای هر k، به جای ۱ برابر $\cos\pi k^2$ شود. از آنجا که طبق نکته ۷، سیگنال $\cos\pi k^2$ بر حسب k با دوره تناوب ۲ متناوب است، در نتیجه دوره تناوب سیگنال $x_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\cos\pi k^2\,\delta(t-k)$ برابر $2\times1=2$ خواهد بود.

از آنجا که دوره تناوب‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب برابر 6π (عددی گنگ) و ۲ (عددی حقیقی) هستند، بنابراین ک.م.م ندارند؛ در نتیجه سیگنال $x_3(t)=x_1(t)+x_2(t)$ متناوب نیست.

۲) گزینه ۴ صحیح است.

روش اول؛ در این روش ابتدا پاسخ ضربه سیستم را به دست می‌آوریم. با توجه به ورودی $x_1(t)$ و خروجی $y_1(t)$ و همچنین نکته ۶۴ فصل دوم (کانولوشن دو پالس)، می‌توانیم پاسخ ضربه سیستم را به شکل زیر حدس بزنیم:



حال برای محاسبه $y_۲(t)$، کافی است که $x_۲(t)$ را با $h(t)$ کانوالو کنیم که با استفاده از همان نکته ۶۴ به گزینه ۴ خواهیم رسید.

روش دوم؛ سعی می‌کنیم یک رابطه خطی و انتقالی بین $x_۲(t)$ و $x_۱(t)$ برقرار نماییم. با کمی دقت داریم:

$$x_۲(t) = x_۱(t) - x_۱(t-۱) + x_۱(t-۲) - x_۱(t-۳) + x_۱(t-۴) - \cdots$$

با توجه به LTI بودن سیستم و با فرض اینکه $T\{\cdot\}$ عملگر سیستم باشد، پاسخ به $x_۲(t)$ برابر خواهد بود با:

$$y_۲(t) = T\{x_۲(t)\} = T\{x_۱(t) - x_۱(t-۱) + x_۱(t-۲) - x_۱(t-۳) + x_۱(t-۴) - \cdots\}$$

$$\Rightarrow \quad y_۲(t) = \underbrace{T\{x_۱(t)\}}_{y_۱(t)} - \underbrace{T\{x_۱(t-۱)\}}_{y_۱(t-۱)} + \underbrace{T\{x_۱(t-۲)\}}_{y_۱(t-۲)} - \underbrace{T\{x_۱(t-۳)\}}_{y_۱(t-۳)} + \underbrace{T\{x_۱(t-۴)\}}_{y_۱(t-۴)} - \cdots$$

$$\Rightarrow \quad y_۲(t) = y_۱(t) - y_۱(t-۱) + y_۱(t-۲) - y_۱(t-۳) + y_۱(t-۴) - \cdots$$

با رسم $y_۲(t)$ با استفاده از رابطه فوق، به شکل داده شده در گزینه ۴ می‌رسیم. البته ممکن است رسم $y_۲(t)$ کمی سخت باشد، در این صورت با توجه به گزینه‌ها کافی است که $y_۲(t)$ را در لحظه $t = ۱/۵$ محاسبه کنیم تا به گزینه صحیح برسیم. برای محاسبه $y_۲(t)$ در این لحظه داریم:

$$y_۲(۱/۵) = \underbrace{y_۱(۱/۵)}_{۱} - \underbrace{y_۱(۰/۵)}_{۰/۵} + \underbrace{y_۱(-۰/۵)}_{۰} - \underbrace{y_۱(-۱/۵)}_{۰} + \underbrace{y_۱(-۲/۵)}_{۰} - \cdots = ۰/۵$$

مقدار فوق، فقط با گزینه ۴ منطبق است.

۳) گزینه ۳ صحیح است.

طبق نکته ۱۱۲ داریم:

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y_۰(t)\,dt}_{\pi} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_۰(t)\,dt}_{۱} . \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt}_{?} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = \pi$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y_۱(t)\,dt}_{?} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_۱(t)\,dt}_{۴} . \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt}_{\pi} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} y_۱(t)\,dt = ۴\pi$$

۴) گزینه ۴ صحیح است.

$s = +\infty$ در ناحیه همگرایی قرار ندارد، پس سیتم غیرعلی است. از طرف دیگر $s = ۰$ (محور $j\omega$) در ROC قرار دارد و همچنین درجه صورت نیز از درجه مخرج بیشتر نیست، پس سیستم پایدار است.

۵) گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به خاصیت مزدوجی در سری فوریه داریم:

$$b_k = \text{Re}\{a_k\} = \frac{1}{2}a_k + \frac{1}{2}a_k^* \longrightarrow y[n] = \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x^*[-n]$$

$$\Rightarrow \quad y[1] = \frac{1}{2}x[1] + \frac{1}{2}x^*[-1] = \frac{1}{2}x[1] + \frac{1}{2}x^*[3] = \frac{1+j}{2} + \frac{1+j3}{2} = 1 + j2$$

توجه داشته باشید به دلیل اینکه دوره تناوب سیگنال $x[n]$ برابر ۴ است، $x[-1] = x[3]$ می‌باشد.

۶) گزینه ۳ صحیح است.

$$x(t) \xrightarrow[\text{خاصیت انتقال زمانی}]{t \to t-2} x(t-2) \xrightarrow[\text{خاصیت مقیاس‌دهی}]{t \to 3t} x(3t-2) \xrightarrow[\text{خاصیت انتقال فرکانسی}]{\times e^{jt}} x(3t-2)e^{jt}$$

$$X(\omega) \longrightarrow X(\omega)e^{-j2\omega} \longrightarrow \frac{1}{3}X(\frac{\omega}{3})e^{-j2\frac{\omega}{3}} \longrightarrow \frac{1}{3}X(\frac{\omega-1}{3})e^{-j2\frac{\omega-1}{3}}$$

بنابراین اندازه تبدیل فوریه $y(t) = x(3t-2)e^{jt}$ برابر است با:

$$|Y(\omega)| = \left|\frac{1}{3}X(\frac{\omega-1}{3})e^{-j2\frac{\omega-1}{3}}\right| = \frac{1}{3}X(\frac{\omega-1}{3}) = \frac{1}{3}\left|X(\frac{\omega}{3} - \frac{1}{3})\right|$$

برای رسم تابع فوق، کافی است که $|X(\omega)|$ را ابتدا $\frac{1}{3}$ به سمت راست انتقال دهیم و سپس آن را با ضریب ۳ گسترده کنیم و در نهایت دامنه آن را در $\frac{1}{3}$ ضرب نماییم که به شکل گزینه ۳ خواهیم رسید.

۷) گزینه ۲ صحیح است.

با استفاده از خاصیت مقیاس‌دهی در تبدیل لاپلاس داریم:

$$y(t) = x(2t) \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{2}X(\frac{s}{2}) = \frac{1}{2}\frac{3\frac{s}{2}+7}{(\frac{s}{2})^3 + 6(\frac{s}{2})^2 + 11\frac{s}{2} + 6} = \frac{6s+28}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}$$

همچنین با فرض $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ و با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری در زمان خواهیم داشت:

$$z(t) = \frac{dy(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} Z(s) = sY(s) = \frac{6s^2 + 28s}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48}$$

حال طبق قضیه مقدار اولیه داریم:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{t \to 0^+} z(t) = \lim_{s \to \infty} sZ(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{6s^3 + 28s^2}{s^3 + 12s^2 + 44s + 48} = 6$$

۸) گزینه ۲ صحیح است.

روش اول؛ اندازه $X(\omega)$ زوج و فاز آن فرد است. پس $x(t)$ حقیقی است. با توجه به اینکه طبق شکل، $X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\measuredangle X(\omega)}=|X(\omega)|e^{-j\omega}$ می‌باشد، پس تبدیل فوریه $x(t+۱)$ طبق خاصیت انتقال زمانی، برابر $X(\omega)e^{j\omega}$ یعنی $|X(\omega)|$ خواهد بود که تابعی حقیقی و زوج است. بنابراین $x(t+۱)$ نیز حقیقی و زوج می‌باشد (طبق نکته ۹۰). در نتیجه $y(t+۱)=|x(t+۱)|^۲=x^۲(t+۱)$ نیز حقیقی و زوج است. پس تبدیل فوریه $y(t+۱)$ (یعنی $Y(\omega)e^{j\omega}$) نیز حقیقی و زوج است. بنابراین فاز $Y(\omega)e^{j\omega}$ برابر صفر است. یعنی خواهیم داشت:

$$\measuredangle Y(\omega)e^{j\omega}=\circ \longrightarrow \measuredangle Y(\omega)+\underbrace{\measuredangle e^{j\omega}}_{\omega}=\circ \longrightarrow \measuredangle Y(\omega)=-\omega$$

روش دوم؛ با نوشتن رابطه $X(\omega)=|X(\omega)|e^{-j\omega}=\pi\prod(\frac{\omega}{۸})e^{-j\omega}$ و گرفتن عکس تبدیل فوریه داریم:

$$X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\measuredangle X(\omega)}=\pi\prod(\frac{\omega}{۸})e^{-j\omega} \xrightarrow{F^{-۱}} x(t)=\pi\frac{\sin ۴(t-۱)}{\pi(t-۱)}=\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=|x(t)|^۲=\left|\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}\right|^۲=\left(\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}\right)^۲ \longrightarrow y(t+۱)=\left(\frac{\sin ۴t}{t}\right)^۲$$

مشخص است که $y(t+۱)$ حقیقی و زوج است. پس تبدیل فوریه آن که برابر $Y(\omega)e^{j\omega}$ می‌شود نیز حقیقی و زوج است. بنابراین فاز $Y(\omega)e^{j\omega}$ برابر صفر است. در نتیجه فاز $Y(\omega)$ برابر $-\omega$ می‌باشد. یا می‌توان از رابطه $y(t)=\left(\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}\right)^۲=\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}\cdot\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}$ با توجه به خاصیت ضرب و انتقال زمانی تبدیل فوریه گرفت. داریم:

$$\left(\frac{\sin ۴t}{t}\right)^۲=\frac{\sin ۴t}{t}\cdot\frac{\sin ۴t}{t} \xleftrightarrow{F} \frac{۱}{۲\pi}\left(\pi\prod(\frac{\omega}{۸})*\pi\prod(\frac{\omega}{۸})\right)=۸\Lambda(\frac{\omega}{۸})$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=\left(\frac{\sin ۴(t-۱)}{(t-۱)}\right)^۲ \xleftrightarrow{F} Y(\omega)=۸\Lambda(\frac{\omega}{۸})e^{-j\omega}$$

مشخص است که فاز $Y(\omega)$ برابر $-\omega$ می‌باشد.

۹) گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا باید $y[n]$ را تعیین کنیم. برای این کار با توجه به محل صفرها و قطب‌ها $X(z)$ را به‌صورت زیر حدس می‌زنیم:

$$X(z)=\frac{z^۲-۱۶}{z^۲}=۱-۱۶z^{-۲}$$

حال عکس تبدیل $\mathcal{Z}$ فوق برابر است با:

$$x[n]=\delta[n]-۱۶\delta[n-۲]$$

اکنون برای محاسبه $Y(z)$، کافی است که $x[n]$ فوق را بـه تـوان ۲ برسـانیم و سـپس از آن تبـدیل $\mathcal{Z}$ بگیریم:

$$y[n]=x^{۲}[n]=\delta^{۲}[n]+۱۶^{۲}\,\delta^{۲}[n-۲]=\delta[n]+۱۶^{۲}\,\delta[n-۲]$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)=۱+۱۶^{۲}\,z^{-۲}=\frac{z^{۲}+۱۶^{۲}}{z^{۲}}$$

مشخص است که صفرهای $Y(z)$ برابر $z=\pm j۱۶$ می‌باشد.

۱۰) گزینه ۳ صحیح است.

روش اول؛ با توجه به نکته ۹۱، $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دوره تنـاوب $T=۱$ و $\omega_۰=۲\pi$ مـی‌باشـد و ضرایب فوریه آن برابر است با:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t-kT) \longrightarrow a_k=\frac{۱}{T}Z(k\omega_۰)$$

در اینجا $z(t)=\operatorname{sinc} t$ و در نتیجه $Z(\omega)=\prod(\frac{\omega}{۲\pi})$ می‌باشد که فقـط بـرای $-۱<\omega<۱$ مقـدار دارد و برابر ۱ است. از آنجا که $T=۱$ و $\omega_۰=۲\pi$ اسـت، بـا توجـه بـه رابطـه $a_k=\frac{۱}{T}Z(k\omega_۰)$، a_k فقـط بـه ازای $k=۰$ مقدار خواهد داشت و به ازای بقیه kها برابر صفر است و همچنین $a_۰=۱$ می‌باشد. بنـابراین داریم:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_۰ t}=a_۰=۱ \longrightarrow x(\tfrac{۱}{۴})+x(\tfrac{۳}{۴})=۲$$

روش دوم؛ با گرفتن تبدیل فوریه از دو طرف رابطه $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc}(t-k)$ داریم:

$$x(t)=\operatorname{sinc} t*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k) \xleftrightarrow{F} X(\omega)=\prod(\frac{\omega}{۲\pi}).۲\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-k۲\pi)$$

$$\Rightarrow \quad X(\omega)=۲\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\prod(\frac{k۲\pi}{۲\pi})\cdot\delta(\omega-k۲\pi)=۲\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\prod(k)\cdot\delta(\omega-k۲\pi)$$

$\prod(k)$ فقط به ازای $k=۰$ مقدار دارد و برابر ۱ است. در نتیجه داریم:

$$X(\omega)=۲\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\prod(k)\cdot\delta(\omega-k۲\pi)=۲\pi\cdot(۱)\cdot\delta(\omega)=۲\pi\delta(\omega) \xrightarrow{F^{-۱}} x(t)=۱$$

$$\Rightarrow \quad x(\tfrac{۱}{۴})+x(\tfrac{۳}{۴})=۲$$

۱۱) گزینه ۴ صحیح است.

$$h[n]=\delta[n]-۲^{n}\,\delta[n-۵]=\delta[n]-۲^{۵}\,\delta[n-۵] \longrightarrow H(z)=۱-۲^{۵}z^{-۵}$$

$$\Rightarrow \quad H_I(z)=\frac{۱}{H(z)}=\frac{۱}{۱-۲^۵z^{-۵}} \quad , \quad |z|<۲$$

توجه شود که ناحیه همگرایی سیستم معکوس با توجه به پایدار بودن آن (طبق بیان صورت تست) به صورت $|z|<۲$ بیان شده است تا شامل دایره یکه باشد. از طرف دیگر می‌دانیم که عکس تبدیل $\mathscr{Z}$ عبارت $\frac{۱}{۱-۲^۵z^{-۱}}\ ,\ |z|<۲^۵$ برابر $-(۲^۵)^n u[-n-۱]$ می‌باشد. بنابراین طبق خاصیت گستردگی عکس تبدیل $\mathscr{Z}$ عبارت $|z|<۲\ ,\ H_I(z)=\frac{۱}{۱-۲^۵z^{-۵}}$ برابر $\begin{cases}-(۲^۵)^{\frac{n}{۵}}u[-\frac{n}{۵}-۱] & , \ n=۵r\\ ۰ & , \ n\neq ۵r\end{cases}$ خواهد بود که مطابق گزینه ۴ می‌باشد.

۱۲) گزینه ؟ صحیح است.

ابتدا سیگمای داده شده را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\{h[n]\}\sin ۲\pi f_\circ n=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\{h[n]\}\left(\frac{۱}{۲j}e^{j۲\pi f_\circ n}-\frac{۱}{۲j}e^{-j۲\pi f_\circ n}\right)$$

$$A=\frac{۱}{۲j}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\{h[n]\}e^{j۲\pi f_\circ n}-\frac{۱}{۲j}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}\{h[n]\}e^{-j۲\pi f_\circ n}$$

با توجه به رابطه کلی تبدیل فوریه یعنی $Z(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z[n]e^{-j۲\pi f_\circ n}$، سیگمای فوق را می‌توان معادل عبارت زیر گرفت:

$$A=\frac{۱}{۲j}F\{\mathrm{Re}\{h[n]\}\}\Big|_{f=-f_\circ}-\frac{۱}{۲j}F\{\mathrm{Re}\{h[n]\}\}\Big|_{f=f_\circ} \qquad (۱)$$

پس باید تبدیل فوریه $\mathrm{Re}\{h[n]\}$ را به‌ازای $f=-f_\circ$ و $f=f_\circ$ محاسبه نماییم. اما تبدیل فوریه $\mathrm{Re}\{h[n]\}$ برابر است با:

$$F\{\mathrm{Re}\{h[n]\}\}=F\left\{\frac{h[n]+h^*[n]}{۲}\right\}=\frac{۱}{۲}F\{h[n]\}+\frac{۱}{۲}F\{h^*[n]\}=\frac{۱}{۲}H(f)+\frac{۱}{۲}H^*(-f)$$

توجه کنید که تبدیل فوریه $h^*[n]$ طبق خاصیت مزدوجی برابر $H^*(-f)$ می‌باشد. حال از رابطه (۱) داریم:

$$A=\frac{۱}{۲j}\left(\frac{۱}{۲}H(-f_\circ)+\frac{۱}{۲}H^*(f_\circ)\right)-\frac{۱}{۲j}\left(\frac{۱}{۲}H(f_\circ)+\frac{۱}{۲}H^*(-f_\circ)\right) \qquad (۲)$$

حال برای محاسبه عبارت فوق، باید با استفاده از اطلاعات داده شده در صورت تست، مقادیر $H(-f_\circ)$، $H^*(f_\circ)$، $H(f_\circ)$ و $H^*(-f_\circ)$ را به دست آورده و در رابطه فوق جایگذاری نماییم. با بازنویسی ورودی داده شده، داریم:

$$x[n]=1+\frac{1}{2}e^{j(2\pi f_0 n+\frac{\pi}{3})}+\frac{1}{2}e^{-j(2\pi f_0 n+\frac{\pi}{3})}=e^{j(0)n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}e^{j2\pi f_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}e^{-j2\pi f_0 n}$$

پاسخ به ورودی فوق، طبق نکته ۱۲۰ برابر می‌باشد با:

$$y[n]=H(0)e^{j(0)n}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{3}}H(f_0)e^{j2\pi f_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}H(-f_0)e^{-j2\pi f_0 n} \qquad (3)$$

اما طبق صورت تست، خروجی به‌صورت $y[n]=j-e^{j2\pi f_0 n}$ داده شده است. بنابراین با مقایسه این خروجی با خروجی رابطه (۳) داریم:

$$H(0)=j \quad , \quad H(f_0)=-2e^{-j\frac{\pi}{3}} \quad , \quad H(-f_0)=0$$

حال با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$A=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2}(0)+\frac{1}{2}(-2e^{j\frac{\pi}{3}})\right)-\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{2}(-2e^{-j\frac{\pi}{3}})+\frac{1}{2}(0)\right)=-\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}$$

پاسخ فوق در گزینه‌ها موجود نیست. توجه کنید که مقدار عبارت $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\operatorname{Re}\{h[n]\}\cos 2\pi f_0 n$ نیز برابر $-\cos\frac{\pi}{3}$ می‌شود.