بسمه تعالی

آزمون میان ترم ریاضی عمومی ۲		مدت زمان پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه
نیمسال دوم ۱۴۰۳-۱۴۰۲		تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۲/۲۰
نام و نام خانوادگی:		شماره دانشجویی:

لطفا جواب سوالات را خوانا و به ترتیب در برگه پاسخ نامه بنویسید.

استفاده از ماشین حساب و تلفن همراه ممنوع می باشد.

۱. کنج فرنه و معادله دایره مماس بر منحنی فصل مشترک رویه های $x = y^2 + 2z^2$ و $x + 2y = 1$ را در نقطه $(1, -1, 3)$ بیابید.

۲. فرض کنید

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z) \neq (0,0,0); \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

- نشان دهید این تابع در مبدا پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.
- مشتق سویی(جهتی) f را در راستای بردار $(1,1,1)$ در نقطه $(0,0,0)$ بیابید.

۳. معادله صفحه ای که از مبدا مختصات می گذرد و بر صفحات $x + 2y + 2z = 0$ و $2x + y - 2z + 5 = 0$ عمود است را بیابید.

۴. اگر $f(x,y,z) = c$ آنگاه $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را بیابید.

۵. اکسترمم تابع $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ را در مجموعه $\{(x,y),\ 3x^2 + 3y^2 + 4xy \leq 2\}$ بیابید.

موفق و پیروز باشید.

میانترم ریاضی عمومی ۲

دانشگاه علم و صنعت-اردیبهشت۱۴۰۳

پاسخ تشریحی: مهندس شاه ابراهیمی

---

۱. کنج فرنه و معادله دایره مماس بر منحنی فصل مشترک رویه های $x = y^2+2z^2$ و $x+2y=1$ را در نقطه $(3,-1,1)$ بیابید.

پاسخ سوال۱:

$$\to \begin{cases} x = y^2+2z^2 \\ x = 1-2y \end{cases} \to y^2+2z^2 = 1-2y \to y^2+2y+2z^2 = 1 \to (y+1)^2+2z^2 = 2$$

$$\to \frac{(y+1)^2}{2}+z^2 = 1 \to \begin{cases} y+1 = \sqrt{2}\cos t \\ z = \sin t \end{cases} \to \begin{cases} y = \sqrt{2}\cos t - 1 \\ z = \sin t \end{cases}$$

$$\to \vec{r}(t) = 3-2\sqrt{2}\cos(t)\vec{i} + (\sqrt{2}\cos(t)-1)\vec{j} + \sin(t)\vec{k} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \vec{r}(\frac{\pi}{2}) = (3,-1,1)$$

$$\to \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2\sqrt{2}\sin(t)\vec{i} - \sqrt{2}\sin(t)\vec{j} + \cos(t)\vec{k} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$$

$$\to \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\sqrt{2}\cos(t)\vec{i} - \sqrt{2}\cos(t)\vec{j} - \sin(t)\vec{k} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}} \vec{a}(\frac{\pi}{2}) = -\vec{k}$$

$$\to \vec{v}(t)\times\vec{a}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \sqrt{2}\vec{i} + 2\sqrt{2}\vec{j}$$

$$\xrightarrow{\vec{T}=\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}} \vec{T} = \frac{2\sqrt{2}\vec{i}-\sqrt{2}\vec{j}}{\sqrt{10}} = \boxed{\frac{2\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{5}}}$$

$$\xrightarrow{\vec{B}=\frac{\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)}{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|}} \vec{B} = \frac{\sqrt{2}\vec{i}+2\sqrt{2}\vec{j}}{\sqrt{10}} = \boxed{\frac{\vec{i}+2\vec{j}}{\sqrt{5}}}$$

$$\xrightarrow{\vec{N}=\vec{B}\times\vec{T}} \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-\vec{k}}$$

$$\xrightarrow{\kappa=\frac{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|}{|\vec{v}(t)|^{۳}}} \kappa=\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰\sqrt{۱۰}}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$\xrightarrow{R=\frac{۱}{\kappa}} R=۱۰$$

$$\xrightarrow{(x_۰,y_۰)=\vec{r}(t)+R.\vec{N}} (x_۰,y_۰)=(۳,-۱,۱)+۱۰.(۰,۰,-۱)=(۳,-۱,-۹)$$

$$\xrightarrow{(x-x_۰)^{۲}+(y-y_۰)^{۲}=R^{۲}} \boxed{(x-۳)^{۲}+(y+۱)^{۲}+(z+۹)^{۲}=۱۰^{۲}}$$

که در واقع اسم این رویه "کره انحنا" می باشد. کره ای که در نقطه مذکور بر انحنای خم مماس است.

۲. فرض کنید

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0);\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

- نشان دهید این تابع در مبدا پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.
- مشتق سویی(جهتی) f را در راستای بردار $(1,1,1)$ در نقطه $(0,0,0)$ بیابید.

پاسخ سوال ۲:

$$\rightarrow \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{\sin(xyz)}{x^2+y^2+z^2}=\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\sqrt{x^2+y^2+z^2}<\delta\rightarrow\left|\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}-0\right|<\varepsilon\rightarrow\frac{|x||y||z|}{|x^2+y^2+z^2|}<\varepsilon$$

$$\rightarrow\frac{|x^2+y^2+z^2||x^2+y^2+z^2||x^2+y^2+z^2|}{|x^2+y^2+z^2|}<\varepsilon\rightarrow|x^2+y^2+z^2||x^2+y^2+z^2|<\varepsilon$$

$$\rightarrow|x^2+y^2+z^2|^2<\varepsilon\rightarrow\delta<\varepsilon\rightarrow\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=0$$

$$f_x(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_y(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h,0)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$f_z(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0,h)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

نکته مهم : شرط لازم مشتق پذیری ؟؟؟
۱- پیوستگی تابع
۲- وجود مشتقات جزئی تابع

نکته شدید مهم :
۳- وجود و برابری مشتق جهتی در آن نقطه و در هر جهت

$$D_{\vec{u}}f(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(ah,bh,ch)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{abch^3}{(a^2+b^2+c^2)h^2}}{h}=\frac{abc}{(a^2+b^2+c^2)}$$

چون مشتق جهتی در مبدا در جهات مختلف متفاوت است بنابراین مشتق پذیر نیست.

$$\xrightarrow{(a,b,c)=\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)} D_{\left(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)}f(0,0,0)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^3}{3\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)^2}=\frac{1}{3\sqrt3}$$

۳. معادله صفحه ای که از مبدا مختصات می گذرد و بر صفحات $x+2y+2z=0$ و $2x+y-2z+5=0$ عمود است را بیابید.

پاسخ سوال ۳:

$$\xrightarrow{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}(a,b,c)=\vec{\nabla}_1\times\vec{\nabla}_2$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}_1=(1,2,2)\\ \vec{\nabla}_2=(2,1,-2)\end{cases}\longrightarrow\vec{\nabla}_1\times\vec{\nabla}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-6,6,-3)$$

$$\xrightarrow{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}-6(x-0)+6(y-0)-3(z-0)=0\rightarrow \boxed{-2x+2y-z=0}$$

۴. اگر $f(x,y,z)=c$ آنگاه $\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}$ را بیابید.

پاسخ سوال۴:

روش اول:

$$\xrightarrow{\text{Implicit}} \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\boxed{\frac{f_{yx}f_z-f_{zx}f_y}{(f_z)^۲}}$$

روش دوم:

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f_y+\frac{\partial z}{\partial y}f_z=۰\rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{f_y}{f_z}\right)=-\boxed{\frac{f_{yx}f_z-f_{zx}f_y}{(f_z)^۲}}$$

روش سوم:

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} f_y+\frac{\partial z}{\partial y}f_z=۰$$

$$\xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} f_{yx}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)f_z+\frac{\partial z}{\partial y}f_{zx}=۰\rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{-f_{yx}-\frac{\partial z}{\partial y}f_{zx}}{f_z}=\frac{-f_{yx}+\frac{f_y}{f_z}f_{zx}}{f_z}=-\boxed{\frac{f_{yx}f_z-f_{zx}f_y}{(f_z)^۲}}$$

۵. اکسترمم تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ را در مجموعه $\{(x,y),\ 3x^2+3y^2+4xy\le 2\}$ بیابید.

پاسخ سوال۵:

$$\to L=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2+4xy-2)$$

$$\xrightarrow{L_x=0} L_x=2x+6x\lambda+4y\lambda=0\to 2x+\lambda(6x+4y)=0\to\lambda=\frac{-2x}{6x+4y}=\frac{-x}{3x+2y}$$

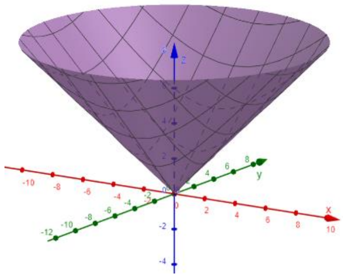
$$\xrightarrow{L_y=0} L_y=2y+6y\lambda+4x\lambda=0\to 2y+\lambda(6y+4x)=0\to\lambda=\frac{-2y}{6y+4x}=\frac{-y}{3y+2x}$$

$$\to\frac{-x}{3x+2y}=\frac{-y}{3y+2x}\to 3xy+2x^2=3xy+2y^2\to x^2=y^2\to \boxed{y=\pm x}$$

$$\xrightarrow[y=\pm x]{3x^2+3y^2+4xy=2} 3x^2+3x^2+4x(\pm x)=2\to 6x^2\pm 4x^2=2\to\begin{cases}10x^2=2\\ 2x^2=2\end{cases}\to\begin{cases}x^2=\frac{1}{5}\to y^2=\frac{1}{5}\\ x^2=1\to y^2=1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}}\begin{cases}\boxed{f(\pm1,\pm1)=\sqrt{2}}\\ \boxed{f(\pm\frac{1}{\sqrt5},\pm\frac{1}{\sqrt5})=\sqrt{\frac{2}{5}}}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\nabla}_f=\frac{(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\to(0,0)$$



$$\xrightarrow{f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}} \boxed{f(0,0)=0}$$

لینک خرید جزوه ریاضی عمومی ۲

لینک خرید فیلم های آموزشی ریاضی عمومی ۲