ریاضیات عمومی ۱

امتحان میان ترم دوم، ۱۳۸۸/۸/۱۴

وقت: یک ساعت

۱. (الف) ثابت کنید

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x - x\cos\frac{1}{x}) = 0$$

(۳ نمره)

(ب) نشان دهید معادله زیر به ازای هر $a > 0$ دست کم یک جواب مثبت x دارد:

$$2x - x\cos\frac{1}{x} - a = 0$$

(۵ نمره)

۲. (الف) n و k اعداد طبیعی هستند، x_1 و x_2 اعداد حقیقی نامنفی. نشان دهید:

اگر $|x_1 - x_2| < 10^{-nk}$، آنگاه $|x_1^{\frac{1}{n}} - x_2^{\frac{1}{n}}| < 10^{-k}$

راهنمایی:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

(۵ نمره)

(ب) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا تابع $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ با دامنه $x \geq 0$ به‌طور یکنواخت پیوسته است؟ (۳ نمره)

۳. دو تابع پیوسته f و g از $[0, 1]$ به $[0, 1]$ داده شده‌اند. نشان دهید x و y در $[0, 1]$ وجود دارند که $f(x) = y$ و $g(y) = x$. چه تعبیر هندسی برای این مطلب می‌توانید ارائه کنید؟ (۴ نمره)

الف) قرار می‌دهیم $\frac{1}{x}=t$، پس حد داده شده معادل می‌شود با $\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=0$ که در درس (کتاب) ثابت شده است.

ب) می‌نویسیم $f(x)=2x-x\cos\frac{1}{x}-a=(x-a)+(x-x\cos\frac{1}{x})$

وقتی $x\to+\infty$ عبارت سمت راست به $+\infty$ میل می‌کند، پس $A>0$ موجود دارد که $f(A)>0$

وقتی $x\to 0^+$ عبارت سمت راست به $(-a)$ میل می‌کند (توجه کنید که $x\to 0^+$ و $\cos\frac{1}{x}$ کراندار است پس $x\cos\frac{1}{x}$ به صفر میل می‌کند) که منفی است، پس $B>0$ وجود دارد که $f(B)<0$. طبق قضیه مقدار میانی، نقطه‌ای C بین A و B هست که $f(C)=0$.

سوال ۲ الف) طبق اتحاد جبری داده شده

$$|x_1^{\frac{1}{n}}-x_2^{\frac{1}{n}}| = \frac{|x_1-x_2|}{x_1^{\frac{n-1}{n}}+x_1^{\frac{n-2}{n}}x_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+x_1^{\frac{1}{n}}x_2^{\frac{n-2}{n}}+x_2^{\frac{n-1}{n}}}$$

اگر قرار دهیم $h=x_2-x_1\neq 0$. با توجه به نامنفی بودن x_1 و x_2، حداقل مخرج وقتی حاصل می‌شود که $x_2=0$ و $x_1=|h|$، پس

$$|x_1^{\frac{1}{n}}-x_2^{\frac{1}{n}}| \le |h|\cdot\frac{1}{|h|^{1-\frac{1}{n}}} = |h|^{\frac{1}{n}}$$

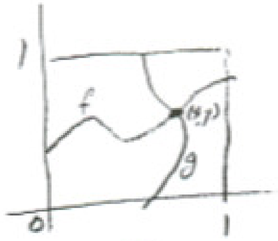
بنابراین وقتی $|h|=|x_1-x_2|<10^{-nk}$، نتیجه می‌گیریم $|x_1^{\frac{1}{n}}-x_2^{\frac{1}{n}}|<10^{-k}$.

ب) اگر $\varepsilon>0$ داده شده باشد، k را طوری می‌گیریم که $10^{-k}<\varepsilon$. حال برای $0<\delta\le 10^{-nk}$، طبق قسمت بالا داریم

$$|f(x_1)-f(x_2)|<10^{-k}<\varepsilon$$

پس f به طور یکنواخت پیوسته است.

۲) تعبیر هندسی: f را به صورت تابعی از $[0,1]$ روی محور x به $[0,1]$ در محور y در نظر می‌گیریم، و g را به صورت تابعی از $[0,1]$ در محور y به $[0,1]$ در محور x. در این صورت شرط‌های $y=f(x)$ و $g(y)=x$ معادل این است که نقطه (x,y) روی هر دو نمودار قرار دارد، یعنی حکم مسئله این می‌شود که نمودارهای f و g یکدیگر را قطع می‌کنند:



تابع $h:[0,1]\to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(x)=g(f(x))-x$$ (تابع پیوسته، ترکیب دو تابع پیوسته و تفاضل توابع پیوسته)

برای $x=0$ داریم $h(0)=g(f(0))\geq 0$، برای $x=1$: $h(1)=g(f(1))-1\leq 0$،
پس مطابق قضیه مقدار میانی، نقطه‌ای x در $[0,1]$ وجود دارد که $h(x)=0$، یا $g(f(x))=x$
با قرار دادن $y=f(x)$، حکم حاصل می‌شود.

استدلال را می‌توان به این صورت نیز بیان کرد: می‌نویسیم $\varphi(x)=g(f(x))$. φ تابعی پیوسته (ترکیب تابع‌های پیوسته) از $[0,1]$ به $[0,1]$ است، پس مطابق بخش اول کتاب نقطه‌ای x وجود دارد که $\varphi(x)=x$، یا $g(f(x))=x$. با قرار دادن $y=f(x)$ حکم نتیجه می‌شود. □