# ۱۰۰ مسئله در فیزیک کلاسیک

برگزیده‌ای از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا

مترجم: آمنه آهنگری

اتحادیه انجمن‌های علمی معلمان فیزیک ایران

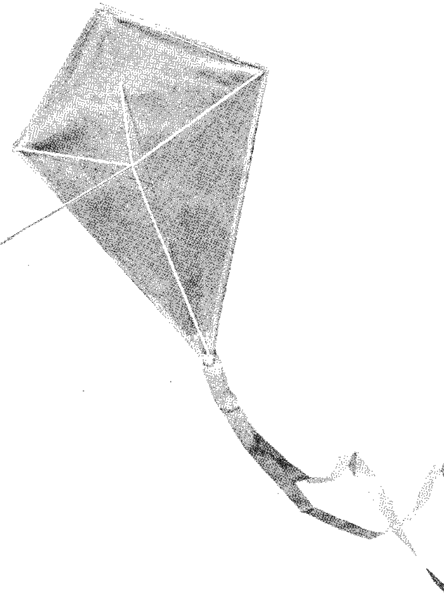
انتشارات فاطمی

این کتاب شامل ۱۰۰ مسئله‌ی حل‌شده در فیزیک کلاسیک است که از بخشی به نام «چالش‌هایی در فیزیک» از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا متناسب با برنامه‌ی درسی فیزیک دبیرستان‌های کشورمان گزینش و ترجمه شده است.
این مسائل مباحث مکانیک، الکتریسیته و مغناطیس، اپتیک و ترمودینامیک را دربر می‌گیرد. مسائل این مجموعه از غنای ویژه‌ای برخوردار است و در حل آنها علاوه بر محاسبات ریاضی بر خلاقیت و دانش فیزیک تکیه می شود. مسائل «چالش‌هایی در فیزیک» در هر شماره‌ی مجله به نوبت از سوی معلمان و کارشناسان ورزیده‌ی فیزیک طرح و پاسخ آنها از طرف خوانندگان مجله از سراسر دنیا پیشنهاد می‌شود. مخاطبان این کتاب معلمان فیزیک، دانشجویان و دانش‌آموزان به ویژه علاقه‌مندان شرکت در المپیادهای فیزیک می باشند.

# ۱۰۰ مسئله در فیزیک کلاسیک

برگزیده‌ای از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا

مترجم: آمنه آهنگری



اتحادیه انجمن های معلمان فیزیک ایران

انتشارات فاطمی

مدیر تولید: فرید مصلحی
مسئول برنامه‌ریزی تولید: مهدی ملک‌زاده
ماکرونویسی: بردیا حسام
مسئول واحد حروفچینی: زهره امینی
حروفچینی و صفحه‌بندی: اعظم توکلی
نمونه‌خوانی: شقایق میرصیافی

طراحی جلد: علیرضا طاهرنجمی
رسامی و آماده‌سازی تصاویر: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور

لیتوگرافی: خاورمیانه
چاپ و صحافی: خاشع

---

**۱۰۰ مسئله در فیزیک کلاسیک**

**برگزیده‌ای از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا**

مترجم: آمنه آهنگری
ویراستار: محمدعلی جعفری
ناشر: انتشارات فاطمی
چاپ اول، ۱۳۹۰
شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۴۰۰۰ تومان
شابک ۴_۶۶۵_۳۱۸_۹۶۴_۹۷۸
ISBN 978-964-318-665-4



**انتشارات فاطمی** تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،
شماره‌ی ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)
www.fatemi.ir • info@fatemi.ir

۱۰۰ مسئله در فیزیک کلاسیک: برگزیده‌ای از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا /مترجم آمنه آهنگری، ویراستار محمدعلی جعفری. ـــ تهران: فاطمی، ۱۳۹۰.
شنش، ۱۵۰ ص.: مصور.

ISBN 978-964-318-665-4
کتاب حاضر منتخبی از بخش Physics challenge با عنوان Physics Teacher از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا است.
فیپا.
۱. فیزیک ـ ـ راهنمای آموزشی (متوسطه). ۲. فیزیک ـ ـ مسائل، تمرین‌ها و غیره (متوسطه). ۳. فیزیک ـ ـ پرسش‌ها و پاسخ‌ها (متوسطه). الف. آهنگری، آمنه، ۱۳۵۱ ـ ، مترجم. ب. جعفری، محمدعلی، ۱۳۵۸ ـ ، ویراستار. ج. عنوان.
QC۳۲/ص۳۳ ۵۳۰/۰۷۶
۱۳۹۰
کتابخانه‌ی ملی ایران ۲۴۵۶۵۱۱

# فهرست


| | |
|---|---|
| پیش‌گفتار | پنج |
| **بخش اول: مسئله‌ها** | ۱ |
| مکانیک | ۳ |
| الکتریسیته و مغناطیس | ۱۴ |
| اپتیک | ۲۱ |
| ترمودینامیک | ۲۴ |
| **بخش دوم: پاسخ مسئله‌ها** | ۲۹ |
| مکانیک | ۳۱ |
| الکتریسیته و مغناطیس | ۹۷ |
| اپتیک | ۱۲۶ |
| ترمودینامیک | ۱۳۹ |

به‌نام خدا

# پیش‌گفتار

مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا، Physics Teacher، یکی از معتبرترین مجلات آموزشی دنیاست که مطالب آن عمدتاً در سطح آموزش فیزیک دبیرستان است. هدف اصلی انتشار این مجله کمک به درک کردن، فهمیدن و لذت بردن از فیزیک و آموزش فیزیک است. این مجله از سال ۱۹۳۰ میلادی با هدف توسعه و ترویج دانش فیزیک، به‌ویژه از دیدگاه آموزشی در آمریکا، منتشر می‌شود. منابع و مطالب این مجله مبتنی بر معتبرترین و جدیدترین تحقیقاتی است که تمام معلمان حرفه‌ای فیزیک برای توسعه‌ی دانش فیزیک خود به آن نیازمندند.

این کتاب شامل ۱۰۰ مسئله‌ی حل شده در فیزیک کلاسیک است که از بخشی به نام «چالش‌هایی در فیزیک» از مجله‌ی انجمن معلمان فیزیک آمریکا متناسب با برنامه‌ی درسی فیزیک دبیرستان‌های کشورمان گزینش و ترجمه شده است. این مسائل مباحث مکانیک، الکتریسیته و مغناطیس، اپتیک و ترمودینامیک را در برمی‌گیرد. مسائل این مجموعه از غنای ویژه‌ای برخوردار است و در حل آن‌ها علاوه بر محاسبات ریاضی بر خلاقیت و دانش فیزیک تکیه می‌شود. مسائل «چالش‌هایی در فیزیک» در هر شماره‌ی مجله به نوبت از سوی معلمان و کارشناسان ورزیده‌ی فیزیک طرح و پاسخ آن‌ها از طرف خوانندگان مجله از سراسر دنیا پیشنهاد می‌شود. ویراستاران مجله از میان پاسخ‌های رسیده بهترین‌ها را انتخاب می‌کنند. بنابراین رویکرد خلاقانه در طرح سؤال‌ها و انتخاب و ارائه‌ی بهترین پاسخ‌ها از ویژگی‌های بارز این مجموعه است که پیوسته حفظ می‌شود.

کتاب حاضر از جمله کتاب‌هایی است که انتشارات فاطمی با توجه به کمبود منابع تکمیلی معتبر به‌ویژه کتاب‌های مسئله محورِ هدفمند که بتواند در توسعه‌ی آموزش فیزیک و تکنیک‌های حل مسئله تأثیرگذار باشد، در دست تألیف و ترجمه دارد.

این کتاب با همکاری مشترک مؤسسه فرهنگی فاطمی و اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان فیزیک ایران انتخاب، ترجمه و منتشر شده است. مخاطبان کتاب معلمان فیزیک، دانشجویان و دانش‌آموزان، به‌ویژه علاقه‌مندان شرکت در المپیادهای فیزیک، می‌باشند. جا دارد از جناب آقای نصرالله افاضل، سرگروه فیزیک مجتمع آموزشی علامه طباطبایی، که در انتخاب مسائل کتاب با توجه به نیازهای معلمان و دانش‌آموزان کشورمان همکاری داشته‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نماییم.

مؤسسه فرهنگی فاطمی　　　　اتحادیه‌ی انجمن‌های علمی آموزشی معلمان فیزیک ایران

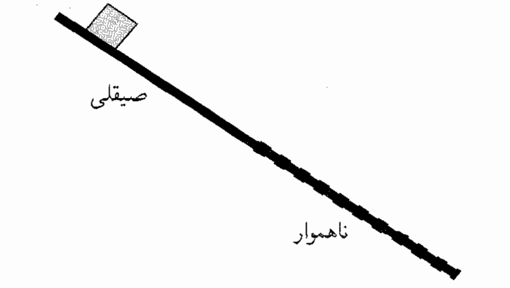
# بخش اول

# مسئله‌ها

# مکانیک

۱. **نمایش لیزخوردن.** بلوکی روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی بلوک و سطح $\mu_\mathrm{k} > \tan\theta$ است. بلوک با ضربه‌ای سریع به حرکت درمی‌آید و سرعت $v_0$ را به‌دست می‌آورد. بردار سرعت $v_0$ با خط قائم زاویه‌ی $\alpha$ می‌سازد. مدت زمانی را که بلوک در حال حرکت است به‌دست آورید.

۲. **نیمه و ناهموار.** جسم کوچکی را از بالای سطح شیب‌داری رها می‌کنیم تا به طرف پایین سطح بلغزد. نیمه‌ی بالایی سطح صیقلی و نیمه‌ی پایینی آن ناهموار است، به‌نحوی که شتاب جسم روی نیمه‌ی صیقلی سه‌برابر بیش‌تر از شتاب روی نیمه‌ی ناهموار است. جسم در مدت زمان $t_1$ به پایین سطح می‌رسد. سپس سطح را برمی‌گردانیم طوری که نیمه‌ی بالایی ناهموار و نیمه‌ی پایینی صیقلی باشد. دوباره جسم را از بالای سطح رها می‌کنیم. در این حالت جسم در مدت زمان $t_2$ به پایین سطح می‌رسد. در هر دو حالت، زاویه‌ی سطح شیب‌دار با افق یکسان است. نسبت $t_1/t_2$ را به‌دست آورید.

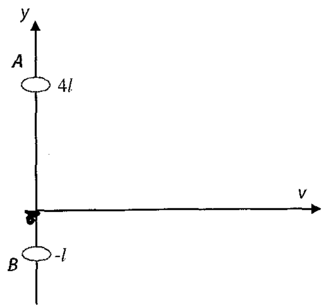



۳. **مسئله‌ی گوه.** گوه‌ای روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی که با افق زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد به طرف پایین می‌لغزد. جسم کوچکی روی گوه قرار داده شده است. هنگام لغزیدن گوه، جسم

نسبت به گوِه ساکن است. کمینه‌ی ضریب اصطکاک میان جسم و گوِه را به‌دست آورید.

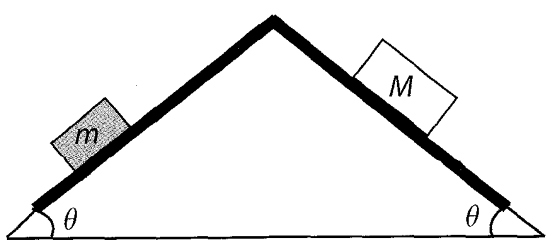
۴. **سال نو مبارک.** تصور کنید جرم خورشید ناگهان دوبرابر شود. سال زمینی چقدر خواهد بود؟

۵. **دارودسته‌ی برادرها.** دوتا سوسک به‌نام‌های $A$ و $B$ دو انتهای یک نوار لاستیکی کشیده را که روی یک میز افقی قرار دارد نگه داشته‌اند. مختصات اولیه‌ی سوسک‌ها همان‌طور که در شکل می‌بینیم در $(۰, ۴l)$ و $(۰, -l)$ است، مختصات گره روی نوار لاستیکی نشان دهنده‌ی مبدأ مختصات است.




سوسک‌ها هم‌زمان روی میز شروع به دویدن می‌کنند. سوسک $A$ از حالت سکون در جهت مثبت محور $y$ با شتاب نامعلوم $a$ شروع به حرکت می‌کند. سوسک $B$ هم فوراً با سرعت ثابت $v$ در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند. هنگام دویدن سوسک‌ها، گره روی نوار لاستیکی از نقطه‌ای با مختصات $(۲l, l)$ می‌گذرد. شتاب سوسک $A$ را به‌دست آورید.

۶. **ساییدن تسمه.** یک تسمه‌ی سبک هموار روی منشور مثلثی‌شکلی قرار دارد. دو جسم به جرم‌های $M$ و $m$ روی تسمه قرار داده شده‌اند. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین نوار و دو جسم به‌ترتیب برابر $\mu_{\rm s}$ و $\mu_{\rm k}$ است. بین تسمه و منشور اصطکاک وجود ندارد. زاویه‌ی $\theta$ و جرم‌های $m$ و $M$ معلوم است. با این فرض که $M > m$، شتاب حرکت تسمه روی منشور را بعد از این‌که دو جسم هم‌زمان رها می‌شوند، به‌دست آورید.

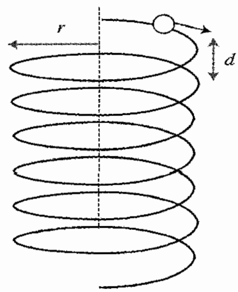



۷. **معمای لگاریتم طبیعی.** تنه‌ی درختی روی زمین قرار دارد. شکل تنه‌ی درخت، استوانه‌ای به شعاع $R$ است. یک کک کوچولو سعی می‌کند روی تنه‌ی درخت بپرد. سرعت اولیه‌ی کمینه‌ای

را که به کک امکان می‌دهد روی تنه‌ی درخت بپرد به‌دست آورید. فرض کنید کک به اندازه‌ی کافی باهوش است و نقطه‌ی مناسب را برای پریدن از زمین انتخاب می‌کند.

۸. **آویختن از ریسمان.** دوکره‌ی کوچک با بار الکتریکی مثبت به‌وسیله‌ی دو ریسمان سبک عایق با طول برابر از یک نقطه از سقف آویزان شده‌اند. جرم کره‌ی اول برابر $m_1$ و بار الکتریکی آن $q_1$ است. جرم کره‌ی دوم $m_2$ و بار الکتریکی آن $q_2$ است. اگر ریسمان اول با راستای قائم زاویه‌ی $\theta_1$ بسازد، زاویه‌ی $\theta_2$ را که ریسمان دوم با محور قائم می‌سازد به‌دست آورید.

۹. **به طرف لانه‌ی خرگوش.** منحنی مارپیچ درازی از سیم فلزی نازکی ساخته شده است. محور منحنی مارپیچ عمودی است. شعاع حلقه‌های مارپیچ $r$ و فاصله‌ی بین دو حلقه‌ی مجاور $d$ است. مهره‌ی کوچکی شروع به لغزیدن به طرف پایین مارپیچ می‌کند. سرانجام، سرعت مهره به مقدار ثابت $v$ می‌رسد. ضریب اصطکاک جنبشی $(k)$ بین مهره و مارپیچ را به‌دست آورید.

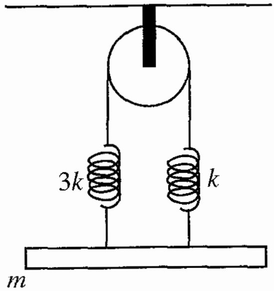



۱۰. **نیمی از این و نیمی از آن.** سنگی در راستای قائم پرتاب می‌شود. در آخرین ثانیه‌ی پرواز، سنگ نیمی از کل مسافت طی‌شده در مدت پرواز را پیموده است. بیش‌ترین مدت زمان ممکن پرواز چقدر است؟

۱۱. **گروه حفاری می‌جنبد.** سفینه‌ی فضایی بیگانه در حال چرخیدن گرد یک سیارک کروی در مداری دایره‌ای با شعاع بسیار کوچک است. دوره‌ی گردش سفینه ۱۵ دقیقه است. یک گروه تحقیقاتی از دانش‌آموزان فضایی روی سیارک فرود می‌آیند و در امتداد قطر آن تونلی حفر می‌کنند. سپس سنگی را با سرعت اولیه‌ای برابر با سرعت سفینه‌ی چرخان به داخل تونل می‌فرستند. چه مدت طول می‌کشد تا سنگ به نقطه‌ی پرتاب برگردد؟

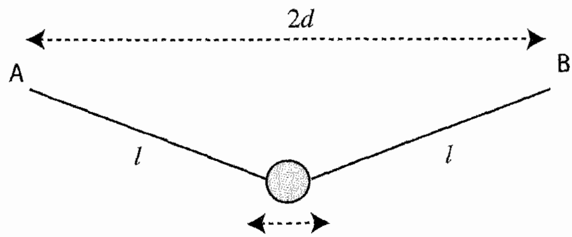
۱۲. **کاغذ بر سنگ غلبه می‌کند.** سنگی از سطح زمین با سرعت $v$ تحت زاویه‌ی $\theta$ در امتداد افق پرتاب می‌شود. پس از گذشت زمان $t$ از شروع حرکت ($t$ نامشخص است.) فاصله‌ی بین سنگ و نقطه‌ی پرتاب کاهش می‌یابد. با چشم‌پوشی از اثر مقاومت هوا مقدار $t$ را به‌دست آورید.

۱۳. **فنرها در زمستان.** میله‌ای یکنواخت به جرم $m$ از دو فنر مطابق شکل صفحه‌ی بعد آویزان



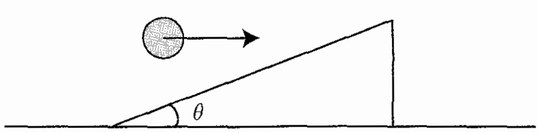

است. ثابت فنرها $k$ و $3k$ است. در مدت نوسان عمودی سیستم، میله افقی باقی می‌ماند. دوره‌ی نوسان‌ها را به‌دست آورید. نخ‌ها و قرقره ایده‌آل‌اند.

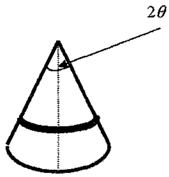
۱۴. **$2d$ یا غیر از $2d$.** ریسمانی به طول $2l$ از نقاط A و B واقع بر یک خط افقی آویزان است. فاصله‌ی بین A و B برابر با $2d$ است $(d < l)$. مهره‌ای سنگین و کوچک می‌تواند روی ریسمان بدون اصطکاک بلغزد. دوره‌ی نوسان‌های کم‌دامنه‌ی مهره را در صفحه‌ی قائم که شامل نقطه‌ی آویز است به‌دست آورید. شتاب گرانش برابر $g$ است.



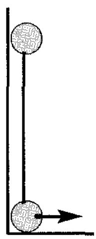

۱۵. **نه این‌جا نه آن‌جا.** رودخانه‌ای پهنایی برابر $d$ دارد. ماهیگیری با قایق دوبار از عرض رودخانه عبور می‌کند. در مدت زمان عبور اول، هدف او کمینه کردن مدت زمان عبور است. در مدت زمان عبور دوم، هدف او، کمینه کردن فاصله‌ای است که قایق به طرف پایین رودخانه رانده می‌شود. در حالت اول، زمان عبور برابر $t$ است. در حالت دوم، زمان عبور $3t$ است. سرعت جریان آب رودخانه چقدر است؟ همه‌ی جواب‌های ممکن را به‌دست آورید.

۱۶. **دوبرابر، زیباتر است.** سطح شیب‌داری روی صفحه‌ی صیقلی افقی قرار دارد. گوی کشسانی به سطح برخورد می‌کند. سرعت گوی درست قبل از برخورد در راستای افقی است. گوی به طرف بالای سطح وامی‌جهد و سپس در همان نقطه‌ی اولیه روی **سطح فرود می‌آید. نسبت** جرم‌های گوی و سطح شیب‌دار را به‌دست آورید. زاویه‌ی $\theta$ معلوم است.






۱۷. **نوار آزاد.** یک نوار لاستیکی به جرم $m$ و ثابت نیروی $k$ در حالت عادی به شکل دایره‌ای به شعاع $r$ است. نوار مطابق شکل به‌طور افقی روی مخروط بدون اصطکاکی (با زاویه‌ی معلوم $2\theta$) قرار دارد. شعاع دایره‌ای که نوار لاستیکی می‌سازد $(R)$ چقدر است؟



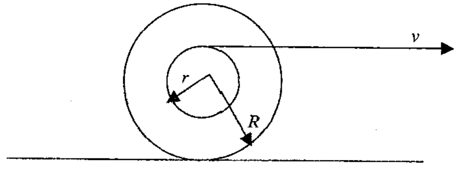
۱۸. **چقدر می‌توانی آهسته بروی؟** یک دمبل از میله‌ای سبک به طول $r$ و دو جرم کوچک $m$ تشکیل شده است که به میله وصل شده‌اند. دمبل را به‌طور عمودی به کنجی تکیه داده‌ایم که از دو سطح بدون اصطکاک تشکیل شده است. اگر انتهای پایینی دمبل به‌آرامی به طرف راست حرکت کند، دمبل شروع به لغزش می‌کند. سرعت جرم پایینی $(u)$ را در لحظه‌ای که جرم بالایی تماس را با صفحه‌ی عمود از دست می‌دهد به‌دست آورید.

۱۹. **سورتمه‌ای در حال گریز.** سورتمه‌ای در انتهای یک سراشیبی پوشیده از برف را با ضربه‌ی سریعی هل می‌دهیم. سورتمه به طرف بالا حرکت می‌کند و سپس به طرف پایین برمی‌گردد. کل زمان حرکت $t$ ثانیه طول می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین سورتمه و برف برابر $\mu$ باشد، زمان رسیدن سورتمه به بالاترین نقطه‌ی مسیر حرکتش $(t_{\mathrm{u}})$ را به‌دست آورید. سراشیبی با افق زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد.

۲۰. **فراز و نشیب در کار.** متصدی آسانسوری نوبت کاری هشت ساعته دارد. او می‌خواهد مطمئن شود که دقیقاً هشت ساعت کار می‌کند و به این منظور یک ساعت آونگی داخل آسانسور نصب می‌کند. آیا او به هدفش می‌رسد؟ فرض کنید شتاب بالاسو و پایین‌سوی آسانسور یک اندازه باشند و مدت زمان شتاب گرفتن در هر دو حالت بنابه معیار یک ساعت ساکن یک اندازه باشد.

۲۱. **فضاپیما در چاه هوایی.** فضاپیمایی با سرعت ثابت $v = ۱۰۰۰ \ \mathrm{m/s}$ در حال حرکت است. ناگهان، فرمانده‌ی فضاپیما سیارکی را مستقیماً در جلوی خود مشاهده می‌کند. فاصله‌ی فضاپیما تا سیارک برابر $l = ۹ \ \mathrm{km}$ است. قطر سیارک برابر $D = ۷ \ \mathrm{km}$ است. فرمانده تصمیم می‌گیرد با شلیک یک موشک اضطراری مانور گریز را اجرا کند. شلیک موشک موجب تغییر ناگهانی سرعت فضاپیما به اندازه‌ی $\delta v = ۳۰۰ \ \mathrm{m/s}$ می‌شود. آیا امکان دارد فضاپیما با سیارک برخورد نکند؟ فرض کنید فرمانده می‌تواند موشک را در هر جهتی شلیک کند.

۲۲. **چرخاندن قرقره.** قرقره‌ای مطابق شکل با نخی که به دور آن پیچیده شده است در راستای افقی



کشیده می‌شود. لغزشی بین قرقره و سطح وجود ندارد. نخ با سرعت ثابت $v$ کشیده می‌شود. سرعت زاویه‌ای قرقره ($\omega$) را با فرض معلوم بودن $r$ و $R$ به‌دست آورید.

۲۳. **پرش بلند.** دانش‌آموزی با قد $h$ که چمباتمه زده در راستای قائم به طرف بالا می‌پرد. در بالاترین نقطه‌ی پرش، مرکز جرم دانش‌آموز در ارتفاع $3h/4$ از سطح زمین قرار دارد. نیروی متوسط ($F$) را که پیش از قطع تماس دانش‌آموز با سطح زمین به آن نقطه وارد می‌شود به‌دست آورید. واضح است وقتی که دانش‌آموز روی زمین می‌ایستد، مرکز جرمش در ارتفاع $h/2$ از سطح زمین قرار دارد. در حالت چمباتمه، مرکز جرم در ارتفاع $h/4$ از سطح زمین قرار دارد. جرم دانش‌آموز $m$ است.

۲۴. **خروش جاده.** دو اتومبیل روی جاده‌ای مستقیم هم‌زمان به طرف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند. اتومبیل (۱) از نقطه‌ی $A$ با سرعت $v_1$ و اتومبیل (۲) از نقطه‌ی $B$ با سرعت $v_2$ حرکت خود را آغاز می‌کنند. شتاب اتومبیل (۱) برابر $a_1$، و جهت آن به طرف $A$ است. شتاب اتومبیل (۲) برابر $a_2$ و جهت آن به طرف $B$ است. هنگام حرکت، اتومبیل‌ها دوبار از کنار هم می‌گذرند. مدت زمان بین این دو برخورد را برابر $t$ در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی بین $A$ و $B$ را محاسبه کنید.

۲۵. **رقص رودخانه.** کودکی می‌خواهد با قایق از عرض رودخانه عبور کند. سرعت جریان آب رودخانه $k$برابر بیش‌تر از سرعت قایق در آب ساکن است. اگر کودک از عرض رودخانه طوری عبور کند که جابه‌جایی عرضی قایق کمینه شود این حرکت $t$ثانیه طول می‌کشد. زمان کمینه برای عبور از عرض رودخانه چقدر است؟

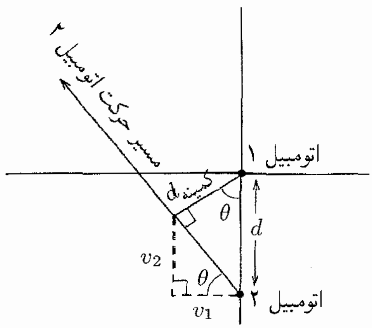
۲۶. **پرواز زنبور عسل.** سنگی تحت زاویه‌ی $۴۵^\circ$ به طرف بالا پرتاب می‌شود. زنبور عسلی مسیر حرکت سنگ را با سرعت ثابتی که برابر سرعت اولیه‌ی سنگ است تعقیب می‌کند. شتاب زنبور عسل در بالاترین نقطه‌ی مسیر چقدر است؟ در مورد سنگ، از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید.

۲۷. **جنگ‌های آغاز.** پرتابه‌ی ۱ با سرعت اولیه‌ی $v$ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. پرتابه‌ی ۲، $t$ ثانیه پس از آغاز حرکت پرتابه‌ی ۱ در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. پرتابه‌ی ۲ از پرتابه‌ی ۱ عبور می‌کند و به بالاترین نقطه‌ی مسیر حرکتش می‌رسد. سرعت اولیه‌ی پرتابه‌ی ۲ ($V_{i2}$) را به‌دست آورید. شتاب گرانشی را $g$ در نظر بگیرید.

۲۸. **ناپدید شدن اصطکاک.** سطح شیب‌داری به جرم $M$ با راستای افق زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد. سطح شیب‌دار روی صفحه‌ی بدون اصطکاکی قرار دارد. جسم کوچکی به جرم $m$ روی سطح شیب‌دار قرار داده می‌شود. چه نیروی افقی باید به سطح شیب‌دار وارد شود تا نیروی اصطکاک بین جسم و سطح صفر شود؟

۲۹. **شاهکار.** ذره‌ای با سرعت ثابت $v$ در حال حرکت است. نیروی ثابت $F$ به ذره وارد می‌شود. بعد از گذشت $t$ ثانیه، سرعت ذره نصف می‌شود. پس از گذشت $t$ ثانیه‌ی دیگر سرعت ذره دوباره نصف می‌شود. سرعت ذره $(v_{\mathrm{f}})$ بعد از گذشت $t$ ثانیه‌های دیگر چقدر است؟

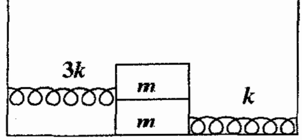
۳۰. **تقاطع کلی.** دو اتومبیل مطابق شکل به تقاطع دو جاده‌ی عمود بر هم نزدیک می‌شوند. سرعت اتومبیل‌ها $v_۱$ و $v_۲$ است. در لحظه‌ای که اتومبیل ۱ به تقاطع می‌رسد، فاصله‌ی بین اتومبیل‌ها $d$ است. فاصله‌ی کمینه بین دو اتومبیل در مدت حرکت چقدر است؟




۳۱. **خانه، خانه‌ی دوست‌داشتنی.** یک موش خرما ۵ m دورتر از پناهگاهش حمام آفتاب می‌گیرد. او تصمیم می‌گیرد آهسته بدود. موش خرما در امتداد خط راستی از پناهگاه دور می‌شود به‌ترتیبی که سرعتش با فاصله‌اش از پناهگاه رابطه‌ی عکس دارد. اگر سرعت اولیه‌ی موش خرما ۲ m/s باشد، چه مدت طول می‌کشد تا ۱۵ m از محل استقرارش دور شده باشد.

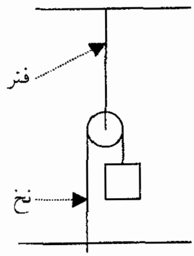
۳۲. **به آرامی از رودخانه می‌گذرم.** دانش‌آموزی می‌خواهد با قایق از عرض رودخانه‌ای از نقطه‌ی K تا نقطه L پارو بزند. سرعت جریان آب رودخانه برابر $v = ۲\,\mathrm{km/h}$ و سرعت قایق در آب ساکن برابر $u = ۵\,\mathrm{km/h}$ است. پهنای رودخانه برابر $a = ۰/۲۵\,\mathrm{km}$ و فاصله‌ی LM برابر $b = ۰/۵\,\mathrm{km}$ است. این حرکت چه مدت طول خواهد کشید؟

۳۳. **هارمونی و اصطکاک.** فرض کنید دستگاه شکل زیر در تعادل باشد، فنر سمت راست به اندازه‌ی $x_۱$ فشرده می‌شود. ضریب اصطکاک بین دو جسم $\mu_{\mathrm{s}}$ است. بین جسم و سطح نگهدارنده اصطکاکی وجود ندارد. ثابت فنرها $k$ و $۳k$ است (شکل را ببینید). جرم دو جسم

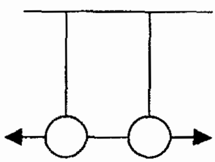


یکسان و برابر $m$ است. بیش‌ترین دامنه‌ی نوسان‌های دستگاه را به‌دست آورید، به‌نحوی که لغزش جسم بالایی روی جسم پایینی اتفاق نیفتد.

۳۴. **زیرِ زیر.** دوره‌ی نوسان‌های کم‌دامنه‌ی دستگاه شکل زیر را به‌دست آورید. جرم جسم $m$ است. قرقره از فنری با ثابت $k$ از سقف آویزان است. جسم از ریسمانی ایده‌آل آویزان شده است.




۳۵. **نوسان‌های خوب.** دو آونگ ساده هر یک به طول $L$ به سقف متصل‌اند. گلوله‌های کوچک به جرم یکسان $m$ به فنرهایی متصل شده‌اند. گلوله‌ها با نوار لاستیکی سبکی (که فنر نیست.) و ثابت نیروی $k$ دارد به هم متصل می‌شوند. در یک لحظه‌ی خاص، به هر گلوله ضربه‌ای سریع مطابق شکل زده می‌شود در نتیجه هر دو سرعت اولیه‌ی یکسانی به‌دست می‌آورند. دوره‌ی حرکت آن‌ها ($T$) را به‌دست آورید.

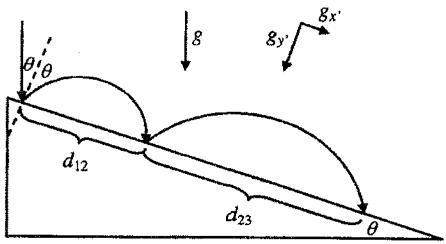


۳۶. **تعقیب بیهوده.** یک چندضلعی منتظم $n$ ضلع به طول $d$ دارد. رئوس این چندضلعی به‌طور متوالی شماره‌گذاری شده است: ۱، ۲، ۳، ... $n$. در هر رأس آن یک مورچه قرار داده می‌شود. در یک لحظه‌ی خاص، همه‌ی مورچه‌ها با سرعت ثابت و یکسان یکدیگر را به روش زیر تعقیب می‌کنند: مورچه‌ی رأس (۱) به‌طور مستقیم به طرف رأس (۲) می‌رود، مورچه‌ی رأس (۲) به طرف مورچه‌ی رأس (۳) شروع به حرکت می‌کند و الی آخر. در نهایت مورچه‌ای که از رأس $n$ شروع به حرکت می‌کند به طرف مورچه‌ی رأس (۱) می‌رود. مورچه‌ها با تغییر مکانشان به تعقیب یکدیگر ادامه می‌دهند. سرانجام، همه‌ی مورچه‌ها حرکت خود را در مرکز چندضلعی به پایان می‌رسانند. این تعقیب چه مدت طول می‌کشد؟

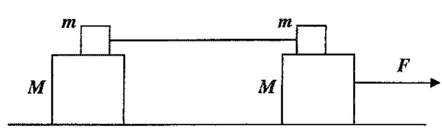
۳۷. **پرواز جادویی.** دانش‌آموزی توپ کشسانی را از سطح زمین به‌طور مستقیم به طرف یک دیوار عمودی بلند پرتاب می‌کند. بعد از اولین پرتاب، توپ از دیوار کمانه و سپس به زمین برخورد می‌کند. دانش‌آموز متوجه می‌شود که نقطه‌ی پرتاب در فاصله‌ای مساوی از نقطه‌ی فرود و دیوار قرار دارد. او سپس در جهت عمود بر دیوار به اندازه‌ی ۲۰ متر از نقطه‌ی پرتاب دور می‌شود و دوباره توپ را پرتاب می‌کند. پس از کمانه کردن و فرود آمدن مجدد توپ، دانش‌آموز متوجه می‌شود که فاصله‌ی بین نقطه‌ی پرتاب و نقطه‌ی فرود مشابه حالت قبل و مساوی است. سرانجام

او توپ را به آن طرف دیوار پرتاب می‌کند. این‌بار فاصله‌ی بین نقطه‌ی پرتاب و نقطه‌ی فرود چقدر است؟ سرعت اولیه‌ی توپ در هر سه حالت یکسان است.

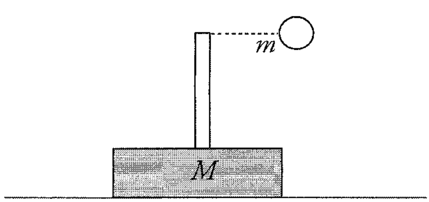
۳۸. **جهش، جهش، جهش.** یک توپ کشسان روی یک سطح شیب‌دار طولانی رها می‌شود. توپ از روی سطح می‌جهد و دوباره به سطح برخورد می‌کند و به همین صورت حرکت خود را رو به پایین ادامه می‌دهد. فاصله‌ی بین نقطه‌ی اول و نقطه‌ی دوم برخورد را $d_{۱۲}$ و فاصله‌ی بین نقطه‌ی دوم و نقطه‌ی سوم برخورد را $d_{۲۳}$ در نظر می‌گیریم. نسبت $d_{۱۲}/d_{۲۳}$ را به‌دست آورید.



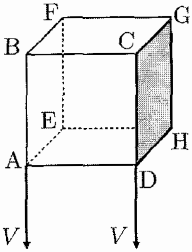

۳۹. **نی‌نی کوچولو روی بلوک.** چهار جسم مطابق شکل زیر روی سطح افقی صیقلی قرار داده شده‌اند. جرم همه‌ی جسم‌ها معلوم است (شکل را ببینید). ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم‌های بالایی و پایینی $\mu_s$ است. نیروی افقی بیشینه‌ی $F$ را که مطابق شکل به یکی از جسم‌های زیرین وارد و موجب حرکت هر چهار جسم با شتاب یکسان می‌شود به‌دست آورید.




۴۰. **نیم‌دایره‌ی بدجنس.** جسمی به جرم $M$ می‌تواند روی سطح میز افقی بدون اصطکاکی بلغزد. آونگ کوچکی به جرم $m$ و طول $l$ به گونه‌ای روی جسم نصب شده که می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی قائم نوسان کند. آونگ مطابق شکل از وضعیت افقی رها می‌شود. بیش‌ترین مقدار نیروی کشش ریسمان آونگ را در مدت زمان حرکت آن به‌دست آورید. فرض کنید ریسمان سبک و گلوله‌ی آونگ بسیار کوچک است.

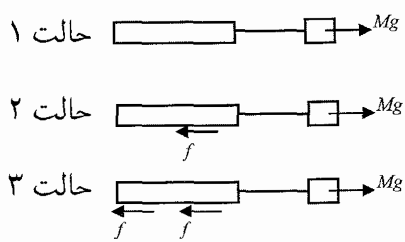


۴۱. **بازگشت به مربع اول.** مکعب صلبی در حال حرکت است. در یک لحظه‌ی مشخص، وجه ABCD در راستای قائم قرار دارد، و جهت بردار سرعت رأس‌های A و D در راستای قائم به طرف پایین و اندازه‌ی آن $V$ است. در همین لحظه، سرعت نقطه‌ی H برابر $۲V$ است. در این لحظه کدام نقطه از مکعب بیش‌ترین سرعت را دارد؟ این سرعت را محاسبه کنید.

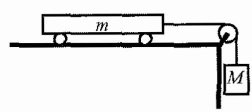



۴۲. **اسکیت‌بورد سرسخت.** دانش‌آموزی با اسکیت‌بورد روغن‌کاری‌شده‌ی خود دستگاهی را به‌صورت شکل ۱ سوار می‌کند و آزمایشی را انجام می‌دهد. او دستگاه را از حالت سکون اولیه رها می‌کند. در آزمایش اول، دانش‌آموز جسم آویزان را رها و اسکیت‌بورد به شتاب $a_1$ به طرف قرقره حرکت می‌کند. در آزمایش دوم، دانش‌آموز چرخ‌های جلو اسکیت‌بورد را قفل می‌کند. در این حالت، جسم رها می‌شود و شتاب اسکیت‌بورد $n$مرتبه کم‌تر از آزمایش اول است.

در آزمایش سوم، دانش‌آموز چرخ‌های جلو و عقب اسکیت‌بورد را قفل و سپس جسم را رها می‌کند (شکل ۲). نسبت شتاب‌ها در آزمایش‌های اول و سوم را به‌دست آورید. همه‌ی حالت‌های ممکن را در نظر بگیرید. ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی در چرخ‌های قفل‌شده را برابر بگیرید.

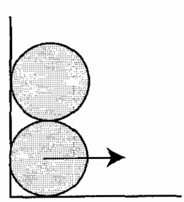



شکل ۲

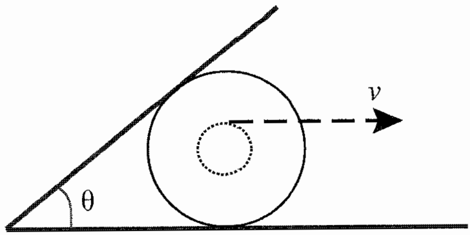



شکل ۱

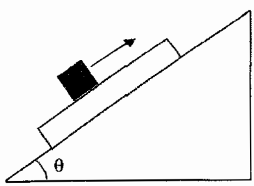
۴۳. **قانون لغزش.** مطابق شکل دو استوانه‌ی همگن یکسان هر یک به شعاع $R$، نزدیک یک دیوار، روی هم قرار داده شده‌اند. پس از ایجاد یک اختلال کوچک، استوانه‌ی زیرین کمی به سمت راست حرکت می‌کند و دستگاه به حرکت درمی‌آید. سرعت بیشینه‌ی استوانه‌ی زیرین پس از آغاز حرکت دستگاه را به‌دست آورید. از اصطکاک میان همه‌ی سطوح چشم‌پوشی کنید.



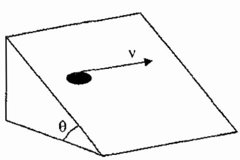
۴۴. **حضور و غیاب.** یک یویو به‌وسیله‌ی نخ متصل به آن در راستای سطح افقی بدون لغزشی کشیده می‌شود. سرعت افقی انتهای نخ برابر $v$ است. یک میله مطابق شکل به‌صورت یک لولا، یویو را نگه داشته است. سرعت زاویه‌ای میله $(\omega)$ را به‌صورت تابعی از زاویه $(\theta)$ به‌دست آورید. شعاع خارجی و داخلی میله به‌ترتیب برابر $R$ و $r$ است.




۴۵. **یک بازی صفحه‌ای دیگر.** صفحه‌ای به جرم $m$ روی سطح شیب‌دار بدون اصطکاکی که با افق زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد قرار دارد. جسمی به جرم $M$ روی صفحه قرار می‌دهیم و ضربه‌ای رو به بالای صفحه با سرعت اولیه‌ی $v$ به آن وارد می‌کنیم. فاصله‌ای که جسم می‌پیماید $(d)$ تا لحظه‌ای را که سرعت آن به $v/۲$ افت کند، به‌دست آورید. صفحه نسبت به سطح شیب‌دار حرکت نمی‌کند.




۴۶. **نه بالا نه پایین.** جسمی به جرم $m$ روی سطح شیب‌داری به حال سکون قرار دارد. زاویه‌ی سطح با افق $\theta$ است. کم‌ترین مقدار نیروی $F$ را که باید به جسم وارد شود تا جسم مطابق شکل روی سطح شیب‌دار و موازی با سطح زمین حرکت کند، به‌دست آورید. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح $\mu_s$ است.



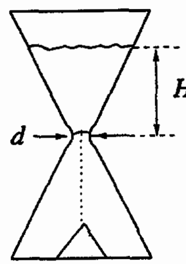

۴۷. **دنیا روی یک فنر.** یک فنر، ثابت نیروی $k$ و جرم $m$ دارد. این فنر به‌طور عمودی آویزان می‌شود و جسمی با جرم نامعلوم به انتهای پایین آن متصل می‌شود. مشخص است که جرم جسم بسیار بیش‌تر از جرم فنر است. جسم آویخته‌شده، فنر را به اندازه‌ی دوبرابر طول آن در حالت عادی می‌کشد. چه مدت طول می‌کشد تا یک تپ عرضی کم‌دامنه طول فنر را که به‌دلیل وزن جسم کش آمده است طی کند؟

۴۸. **ملاقات لغو می‌شود.** دو نقطه‌ی A و B، روی سطح زمین در فاصله‌ی مشخص $d$ از هم قرار دارند.

دو سنگ، به‌طور مشابه، از نقاط A و B با سرعت‌های برابر ولی با زاویه‌های مختلف پرتاب می‌شوند. هر سنگ در نقطه‌ی پرتاب دیگری فرود می‌آید. با دانستن این‌که یکی از سنگ‌ها با زاویه‌ی $\theta > ۴۵^\circ$ در راستای افق پرتاب می‌شود، فاصله‌ی کمینه‌ی بین سنگ‌ها در مدت حرکت چقدر است؟

۴۹. **اگر راه دیگری نباشد.** جسمی را روی سطح یک میز افقی با سرعت هل می‌دهیم، ضریب اصطکاک بین جسم و میز $\mu_k$ است. در مدت زمان $t$ (بلافاصله پس از هل دادن) جسم مسافت $d$ را می‌پیماید. فاصله‌ای را که در مدت زمان ثانویه‌ی $t'$ پیموده می‌شود به‌دست آورید. همه‌ی جواب‌های ممکن را محاسبه کنید.

۵۰. **زمان چه کند می‌گذرد.** با تخمین مناسب نشان دهید چقدر طول می‌کشد که ساعت شنی شکل زیر به‌طور کامل تخلیه شود.




## الکتریسیته و مغناطیس

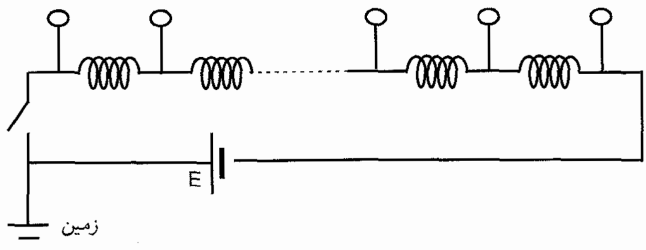
۵۱. **تکاندن و پختن.** خازن مسطحی صفحه‌های موازی به مساحت $A$ دارد و بین صفحه‌ها با هوا پر شده است. خازن به یک مولد با نیروی محرکه‌ی $E$ و مقاومت داخلی کوچک متصل می‌شود. یکی از صفحه‌ها ارتعاش می‌کند، به‌نحوی که فاصله‌ی میان صفحه‌ها به‌صورت تابع $d = d_\circ + a\cos\omega t$ تغییر می‌کند $(a \ll d_\circ)$. زمانی که جریان لحظه‌ای مدار به مقدار $I$ می‌رسد خازن می‌سوزد. بیش‌ترین مقدار ممکن دامنه‌ی ارتعاشات $(a)$ را به‌دست آورید.

۵۲. **ریل و میدان.** میله‌ی فلزی به جرم $m$ بدون اصطکاک می‌تواند در امتداد دو ریل موازی افقی که به مقاومت $R$ متصل‌اند، بلغزد. میدان مغناطیسی عمودی $B$ در آن منطقه وجود دارد. میله با یک ضربه‌ی سریع و سرعت اولیه‌ی $v$ شروع به حرکت می‌کند. میله قبل از توقف چه مسافتی را خواهد پیمود؟ فاصله‌ی بین ریل‌ها $l$ است.

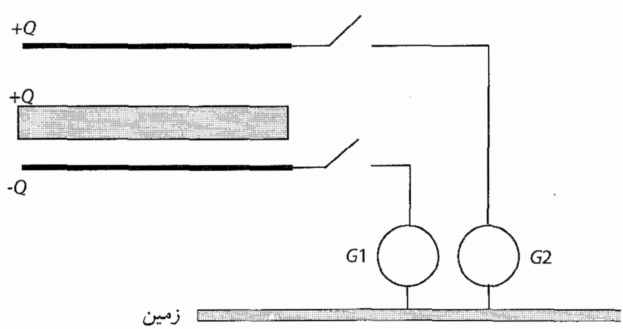
۵۳. **ماجرای جریان‌ها.** دو آمپرسنج، ۱ و ۲، مقاومت‌های داخلی متفاوت $r_۱$ (معلوم) و $r_۲$ (نامعلوم) دارند، هر آمپرسنج یک ویژگی مقایسه‌ای دارد به‌طوری که انحراف زاویه‌ای عقربه از صفر متناسب

با مقدار جریان است. در ابتدا، آمپرسنج‌ها را به‌طور سری به هم می‌بندیم و سپس به یک منبع ولتاژ ثابت متصل می‌کنیم. انحراف عقربه‌ی آمپرسنج‌ها به‌ترتیب $\theta_1$ و $\theta_2$ است. سپس آمپرسنج‌ها را به‌طور موازی به هم متصل می‌کنیم و به همان منبع ولتاژ می‌بندیم. در این حالت، انحراف عقربه‌ی آمپرسنج‌ها به‌ترتیب $\theta'_1$ و $\theta'_2$ است. $r_2$ را به‌دست آورید.

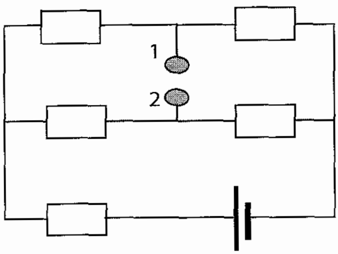
۵۴. **راه‌پیمایی طولانی ۲۰۰۹**. مداری شامل منبع ولتاژی با نیروی محرکه‌ی E و مقاومت درونی ناچیز و ۲۰۰۸ مقاومت شبیه به هم است. ۲۰۰۹ کره‌ی رسانای کوچک مشابه مطابق شکل با سیم‌های نازک و طویل به مدار متصل شده‌اند. وقتی کلید بسته است بار کل کره‌ها $(Q)$ تغییر می‌کند. شعاع هر کره $(r)$ چقدر است؟




۵۵. **بالا و پایین از زمین**. خازن مسطحی با صفحه‌های موازی بار $Q$ دارد ($Q$ معلوم است). مطابق شکل، قطعه‌ای فلزی با بار $+Q$ را بین صفحه‌های خازن قرار می‌دهیم. ضخامت قطعه‌ی فلزی $d$ است. فاصله‌ی بین صفحه‌ی بالایی خازن تا سطح بالایی قطعه برابر $2d$ و فاصله‌ی بین صفحه‌ی پایینی خازن تا سطح پایینی قطعه برابر $d$ است. مطابق شکل هر یک از صفحه‌های خازن از طریق یک گالوانومتر به زمین متصل می‌شود. مقدار باری را که از هر گالوانومتر عبور می‌کند، بعد از بستن همزمان هر دو کلید به‌دست آورید.

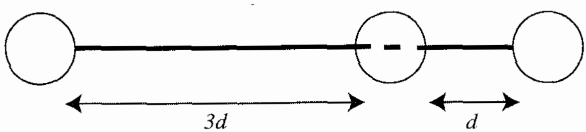



۵۶. **متناسب با لیگ $I-V$**. یک مدار الکتریکی شامل یک منبع تغذیه و پنج مقاومت الکتریکی



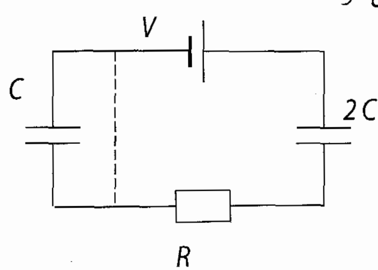

نامعلوم است. آمپرسنجی ایده‌آل که بین دو نقطه‌ی ۱ و ۲ متصل می‌شود، جریان الکتریکی $I$ را نشان می‌دهد. اگر به‌جای آمپرسنج، یک مقاومت الکتریکی $(R)$ در همان موضع متصل شود، جریان عبوری مدار برابر $i$ است. اگر به‌جای مقاومت $R$ یک ولت‌سنج بین دو نقطه‌ی ۱ و ۲ متصل شود، چه ولتاژی را نشان خواهد داد؟

۵۷. **سه بازیچه.** دو کره‌ی کوچک به انتهای یک میله‌ی بلند، سبک و نارسانا متصل می‌شوند. مطابق شکل، کره‌ی سوم بدون اصطکاک روی میله و بین دو کره‌ی دیگر می‌لغزد. هر سه کره نارسانا و جرم آن‌ها معلوم و برابر $m$ و بار الکتریکی آن‌ها مثبت و برابر $q$ است که به‌طور یکنواخت روی سطح توزیع شده است. کل مجموعه روی یک سطح نارسانا و بدون اصطکاک قرار دارد. در ابتدا هر سه ساکن‌اند و کره‌ی میانی در فاصله‌ی $3d$ از یک انتهای میله و فاصله‌ی $d$ از انتهای دیگر قرار دارد. سرعت بیشینه‌ی کره‌ی میانی $(v)$ را پس از رها شدن مجموعه به‌دست آورید.

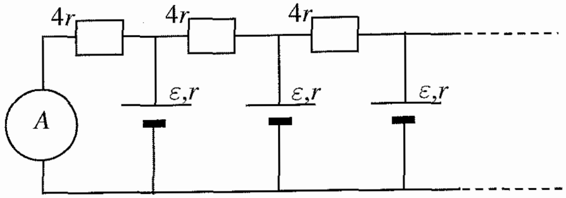



۵۸. **گهواره‌ی گربه.** ۲۰۱۰ نقطه روی صفحه‌ی دایره‌ای بزرگی قرار دارند. هر نقطه را یک سیم مقاومت‌دار به نقاط دیگر متصل می‌کند. مقاومت $r$ بین هر دو نقطه را به‌دست آورید.

۵۹. **یک سیم داغ.** یک مدار سری از دو خازن، یک مقاومت و یک منبع ولتاژ ایده‌آل تشکیل شده است. مقادیر $V$، $C$ و $R$ معلوم است. اگر یک سیم ایده‌آل مطابق شکل به مدار اضافه شود چه مقدار گرما تولید می‌شود؟

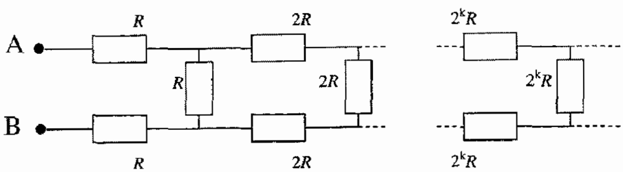



۶۰. **قوانین زنجیره‌ای.** مداری مطابق شکل صفحه‌ی بعد از سمت راست تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد. هر یک از مولدها، نیروی محرکه‌ی نامعلوم $\varepsilon$ و مقاومت درونی $r$ دارند. مقدار هر یک از مقاومت‌ها

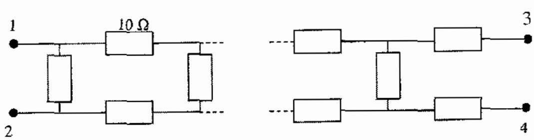



۴$r$ است. جریانی که آمپرسنج ایده‌آل در مدار نشان می‌دهد برابر $I$ است. مقدار $\varepsilon$ را برحسب $I$ و $r$ به‌دست آورید.

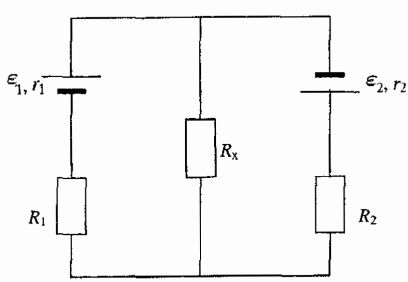
۶۱. **قدرت دو.** مقاومت معادل میان نقاط A و B را در مدار بی‌نهایت زیر به‌دست آورید. پاسخ خود را برحسب $R$ بیان کنید.




۶۲. **نپرس و نگو.** در مدار شکل زیر چه مقاومتی بین نقاط ۳ و ۴ قرار داده شود، تا مقاومت بین نقاط ۱ و ۲ را بدون دانستن تعداد کل مقاومت‌ها در مدار به‌دست آوریم؟ هر یک از مقاومت‌های این مدار $۱۰\,\Omega$ است.




۶۳. **خارج از حلقه.** در مدار شکل زیر، وقتی ولت‌سنج‌های ایده‌آل به دو سر هر یک از منبع تغذیه‌ها متصل می‌شوند، ولتاژها یکسان است. در این مدار، مقاومت $R_{\mathrm{x}}$ نامعلوم، $\varepsilon_{۱} = ۱۰\,\mathrm{V}$، $\varepsilon_{۲} = ۵\,\mathrm{V}$، $r_{۱} = ۲\,\Omega$، $r_{۲} = ۱\,\Omega$، $R_{۱} = ۸\,\Omega$، $R_{۲} = ۹\,\Omega$ است. جریان عبوری از $R_{\mathrm{x}}$ را به‌دست آورید.

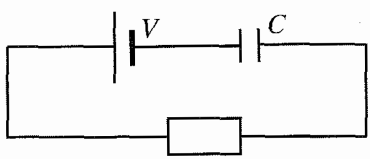


۶۴. **حلقه، حلقه، حلقه.** حلقه‌ای به جرم $m$، قطر $d$ و مقاومت $R$ از ارتفاع زیادی در یک میدان مغناطیسی عمودی سقوط می‌کند. اندازه‌ی میدان با ارتفاع تغییر می‌کند: $B = B_۰(۱ + ky)$، $k$ ثابت معلوم و $y$ مختصه‌ی عمودی است. سرعت نهایی حلقه را به‌دست آورید. صفحه‌ی حلقه هنگام سقوط افقی باقی می‌ماند.

۶۵. **هیجان نهایی.** دامنه‌ی میدان الکتریکی برای یک موج الکترومغناطیسی با بسامد $\omega = ۲ \times ۱۰^{۱۶}\mathrm{s}^{-۱}$ به‌صورت $E(t) = k(۱ + \cos \Omega t)$ با زمان تغییر می‌کند. $k$ یک عدد ثابت و $\Omega = ۱/۸ \times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{s}^{-۱}$ است. آیا چنین موجی می‌تواند اتم‌های هیدروژن را یونیزه کند؟ اگر جواب مثبت باشد، انرژی الکترون‌های خروجی $(E_e)$ چقدر است؟ فرض کنید اتم‌ها نور را به‌صورت فوتون جذب می‌کنند. انرژی یونش گاز هیدروژن برابر $E_i = ۱۳/۶\,\mathrm{eV}$ است. ثابت پلانک $\hbar = ۱/۰۵\,\mathrm{j} \cdot \mathrm{s}$ است.

۶۶. **بشقاب خانگی.** یک صفحه‌ی فلزی در معرض تابش نوری با طول موج $\lambda$ قرار می‌گیرد. الکترون‌ها از سطح صفحه خارج می‌شوند. وقتی میدان الکتریکی تأخیری اعمال می‌شود، هیچ الکترونی نمی‌تواند بیش از فاصله‌ی مشخص $d$ از سطح دور شود. طول موج آستانه‌ی ماده‌ی سازنده‌ی صفحه‌ی $\lambda_۰$ را به‌دست آورید.

۶۷. **حالا می‌بینی، حالا نمی‌بینی.** فضای بین صفحات موازی یک خازن مسطح به ظرفیت $C$ با هوا پر شده است. خازن از طریق یک مقاومت به یک منبع ولتاژ با اختلاف پتانسیل ثابت وصل می‌شود (شکل زیر را ببینید).

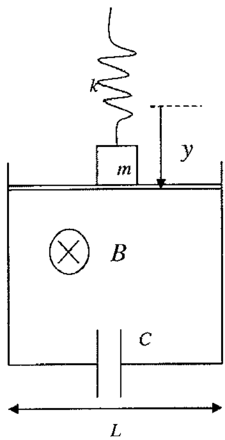



یک صفحه‌ی دی‌الکتریک با ثابت $k$ داخل خازن قرار داده می‌شود، به‌طوری که فضای بین دو صفحه را به‌طور کامل پر می‌کند. پس از برقراری تعادل، صفحه را به سرعت برمی‌داریم. مقدار گرمای تولیدشده در مقاومت را تا زمان برقراری مجدد تعادل به‌دست آورید.

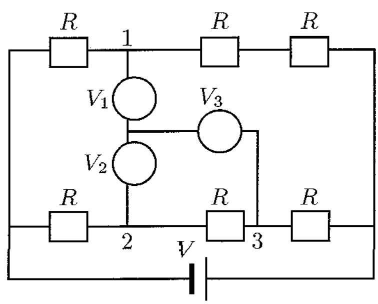
۶۸. **آن‌جا در میدان.** دو ذره‌ی باردار $(M, +Q)$ و $(m, -q)$ در میدان الکتریکی یکنواخت $E$ قرار داده می‌شود. ذره‌ها پس از رها شدن در فاصله‌ی ثابتی از یکدیگر قرار می‌گیرند. فاصله‌ی $L$ چقدر است؟

۶۹. **نوسان‌های وحشتناک.** جسم سنگینی از فنری با ثابت $k$ به سقف متصل می‌شود. میله‌ی

رسانایی به جسم متصل می‌شود. مجموع جرم جسم و میله $m$ است. میله می‌تواند روی دو ریل موازی عمودی که به فاصله‌ی $l$ از هم قرار دارند بدون اصطکاک بلغزد. یک خازن با ظرفیت معلوم $C$ با سیم به ریل‌ها متصل می‌شود. کل دستگاه در میدان مغناطیسی یکنواختی که جهت آن در شکل مشخص شده قرار می‌گیرد. دوره‌ی نوسان‌های عمودی جسم $(T)$ را به‌دست آورید. از مقاومت الکتریکی میله و سیم‌ها چشم‌پوشی کنید.



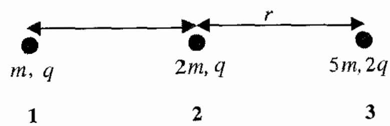

۷۰. **استفاده از مازاد.** در مدار شکل زیر، هر سه ولت‌سنج ایده‌آل و یکسان‌اند. مقاومت‌ها مقدار یکسان $R$ دارند. ولتاژ $V$ هم معلوم است. عددی را که ولت‌سنج‌ها نشان می‌دهند مشخص کنید.




۷۱. **چه اتلافی!** توان بیشینه‌ی یک المنت گرمایی را که از یک قطعه سیم با مقاومت $536\Omega$ ساخته شده به‌دست آورید. المنت به ولتاژ $V = 110\ \mathrm{V}$ متصل است. جریان عبوری از سیم از $2\mathrm{A}$ بیش‌تر نمی‌شود.

۷۲. **رقص در تالار.** گوی کوچک بارداری در حالت تعادل در ارتفاع $h$ از بالای صفحه‌ی نارسانایی که به‌طور یکنواخت باردار شده آویزان است. اگر دیسکی به شعاع $r = 0{,}001h$ از سطحی که دقیقاً زیر گوی قرار دارد بریده شود، شتاب گوی چقدر خواهد بود؟

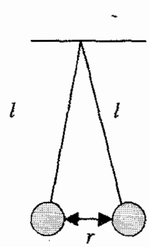
۷۳. **سه، شلوغ است.** سه ذره‌ی کوچک با بار مثبت، مطابق شکل در سه نقطه نگه داشته شده‌اند. بار و جرم ذره‌ها و فاصله‌ی اولیه بین دو ذره‌ی مجاور ($r$) معلوم است. هر سه ذره به‌طور مشابه رها می‌شوند. انرژی ذره‌ها را وقتی از هم دورند به‌دست آورید. فرض کنید ذره‌ها در امتداد یک خط راست حرکت می‌کنند. مطابق شکل، ذره‌ها اندیس ۱، ۲ و ۳ دارند.




۷۴. **بعضی‌ها داغشو دوست دارند.** سه ظرف یکسان ۱، ۲ و ۳ با مقادیر برابر یخ در دمای صفر درجه پر می‌شوند و در محیط بیرون قرار می‌گیرند.

گرمکن‌های الکتریکی مشابه داخل هر ظرف قرار داده می‌شود. گرمکن‌ها به ولتاژهای متفاوت $V_۱ = ۳۸۰$ V، $V_۲ = ۲۲۰$ V و $V_۳ = ۱۱۰$ V متصل می‌شوند. تمام یخ ظرف ۱ در مدت $t_۱ = ۴$ دقیقه ذوب می‌شود. تمام یخ ظرف ۲ در مدت $t_۲ = ۲۰$ دقیقه ذوب می‌شود. چه مدت طول می‌کشد تا تمام یخ ظرف ۳ ذوب شود؟

فرض کنید مقاومت گرمکن‌ها و دمای هر ظرف در هر لحظه ثابت است.

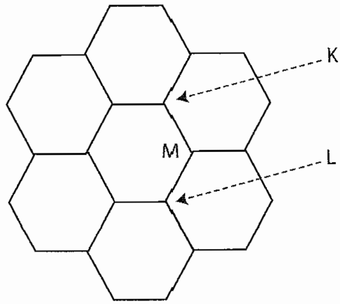



۷۵. **نزدیک‌شدنی آرام.** دو گلوله‌ی کوچک به جرم $m$ مطابق شکل با نخ‌های سبکی به طول $l$ آویزان شده‌اند. در ابتدا هر گلوله حامل بار $+q$ است. فاصله‌ی اولیه‌ی گلوله‌ها برابر $r$ است ($r \ll l$) . بار هر کره به‌کندی در محیط تخلیه می‌شود. بار روی هر کره با زمان به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$q_t = q(۱ - bt)^{۱/۵}$$

که $b$ یک عدد ثابت است. در نتیجه، گلوله‌ها به هم نزدیک‌تر می‌شوند. سرعت گلوله‌ها را هنگام نزدیک شدن به یکدیگر به‌دست آورید.

۷۶. **این‌جا عسل نداریم.** شکل صفحه‌ی بعد قسمتی از یک مدار بی‌نهایت را نشان می‌دهد که با سیم رسانا ساخته شده است. هر طرف هر کدام از شش‌ضلعی‌ها مقاومت (نامعلوم) $R$ دارد. مقاومت‌سنجی که به نقاط K و L وصل شده است، عدد $۱۰\Omega$ را نشان می‌دهد. $R$ را به‌دست آورید.




# اپتیک

۷۷. **دریاچه‌ی آرام.** یک گیرنده‌ی رادیویی روی دکلی وسط یک دریاچه‌ی آرام نصب می‌شود تا امواج رادیویی را از ماهواره‌ی در حال چرخش به دور زمین دریافت کند. ماهواره بالای سطح افق پیش می‌رود و شدت سیگنال‌ها به‌صورت دوره‌ای تغییر می‌کند. وقتی ماهواره در $\theta_۱ = ۳^\circ$ بالای افق قرار دارد، شدت سیگنال‌ها بیشینه است و در $\theta = ۶^\circ$ بالای افق دوباره به مقدار بیشینه می‌رسد. طول موج سیگنال ماهواره ($\lambda$) چقدر است؟ گیرنده در ارتفاع $h = ۴\ \mathrm{m}$ بالای سطح دریاچه قرار دارد.

۷۸. **کف دریا شلوغ است.** در کف یک کشتی تحقیقاتی، پنجره‌ی شیشه‌ای گردی وجود دارد که از آن برای مشاهده‌ی کف دریا استفاده می‌شود. قطر پنجره $۶۰\ \mathrm{cm}$، ضخامت شیشه $۲۰\ \mathrm{mm}$، ضریب شکست آب ۱٫۳۳ و ضریب شکست شیشه ۱٫۵۵ است. کف دریا ۶ متر پایین‌تر از پنجره قرار دارد. مساحت کف دریا را که از پنجره قابل دیدن است، تخمین بزنید.

۷۹. **ستاره و تصویرساز.** تصویر یک ستاره با استفاده از یک آینه‌ی کروی که روی صفحه‌ی افقی قرار دارد تشکیل می‌شود. ستاره درست بالای آب قرار دارد. تصویر در فاصله‌ی $b$ از آینه تشکیل می‌شود. سپس آینه را با یک مایع شفاف به ضریب شکست $n$ پر می‌کنیم. محل جدید تصویر را به‌دست آورید. فرض کنید قطر آینه بسیار کم‌تر از شعاع انحنای آن است.

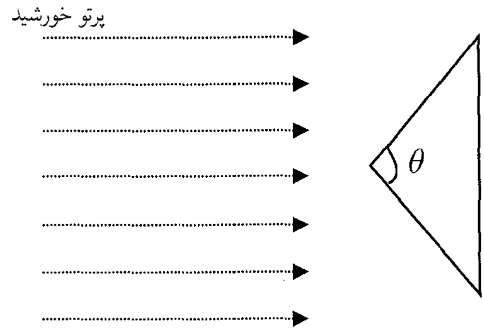
۸۰. **کانون حقه‌باز.** یک عدسی شیشه‌ای نازک از دو سطح کوژ تشکیل می‌شود که شعاع انحنای آن‌ها برابر است. وقتی عدسی در هوا قرار دارد، فاصله‌ی بین دو کانون آن $۲f_۱$ است. وقتی همان عدسی در آب فرو برده می‌شود فاصله‌ی دو کانون آن به $۲f_۲$ تغییر می‌کند. فاصله‌ی بین کانون و عدسی ($d$)، وقتی عدسی در مرز بین آب و هوا قرار داده می‌شود چقدر است؟ ضریب شکست هوا برابر ۱، و ضریب شکست شیشه برابر ۱٫۳۳ است.

۸۱. **تصویر همه چیز است.** دو عدسی همگرا فاصله‌های کانونی $f$ و $f'$ دارند. محورهای اپتیکی عدسی‌ها بر هم منطبق است. این مجموعه عدسی برای تشکیل تصویری از یک جسم مورد

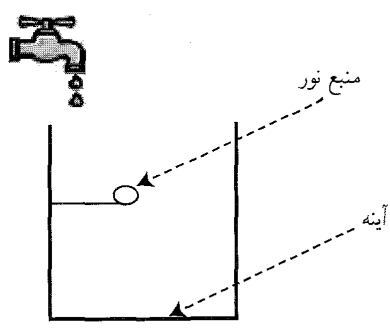
استفاده قرار می‌گیرد. اندازه‌ی تصویر به فاصله‌ی بین مجموعه‌ی عدسی‌ها و شیء بستگی ندارد. فاصله‌ی بین عدسی‌ها $(x)$ را به‌دست آورید.

۸۲. **عقاب فرود می‌آید.** عقابی در فاصله‌ی $a = ۵\,\mathrm{m}$ پشت سر یک گردشگر روی سطح زمین فرود می‌آید. گردشگر از بازتاب نور در عینکش دو تصویر از عقاب می‌بیند. یک تصویر در فاصله‌ی $b_۱ = ۵\,\mathrm{m}$ و دیگری در فاصله‌ی $b_۲ = ۰/۷۱۴\,\mathrm{m}$. هنگامی که برمی‌گردد و به عقاب نگاه می‌کند، هنوز عینک به چشم دارد و در این حالت تصویر عقاب در فاصله‌ی $b_۳ = ۲/۵۰\,\mathrm{m}$ دیده می‌شود. ضریب شکست عدسی‌ها $(n)$ را به‌دست آورید.

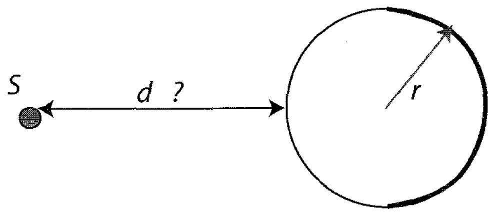
۸۳. **فروش روز خجسته‌ی ماه می: ۳۰٪ تخفیف.** یک سفینه‌ی فضایی مخروطی‌شکل از فشار تابش خورشیدی برای دورکردن خود از سطح خورشید استفاده می‌کند. محور مخروط مطابق شکل دقیقاً از خورشید عبور می‌کند. بنابراین فضانوردها سعی می‌کنند شتاب خود را با پوشاندن سطح مخروطی با ماده‌ای که بازتاب زیادی دارد افزایش دهند. برخلاف میل آن‌ها، شتاب عملاً ۳۰٪ کاهش می‌یابد. زاویه‌ی $\theta$ را محاسبه کنید.



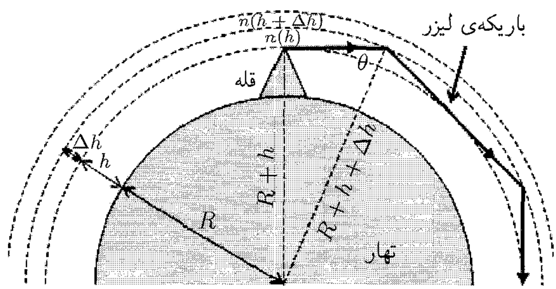

۸۴. **آینه، آینه روی دیوار.** یک چشمه‌ی نورکوچک داخل یک ظرف استوانه‌ای‌شکل به ارتفاع $h$ نصب شده است. کف ظرف با یک آینه پوشانده شده است. در ابتدا ظرف خالی است، سپس یک مایع شفاف با ضریب شکست $n$ به آرامی به داخل ظرف ریخته می‌شود. سطح مایع در مدت $t$ به‌طور یکنواخت به بالای ظرف می‌رسد. سرعت تصویر چشمه را در این مدت به‌دست آورید.



۸۵. **هر الماسی یک پوشش نقره‌ای دارد.** یک الماس بسیار گران‌قیمت به‌صورت یک کره‌ی کامل به شعاع $r$ پرداخت می‌شود. سطح بیرونی کره با نقره پوشیده می‌شود. در چه فاصله‌ای جلو کره یک چشمه‌ی کوچک نور قرار دهیم تا تصویر کاملاً بر چشمه منطبق شود؟ ضریب شکست الماس $n = ۲/۴$ است.

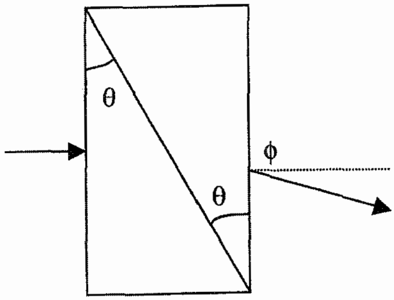



۸۶. **حرکت ماهواره.** روی سیاره‌ی تِهار، ضریب شکست جو به‌صورت $n(h) = n_{\circ} - bh$ به ارتفاع بستگی دارد، که در آن $b$ ضریب ثابتی است $(b \ll n_{\circ}/h)$. یک دانشمند تهاری باریکه‌ی لیزری را به‌طور افقی از بالای مرتفع‌ترین قله‌ی تهار می‌تاباند. دانشمند با مشاهده‌ی این‌که باریکه‌ی لیزر در اطراف سیاره می‌چرخد و به پشت سر او برخورد می‌کند متعجب می‌شود. ارتفاع قله چقدر است؟ شعاع سیاره را $R$ در نظر بگیرید.

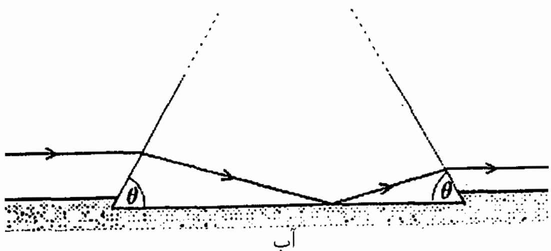



۸۷. **پرتو امید.** یک لوله‌ی موئین از شیشه‌ای به ضریب شکست $n'$ ساخته شده است. شعاع خارجی لوله $R$ است. لوله با مایعی به ضریب شکست $n < n'$ پر می‌شود. کم‌ترین مقدار شعاع داخلی لوله $(r)$ چقدر باشد تا هر پرتویی که به لوله برخورد می‌کند وارد مایع شود؟

۸۸. **بدرخش.** دو منشور یکسان با ضریب شکست‌های اندکی متفاوت مانند شکل صفحه‌ی بعد کنار هم قرار دارند. زاویه‌ی $\theta$ کوچک است. وقتی باریکه‌ی لیزری به‌طور عمود به صفحه‌ی یکی از منشورها برخورد می‌کند، پرتو شکسته شده به‌اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک $\phi$ منحرف می‌شود. اختلاف $dn$ میان ضریب شکست منشورها را برحسب $\theta$ و $\phi$ به‌دست آورید.

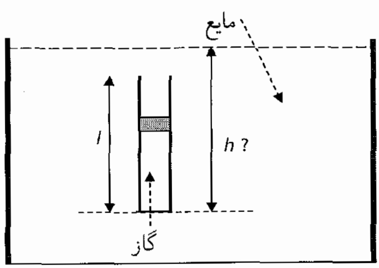



۸۹. **سقوط جانانه.** سطح مقطع یک منشور شیشه‌ای یک مثلث متساوی‌الساقین است که به‌طور افقی در آب قرار گرفته است. زاویه‌ی ساق‌های مثلث با قاعده، $\theta$ است. پرتو نوری موازی و بر فراز سطح آب و عمود بر محور منشور از منشور عبور می‌کند، از وجه مشترک شیشه‌ـآب بازمی‌تابد و سرانجام دوباره وارد هوا می‌شود. اگر ضریب شکست شیشه و آب به‌ترتیب ۳/۲ و ۴/۳ باشد، نشان دهید که $\theta$ دست‌کم °۲۵٫۹ است.

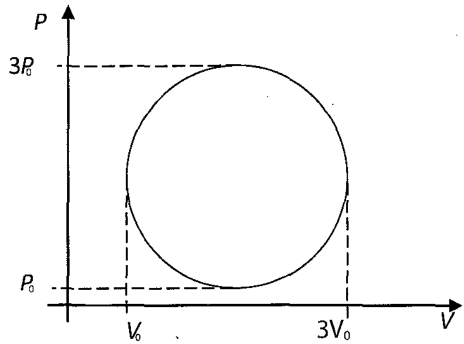



## ترمودینامیک

۹۰. **Phd** در آب. یک لوله‌ی آزمایش به طول $l$ با گازی در فشار $P$ پر و سپس دهانه‌ی آن با یک پیستون متحرک سبک محکم بسته می‌شود. لوله‌ی آزمایش به‌طور عمود داخل مایعی با چگالی $d$ فرو برده می‌شود به‌طوری که فاصله‌ی انتهای آن از سطح مایع $h$ خواهد بود. مقدار کمینه‌ی $h$ را به‌دست آورید طوری که پیستون مطابق شکل در داخل لوله به حالت تعادل باقی بماند. فشار جو $P_a$ است و دمای گاز ثابت می‌ماند.



۹۱. **گِرد و گِرد.** یک گاز کامل چرخه‌ی دایره‌شکلی را روی نمودار $PV$ مطابق شکل زیر می‌پیماید. بازده چرخه‌ی کارنو بین دو دمای بالا و پایین گاز در این چرخه را به‌دست آورید.



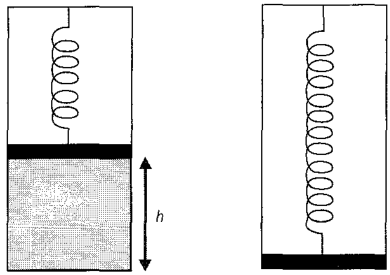

۹۲. **آرزوی محال.** یک لوله‌ی شیشه‌ای سرباز طولی برابر $۰/۵\ \mathrm{m}$ دارد. لوله به‌طور عمود روی یک ظرف پر از آب نگه داشته می‌شود طوری که کف لوله مستقیماً با سطح آب در تماس است. تحت این شرایط، ارتفاع ستون آب در لوله $۲۰\ \mathrm{mm}$ است.

اگر انتهای فوقانی لوله قبل از تماس با آب محکم بسته شود، ارتفاع ستون آب در لوله چقدر خواهد بود؟ فشار جو $۱/۰۱ \times ۱۰^{۵}\ \mathrm{Pa}$ است.

۹۳. **نشیب و فراز تحت فشار.** انتهای دو استوانه‌ی عمودی با سطح مقطع متفاوت با یک لوله‌ی نازک به هم متصل می‌شوند. هر استوانه حاوی گاز در دمای ثابت است و انتهای دیگر آن با یک پیستون متحرک بسته می‌شود. جرم یکی از پیستون‌ها برابر $m_۱ = ۱\ \mathrm{kg}$ و دیگری $m_۲ = ۲\ \mathrm{kg}$ است. در ابتدا، پیستون‌ها در ارتفاع یکسان $h = ۰/۴\ \mathrm{m}$ قرار دارند. اگر بار اضافی به جرم $m = ۱\ \mathrm{kg}$ روی پیستون سبک‌تر قرار داده شود اختلاف ارتفاع پیستون‌ها $(H)$ چقدر خواهد بود؟ فرض کنید کل این مجموعه در خلأ قرار داده شود.

۹۴. **نازک و ضخیم.** یک صفحه‌ی فلزی نازک در هوا آویزان می‌شود. یک طرف صفحه مستقیماً در معرض نور خورشید قرار دارد. دمای آن طرف سطح که در معرض نور خورشید قرار گرفته $۳۶۰\ \mathrm{K}$ است. دمای سطح دیگر $۳۴۰\ \mathrm{K}$ است. دمای هوا $۳۰۰\ \mathrm{K}$ است. دمای سطحی که ضخامت آن دوبرابر است و جنس آن با جنس صفحه‌ی اول یکسان است چقدر است؟ دمای هوا تغییر نمی‌کند.

۹۵. **بهار در زمستان.** یک پیستون متحرک سنگین متصل به یک فنر در داخل یک ظرف استوانه‌ای‌شکل عمودی به‌صورت زیر نگه داشته می‌شود: وقتی تمام هوای داخل ظرف تخلیه می‌شود، پیستون با فاصله‌ی کمی تا کف ظرف مطابق شکل ۱ به حالت تعادل می‌ایستد. وقتی




شکل ۲ شکل ۱

مقداری گاز با دمای $T$ به زیر پیستون تزریق می‌شود، پیستون مطابق شکل ۲ تا ارتفاع $h$ بالا می‌رود.

اگر گاز تا دمای $۲T$ گرم شود، ارتفاع پیستون در بالای کف ظرف چقدر خواهد بود؟ فرض کنید پیستون بدون اصطکاک حرکت می‌کند و فنر از قانون هوک پیروی می‌کند.

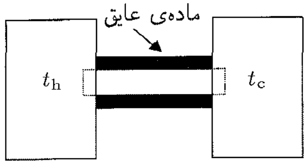
۹۶. **جیوه روی سطح زمین.** یک لوله‌ی شیشه‌ای عمودی دوسر باز به طول $h$ تا نیمه در جیوه فرو برده می‌شود. انتهای فوقانی لوله بسته می‌شود و لوله به آرامی بیرون آورده می‌شود. طول ستون جیوه که داخل لوله باقی می‌ماند چقدر است؟ فشار جو با فشار ستون جیوه $(H)$ برابر است. فرض کنید دما ثابت می‌ماند.

۹۷. **در آب گرم.** دو ظرف فلزی سبک مشابه با مقدار آب یکسان پر شده و در اتاقی که دمای هوا در آن ثابت است قرار داده می‌شوند. یک گوی سنگین با یک رشته‌ی نارسانای سبک به درون مرکز یکی از ظرف‌ها فرو برده می‌شود. جرم گوی برابر جرم آب و چگالی گوی بسیار بیش‌تر از آب است.

هر دو ظرف تا نقطه‌ی جوش آب حرارت داده می‌شوند و سپس اجازه می‌دهیم تا سرد شوند. زمانی که طول می‌کشد تا دمای ظرفی که گوی داخل آن قرار دارد به دمای اتاق برسد $k$مرتبه بیش‌تر از ظرف دیگر است. گرمای ویژه‌ی ماده‌ی سازنده‌ی گوی $(c_{\mathrm{b}})$ را برحسب $k$ و گرمای ویژه‌ی آب $(c_{\mathrm{w}})$ به‌دست آورید.

۹۸. **حباب دات‌کام.** بالونی با گاز هلیم در فشار جو $(P)$ پُر می‌شود. حجم بالون $V$ است. بالون از ماده‌ای به جرم $m$ و چگالی $d$ ساخته شده است. پس از رها شدن، بالون در ارتفاعی که فشار جو برابر $P/۲$ است منفجر می‌شود. دقیقاً قبل از انفجار، بالون حجمی برابر $۱{,}۲۵V$ دارد. بیش‌ترین مقدار تنش $(\sigma)$ را که ماده‌ی سازنده‌ی بالون می‌تواند تحمل کند به‌دست آورید. فرض کنید دمای هلیم ثابت، بالون کروی‌شکل و چگالی ماده‌ی سازنده‌ی بالون ثابت است.

۹۹. **آتش و یخ.** یک مخزن عایق‌بندی‌شده با مخلوط آب و یخ در دمای $t_{\rm c} = 0\,^\circ{\rm C}$ پر شده است. مخزن دیگری با آبی که به‌طور پیوسته در دمای $t_{\rm h} = 100\,^\circ{\rm C}$ می‌جوشد پر شده است. مخزن‌ها با میله‌های باریک که از دیواره‌های مخزن عبور می‌کند به هم متصل می‌شوند. جنس میله‌ها متفاوت است (شکل زیر را ببینید). میله به‌صورتی عایق‌بندی شده است که هیچ اتلاف گرمایی به محیط وجود ندارد.




در آزمایش اول از میله‌ی مسی استفاده شده است و یخ در مدت زمان $T_1 = 20$ دقیقه ذوب می‌شود. در آزمایش دوم، میله‌ی فولادی در همان قسمت استفاده می‌شود و یخ در مدت زمان $T_2 = 60$ دقیقه ذوب می‌شود. اگر دو میله به‌طور سری (به دنبال هم) قرار گیرند، چه مدت طول می‌کشد تا یخ ذوب شود؟

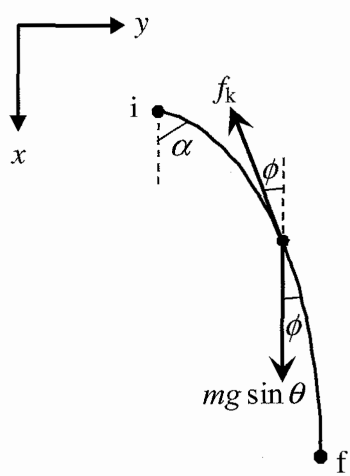
۱۰۰. **تسلیم فشار شدن.** مقداری گاز هلیم در یک مخزن استوانه‌ای قائم در تعادل ترمودینامیکی با محیط قرار دارد. گاز داخل سیلندر با یک پیستون سنگین محبوس شده است. پیستون با سرعت کم به فاصله‌ی $H$ از وضعیت تعادل بالا دور و در وضعیت جدید نگه داشته می‌شود تا دوباره وضعیت تعادل ترمودینامیکی برقرار شود. سپس مخزن عایق‌بندی و پیستون رها می‌شود. پس از این‌که پیستون متوقف شد، وضعیت تعادل جدید آن چیست؟

# بخش دوم

# پاسخ مسئله‌ها

# مکانیک

۱. به دلیل این‌که بلوک خارج از راستای سطح مؤلفه‌ی شتاب ندارد، نیروی عمودی تکیه‌گاه $(N)$ که از طرف سطح به بلوک (به جرم $m$) وارد می‌شود باید با مؤلفه‌ی عمود بر سطح نیروی وزن بلوک خنثی شود، بنابراین $N = mg\cos\theta$، و نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با $f_\mathrm{k} = \mu_\mathrm{k} mg\cos\theta$. شکل زیر مسیر حرکت بلوک (بین مکان اولیه‌ی آن (i) و مکان نهایی آن (f)) و مؤلفه‌ی نیروهای وارد بر آن را روی سطح شیب‌دار نشان می‌دهد. من مختصه‌ی $x$ را به طرف پایین سطح شیب‌دار و مختصه‌ی $y$ را عمود بر آن انتخاب کرده‌ام. اگر در نقطه‌ای از مسیر حرکت یک مماس رسم کنیم، خط مماس با محور $x$ زاویه‌ی $\phi$ می‌سازد و $\phi_\mathrm{i} \equiv \alpha$ . (جالب است بدانیم $\phi_\mathrm{f}$ باید برابر صفر باشد چون سرعت نهایی بلوک و در نتیجه شتاب مرکزگرای نهایی آن باید به صفر نزدیک شود و این حالت در صورتی اتفاق می‌افتد که نیروی اصطکاک که در جهت بالاسوی سطح شیب‌دار است مخالف مؤلفه‌ی پایین‌سوی نیروی وزن باشد.)



با نوشتن قانون دوم نیوتون در جهت $x$ و پس از تقسیم کردن طرفین معادله به جرم بلوک داریم:

$$\frac{dv_x}{dt} = g\sin\theta - \mu_{\mathrm{k}} g\cos\theta\cos\phi \qquad (۱)$$

$v$ سرعت بلوک، با مقدار اولیه‌ی $v_\circ$ است. با نوشتن قانون دوم نیوتون در راستای محور $y$، عبارت $\sin\phi$ وارد معادله می‌شود که ایجاد مشکل می‌کند. انتخاب بهتر، نوشتن قانون دوم نیوتون در راستای مماس بر مسیر حرکت است. (به این نکته توجه کنید که هیچ راستای دیگری جز محور $x$ ما را به معادله‌ی مستقلی نمی‌رساند.)

$$\frac{dv}{dt} = g\sin\theta\cos\phi - \mu_{\mathrm{k}} g\cos\theta \qquad (۲)$$

معادله‌ی (۱) را برای $\cos\phi$ (که تنها کمیت وابسته به زمان در طرف راست دو معادله است.) حل کنید و آن را در معادله‌ی (۲) جایگذاری کنید تا پس از ساده کردن به نتیجه‌ی زیر برسید

$$\mu_{\mathrm{k}}\frac{dv}{dt} = g\cos\theta(\tan^۲\theta - \mu_{\mathrm{k}}^۲) - \tan\theta\frac{dv_x}{dt} \qquad (۳)$$

حال از طرفین رابطه‌ی فوق برحسب $t$، از نقطه‌ی اولیه تا نقطه‌ی نهایی، انتگرال بگیرید:

$$\mu_{\mathrm{k}}(\circ - v_\circ) = g\cos\theta(\tan^۲\theta - \mu_{\mathrm{k}}^۲)t - \tan\theta(\circ - v_\circ\cos\alpha) \qquad (۴)$$

رابطه‌ی (۴) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\boxed{t = \frac{v_\circ(\mu_{\mathrm{k}} + \tan\theta\cos\alpha)}{g\cos\theta(\mu_{\mathrm{k}}^۲ - \tan^۲\theta)}} \qquad (۵)$$

رابطه‌ی (۵) جواب نهایی مسئله است و احتمالاً با توجه به $\mu_{\mathrm{k}} > \tan\theta$ مثبت است، البته با این فرض که مقادیر $\alpha$ و $\theta$ بین $\circ^\circ$ تا $۹\circ^\circ$ قرار دارد. (در واقع، خواننده تشویق می‌شود مقادیر بیشینه و کمینه‌ی $\alpha$ و $\theta$ را در جواب مسئله جایگذاری کند تا شکل ساده‌شده‌ی معادله را به‌دست آورد. $\theta = \circ$ مورد جالبی است زیرا در این حالت $\mu_{\mathrm{k}} g = v_\circ/t$ که مربوط است به شتاب منفی بلوک روی یک سطح ناهموار افقی، و $\alpha = \circ$ که بیانگر $\phi = \circ$ است و به این ترتیب معادله‌های (۱) و (۲) بیان هم‌ارز برای شتاب ثابت بلوک $(-v_\circ/t)$اند.)

۲. مسئله را به این صورت تحلیل می‌کنیم که نصف مسیر طی‌شده را با $L$ و شتاب روی دو سطح را با $A$ و $NA$ نشان می‌دهیم. $N$ مقداری ثابت و مثبت است به‌نحوی که $\circ \leq N \leq ۱$ (توجه کنید که سطح دوم، ناهموار و شتاب روی آن کم‌تر است). وضعیت مسئله‌ها حرکت با شتاب

ثابت برای هر دو قسمت حرکت است بنابراین، برای قسمت اول با فرض مسافت طی‌شده‌ی $L$ در زمان $T$ داریم:

$$v = v_\circ + at \rightarrow v = AT \qquad (۱)$$

$$\Delta x = v_\circ \Delta t + \frac{۱}{۲} a \Delta t^۲ \rightarrow L = \frac{۱}{۲} A T^۲ \rightarrow T = \sqrt{\frac{۲L}{A}} \qquad (۲)$$

و برای قسمت دوم حرکت:

$$\Delta x = v_\circ \Delta t + \frac{۱}{۲} a \Delta t^۲ \rightarrow L = (AT)(t_{\mathrm{B}} - T) + \frac{۱}{۲}(NA)(t_{\mathrm{B}} - T)^۲ \qquad (۳)$$

($t_{\mathrm{B}}$ زمان کل حرکت جسم تا انتهای سطح است.)

با جایگذاری معادله‌ی (۲) در معادله‌ی (۳) و انجام عملیات جبری به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{۱}{۲} NA\, t_{\mathrm{B}}^۲ + (۱ - N)\sqrt{۲LA}\, t_{\mathrm{B}} + (N - ۳)L = \circ$$

که جواب فیزیکی مثبت زیر را دارد:

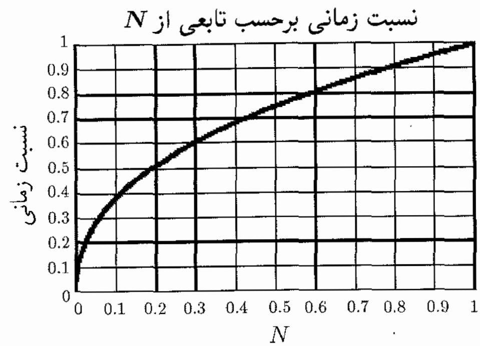
$$\begin{aligned} t_{\mathrm{B}} &= \frac{(N-۱)\sqrt{۲LA} + \sqrt{۲LA(N-۱)^۲ - ۴(L)(N-۳)(\frac{۱}{۲}NA)}}{NA} \\ &= \sqrt{\frac{۲L}{A}}\left(\frac{N - ۱ + \sqrt{N+۱}}{N}\right) \end{aligned} \qquad (۴)$$

پس از چرخاندن سطح، قسمت صیقلی با قسمت ناهموار جابه‌جا می‌شود. اگر $A$ بیانگر شتاب قسمت اول و $NA$ بیانگر شتاب قسمت دوم حرکت باشد کافی است برای به‌دست آوردن زمان در معادله‌ی (۴) به‌جای $N \rightarrow (۱/N)$ و به‌جای $A \rightarrow NA$ را قرار دهیم.

با این اطلاعات، نسبت زمان‌های حرکت قسمت صیقلی و ناهموار به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{t_۱}{t_۲} &= \frac{\sqrt{\frac{۲L}{A}}\left(\frac{N-۱+\sqrt{N+۱}}{N}\right)}{\sqrt{\frac{۲L}{NA}}\left(\frac{\frac{۱}{N}-۱+\sqrt{\frac{۱}{N}+۱}}{\frac{۱}{N}}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{۱}{N}}\left(\frac{N-۱+\sqrt{N+۱}}{N}\right)\left(\frac{\frac{۱}{N}}{\frac{۱}{N}-۱+\sqrt{\frac{۱}{N}+۱}}\right) \\ &= \frac{۱}{\sqrt{N}}\left(\frac{N-۱+\sqrt{N+۱}}{۱-N+\sqrt{N^۲+N}}\right) \end{aligned}$$

نمودار زیر نسبت زمان‌ها براساس تابعی از $N$ را نشان می‌دهد.




در مسئله‌ی ما $N = ۱/۳$ که به نسبت زمانی زیر منجر می‌شود

$$\frac{t_۱}{t_۲} = \frac{۱}{\sqrt{\frac{۱}{۳}}} \left( \frac{\frac{۱}{۳} - ۱ + \sqrt{\frac{۱}{۳} + ۱}}{۱ - \frac{۱}{۳} + \sqrt{\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۳}}} \right)$$

$$= \sqrt{۳} \left( \frac{-\frac{۲}{۳} + \sqrt{\frac{۴}{۳}}}{\frac{۲}{۳} + \sqrt{\frac{۴}{۹}}} \right)$$

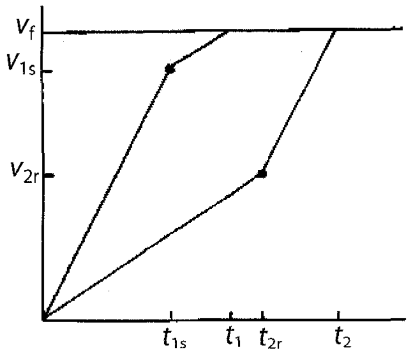
$$= \sqrt{۳}\, \frac{۲(-۱ + \sqrt{۳})}{۴} = \frac{۳ - \sqrt{۳}}{۲}$$

## توضیحات و افزوده‌ها

۱. می‌توان نمودار جسم آزاد هر نیمه‌ی سطح را رسم کرد و نشان داد که ضریب اصطکاک جنبشی قسمت ناهموار باید برابر $\mu_{\rm k} = \frac{۲}{۳} \tan\theta$ باشد. به یاد داشته باشید که ضریب اصطکاک ایستایی از ضریب اصطکاک جنبشی بزرگ‌تر است. در هر حال باید فرض کنیم که ضریب اصطکاک ایستایی از $\mu_{\rm s,max} = \tan\theta$ کوچک‌تر است و از طرف دیگر هنگامی که جسم در انتهای قسمت ناهموار قرار دارد شروع به حرکت نخواهد کرد. از این گذشته ما برای حل کردن مسئله نیازی به دانستن مقادیر ضریب اصطکاک نداریم.

۲. برای حل مسئله نه تنها به مقدار $\mu$ بلکه به مقدار $a_{\rm s}$ (شتاب در قسمت صیقلی) و $a_{\rm r}$ (شتاب در قسمت ناهموار) هم نیاز نداریم. تنها دانستن نسبت $a_{\rm s}/a_{\rm r} = ۳$ مهم است. برای مثال می‌توان فرض کرد هر دو نیمه‌ی سطح اصطکاک دارد، اما یک نیمه از دیگری ناهموارتر است به نحوی که نسبت شتاب‌ها برابر ۳ باقی بماند. بنابراین مقدار $t_۱/t_۲$ در معادله‌ی قبل تغییر نمی‌کند.

می‌توان تحلیل حرکت‌شناسی را کاملاً براساس عبارت‌های شامل سرعت انجام داد. در نمودار سرعت برحسب زمان زیر، دو مسیر نشان داده شده ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع را می‌سازند. ما به زمان‌هایی توجه داریم که سرعت روی هر مسیر به مقدار نهایی خود می‌رسد.




اگر از $a_s$ شتاب مربوط به قسمت صیقلی سطح به‌عنوان مرجع استفاده کنیم و طول هر قسمت سطح را برابر $L$ در نظر بگیریم، سرعت جسمی که از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند در قسمت‌های صیقلی و ناهموار به‌صورت زیر است:

$$(\Delta v)_s^۲ = ۲a_sL,$$
$$(\Delta v)_r^۲ = ۲\left(\frac{۱}{۳}a_s\right)L = \frac{۲}{۳}a_sL$$

برای قسمت صیقلی سرعت نهایی بنابه رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$v_f^۲ = (\Delta v)_s^۲ + ۲\left(\frac{۱}{۳}a_s\right)L$$

اگر جسم از قسمت ناهموار شروع به حرکت کند، سرعت نهایی آن از رابطه‌ی

$$v_f^۲ = (\Delta v)_r^۲ + ۲a_sL$$

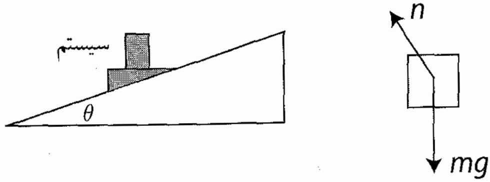
به‌دست می‌آید. بنابراین در هر قسمت که جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند سرعت نهایی در انتهای سطح برابر است با

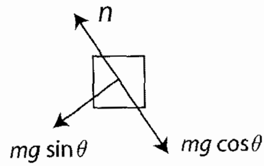
$$v_f = \sqrt{۸/۳a_sL}$$

(این نتیجه را با استفاده از قضیه‌ی کار_انرژی هم می‌توان به‌دست آورد.)

.۳

جسم + گوِه = سیستم



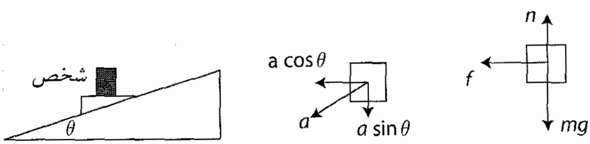

معادلات:

$$\sum F = ma$$

$$n - mg\cos\theta = ۰$$

$$mg\sin\theta = ma$$

$$g\sin\theta = a$$




$$\sum F = ma$$

$$f_s = \mu_s n$$

راستای عمودی:

$$mg - n = ma\sin\theta$$

$$mg - n = mg\sin\theta\sin\theta$$

$$n = mg - mg\sin^۲\theta$$

$$n = mg[۱ - \sin^۲\theta]$$

$$n = mg\cos^۲\theta$$

راستای افقی:

$$f_s = ma\cos\theta$$

$$f_s = mg\sin\theta\cos\theta$$

بعد از جایگذاری داریم:

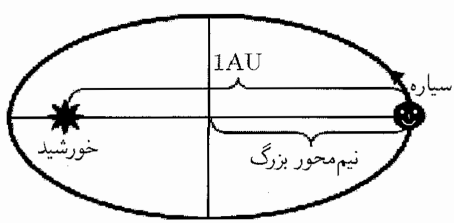
$$\mu_s n = mg \sin\theta \cos\theta$$
$$\mu_s mg \cos^۲\theta = mg \sin\theta \cos\theta$$
$$\mu_s \cos\theta = \sin\theta$$
$$\mu_s = \tan\theta$$

ضریب اصطکاک ایستایی: $\mu_s = \tan\theta$

۴. با تقریب خوبی فرض می‌کنیم، مدار زمین دایره‌ای به شعاع $a_۱ = ۱\mathrm{AU}$ باشد[۱]، بنابراین انرژی جنبشی و انرژی گرانشی ثابت به سادگی به هم مرتبط می‌شوند. فرض کنیم جرم خورشید $(M_s)$ بسیار بیش‌تر از جرم زمین $(m)$ است. بنابراین زمان دوران زمین $(P)$ به دور خورشید (برحسب سال) با قانون سوم کپلر بیان می‌شود: $P^۲ = a^۳/M$ که در آن $a$ برحسب یکای نجومی و $M$، جرم خورشید، برحسب یکای خورشیدی است (هم‌اکنون برابر ۱). بنابراین مسئله‌ی یافتن زمان دوران جدید زمین تبدیل می‌شود به پیدا کردن نیم‌محور بزرگ مدار پس از افزایش جرم خورشید.

### ۱. حد پایین سریع زمان دَوَران جدید

وقتی جرم خورشید دوبرابر می‌شود، نیروی مرکزگرای قوی‌تر سبب می‌شود مسیر دوران زمین به سمت داخل خم شود و روی مدار بیضوی جدید قرار گیرد که خورشید در کانون دورتر آن قرار می‌گیرد و نیم‌محور بزرگ و زمان دوران آن کوچک‌تر می‌شود و در این حالت موقعیت مکانی زمین معرف اوج مداری جدید خورشید است. مدار جدید در شکل زیر رسم شده است:




اوج فاصله‌ی بین خورشید و زمین (که در این حالت برابر $۱\mathrm{AU}$ است.) همیشه باید کم‌تر از $۲a$، محور بزرگ بیضی، باشد. بنابراین می‌توان مطمئن بود که نیم‌محور بزرگ جدید $a > (۱/۲)\mathrm{AU}$ است که ارتباطی به میزان افزایش جرم خورشید ندارد (البته تا زمانی که مدار جدید منجر به برخورد با خورشید نشود).

---
۱. AU یکای اخترشناسی است. ـــ م.

از آن‌جا که مدار کوچک‌تر می‌شود، می‌دانیم که $a <$ ۱AU. با به‌کار بردن قانون سوم کپلر برای حد پایین در $a$، با مرکز جرم جدید و $M = ۲\,\mathrm{SU}$ (SU واحد خورشیدی است.) زمان دوران جدید به‌دست می‌آید

$$P > \sqrt{\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲}{۲}}$$

یعنی:

$$\frac{۱}{۴} < P < \text{۱ سال}$$

## ۲. راه‌حل دقیق

برای به‌دست آوردن زمان دوران جدید، براساس قانون سوم کپلر کافی است مقدار جدید $a$ را بدانیم. ما نباید نگران شکل دوران باشیم (خروج از مرکز). انرژی مکانیکی پایسته‌ی مسیر بیضوی (انرژی جنبشی + انرژی پتانسیل یعنی $E = ۱/۲mv^۲ - GMm/r$) از خروج از مرکز مستقل است و فقط به $a$ بستگی دارد، بنابراین اگر انرژی روی مدار جدید پس از دوبرابر شدن جرم خورشید را به‌دست آوریم، باید بتوانیم مقدار متناظر جدید $a$ را استخراج کنیم.

در مدار دایره‌ای می‌توانیم با استفاده از براهین نیروی مرکزگرا نشان دهیم که انرژی جنبشی ($K$) به‌صورت مدار $K = ۱/۲mv^۲ = ۱/۲(GM_\mathrm{s}m/a_۱)$، است و انرژی پتانسیل برابر است با:

$$U = \frac{-GM_\mathrm{s}m}{a_۱}$$

بنابراین انرژی مکانیکی مدار برابر است با:

$$E = K + U = GM_\mathrm{s}\frac{m}{۲a_۱} - GM_\mathrm{s}\frac{m}{a_۱} = -GM_\mathrm{s}\frac{m}{۲a_۱}$$

$m$ جرم زمین برحسب کیلوگرم، $a_۱ = ۱\,\mathrm{AU}$ برحسب متر و جرم خورشیدی $M_\mathrm{s} = ۱$ برحسب kg است. با دوبرابر شدن جرم خورشید به‌طور ناگهانی انرژی پتانسیل گرانشی زمین-خورشید (منفی)، بدون تغییر انرژی جنبشی، دوبرابر می‌شود، بنابراین انرژی مکانیکی جدید سیستم زمین-خورشید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$E_{\text{جدید}} = \frac{۱}{۲}GM_\mathrm{s}\frac{m}{a_۱} - G(۲M_\mathrm{s})\frac{m}{a_۱} = -\frac{۳}{۲}GM_\mathrm{s}\frac{m}{a_۱}$$

از مساوی قرار دادن این رابطه با رابطه‌ی عمومی انرژی مکانیکی دوران سیاره‌ای به دور ستاره‌ای به جرم $۲M_{\rm s}$ و نیم‌محور بزرگ جدید $a_۲$ داریم:

$$E_۲ = -G(۲M_{\rm s})\frac{m}{۲a_۲}$$

و باید داشته باشیم:

$$a_۲ = \frac{۲}{۳}a_۱$$

بنابراین نیم‌محور بزرگ جدید برابر است با $۲/۳\text{AU}$. مدار زمین $(a)$ در محدوده‌ی

$$\frac{۱}{۲} < a < ۱\,\text{AU}$$

قرار دارد که قبلاً به‌دست آورده بودیم.

با استفاده از قانون سوم کپلر $P^۲ = a^۳/M$، و جرم خورشیدی $M = ۲$ زمان دوران جدید برابر است با:

$$P = \sqrt{\frac{\left(\frac{۲}{۳}\right)^۳}{۲}} = \frac{۲}{۳\sqrt{۳}} = ۰/۳۸۵ \ \text{سال}$$

که در محدوده‌ی سال $۱ > P > ۱/۴$ است که قبلاً مشخص کرده بودیم.

با استفاده از رابطه‌ی معیار مدارها، می‌توانیم نشان دهیم که خروج از مرکز مداری جدید برابر با $e = ۱/۲$ است. این عامل تأثیری بر زمان دوران ندارد ولی باید برای ساکنان بخت‌برگشته‌ی کره‌ی زمین عدد جالبی باشد، زیرا آن‌ها در مدار جدید به طرف خورشید کشیده می‌شوند. فاصله‌ی نقطه‌ی حضیض مدار برابر است با $a_۲(۱-e) = ۱/۳\,\text{AU}$ که خیلی به راحتی و آسایش نزدیک است! (سرعت زمین در این نقطه سه برابر سرعت آن در نقطه‌ی اوج قبلی است.)

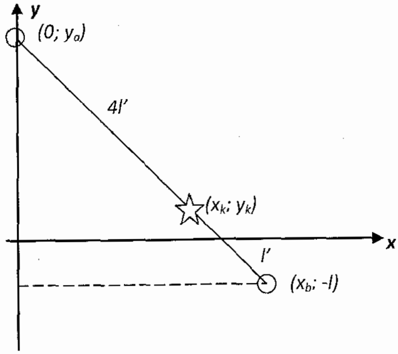
**۵.** کافی است مسیر حرکت سوسک‌ها را با استفاده از مقادیر $v$ و $a$ مشخص کنیم:

$$A \ \text{سوسک}: x_a = ۰, \quad y_a = ۴l + \frac{۱}{۲}at^۲$$
$$B \ \text{سوسک}: x_b = vt, \quad y_b = -l$$

مکان گره، نوار لاستیکی را به دو قسمت تقسیم می‌کند که نسبت طول آن‌ها ۱ : ۴ است. بنابراین، مکان گره ($x_k$ و $y_k$)، همان‌طورکه در شکل صفحه‌ی بعد می‌بینید، به‌صورت زیر است:

$$x_k = x_a + \left(\frac{۴}{۵}\right)(x_b - x_a) = \left(\frac{۱}{۵}\right)(x_a + ۴x_b) = \left(\frac{۴}{۵}\right)vt,$$

$$y_k = y_b + \left(\frac{۱}{۵}\right)(y_a - y_b) = \left(\frac{۱}{۵}\right)(y_a + ۴y_b) = \left(\frac{۱}{۱۰}\right)at^۲$$




با جدا کردن $t$ و ترکیب $x_k$ و $y_k$ داریم:

$$t = \left(\frac{۵}{۴}\right)\left(\frac{x_k}{v}\right), \quad y_k = \left(\frac{۵}{۳۲}\right)\frac{(ax_k^{۲})}{(v^{۲})}$$

اگر نوار از نقطه‌ی $(۲l, l)$ عبور کند، پس از ساده‌سازی به جواب زیر می‌رسیم

$$a = \left(\frac{۸}{۵}\right)\left(\frac{v^{۲}}{l}\right)$$

۶. نیروی گرانشی $(mg)$ روی جسم کوچک‌تر دو مؤلفه‌ی پایین‌سوی $D$ و قائم $N$ دارد:

$$D = mg\sin\theta$$
$$N = mg\cos\theta$$

وزن جسم دیگر به همین صورت تجزیه می‌شود.

**حالت ۱**: اگر گوشه‌های منشور شیب زیادی نداشته باشد، هیچ‌یک از دو جسم روی تسمه نمی‌لغزند و تسمه به‌دلیل نیروی اصطکاک ایستایی دو جسم را با نیروی کشش $T$ می‌کشد. بنابراین جسم کوچک‌تر به طرف بالا شتاب می‌گیرد و جسم بزرگ‌تر با همان شتاب به طرف پایین حرکت می‌کند.

$$a = \frac{(T - mg\sin\theta)}{m} = \frac{(Mg\sin\theta - T)}{M}$$

معادله را برای نیروی کشش نامعلوم حل می‌کنیم:

$$T = ۲g\sin\theta\left[\frac{Mm}{(M+m)}\right]$$

با جایگذاری در رابطه‌ی شتاب:

$$a = \frac{۲g\sin\theta\left[\frac{Mm}{(M+m)}\right] - mg\sin\theta}{m}$$
$$= (g\sin\theta)\left[\frac{(M-m)}{(M+m)}\right]$$

**حالت ۲:** اگر $\theta$ به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، جسم کوچک‌تر در حالی که جسم بزرگ‌تر به تسمه چسبیده است خواهد لغزید (توجه کنید که اگر تسمه بی‌جرم باشد نیروهای اصطکاکی که از طرف دو جسم به آن وارد می‌شود همواره با هم برابر است. بنابراین همیشه جسم کوچک‌تر ابتدا به حد اصطکاک ایستایی می‌رسد و جسم بزرگ‌تر هرگز روی تسمه نخواهد لغزید).

هنگامی که کشش تسمه با حد اصطکاک ایستایی جسم کوچک‌تر برابر می‌شود به شیب بحرانی می‌رسیم. در این حالت حدی داریم:

$$۲g\sin\theta\left[\frac{Mm}{(M+m)}\right] = \mu_s mg\cos\theta$$
$$\tan\theta = \left(\frac{\mu_s}{۲}\right)\left(\frac{۱+m}{M}\right)$$

وقتی جسم کوچک‌تر می‌لغزد، نیروی کشش تسمه با نیروی اصطکاک لغزشی بین جسم و تسمه برابر است: $T = \mu_k mg\cos\theta$.

بنابراین جسم بزرگ‌تر و تسمه شتابی پایین‌سو دارند که به‌صورت زیر است:

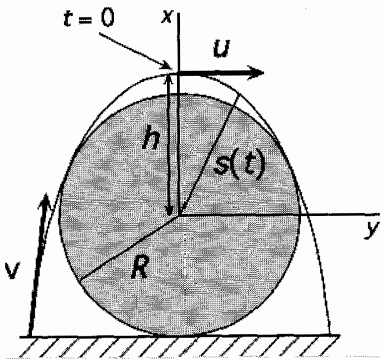
$$A = \frac{[Mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta]}{M}$$
$$= g\left[\sin\theta - \mu_k\left(\frac{m}{M}\right)\cos\theta\right]$$

هنگامی که تسمه به طرف بالا می‌لغزد، جسم کوچک‌تر شتابی پایین‌سو به‌صورت زیر دارد:

$$a = \frac{[mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta]}{m}$$
$$= g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

(اگر $\mu_k > \tan\theta$ باشد، شتاب جسم کوچک‌تر منفی یعنی به طرف بالا خواهد بود.)

.۷




فرض کنیم مقاومت هوا قابل چشم‌پوشی است. در شکل بالا سطح مقطع دایره‌ای تنه‌ی درخت و مسیر حرکت سهمی‌وار کک نشان داده شده است. دستگاه مختصاتی را که مبدأ آن بر مرکز سطح مقطع استوانه‌ای تنه‌ی درخت منطبق است در نظر می‌گیریم. زمان $t = ۰$ را در نقطه‌ی اوج مسیر در نظر می‌گیریم که بردار سرعت در آن نقطه افقی و اندازه‌ی آن برابر با $u$ است، می‌دانیم که $h > R$ و مسیر حرکت برای سرعت کمینه‌ی پرش از زمین خطی مماس بر تنه‌ی درخت در دو زمان مشخص $t = \pm t_{\tan}$ است.

روش حل ما از مراحل زیر تشکیل می‌شود: ۱. یافتن سرعت $u$ که مسیر حرکت روی سطح را برحسب تابعی از $h$ می‌دهد. ۲. استفاده از قانون پایستگی انرژی برای محاسبه‌ی سرعت پریدن از زمین برحسب تابعی از $h$. ۳. محاسبه‌ی مقدار کمینه‌ی $v$ با استفاده از سرعت پریدن از زمین.

۱. فاصله‌ی هر نقطه روی مسیر حرکت از مرکز تنه‌ی درخت، $s(t)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$s(t)^۲ = x^۲ + y^۲ = (ut)^۲ + \left(h - \frac{۱}{۲}gt^۲\right)^۲ \qquad (۱)$$

به‌ازای $t$ مثبت (یا منفی) منحنی مسیر فقط در یک نقطه با سطح تنه‌ی درخت تماس دارد که در آن نقطه $s(t) = R$، بنابراین باید معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب $t^۲$ را حل کنیم:

$$\frac{g^۲}{۴}t^۴ + (u^۲ - gh)t^۲ + (h^۲ - R^۲) = ۰ \qquad (۲)$$

(که با قرار دادن $s(t) = R$ در معادله‌ی (۱) به‌دست می‌آید)، با توجه به این‌که مبین معادله‌ی (۲) یعنی:

$$(u^۲ - gh)^۲ - g^۲(h^۲ - R^۲) = ۰ \qquad (۳)$$

حذف می‌شود (چون سطح تنه‌ی درخت فقط در یک نقطه با منحنی مسیر تماس دارد)، معادله‌ی (۳) یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برحسب $u^۲$ است که دو جواب دارد:

$$u^۲ = g(h \pm \sqrt{h^۲ - R^۲}) \qquad (۴)$$

جواب مثبت غیر قابل قبول است، زیرا اگر آن را در معادله‌ی (۲) جایگذاری کنیم جواب معادله در رابطه‌ی $R > h$ صدق نمی‌کند. (برای $R < h$ قابل قبول است، اما با این شرط نامعقول که یک عدد مختلط باشد.)

**۲**. با استفاده از قانون پایستگی انرژی، سرعت پریدن از زمین $v_{\text{پریدن}}(h)$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$v^۲_{\text{پریدن}}(h) = u^۲ + ۲g(h+R) = g(۳h + ۲R - \sqrt{h^۲ - R^۲}) \qquad (۵)$$

**۳**. می‌خواهیم مقدار کمینه‌ی $v_{\text{پریدن}}(h)$ را به‌دست آوریم، به همین دلیل از $v^۲_{\text{پریدن}}(h)$ نسبت به $h$ مشتق می‌گیریم و نتیجه را برابر صفر قرار می‌دهیم. تا $h_{\text{بحرانی}}$ را که مقدار $h$ مربوط به $v$ است به‌دست آوریم:

$$\left.\frac{dv^۲_{\text{پریدن}}(h)}{dh}\right|_{h_{\text{بحرانی}}} = g\left(۳ - \frac{h_{\text{بحرانی}}}{\sqrt{h^۲_{\text{بحرانی}} - R^۲}}\right) = ۰ \qquad (۶)$$

و داریم:

$$h_{\text{بحرانی}} = \frac{۳}{۲\sqrt{۲}}R \simeq ۱{,}۰۶۱R \qquad (۷)$$

در پایان، با جایگذاری رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۵) مقدار $v$ به‌دست می‌آید:

$$v = \sqrt{۲ + \sqrt{۸}}\sqrt{gR} \simeq ۲{,}۱۹۷\sqrt{gR} \qquad (۸)$$

**بحث:**

به عنوان یک تمرین مفید می‌توانیم نشان دهیم:

۱. نقطه‌ی پریدن از زمین در فاصله‌ی $R \simeq ۱{,}۷۱R$ $\left(\sqrt{\frac{۳}{۲} + \sqrt{۲}}\right)$ از نقطه‌ی تماس بین تنه‌ی درخت و زمین قرار دارد.

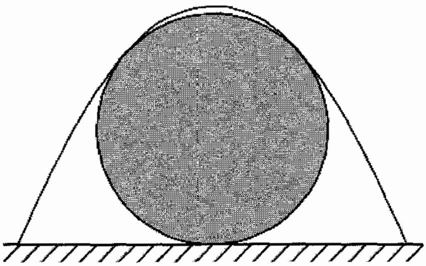
۲. زاویه‌ی پرش برابر است با:

$$\cos^{-۱}\left(\sqrt{\frac{۱}{۲(۲+\sqrt{۲})}}\right)=۶۷/۵^\circ$$

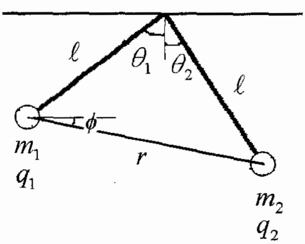
که بالای سطح افق است.

۳. منحنی مسیر با سطح لگاریتمی در مکانی به زاویه‌ی $۴۵^\circ$ از هر دو طرف نقطه‌ی اوج سطح مقطع دایره‌ای تنه تماس برقرار می‌کند.

همه‌ی این موارد کاملاً منطقی است و نشان می‌دهد که منحنی مسیری که سرعت پریدن از زمین را کمینه می‌کند بیش‌تر شبیه منحنی شکل زیر است نه منحنی قبلی که در ابتدای مسئله دیدید.



۸. ما این مسئله را از سه راه مختلف حل کرده‌ایم:




**راه‌حل ۱:**

با توجه به شکل داریم:

$$r=۲l\sin\left(\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}\right)$$

$$\phi=\frac{\theta_۱-\theta_۲}{۲}$$

در حالت تعادل، انرژی پتانسیل دستگاه، کمینه است بنابراین:

$$\begin{aligned}PE_{\text{دستگاه}}&=m_۱gh_۱+m_۲gh_۲+k\frac{q_۱q_۲}{r}\\&=m_۱gl(۱-\cos\theta_۱)+m_۲gl(۱-\cos\theta_۲)+k\frac{q_۱q_۲}{۲l\sin\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}}\end{aligned}$$

$h_۱$ و $h_۲$ جابه‌جایی عمودی کره‌ها از مکان $\theta_n=۰$ را مشخص می‌کنند. مکان کره‌ی اول را ثابت در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\frac{\partial(PE_{\text{دستگاه}})}{\partial\theta_۲}=m_۲gl\sin\theta_۲-\frac{kq_۱q_۲}{۴l}\left[\cos\left(\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}\right)\right]\left[\sin\left(\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}\right)\right]^{-۲}=۰$$

به سادگی می‌توان نشان داد که جواب این معادله مقدار کمینه را به‌دست می‌دهد:

$$\mu m_2 \sin\theta_2 \left[\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]^2 = \left[\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]$$

در آن

$$\mu = \frac{4l^2 g}{kq_1q_2}$$

در حالت تعادل کره‌ها باید داشته باشیم:

$$T_1\cos\theta_1 + F_E\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = m_1 g$$
$$T_1\sin\theta_1 = F_E\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$
$$T_2\cos\theta_2 - F_E\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2} = m_1 g$$
$$T_2\sin\theta_2 = F_E\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$$

و

$$F_E = k\frac{q_1q_2}{4l^2}\left[\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]^{-2}$$

بنابراین داریم:

$$T_1\cos\theta_1 + T_2\cos\theta_2 = (m_1+m_2)g$$
$$\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\left(\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}+\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2}\right) = \frac{4l^2 g}{kq_1q_2}(m_1+m_2)\left[\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]^2$$
$$\sin\theta_2\left[\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]^2$$
$$= \frac{1}{\mu(m_1+m_2)}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\left(\frac{\sin\theta_2\cos\theta_1+\cos\theta_2\sin\theta_1}{\sin\theta_1}\right)$$

با جایگذاری این نتیجه در معادله‌ای که قبلاً با رویکرد انرژی به‌دست آوردیم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{m_2}{(m_1+m_2)}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)[\sin(\theta_1+\theta_2)] = \left[\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]\sin\theta_1$$

$$\frac{m_۲}{(m_۱+m_۲)}\left(\cos\frac{\theta_۱-\theta_۲}{۲}\right)\left[۲\sin\left(\frac{\theta_۱+\theta_۲}{۲}\right)\right]=\sin\theta_۱$$

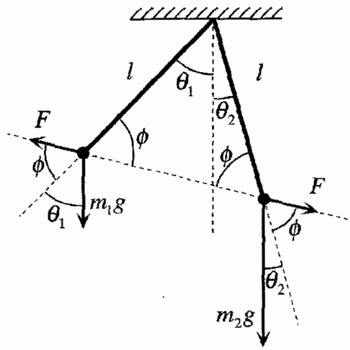
$$\frac{m_۲}{(m_۱+m_۲)}(\sin\theta_۱+\sin\theta_۲)=\sin\theta_۱$$

$$\sin\theta_۲=\frac{m_۱}{m_۲}\sin\theta_۱$$

$$\theta_۲=\sin^{-۱}\left(\frac{m_۱}{m_۲}\sin\theta_۱\right)$$

**راه‌حل ۲:**

با توجه به این واقعیت که ریسمان‌های هم‌اندازه دو ضلع یک مثلث متساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند و به کمک قضیه‌های هندسی، نمودار دقیق را رسم و زاویه‌ها را مطابق شکل زیر مشخص کنید.




با مساوی قرار دادن مؤلفه‌ی نیروها داریم:

$$m_۱g\sin\theta_۱=F\sin\phi=m_۲g\sin\theta_۲$$

و به‌دست می‌آوریم:

$$\theta_۲=\arcsin\left(\frac{m_۱}{m_۲}\sin\theta_۱\right)$$

**راه‌حل ۳:**

نمودارهای برداری را رسم کنید و $\sum\overrightarrow{F}=۰$ را برای هر کره نشان دهید. با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم:

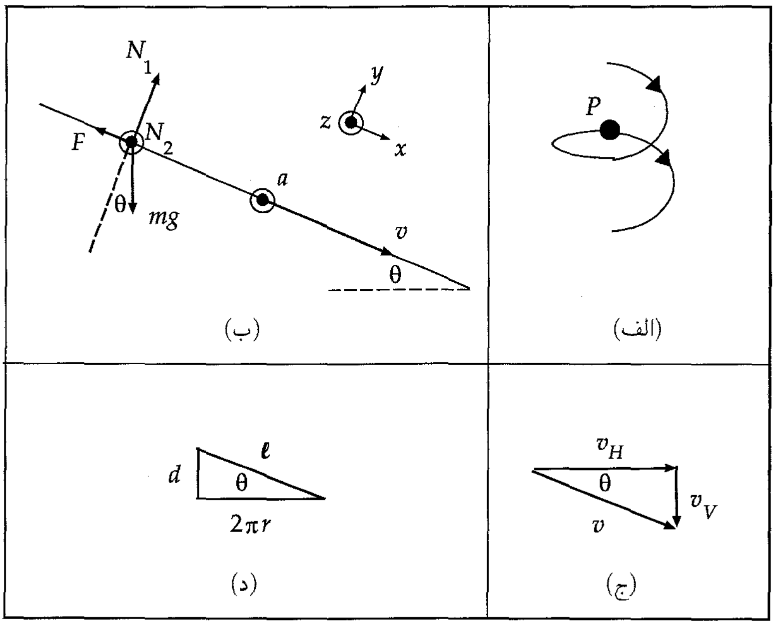
$$\frac{m_۱g}{\sin\phi}=\frac{F}{\sin\theta_۱}\quad و \quad\frac{m_۲g}{\sin\phi}=\frac{F}{\sin\theta_۲}$$

با ضرب معادله‌ی اول در $m_۲$ و معادله‌ی دوم در $m_۱$ داریم:

$$\frac{m_۲ F}{\sin\theta_۱} = \frac{m_۱ F}{\sin\theta_۲}$$

حال این معادله را برای $\theta_۲$ حل کنید.

۹. وضعیت مسئله در شکل زیر نشان داده شده است:




در شکل (ب) نمودار نیروها را در نقطه‌ی $P$ که در شکل (الف) نشان داده شده رسم کرده‌ایم.
دو نیرو به مهره وارد می‌شود:

۱. نیروی وزن مهره ($m\vec{g}$) در راستای عمودی (در این‌جا $m$ جرم مهره و $\vec{g}$ شتاب گرانشی است.)

۲. نیرویی که سیم وارد می‌کند. این نیرو را می‌توان به سه مؤلفه تجزیه کرد:

الف) نیروی اصطکاک $\vec{F}$، در خلاف جهت سرعت مهره ($\vec{v}$)

ب) نیروی قائم $\vec{N}_۱$، عمود به بردار سرعت مهره ($\vec{v}$) واقع در صفحه‌ی شکل

ج) نیروی قائم $\vec{N}_۲$، عمود به بردار سرعت مهره ($\vec{v}$) و عمود به صفحه‌ی شکل

سرعت مهره یک مؤلفه‌ی افقی $v_H$ و یک مؤلفه‌ی عمودی $v_V$ دارد (مطابق شکل ج).
وقتی مهره به سرعت ثابت $v$ می‌رسد، بردار شتاب آن ($\vec{a}$) افقی و در جهت محور مارپیچ

است. نیروی افقی $\overrightarrow{N}_۲$ این شتاب را به‌وجود می‌آورد. شیب مارپیچ $\theta$ است که مطابق شکل (د) وابسته به فاصله‌های $d$ و $r$ است. (مهره فاصله‌ی عمودی $d$ را به طرف پایین می‌لغزد و در این بازه‌ی زمانی فاصله‌ی افقی $۲\pi r$ را طی می‌کند.)

قانون دوم نیوتون را در راستای $x$، $y$ و $z$ به‌کار می‌بریم. مطابق شکل (ب):

$$x : mg\sin\theta - F = ۰ \Rightarrow F = mg\sin\theta \qquad (۱)$$

$$y : N_۱ - mg\cos\theta = ۰ \Rightarrow N_۱ = mg\cos\theta \qquad (۲)$$

$$z : \qquad N_۲ = ma \qquad (۳)$$

با ترکیب معادله‌های (۲) و (۳)، اندازه‌ی نیروی قائم کل برابر است با:

$$N = \sqrt{N_۱^۲ + N_۲^۲} = \sqrt{m^۲g^۲\cos^۲\theta + m^۲a^۲} = mg\cos\theta\sqrt{۱+\left(\frac{a}{g\cos\theta}\right)^۲} \qquad (۴)$$

از آن‌جا که نیروی اصطکاک از طریق ضریب اصطکاک جنبشی $(k)$ به نیروی قائم پیوند می‌خورد رابطه‌ی (۱) و (۴) را به‌کار می‌بریم تا به رابطه‌ی زیر برسیم:

$$F = kN \Rightarrow k = \frac{F}{N} = \frac{mg\sin\theta}{mg\cos\theta\sqrt{۱+\left(\frac{a}{g\cos\theta}\right)^۲}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{۱+\left(\frac{a}{g\cos\theta}\right)^۲}} \qquad (۵)$$

شتاب افقی $\overrightarrow{a}$ مرکزگرا است، بنابراین اندازه‌ی آن مطابق شکل (ج) برابر است با:

$$a = \frac{v_H^۲}{r} = \frac{v^۲\cos^۲\theta}{r} \qquad (۶)$$

اگر رابطه‌ی (۶) را در (۵) قرار دهیم:

$$k = \frac{\tan\theta}{\sqrt{۱+\left(\frac{v^۲\cos\theta}{gr}\right)^۲}} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{۱+\left(\frac{v^۲}{gr}\right)\frac{۱}{۱+\tan^۲\theta}}} \qquad (۷)$$

در پایان، از شکل (د) داریم:

$$\tan\theta = \frac{d}{۲\pi r} \tag{۸}$$

و با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی (۷) جواب نهایی را به‌دست می‌آوریم:

$$k = \frac{\frac{d}{۲\pi r}}{\sqrt{۱+\left(\frac{v^۲}{gr}\right)^۲ \frac{۱}{۱+\left(\frac{d}{۲\pi r}\right)^۲}}} \tag{۹}$$

اگر دو پارامتر بی‌بعد زیر را معرفی کنیم:

$$\alpha \equiv \frac{d}{۲\pi r} \qquad \text{و} \qquad \beta \equiv \frac{v^۲}{gr} \tag{۱۰}$$

عبارت (۹) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{۱+\frac{\beta^۲}{۱+\alpha^۲}}} = \frac{\alpha\sqrt{۱+\alpha^۲}}{\sqrt{۱+\alpha^۲+\beta^۲}} \tag{۱۱}$$

**یک توضیح کوتاه.** معادله‌ی (۱) را می‌توان از مبحث انرژی به‌دست آورد. اگر نقطه‌ی $P$ و نقطه‌ی متناظر $P'$ بعد از یک دوره را در نظر بگیریم، داریم:

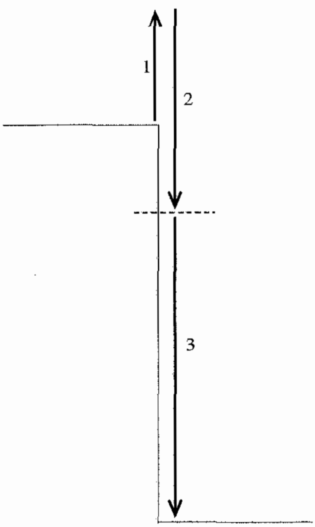
$$\begin{aligned} \Delta E = E' - E = (T'+U') - (T+U) = -mgd = W_{\mathrm{F}} = -F\ell \\ \Rightarrow F = mg\frac{d}{\ell} = mg\sin\theta \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$E$ و $E'$ انرژی مکانیکی، $T$ و $T'$ انرژی جنبشی ($T = T'$ چون $v$ ثابت است.) و $U$ و $U'$ انرژی پتانسیل گرانشی‌اند، و $W_{\mathrm{F}}$ کاری است که نیروی اصطکاک در دوره‌ی زمانی مورد نظر انجام می‌دهد و $\ell = \sqrt{d^۲+(۲\pi r)^۲}$ فاصله‌ای است که مهره در این دوره‌ی زمانی طی می‌کند (شکل (د) را نگاه کنید).

۱۰. با این فرض که مقاومت هوا قابل چشم‌پوشی است می‌خواهیم بدانیم اگر سنگ به همان ارتفاعی که پرتاب شده فرود آید چه روی می‌دهد؟ در این حالت، نیمی از کل مسافت هنگام بالا رفتن و نیم دیگر آن هنگام پایین آمدن طی می‌شود. بنابراین، با توجه به تقارن، اگر کل مدت زمان حرکت ۲ ثانیه باشد یک ثانیه طول می‌کشد تا سنگ بالا برود و یک ثانیه طول می‌کشد تا به پایین برسد.

بنابراین سؤال به این صورت مطرح می‌شود که: اگر سنگ در ارتفاع دیگری متفاوت با ارتفاع پرتاب فرود آید آیا زمان حرکت طولانی‌تر می‌شود؟ اگر سنگ در ارتفاعی بالاتر از نقطه‌ی پرتاب فرود آید (مثلاً روی سقف یک ساختمان) سرعت متوسط آن در پایان حرکت کم‌تر از سرعت متوسط آن در ابتدای حرکت است. در این حالت، در قسمت اول مدت زمان پیمودن مسافت در ثانیه‌ی آخر کم‌تر از یک ثانیه خواهد بود. یعنی زمان کل حرکت کم‌تر از ۲ ثانیه می‌شود که این نتیجه‌ی مطلوب ما نیست.

استدلال‌های مشابه نشان می‌دهد که اگر نقطه‌ی فرود زیر نقطه‌ی پرتاب باشد زمان حرکت بیش‌تر از ۲ ثانیه است. (مثلاً سنگ را از لبه‌ی یک صخره پرتاب کنیم.) بنابراین، سؤال دیگری مطرح می‌شود: سنگ باید به طرف بالا پرتاب شود یا پایین و یا از بالای یک صخره رها شود؟ همان‌طور که قبلاً استدلال کردیم، می‌خواهیم سرعت متوسط قسمت اول حرکت تا حد امکان کوچک باشد. در این قسمت مدت زمانی طول می‌کشد که سنگ مسافتی برابر مسافت طی‌شده در آخرین ثانیه را بپیماید. بنابراین روشن است که باید سنگ را عمودی به طرف بالا پرتاب کنیم. به این ترتیب سرعت آن کاهش یافته و لحظه‌ای متوقف می‌شود و سپس به‌تدریج بر سرعت آن افزوده خواهد شد.




اکنون می‌دانیم که مسیر حرکت سنگ باید شبیه شکل روبه‌رو باشد.

حرکت سنگ را به سه مرحله تقسیم کرده‌ایم: در مرحله‌ی اول، سنگ در راستای قائم مسافت $y_1$ را در مدت زمان $t_1$ بالا می‌رود. در مرحله‌ی دوم، سنگ مسافت $y_2$ را در مدت زمان $t_2$ در راستای قائم سقوط می‌کند و در نهایت در مرحله‌ی سوم، سنگ مسافت $y_3 \equiv L$ را در مدت زمان $t_3 = 1\,\mathrm{s}$ سقوط می‌کند. با توجه به شرایط مسئله داریم: $y_1 + y_2 = L$. هدف ما بیشینه کردن زمان کل حرکت $T \equiv t_1 + t_2 + t_3$ است.

اکنون به حل مسئله‌ای می‌پردازیم که به‌خوبی طرح کرده‌ایم. با توجه به سینماتیک مسئله:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad (1)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \qquad (2)$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}g\left(t_1^2+t_2^2\right)=L \qquad (3)$$

همچنین سرعت سنگ هنگامی که از خط‌چین عبور می‌کند برابر است با: $v=gt_2$. در این حالت، در مدت زمان مرحله‌ی سوم حرکت، مسافت طی‌شده برابر است با:

$$L=vt_3+\frac{1}{2}gt_3^2=gt_2+\frac{1}{2}g \qquad (4)$$

در مرحله‌ی دوم $t_3=1\,\mathrm{s}$ و واحدهای s و $\mathrm{s}^2$ را نادیده گرفته‌ایم (که به هزینه‌ی ناچیز سازگاری ابعادی تمام می‌شود). با مساوی قرار دادن معادله‌های (۳) و (۴) و ضرب کردن در $2/g$، به‌دست می‌آوریم:

$$t_1^2+t_2^2=2t_2+1\Rightarrow t_1=\sqrt{2t_2+1-t_2^2} \qquad (5)$$

بنابراین زمان کل حرکت برابر است با:

$$T=t_1+t_2+t_3=\sqrt{2t_2+1-t_2^2}+t_2+1 \qquad (6)$$

برای ارزیابی، با توجه به $t_2=0$ داریم $t_1=1\,\mathrm{s}$ و $T=2\,\mathrm{s}$ (که جواب مسئله برای سطح زمین است). برای بیشینه کردن $T$، از $T$ نسبت به $t_2$ مشتق می‌گیریم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم. بعد از انجام دادن عملیات جبری، یکی از جواب‌های $t_2$ مساوی $2\,\mathrm{s}$ خواهد بود. مطابق معادله‌ی (۵)، $t_1=1\,\mathrm{s}$ است و در نتیجه زمان کل حرکت $4\,\mathrm{s}$ خواهد بود که جواب مسئله است.

خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند نشان دهد ارتفاع صخره $39{,}2\,\mathrm{m}$ است و توپ با سرعت $9{,}8\,\mathrm{m/s}$ به طرف بالا پرتاب شده است. توپ تا ارتفاع $y_1=4{,}9\,\mathrm{m}$ بالا می‌رود و مکان خط‌چین در شکل در $14{,}7\,\mathrm{m}$ از زیر لبه‌ی صخره قرار دارد. توپ از این نقطه با سرعت $v=19{,}6\,\mathrm{m/s}$ عبور و با سرعت $29{,}4\,\mathrm{m/s}$ به سطح زمین برخورد می‌کند.

۱۱. فرض کنیم چگالی سیارک یکنواخت باشد.

مسئله را به سه مرحله تقسیم می‌کنیم: ۱. عبور از داخل سیارک، ۲. پدیدار شدن و فرو افتادن از نقطه‌ی خروجی در طرف دیگر سیارک، ۳. عبور مجدد از داخل سیارک و بازگشت به نقطه‌ی شروع.

با توجه به مفاهیم پایه‌ی پایستگی انرژی می‌دانیم که سرعت اولیه‌ی مرحله‌ی دوم برابر با سرعت پرتاب است. این سرعت از سرعت فرارکم‌تر است، زیرا سنگ به سیارک برخواهد گشت

و مرحله‌ی سوم حرکت را با همان سرعت شروع مرحله‌ی اول آغاز خواهد کرد. بنابراین، بازه‌ی زمانی مراحل (۱) و (۳) برابر است.

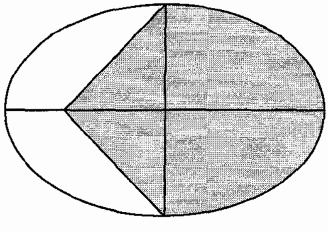
### مراحل ۱ و ۳

در مرحله‌ی اول که حرکت از نوع هماهنگ ساده و دوره‌ای برابر با دوره‌ی تناوب گردش روی مدار کوچک دارد، اگر سنگ رها شده باشد، دامنه‌ی نوسان آن برابر با شعاع سیارک است و سرعت بیشینه‌ی آن برابر با مقدار سرعت گردش روی مدار کوچک خواهد بود، و انرژی کل آن (به‌عنوان یک نوسانگر) برابر است با انرژی جنبشی در مرکز سیارک. در این حالت مقدار معادل انرژی اضافه (به‌صورت انرژی جنبشی اولیه) وجود دارد و به این ترتیب انرژی کل نوسانگر دوبرابر مقدار آن در حالت سقوط و دامنه‌ی آن $\sqrt{۲}$برابر مقدار آن در حالت سقوط است. پس، مرحله‌ی (۱) معرف حرکت هماهنگ ساده‌ی یک نوسانگر با دوره‌ی ۱۵ دقیقه است که از نقطه‌ای با فاصله‌ی $۱/\sqrt{۲}$برابر دامنه‌ی حرکت از مبدأ نوسان شروع می‌کند و به همان فاصله در طرف دیگر پیش می‌رود. می‌توانیم نشان دهیم که این حرکت به اندازه‌ی ۱/۴ یک دور طول می‌کشد. مراحل (۱) و (۳) هر یک به (۱۵ دقیقه) ۱/۴ زمان نیاز دارند.

### مرحله‌ی ۲

در مرحله‌ی ۲، سنگ در مدار بیضوی واگن کپلر با همان مقدار انرژی قرار دارد. (بنابراین، دوره و نیم‌محور بزرگ هم مانند حالت مدار کوچک است.) پس ارتفاع بیشینه برابر است با شعاع سیارک. سؤالی که مطرح می‌شود این است که: چه مدت طول می‌کشد تا سنگ نیمه‌ی مسیر را در اطراف یک مدار بیضوی با خروج از مرکزی برابر با فاصله‌ای که روی نیم‌محور بزرگ شروع می‌شود و به پایان می‌رسد طی کند؟ جواب با استفاده از قانون دوم کپلر برای یک بیضی دلخواه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{t}{\text{دوره}} = \frac{\text{سطح جارو شده}}{\text{کل سطح}} = \frac{\frac{۱}{۲}\pi ab + \frac{۱}{۲}(۲b)(\varepsilon a)}{\pi ab} = \frac{۱}{۲} + \frac{\varepsilon}{\pi}$$



بنابراین، با دوره‌ی ۱۵ دقیقه‌ای و $\varepsilon = ۱$ (خروج از مرکز) مدت زمانی برابر خواهد بود با:

$$(\text{دقیقه } ۱۵)\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{\pi}\right)$$

**زمان کل**

زمان کل مورد نیاز برابر است با:

$$(\text{دقیقه } ۱۵)\left(۱+\frac{۱}{\pi}\right) \approx ۱۹/۸ \text{ دقیقه}$$

۱۲. مکان اولیه‌ی سنگ را در مبدأ مختصات می‌گیریم. مؤلفه‌های افقی و قائم مکان سنگ به‌صورت تابعی از زمان به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$x = (v\cos\theta)t \qquad \text{و} \qquad y = (v\sin\theta)t - \frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

بهتر است با مجذور فاصله از نقطه‌ی پرتاب شروع کنیم، که برابر است با:

$$\begin{aligned} r^{۲} &= x^{۲}+y^{۲} = [(v\cos\theta)t]^{۲} + [(v\sin\theta)t - \frac{۱}{۲}gt^{۲}]^{۲} \\ &= v^{۲}t^{۲} - (vg\sin\theta)t^{۳} + \frac{۱}{۴}g^{۲}t^{۴} \end{aligned}$$

اگر $r^{۲}$ افزایش یابد، فاصله هم افزایش می‌یابد. مشتق $r^{۲}$ نسبت به زمان برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{d(r^{۲})}{dt} &= ۲v^{۲}t - ۳(vg\sin\theta)t^{۲} + g^{۲}t^{۳} \\ &= t[۲v^{۲} - ۳(vg\sin\theta)t + g^{۲}t^{۲}] \end{aligned}$$

اگر زمان به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، مشتق مثبت است و $r$ با زمان افزایش می‌یابد. اگر مشتق را برابر صفر قرار دهیم فاصله‌ی اکسترمم به‌دست می‌آید

$$t = \frac{۳vg\sin\theta \pm \sqrt{(۳vg\sin\theta)^{۲} - ۴(g^{۲})(۲v^{۲})}}{۲(g^{۲})}$$

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر زاویه‌ی $\theta$ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، مقدار جذر منفی است. در این حالت، جواب حقیقی برای شرایط بالا وجود ندارد، بنابراین مشتق همیشه مثبت است و فاصله باز هم افزایش می‌یابد. کوچک‌ترین زاویه که به‌ازای آن مشتق صفر شود از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$۹\sin^{۲}\theta - ۸ = ۰$$

بنابراین، فاصله همواره برای زوایای $\theta < \sin^{-۱}\sqrt{\frac{۸}{۹}} \approx ۷۰٫۵^\circ$ افزایش می‌یابد.

۲. اگر $\theta = \sin^{-۱}\sqrt{۸/۹}$ باشد یک جواب حقیقی برای زمان وجود دارد: $t_{\mathrm{s}} = ۳v\sin\theta/۲g = \sqrt{۲}v/g$. در منحنی مسافت برحسب زمان یک نقطه‌ی زمینی وجود دارد، ولی فاصله کاهش نمی‌یابد.

۳. اگر $\sin^{-۱}\sqrt{۸/۹} > \theta \geq ۹۰^\circ$ باشد دو جواب حقیقی وجود دارد که هر دو مثبت‌اند. فاصله‌ی بین سنگ و نقطه‌ی پرتاب در زمان اول به‌تدریج کم می‌شود.

$$t_۱ = \frac{v}{۲g}\left(۳\sin\theta - \sqrt{۹\sin^۲\theta - ۸}\right)$$

جواب دوم:

$$t_۲ = \frac{v}{۲g}\left(۳\sin\theta + \sqrt{۹\sin^۲\theta - ۸}\right) > t_۱$$

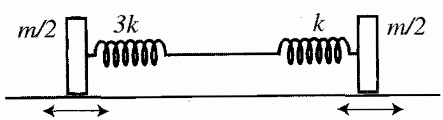
مربوط به زمان دوم است که سنگ از نقطه‌ی پرتاب دورتر می‌شود. سنگ در زمان زیر به سطح زمین برمی‌گردد

$$t_۳ = \frac{۲v\sin\theta}{g} \geq t_۲$$

سنگ در فاصله‌ای دور از نقطه‌ی پرتاب پیش از برخورد با زمین دوباره شروع به حرکت می‌کند اگر $\sin^{-۱}\sqrt{۸/۹} > \theta > ۹۰^\circ$.

وقتی $\theta = ۹۰^\circ$ (سنگ در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود)، $t_\circ = t_۲$، بنابراین سنگ به‌جای دور شدن با سطح زمین برخورد می‌کند. سنگ نصف زمان حرکت را در حال دور شدن $(t_۱ = ۱/۲t_۳)$ و نصف دیگر را در حال بازگشت طی می‌کند.

۱۳. از آن‌جا که نخ‌ها، فنرها و قرقره ایده‌آل‌اند، نیروی کشش همه‌جا ثابت است. بنابراین، هر فنر باید نیمی از وزن (یا جرم) میله را تحمل کند. بنابراین می‌توانیم تصویر را با حذف قرقره دوباره به‌صورت خطی رسم کنیم (که فقط جهت حرکت در آن تغییر می‌کند.)

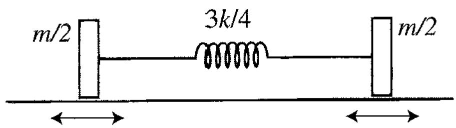



**نکته:** می‌توان با اندازه‌گیری جابه‌جایی‌های فنر از وضع تعادل هنگامی که میله از فنر آویزان است، از نیروی گرانش صرف‌نظر کرد.

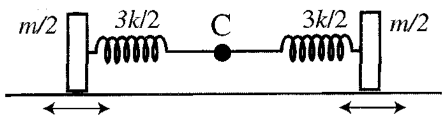
به‌دلیل این‌که میله در مدت نوسان افقی می‌ماند و فنرها سختی متفاوتی دارند، فنری که به دور قرقره می‌پیچد به جلو و عقب نوسان می‌کند. می‌توانیم این نوسان را با استفاده از دستگاهی که تقارن لازم را دارد حذف کنیم. ابتدا، دو فنر سری‌شده را براساس معادله‌ی ترکیب فنرهای سری با یک فنر جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{۱}{k_T} = \frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۲} + \cdots$$

$k_۱ = ۳k$ و $k_۲ = k$، ثابت فنر جدید برابر با $۳k/۴$ خواهد بود که در شکل نشان داده شده است.




این فنر جدید را به کمک معادله‌ی فوق به دو فنر معادل تقسیم می‌کنیم.




حالا یک دستگاه متقارن داریم. مرکز (C) ساکن است و هر یک از دو انتهای دستگاه مستقل از هم به طرف جلو و عقب نوسان می‌کند (اما دوره‌ی هر کدام یکسان است، گویی که مرکز C یک دیوار سخت باشد). دوره‌ی نوسان جرم $m$ روی فنر برابر است با:

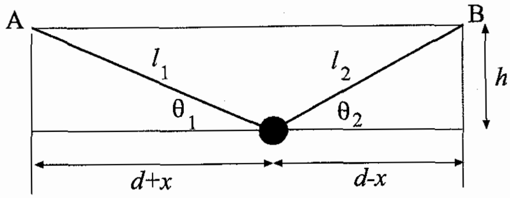
$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

بنابراین با مقادیر جدید $M = m/۲$ و $K = ۳k/۲$ دوره‌ی میله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{۳k}}$$

۱۴. راه‌حل ۱:

فرض کنیم مهره مطابق شکل صفحه‌ی بعد به اندازه‌ی $x$ از وضع تعادل به طرف راست منحرف شود. جرم مهره را $m$ در نظر می‌گیریم، $T$ نیروی کشش ریسمان، $h = \sqrt{l^۲ - d^۲}$، فاصله‌ی عمودی بین مهره و نقطه‌ی آویز، $l_۱$ و $l_۲$ به‌ترتیب طول قسمت‌های چپ و راست ریسمان $(l_۱ + l_۲ = ۲l)$، و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ زاویه‌های مربوط به راستای افقی‌اند.




در جهت عمودی شتابی وجود ندارد، بنابراین

$$T(\sin\theta_۱ + \theta_۲) = mg \qquad (۱)$$

در جهت افقی داریم:

$$T(\cos\theta_۲ - \cos\theta_۱) = ma = m\frac{d^۲x}{dt^۲} \qquad (۲)$$

با ترکیب (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} = -g\frac{\cos\theta_۱ - \cos\theta_۲}{\sin\theta_۱ + \sin\theta_۲} \qquad (۳)$$

از روی شکل می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}\cos\theta_۱ - \cos\theta_۲ &= \frac{d+x}{l_۱} - \frac{d-x}{l_۲} \\ &= \frac{d(l_۲ - l_۱) + x(l_۱ + l_۲)}{l_۱ l_۲} = \frac{۲lx + d(l_۲ - l_۱)}{l_۱ l_۲}\end{aligned} \qquad (۴)$$

و

$$\sin\theta_۱ + \sin\theta_۲ = \frac{h}{l_۱} + \frac{h}{l_۲} = \frac{h(l_۱ + l_۲)}{l_۱ l_۲} = \frac{۲lh}{l_۱ l_۲} \qquad (۵)$$

با جایگذاری معادله‌های (۴) و (۵) در معادله‌ی (۳) داریم:

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} = -g\frac{۲lx + d(l_۲ - l_۱)}{۲lh} \qquad (۶)$$

اگر $x$ کوچک باشد،

$$l_۲ = \sqrt{h^۲ + (d-x)^۲} = \sqrt{l^۲ + x^۲ - ۲dx} \cong l\left(۱ + \frac{x^۲ + ۲dx}{۲l^۲}\right)$$

و

$$l_۱ = \sqrt{h^۲ + (d+x)^۲} = \sqrt{l^۲ + x^۲ + ۲dx} \cong l \left[ ۱ + \frac{x^۲ + ۲dx}{۲l^۲} \right]$$

بنابراین

$$l_۲ - l_۱ \cong \frac{-۲dx}{l} \tag{۷}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۷) در (۶):

$$\frac{d^۲x}{dt^۲} = -g\frac{۲lx - \frac{۲d^۲x}{l}}{۲lh} = -g\frac{l^۲ - d^۲}{l^۲h}x$$
$$= -g\frac{\sqrt{l^۲ - d^۲}}{l^۲}x = -\frac{g}{l}\sqrt{۱ - \left(\frac{d}{l}\right)^۲}\, x$$

که معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده است:

$$\left(\frac{d^۲x}{dt^۲} = -\omega^۲x\right) \quad \text{با} \quad \omega^۲ = \frac{g}{l}\sqrt{۱ - \left(\frac{d}{l}\right)^۲}$$

دوره‌ی نوسان‌های کوچک مهره برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{۱}{\sqrt[۴]{۱ - \left(\frac{d}{l}\right)^۲}}$$

توجه کنید که اگر $d \to ۰$ آنگاه $\tau \to ۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (در این حالت آونگی به طول $l$ داریم). همچنین اگر $d \to l$ آنگاه $\tau \to \infty$ که باید چنین هم باشد.

**راه‌حل ۲:**

جمع فاصله‌های مهره تا دو نقطه‌ی ثابت A و B همواره برابر $۲l$ است، بنابراین منحنی مسیر مهره قسمتی از یک بیضی خواهد بود که نیم‌محور بزرگ آن برابر $l$ و نیم‌محور کوچک آن برابر $\sqrt{l^۲ - d^۲}$ است. معادله‌ی مسیر به‌صورت زیر است:

$$\frac{x^۲}{l^۲} + \frac{y^۲}{(l^۲ - d^۲)} = ۱$$

یا، به‌دلیل این‌که فقط به نیمه‌ی پایینی بیضی نیاز داریم:

$$y = -\sqrt{l^2 - d^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

اگر $y = 0$ را سطح مبنای انرژی پتانسیل در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل مهره برابر است با:

$$U = mgy = -mg\sqrt{l^2 - d^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

مقدار کمینه متعلق است به $x = 0$. با استفاده از بسط دوجمله‌ای، انرژی پتانسیل را برای جابه‌جایی کوچک $x$ حول نقطه‌ی کمینه تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned} U = mgy &= -mg\sqrt{l^2 - d^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \\ &\approx -mg\sqrt{l^2 - d^2}\left\{1 - \frac{x^2}{2l^2}\right\} \\ &= -mg\sqrt{l^2 - d^2} + \frac{1}{2}\frac{mg\sqrt{l^2 - d^2}}{l^2}x^2 \end{aligned}$$

$-mg\sqrt{l^2 - d^2} \equiv U_0$ نقطه‌ی صفر انرژی است. این شبیه انرژی پتانسیل یک نوسانگر هماهنگ است ($U - U_0 = 1/2kx^2 = 1/2m\omega^2x^2$، $k$ ثابت فنر و $\omega$ بسامد زاویه‌ای است). پس بسامد زاویه‌ای مهره برای نوسان‌های کم‌دامنه حول نقطه‌ی کمینه برابر است با:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{l^2 - d^2}}{l^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}\sqrt{1 - \frac{d^2}{l^2}}}$$

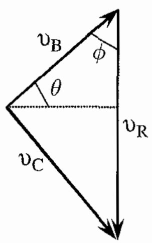
و دوره برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 - \frac{d^2}{l^2}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

به‌عنوان ارزیابی، برای $d \ll l$، حرکت به حرکت آونگ ساده و بنابراین دوره هم به دوره‌ی آونگ ساده نزدیک می‌شود.

۱۵. فرض می‌کنیم $x$ در جهت عرض رودخانه و $y$ به طرف پایین رودخانه است. ماهیگیر زمان حرکت اول را با راندن قایق در جهت محور $x$ کمینه می‌کند تا مؤلفه‌ی $x$ سرعت را بیشینه کند، زیرا سهم رودخانه روی سرعت او (نسبت به زمین) کاملاً در جهت $y$ است. به‌دلیل این‌که ماهیگیر در جهت $x$ مسافتی برابر $d$ را در مدت زمان $t$ حرکت می‌کند، سرعت قایق (نسبت به آب) باید برابر باشد با:

$$v_{\mathrm{B}} = \frac{d}{t} \qquad (۱)$$




برای عبور دوم، نمودار سرعت را رسم می‌کنیم که سرعت قایق نسبت به آب ($v_{\mathrm{B}}$)، سرعت جریان رودخانه نسبت به زمین ($v_{\mathrm{R}}$) و سرعت قایق در پیمودن عرض رودخانه نسبت به زمین ($v_{\mathrm{C}}$) را نشان می‌دهد.

توجه کنید که ما نمی‌خواهیم جابه‌جایی عرضی قایق را به‌صورت تابعی از سرعت رودخانه ($v_{\mathrm{R}}$) کمینه کنیم. (در آن صورت فقط یک جواب داریم یعنی جواب اول که در ادامه می‌بینید.) ما ترجیحاً دو مرحله‌ی زیر را انجام می‌دهیم. اول، جابه‌جایی عرضی قایق را به‌صورت تابعی از جهت حرکت ($\theta$) کمینه می‌کنیم. به‌عبارت دیگر، $\theta_{\min}(v_{\mathrm{R}})$، که جابه‌جایی کمینه را برای هر مقدار از سرعت رودخانه تعیین می‌کند.

دوم، برای هر مقدار سرعت رودخانه ($v_{\mathrm{R}}$)و در نتیجه $\theta_{\min}$، یک زمان عبور مشخص وجود دارد، زیرا سرعت قایق با معادله‌ی (۱) تعیین می‌شود و ثابت است. همه‌ی سرعت‌های ممکن رودخانه را به‌دست آورید به‌نحوی که زمان عبور برابر با $۳t$ باشد.

بنابراین ما باید یک مقدار اختیاری $T$ برای زمان عبور قایق فرض کنیم (فقط بعد از کمینه کردن است که شرایط $T$ مساوی $۳t$ را اعمال می‌کنیم). از نمودار برداری قبل داریم:

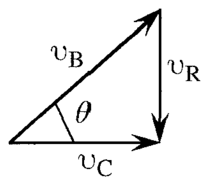
$$T = \frac{d}{v_{\mathrm{C}x}} = \frac{d}{v_{\mathrm{B}x}} = \frac{d}{v_{\mathrm{B}}\cos\theta} \qquad (۲)$$

در نتیجه جابه‌جایی قایق به طرف پایین رودخانه برابر است با

$$y = v_{\mathrm{C}y}T = (v_{\mathrm{R}} - v_{\mathrm{B}}\sin\theta)\frac{d}{v_{\mathrm{B}}\cos\theta} \qquad (۳)$$

حالا دوباره سؤال را به‌دقت بررسی کنیم. ما به $y$ کاری نداریم بلکه قدرمطلق آن یا $y^{۲}$ را کمینه می‌کنیم. احتمالاً ماهیگیر سعی می‌کند به‌طور مستقیم در عرض رودخانه حرکت کند، و نه به طرف پایین یا بالای رودخانه. اگر مشتق $y^{۲}$ را مساوی صفر قرار دهیم دو حالت رخ می‌دهد: یا $y = ۰$ که به یک جواب می‌رسیم، یا $dy/d\theta = ۰$ که جواب دوم را به‌صورت زیر می‌دهد:

جواب اول ($y = ۰$) فقط وقتی اتفاق می‌افتد که جریان رودخانه کندتر از سرعت قایق باشد ($v_{\rm R} < v_{\rm B}$). در این حالت ماهیگیر می‌تواند با راندن قایق به طرف بالای رودخانه، به‌صورتی که مؤلفه‌ی $y$ سرعتش نسبت به آب، یعنی $v_{\rm B}\sin\theta$، برابر و در جهت مخالف سرعت رودخانه ($v_{\rm R}$) باشد، مطابق شکل زیر، جابه‌جایی عرضی خود را صفر کند.




در این حالت، سرعت عبور نسبت به زمین ($v_{\rm C}$) برابر است با:

$$v_{\rm C} = \sqrt{v_{\rm B}^۲ - v_{\rm R}^۲} \Rightarrow \frac{d}{۳t} = \sqrt{\left(\frac{d}{t}\right)^۲ - v_{\rm R}^۲} \qquad (۴)$$

برابری دوم با جایگذاری معادله‌ی (۱) و توجه به این نکته که سرعت عبور ماهیگیر در جهت $x$ است و او مسافت $d$ را در زمان $۳t$ طی می‌کند به‌دست آمده است. اگر برابری دوم را از نو مرتب کنیم اولین جواب به شکل زیر است:

$$\boxed{v_{\rm R} = \frac{۲\sqrt{۲}d}{۳t} \cong ۰/۹۴۳\frac{d}{t}} \qquad (۵)$$

از طرف دیگر، اگر $v_{\rm B} < v_{\rm R}$ باشد با توجه به معادله‌ی (۳)، $y$ الزاماً مثبت است و به این ترتیب قایق هنگام عبور از عرض رودخانه به طرف پایین رودخانه کشیده می‌شود. در این حالت باید با قرار دادن $dy/d\theta = ۰$ با استفاده از معادله‌ی (۳) جابه‌جایی را کمینه کنیم

$$\sin\theta_{\rm min} = \frac{v_{\rm B}}{v_{\rm R}} \Rightarrow \cos\theta_{\rm min} = \sqrt{۱ - \left(\frac{v_{\rm B}}{v_{\rm R}}\right)^۲} \qquad (۶)$$

اگر معادله‌های (۶) و (۱) را در معادله‌ی (۲) جایگذاری کنیم و مقادیر $v_{\rm R}$ را که به‌ازای آن $T = ۳t$ است جستجو کنیم، به جواب دوم می‌رسیم:

$$\boxed{v_{\rm R} = \frac{۳d}{۲\sqrt{۲}t} \cong ۱/۰۶۱\frac{d}{t}} \qquad (۷)$$

دو جواب قابل قبول (۵) و (۷) زمانی به‌دست می‌آید که جریان رودخانه ۶٪ کندتر یا سریع‌تر از سرعت قایق باشد!

اگرچه معما را حل کردیم اما، چند بحث دیگر هم وجود دارد:

۱. برای هر جواب، جهت حرکت قایق در جهت $v_{\rm B}$ یکسان است، اگرچه جهت حرکت آن نسبت به زمین (که با $v_{\rm C}$ مشخص می‌شود.) چنین نیست. برای فهم این قضیه، توجه کنید که جهت حرکت از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta = \frac{v_{\rm C}}{v_{\rm B}} = \frac{\frac{d}{۳t}}{\frac{d}{t}} = \frac{۱}{۳} \qquad (۸)$$

۲. برای جواب دوم، معادله‌ی (۶) ایجاب می‌کند که:

$$v_{\rm B} = v_{\rm R}\sin\theta = v_{\rm R}\cos\phi \qquad (۹)$$

بنابراین سرعت قایق نسبت به آب ($v_{\rm B}$) باید به سرعت قایق نسبت به زمین ($v_{\rm C}$) (مطابق شکل اول) عمود باشد.

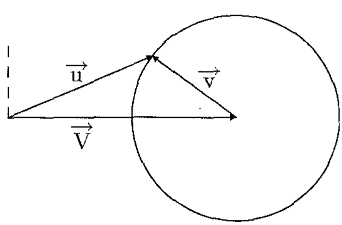
۳. اگر مقادیر $v_{\rm B}$ از معادله‌ی (۱)، $\theta$ از معادله‌ی (۸) و $v_{\rm R}$ از معادله‌ی (۷) را در معادله‌ی (۳) جایگذاری کنیم، جابه‌جایی پایین‌سوی قایق برای جواب دوم عبارت است از

$$y = \frac{d}{\sqrt{۸}} \cong ۰/۳۵۴d$$

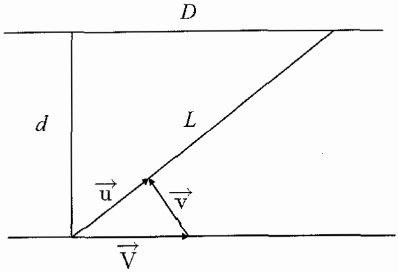
**نکته:** جواب دوم را می‌توان بدون محاسبه به‌دست آورد.

سرعت خالص قایق برابر با جمع برداری سرعت‌های قایق و جریان آب است: (شکل زیر را ببینید.)

$$\overrightarrow{\rm u} = \overrightarrow{\rm V} + \overrightarrow{\rm v}$$



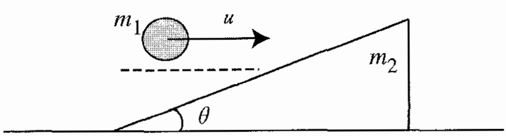

نوک بردار $\overrightarrow{\rm u}$ می‌تواند هر جایی روی دایره باشد. برای کمینه کردن فاصله‌ای که قایق به طرف پایین رودخانه طی می‌کند، باید زاویه‌ای را که $\overrightarrow{\rm u}$ با $\overrightarrow{\rm V}$ می‌سازد بیشینه کرد، بنابراین $\overrightarrow{\rm u}$ باید مماس به دایره باشد، که مطابق شکل صفحه‌ی بعد یک مثلث راست‌گوشه می‌سازد. با توجه به این‌که مثلث‌های شکل متشابه‌اند، $V/{\rm v} = L/d$. بنابراین $L = dV/{\rm v} = Vt$. اما $L = uT$ بنابراین $u = Vt/T$.

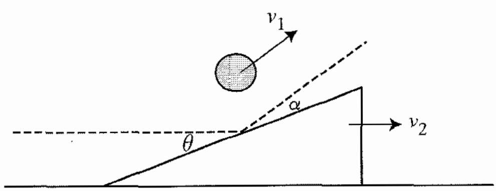



با توجه به قضیه‌ی فیثاغورس: $(d/t)^۲ = \mathrm{v}^۲ = V^۲ - u^۲ = V^۲[۱ - (t/T)^۲]$ و از آن‌جا که $t/T = ۱/۳$،

$$V = \frac{\left(\frac{d}{t}\right)}{\sqrt{۱ - \left(\frac{t}{T}\right)^۲}} = \frac{۳d}{۲\sqrt{۲}t}$$

.۱۶




راه‌حل ۱:

گوی به جرم $m_۱$ با سرعت اولیه‌ی $u$ حرکت می‌کند در حالی که سطح شیب‌دار به جرم $m_۲$ ساکن است. پس از برخورد، سرعت گوی $v_۱$ و سرعت سطح شیب‌دار $v_۲$ می‌شود. زاویه‌ی بازتاب گوی نسبت به سطح شیب‌دار برابر $\alpha$ است. زاویه‌ی برخورد (زاویه‌ی برخورد با سطح شیب‌دار) برابر $\theta$ است. نسبت جرم‌ها را با $q = m_۲/m_۱$ مشخص می‌کنیم و چهار شرط زیر را در نظر می‌گیریم:

- مؤلفه‌ی افقی تکانه‌ی خطی در مدت برخورد پایسته است، زیرا نیروی خارجی افقی روی دستگاه (گوی و صفحه) عمل نمی‌کند.

$$u = v_۱ \cos(\alpha + \theta) + qv_۲ \qquad (۱)$$

- انرژی جنبشی پایسته است زیرا برخورد را کشسان فرض می‌کنیم و صفحه‌ی افقی بدون اصطکاک است.

$$u^۲ = v_۱^۲ + qv_۲^۲ \qquad (۲)$$

- در مدت برخورد، نیروی تماس وارد برگوی به سطح عمود است، و بنابراین مؤلفه‌ی مماسی سرعت گوی ثابت باقی می‌ماند. (از گرانش در مدت برخورد صرف‌نظر می‌کنیم.)

$$u\cos\theta = v_۱ \cos\alpha \qquad (۳)$$

- ضربه‌ی دوم در همان نقطه‌ی اول روی سطح وارد می‌شود.

$$v_۱ \cos(\alpha + \theta) = v_۲ \qquad (۴)$$

با استفاده از معادله‌ی (۴)، $v_۲$ را از معادله‌های (۱) و (۲) حذف می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$u = (۱ + q)v_۱ \cos(\alpha + \theta) \qquad (۵)$$

$$u^۲ = v_۱^۲[۱ + q\cos^۲(\alpha + \theta)] \qquad (۶)$$

مجذور معادله‌ی (۵) را به‌دست می‌آوریم و با معادله‌ی (۶) ترکیب می‌کنیم تا $u$ و $v_۱$ را حذف کنیم:

$$q^۲ + q = \tan^۲(\alpha + \theta) = \left[\frac{\tan\alpha + \tan\theta}{۱ - \tan\alpha\tan\theta}\right]^۲ \qquad (۷)$$

با تقسیم کردن معادله‌ی (۵) به معادله‌ی (۳) و پس از قدری عملیات ریاضی داریم:

$$\tan\alpha = \frac{q\cot\theta - \tan\theta}{q + ۱} \qquad (۸)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۸) در معادله‌ی (۷)، نتیجه‌ی نهایی را به‌دست می‌آوریم:

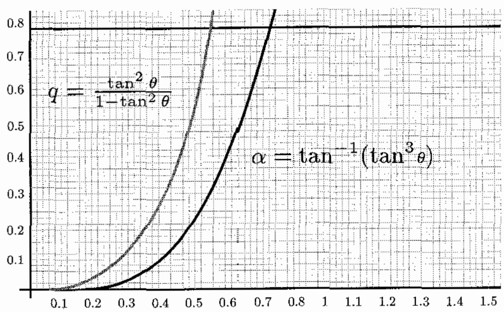
$$q = \frac{\tan^۲\theta}{۱ - \tan^۲\theta} \qquad (۹)$$

اگر $\frac{\pi}{۴} \geq \theta \geq ۰$ آنگاه $\infty \geq q \geq ۰$.

با جایگذاری این عبارت برای $q$ در معادله‌ی (۸) رابطه‌ی زاویه‌ی برخورد و بازتاب به‌دست می‌آید

$$\tan\alpha = \tan^{۳}\theta \qquad (۱۰)$$

به این ترتیب $\alpha \leq \theta$، و حالت تساوی فقط در ۰ یا $\pi/۴$ اتفاق می‌افتد. باید به این نکته توجه کنیم که وقتی زاویه‌ی سطح شیب‌دار بزرگ‌تر از °۴۵ باشد شرایط فیزیکی این حالت به‌طور کامل ارضا نمی‌شود. در زاویه‌ی °۴۵ جرم سطح نسبت به گوی باید بی‌نهایت باشد و تکانه‌ی افقی هر دو پس از اولین برخورد، صفر خواهد بود.




محور افقی، زاویه‌ی برخورد ($\theta$) برحسب رادیان را نشان می‌دهد. نسبت جرم‌ها، $q = \frac{m_{۲}}{m_{۱}}$، و زاویه‌ی بازتاب از سطح شیب‌دار ($\alpha$)، هر یک به‌صورت تابعی از $\theta$ نشان داده شده‌اند. نسبت جرمی به بی‌نهایت میل می‌کند اگر $\theta \to \pi/۴$.

## راه‌حل ۲:

نسبت $(\cot^{۲}\theta - ۱)$ برای مقادیر $۰° < \theta < ۴۵°$ مثبتِ بی‌نهایت فرض می‌شود. حد پایینی مربوط است به برخورد زودگذر گوی با سطح شیب‌دار بی‌جرم، در حالی که حد بالایی گویای این موضوع است که گوی مستقیم به طرف بالای سطح شیب‌داری به جرم بی‌نهایت کمانه می‌کند. نسبت سرعت‌ها برای گوی برابر است با:

$$\frac{v_{۱}}{u} = \sqrt{۱ - \tan^{۲}\theta + \tan^{۴}\theta} \qquad (۱)$$

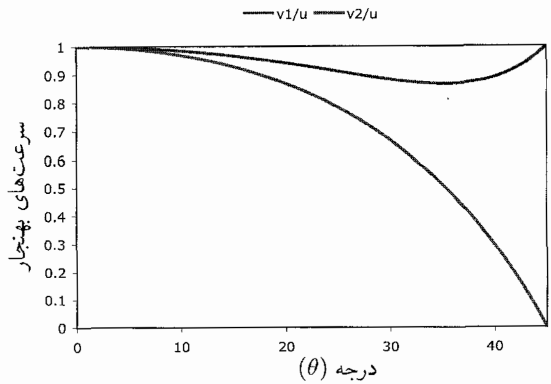
و برای سطح شیب‌دار

$$\frac{v_{۲}}{u} = ۱ - \tan^{۲}\theta \qquad (۲)$$

زاویه‌ی کمانه کردن با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\cot\phi = \tan^{۳}\theta \qquad (۳)$$

توجه کنید که معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) مقادیر مورد انتظار $\theta$ در حد بالا و پایین را دارند.

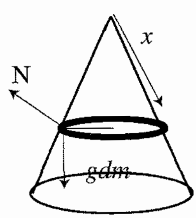



با رسم روابط فوق مطابق شکل، می‌بینیم که نسبت $v_۲/u$ با افزایش $\theta$، به‌طور یکنواخت کاهش می‌یابد، در حالی که $v_۱/u$ مقدار کمینه‌ای برابر $\sqrt{۳/۴} = ۰٫۸۶۶$ در

$$\theta = \tan^{-۱} \sqrt{۱/۲} = ۳۵٫۳^\circ$$

دارد.

۱۷. با استفاده از شکل‌های ۱ و ۲ مسئله را حل می‌کنیم. نیروی عمودی تکیه‌گاه با راستای افقی زاویه‌ای می‌سازد که برابر نصف زاویه‌ی رأس مخروط $(\theta)$ است. اگر المان کوچک جرم $(dm)$ را در نظر بگیریم مؤلفه‌ی عمودی نیروی عمودی تکیه‌گاه باید با نیروی وزن المان جرم و مؤلفه‌ی افقی نیروی عمودی تکیه‌گاه باید با مؤلفه‌ی افقی نیروی کشش $(T)$ خنثی شود.




شکل ۱

وزن المان برابر است با $(mg/۲\pi)d\phi$، بنابراین داریم:

$$N_y = \frac{mg}{۲\pi} d\phi \qquad (۱)$$

شرط خنثی شدن نیروهای افقی به‌صورت زیر است:

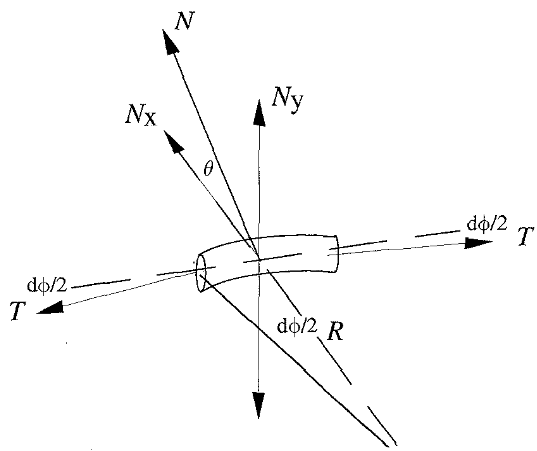
$$N_x = ۲T \sin \frac{d\phi}{۲}$$

نوار به‌صورت یک فنر ایده‌آل عمل می‌کند (که در صورت مسئله اشاره شده است.) بنابراین می‌توان نوشت:

$$N_x = ۲\pi k(R-r)\sin d\phi$$

که به رابطه‌ی زیر نزدیک است:

$$N_x = ۲\pi k(R-r)d\phi \qquad (۲)$$




**شکل ۲**

از آن‌جا که $\tan\theta = \frac{N_y}{N_x}\sin$، معادله‌ی (۲) را می‌توان به معادله‌ی (۱) تقسیم کرد:

$$R = r + \frac{mg}{۴\pi^۲ k}\cot\theta$$

راه دیگر این است که انرژی پتانسیل نوار را به‌صورت تابعی از $R$ در نظر بگیریم. برای حفظ تعادل، انرژی پتانسیل نوار باید کمینه باشد. فرض کنید انرژی پتانسیل کشسانی به‌صورت $U_{\rm el} = (۱/۲k)(۲\pi R - ۲\pi r)^۲$ و انرژی پتانسیل گرانشی نسبت به رأس مخروط برابر با $U_{\rm g} = -mg(R-r)\cot\theta$ باشد.

انرژی پتانسیل کل برابر است با:

$$U = ۲k\pi^۲(R-r)^۲ - mg(R-r)\cot\theta$$

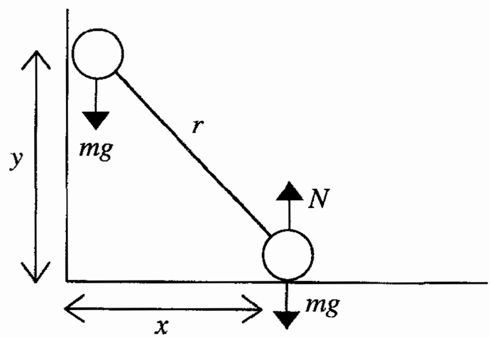
در حالت کمینه‌ی انرژی:

$$\frac{dU}{dR} = ۴\pi^۲ k(R-r) - mg\cot\theta = ۰$$

و جواب آن به‌صورت زیر است:

$$R = r + \frac{mg}{۴\pi^۲ k}\cot\theta$$

۱۸. چون نیروی عمودی تکیه‌گاه روی جرم بالایی و شتاب افقی این جرم در لحظه‌ی قطع تماس با دیوار برابر صفر است، نیروی کشش میله در آن لحظه باید صفر باشد. بنابراین نمودار نیروهای وارد بر دو جسم مطابق شکل زیر است.




جرم بالایی سرعتی پایین‌سو و برابر $v = -dy/dt$ و شتابی برابر $g = -d^۲y/dt^۲$ دارد، در حالی که جرم پایینی سرعتی برابر $u = dx/dt$ به سمت راست و شتابی برابر صفر دارد.

می‌دانیم $y = \sqrt{r^۲ - x^۲}$ چون طول میله ثابت است، بنابراین

$$v = -\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{r^۲ - x^۲}}\frac{dx}{dt} = \frac{xu}{y}$$

و

$$g = -\frac{d^۲y}{dt^۲} = \frac{u}{y}\frac{dx}{dt} - \frac{xu}{y^۲}\frac{dy}{dt} = \frac{u^۲}{y} + \frac{xuv}{y^۲} = \frac{y^۲u^۲}{y^۳} + \frac{x^۲u^۲}{y^۳} = \frac{r^۲u^۲}{y^۳}$$

سرانجام، بنابه پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$mg(r-y) = \frac{۱}{۲}m(u^۲ + v^۲) \Rightarrow ۲g(r-y) = u^۲\left(۱ + \frac{x^۲}{y^۲}\right) = \frac{u^۲r^۲}{y^۲} = gy$$

در نتیجه

$$y = \frac{۲}{۳}r \Rightarrow u = \sqrt{\frac{۸gr}{۲۷}}$$

۱۹. بنابه قانون دوم نیوتون برای سورتمه، شتاب رو به بالا (جهت مثبت رو به بالا) و رو به پایین (جهت مثبت رو به پایین) به‌صورت زیر است:

$$a_{\mathrm{u}} = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta) \qquad \text{(بالا)}$$

و

$$a_{\mathrm{d}} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \qquad \text{(پایین)}$$

اگر $u$ و $v$ به‌ترتیب سرعت اولیه هنگام حرکت رو به بالا و سرعت نهایی هنگام حرکت رو به پایین باشند، مطابق با رابطه‌ی حرکت (شتاب ثابت) که شامل مجذور سرعت‌هاست داریم: $a_{\mathrm{u}}/a_{\mathrm{d}} = -(u/v)^۲$. اگر $t_{\mathrm{u}}$ و $t_{\mathrm{d}}$ به‌ترتیب مدت زمان حرکت رو به بالا و رو به پایین باشند، بنابه تعریف شتاب و با استفاده از معادله‌ی قبل داریم: $t_{\mathrm{u}}/t_{\mathrm{d}} = (-a_{\mathrm{d}}/a_{\mathrm{u}})^{۱/۲}$. از ترکیب معادله‌ی آخر با دو معادله‌ی اول (و با توجه به این‌که $\mu < \theta$ زیرا سورتمه برمی‌گردد.) به‌دست می‌آوریم:

$$t_{\mathrm{u}} = \frac{t}{\left[\frac{۱+\sqrt{(\tan\theta+\mu)}}{(\tan\theta-\mu)}\right]}$$

۲۰. بازه‌ی زمانی ظاهری که ساعت آونگی ثبت می‌کند متناسب با تعداد نوسان‌های آونگ است که آن نیز متناسب با بسامد آونگ است. این بسامد به نوبه‌ی خود متناسب با جذر شدت میدان گرانشی مؤثر در آسانسور است. فرض کنید $\alpha g$ معرف شتاب آسانسور باشد. شدت میدان گرانشی مؤثر در چارچوب مرجع آسانسور هنگام شتاب بالاسو برابر است با: $g_{\mathrm{u}} = g(۱+\alpha)$ و هنگام شتاب پایین‌سو برابر است با $g_{\mathrm{d}} = g(۱-\alpha)$. فرض کنید $T$ معرف زمان واقعی سپری شده برای شتاب گرفتن رو به بالا باشد. همین مدت زمان برای شتاب گرفتن رو به پایین سپری می‌شود، بنابراین کل بازه‌ی زمانی شتاب گرفتن برابر $۲T$ است. فرض می‌کنیم $t_{\mathrm{u}}$ زمان سپری شده برای شتاب گرفتن رو به بالاست که ساعت آونگی ثبت می‌کند و $t_{\mathrm{d}}$ به همین ترتیب برای شتاب رو به پایین تعریف می‌شود.

نسبت کل زمان ثبت شده‌ی ساعت آونگی به زمان واقعی کل را که آسانسور برای شتاب گرفتن سپری می‌کند، به‌دست می‌آوریم و آن را با $R$ نشان می‌دهیم:

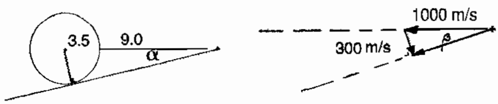
$$R = \frac{t_{\mathrm{u}}+t_{\mathrm{d}}}{۲T} = \left[\frac{(g_{\mathrm{u}})^{\frac{۱}{۲}}+(g_{\mathrm{d}})^{\frac{۱}{۲}}}{۲g^{\frac{۱}{۲}}}\right] = \left[\frac{(۱+\alpha)^{\frac{۱}{۲}}+(۱-\alpha)^{\frac{۱}{۲}}}{۲}\right]$$

دو طرف رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$R^۲ = \frac{\left[(۱+\alpha)^{\frac{۱}{۲}}+(۱-\alpha)^{\frac{۱}{۲}}\right]^۲}{۴} = \frac{\left[۲+۲(۱-\alpha^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right]}{۴} = \frac{۱}{۲}+\left[\frac{۱}{۲}(۱-\alpha^۲)^{\frac{۱}{۲}}\right]$$

واضح است که این نسبت کوچک‌تر از یک است. در نتیجه زمان ثبت شده‌ی ساعت آونگی کم‌تر از زمان واقعی است، و متصدی آسانسور کارش را در زمانی بیش‌تر از وقت معین به پایان می‌رساند.

۲۱. فرض کنیم $l = ۹\ \mathrm{km}$ فاصله تا سطح سیارک باشد.




شکل ۱

در شکل ۱ زاویه‌ی لازم برای جلوگیری از برخورد برابر $\alpha$ است.

$$\sin\alpha = \frac{۳/۵}{۱۲/۵} = ۰/۲۸ \Rightarrow \alpha = ۱۶/۳^\circ$$

در شکل ۲ بزرگ‌ترین زاویه‌ی انحراف ممکن برابر $\beta$ است.

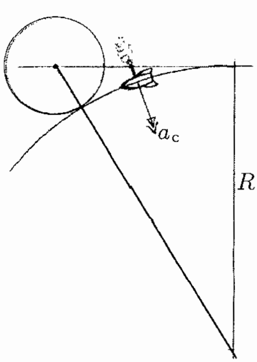
$$\sin\beta = \frac{۳۰۰}{۱۰۰۰} = ۰/۳ \Rightarrow \beta = ۱۷/۵^\circ$$

واضح است که $\alpha < \beta$: برخوردی وجود ندارد.

تنها مسئله‌ای که وجود دارد این است که فرمانده با تغییر سرعتی برابر $۳۰۰\ \mathrm{m/s}$ در یک مدت زمان کوتاه مواجه می‌شود و شتابی دست‌کم برابر $۳۰۰\ \mathrm{ms}^۲$ خواهد داشت، اما آیا فرمانده می‌تواند چنین شتابی را تحمل کند؟

یک راه‌حل نجات‌بخش عبارت است از مسیر حرکت دایره‌شکلی به شعاع $R$. (البته فضاپیما در هر صورت به نیروی رانشی پیوسته‌ای نیاز دارد.)

$$(R + ۳/۵)^۲ = ۱۲/۵^۲ + R^۲ \Rightarrow R = ۲۰/۶\,\mathrm{km}$$




شکل ۲

شتاب مرکزگرای فضاپیما برابر است با: $a_c = v^۲/R = ۴۸{,}۶\,\mathrm{m/s}^۲$. به این ترتیب فرمانده شانس بیش‌تری برای جان‌به‌دربردن از این ماجرا دارد.

۲۲. **روش اول:** سریع‌ترین روش حل توجه به این نکته است که سرعت نخ $(v)$ برابر سرعت بالاترین نقطه‌ی واقع بر قطر داخلی قرقره است. ولی این نقطه به اندازه‌ی $R+r$ از پایین‌ترین نقطه‌ی واقع بر قطر خارجی قرقره فاصله دارد.

از آن‌جا که پایین‌ترین نقطه‌ی قرقره بدون داشتن لغزش با زمین در تماس است، بنابراین این نقطه به‌صورت لحظه‌ای ساکن است. در نتیجه قرقره به‌صورت لحظه‌ای با سرعت زاویه‌ای $\omega = v/R + r$ حول نقطه‌ی تماس با زمین می‌چرخد.

**روش دوم:** این روش کمی طولانی‌تر است: قرقره یک دور کامل به جلو می‌غلتد. به این ترتیب کل قرقره و به‌ویژه نقطه‌ی فوقانی واقع بر قطر داخلی مسافت $۲\pi R$ را به طرف جلو طی می‌کند. در این بازه‌ی زمانی طولی به اندازه‌ی $۲\pi r$ را از نخ باز کرده‌ایم. بنابراین جابه‌جایی کل هر نقطه روی نخ بازشده برابر $۲\pi R + ۲\pi r$ در مدت زمان یک دوره‌ی کامل $(T)$ است. سرعت این نقطه‌ی ثابت روی نخ بازشده برابر است با: $v = ۲\pi(R+r)/T$. سرعت زاویه‌ای چرخش قرقره برابر است با $\omega = ۲\pi/T$ و در نتیجه می‌رسیم به $\omega = v/(R+r)$.

۲۳. **روش اول:** اگرچه نیروی عمودی تکیه‌گاه با سطح زمین کار فیزیکی روی دانش‌آموز انجام نمی‌دهد (انتقال انرژی به‌طور درونی از ماهیچه‌ها صورت می‌گیرد.)، اما می‌توان عبارت ریاضی درستی بر این اساس نوشت که نیروی تماس با زمین، انرژی دانش‌آموز را تغییر می‌دهد. بنابراین می‌توانیم حرکت مرکز جرم را به‌صورت زیر نشان دهیم:

$$W_{\text{خالص}} = \Delta k_{\text{مرکز جرم}}$$

در این‌جا فقط گرانش و نیروی سطح را در نظر می‌گیریم، و از آن‌جا که دانش‌آموز تا زمانی که مرکز جرمش در مکان $h/۲$ از سطح زمین قرار دارد با زمین در تماس است داریم:

$$F_{\text{سطح}} \frac{h}{۴} + (mg)\left(\frac{-h}{۲}\right) = ۰$$

دانش‌آموز در ابتدا و انتهای حرکت خود در حالت سکون قرار می‌گیرد، بنابراین

$$F_{\text{سطح}} = ۲mg$$

**روش دوم:** از آن‌جا که پاها در ارتفاع $h/۲$ از سطح زمین کنده می‌شود بنابه تقارن، بزرگی شتاب دانش‌آموز از ارتفاع $h/۴$ تا $h/۲$ برابر بزرگی شتاب او از ارتفاع $h/۲$ تا $۳h/۴$ است.

بنابراین اندازه‌ی نیروی خالص وارد بر دانش‌آموز هنگام بالا رفتن برابر اندازه‌ی نیروی وارد بر او هنگام سقوط آزاد از ارتفاع $h/۲$ تا $۳h/۴$ است. در نتیجه، هنگام تماس با زمین، با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{سطح}} - mg = mg \Rightarrow F_{\text{سطح}} = ۲mg$$

**۲۴.** اگر چارچوب مرجع را تغییر دهیم حل مسئله آسان‌تر می‌شود. برای مثال فرض کنیم $A$ ساکن است. $A$ را در $x = ۰$ در نظر می‌گیریم. اکنون سرعت و شتاب اتومبیل $B$ به‌ترتیب مقادیر $-(v_۱ + v_۲)$ و $(a_۱ + a_۲)$ دارد. زمان‌های برخورد $A$ و $B$ با رابطه‌ی

$$۰ = x_B - (v_۱ + v_۲)t + \frac{۱}{۲}(a_۱ + a_۲)t^۲$$

به‌دست می‌آید و با حل این معادله‌ی درجه‌ی دوم داریم:

$$t = \frac{(v_۱ + v_۲) \pm \sqrt{(v_۱ + v_۲)^۲ - ۲x_B(a_۱ + a_۲)}}{(a_۱ + a_۲)}$$

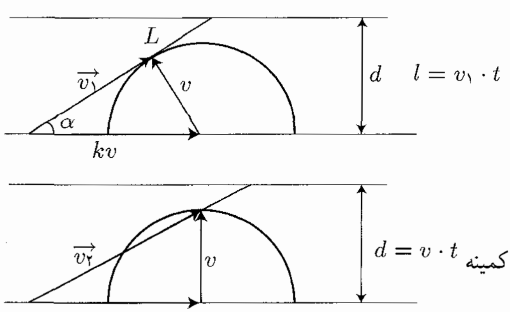
بنابراین بازه‌ی زمانی میان عبورها برابر است با:

$$t = \frac{۲\sqrt{(v_۱ + v_۲)^۲ - ۲x_B(a_۱ + a_۲)}}{(a_۱ + a_۲)}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۴}(a_۱ + a_۲)^۲t^۲ = (v_۱ + v_۲)^۲ - ۲x_B(a_۱ + a_۲)$$

بنابراین

$$x_B = \frac{(v_۱ + v_۲)^۲}{۲(a_۱ + a_۲)} - \frac{۱}{۸}(a_۱ + a_۲)t^۲$$

**۲۵.** دو شکل زیر دو جهت ممکن سرعت برایند کودک ($v_۱$ در شکل اول و $v_۲$ در شکل دوم) را نشان می‌دهد. وقتی کودک جهت $\vec{v}_۱$ را انتخاب می‌کند (شکل اول)، زاویه‌ی $\alpha$ بیشینه است. و او کم‌ترین جابه‌جایی عرضی را دارد.



با توجه به شکل اول داریم:

$$\sin\alpha = \frac{۱}{k} \qquad \text{و} \qquad \cos\alpha = \sqrt{۱ - \frac{۱}{k^۲}} = \frac{۱}{k}\sqrt{k^۲ - ۱}$$

برای زمان کمینه داریم:

$$d = vt_{\text{کمینه}}$$

برای جابه‌جایی کمینه، مسافت پیموده‌شده (که آن را $l$ می‌نامیم.) از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$d = l\sin\alpha$$

و زمان لازم عبور با کم‌ترین مقدار جابه‌جایی عرضی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$(kv\cos\alpha)t = l \qquad (\text{زیرا} \quad v_۱ = kv\cos\alpha)$$

با ترکیب این معادله‌ها داریم:

$$t_{\text{کمینه}} = k\sin\alpha\cos\alpha$$

یا

$$t_{\text{کمینه}} = t\frac{\sqrt{k^۲ - ۱}}{k}$$

**۲۶.** در بالای مسیر سرعت سنگ $v/\sqrt{۲}$ است، و $v$ سرعت اولیه‌ی سنگ است. شتاب سنگ $g$ و بر سرعت آن عمود است، بنابراین شعاع انحنای مسیر سنگ در آن لحظه برابر است با:

$$R = \frac{v^۲}{۲g}$$

زنبور عسل مسیر سنگ را با سرعت ثابت $v$ دنبال می‌کند، بنابراین سرعتش در بالاترین نقطه‌ی مسیر هنوز برابر $v$ و شعاع انحنای مسیر آن مشابه شعاع انحنای مسیر سنگ است. در نتیجه شتاب آن در بالاترین نقطه‌ی مسیر برابر است با:

$$a = \frac{v^۲}{R} = ۲g$$

**۲۷.** زمانی که پرتابه‌ی ۲ از کنار پرتابه‌ی ۱ عبور می‌کند، در بالاترین نقطه‌ی مسیر، $V_۲ = V_{f۲}$ و $V_{f۱} = ۰$. و چون هر دو پرتابه فاصله‌ی عمودی یکسان $Y$ را پیموده‌اند، داریم

$$Y = \frac{(V_{f۱}^۲ - V^۲)}{-۲g} = \frac{(V_{f۲}^۲ - V_{i۲}^۲)}{-۲g}$$

$$V_{i۲}^۲ = V_{f۲}^۲ + V^۲ \qquad (۱)$$

$\tau$ را زمان حرکت پرتابه‌ی اول و $(\tau - t)$ را زمان حرکت پرتابه‌ی دوم در نظر می‌گیریم. چون شتاب ثابت است داریم:

$$V_{f1} - V = -g\tau \Rightarrow \tau = \frac{V}{g}$$

و برای پرتابه‌ی دوم داریم:

$$V_{f2} = V_{i2} - g(\tau - t)$$
$$V_{f2} = V_{i2} - g\left(\frac{V}{g} - t\right)$$
$$V_{f2} = V_{i2} + V - gt \qquad (2)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲) در (۱)، یک جواب برای $V_{i2}$ برحسب کمیت‌های معلوم به‌دست می‌آید:

$$V_{i2}^2 = (V_{i2} - V + gt)^2 + V^2$$

از رابطه‌ی فوق جذر می‌گیریم:

$$V_{i2} = \frac{V^2 - Vgt + \frac{1}{2}g^2t^2}{V - gt}$$

۲۸. **روش اول:** فرض کنیم جسم در حال حرکت به سمت راست است، پس داریم:

$$F = (M + m)a$$

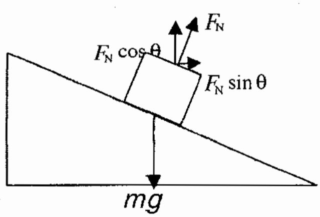
برای آن‌که نیروی اصطکاک صفر شود، تنها نیرویی که می‌تواند به جسم $m$ شتاب دهد نیروی عمودی تکیه‌گاه است. بنابراین از نمودار زیر داریم:

$$ma = F_N \sin\theta$$

و

$$0 = F_N \cos\theta - mg$$

با حذف $F_N$ بین این دو معادله داریم: $a = g/\tan\theta$ و $F = (M + m)g/\tan\theta$.



**روش دوم:** اگر نیروی اصطکاک صفر شود، جسم کوچک $(m)$ باید در حال سقوط آزاد قرار گیرد. اگر ارتفاع سطح شیب‌دار برابر $h$ و طول پایه‌ی آن $b$ باشد، بنابراین شتاب سطح $(a)$ باید به‌صورتی باشد که:

$$\tan\theta = \frac{h}{b} = \frac{g}{a} \Rightarrow a = \frac{F}{M+m} = \frac{g}{\tan\theta}$$
$$F = \frac{(M+m)g}{\tan\theta}$$

**۲۹.** با فرض حرکت خطی و ثابت بودن جرم، جواب ناصفر برای این مسئله وجود ندارد. در دو بعد، اگر مؤلفه‌های غیرصفر شتابِ ثابت و سرعت اولیه با نمادهای $a_{\rm x}$، $a_{\rm y}$، $v_{\rm x}$ و $v_{\rm y}$ مشخص شود داریم:

$$\sqrt{(v_{\rm x}+a_{\rm x}t)^۲+(v_{\rm y}+a_{\rm y}t)^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{v_{\rm x}^۲+v_{\rm y}^۲} \qquad (۱)$$
$$\sqrt{(v_{\rm x}+a_{\rm x}۲t)^۲+(v_{\rm y}+a_{\rm y}۲t)^۲} = \frac{۱}{۴}\sqrt{v_{\rm x}^۲+v_{\rm y}^۲} \qquad (۲)$$

با جذرگیری از طرفین و بسط و گردآوری جمله‌ها داریم:

$$\left(\frac{۳}{۴}v_{\rm x}^۲+۲v_{\rm x}a_{\rm x}t+a_{\rm x}^۲t^۲\right)+\left(\frac{۳}{۴}v_{\rm y}^۲+۲v_{\rm y}a_{\rm y}t+a_{\rm y}^۲t^۲\right)=۰ \qquad (۳)$$
$$\left(\frac{۱۵}{۱۶}v_{\rm x}^۲+۴v_{\rm x}a_{\rm x}t+۴a_{\rm x}^۲t^۲\right)+\left(\frac{۱۵}{۱۶}v_{\rm y}^۲+۴v_{\rm y}a_{\rm y}t+۴a_{\rm y}^۲t^۲\right)=۰ \qquad (۴)$$

با تفریق معادله‌ی (۴) از معادله‌ی (۳):

$$\left(\frac{۳}{۱۶}v_{\rm x}^۲+۲v_{\rm x}a_{\rm x}t+۳a_{\rm x}^۲t^۲\right)+\left(\frac{۳}{۱۶}v_{\rm y}^۲+۲v_{\rm y}a_{\rm y}t+۳a_{\rm y}^۲t^۲\right)=۰ \qquad (۵)$$

با ضرب رابطه‌ی فوق در ۳ داریم:

$$\left(\frac{۹}{۱۶}v_{\rm x}^۲+۶v_{\rm x}a_{\rm x}t+۹a_{\rm x}^۲t^۲\right)+\left(\frac{۹}{۱۶}v_{\rm y}^۲+۶v_{\rm y}a_{\rm y}t+۹a_{\rm y}^۲t^۲\right)=۰ \qquad (۶)$$

ترفند ریاضی: چون

$$\frac{۹}{۱۶}=\frac{۹}{۱۶}+\frac{۷}{۱۶}-\frac{۷}{۱۶}$$

پس:

$$(v_{\mathrm{x}}^{2}+6v_{\mathrm{x}}a_{\mathrm{x}}t+9a_{\mathrm{x}}^{2}t^{2})+(v_{\mathrm{y}}^{2}+6v_{\mathrm{y}}a_{\mathrm{y}}t+9a_{\mathrm{y}}^{2}t^{2})=\frac{7}{16}(v_{\mathrm{x}}^{2}+v_{y}^{2}) \tag{7}$$

به این ترتیب:

$$v_{\mathrm{f}}=\sqrt{(v_{\mathrm{x}}+a_{\mathrm{x}}3t)^{2}+(v_{\mathrm{y}}+a_{\mathrm{y}}3t)^{2}}=\frac{\sqrt{7}}{4}\sqrt{v_{\mathrm{x}}^{2}+v_{\mathrm{y}}^{2}} \tag{8}$$

بنابراین در دو بعد $v_{\mathrm{f}}$ مساوی است با $\sqrt{7}/4$ برابر سرعت اولیه.

سرعت ذره پس از $4t$، $5t$، $6t$ و ... چقدر خواهد بود؟

مراحل اساسی به‌دست آوردن جوابی برای $3t$، از معادله‌های (۵) و (۶) حاصل می‌شود. ما می‌توانیم جواب را به‌دست آوریم چون دو ضریب آخر (۹ و ۶) در بسط $(v+a3t)^{2}$ مساوی ۳برابر تفاوت ضرایب مشابه (۴ و ۴) و (۱ و ۲) در بسط‌های $(v+a\cdot 2t)^{2}$ و $(v+a\cdot t)^{2}$ است.

فرض کنید $\omega_{n}=(2n,n^{2})$. توجه کنید که $\omega_{n}$ آخرین دو جمله را در بسط $(v+a\cdot nt)^{2}$ تولید می‌کند. می‌توانیم ترفند قبلی در معادله‌ی (۷) را دوباره تکرار کنیم تا سرعت ذره را بعد از $4t$ به‌دست آوریم، چون $\omega_{4}=2(\omega_{3}-\omega_{1})$. به همین ترتیب پس از $5t$، می‌توانیم ترفند ریاضی را دوباره به‌کار بریم، چون $\omega_{5}=5(\omega_{3}-\omega_{2})$. آیا می‌توان همیشه از این ترفند استفاده کرد؟ آری.

اگر $n$ زوج باشد، $n=2m$ و

$$\begin{aligned}\omega_{2m}&=(2\cdot 2m,(2m)^{2})=m(4,4m)\\&=m\big((2m+2)-(2m-2),(m+1)^{2}-(m-1)^{2}\big)\\&=m(\omega_{m+1}-\omega_{m-1})\end{aligned} \tag{9}$$

به همین ترتیب، می‌توان نشان داد که اگر $n$ فرد باشد، $n=2m-1$ و

$$\omega_{2m-1}=(2m-1)(\omega_{m}-\omega_{m-1}) \tag{10}$$

اگر $k_{n}$ ثابت تناسب باشد که سرعت را پس از $n\cdot t$ با سرعت اولیه پیوند می‌زند می‌توانیم نتایج را درکنار ترفند ریاضی خود در معادله‌های (۹) و (۱۰) استفاده کنیم، و خواهیم داشت:

$$k_{2m}=\sqrt{1+m(k_{m+1}^{2}-k_{m-1}^{2})} \tag{11}$$

وقتی $n = 2m$ زوج باشد و

$$k_{2m-1} = \sqrt{1 + (2m-1)(k_m^2 - k_{m-1}^2)} \qquad (12)$$

وقتی $n = 2m$ فرد باشد.

بنابه صورت اصلی مسئله:

$$k_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{1}{4}$$

بنابراین برای مثال، با استفاده از معادله‌ی (۱۲) داریم:

$$k_3 = k_{2\times 2-1} = \sqrt{1 + 3(k_2^2 - k_1^2)} = \sqrt{1 + 3\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

که با نتیجه‌ی معادله‌ی (۸) هم‌خوانی دارد.

مقادیر دیگر در زیر محاسبه شده است:

$$k_4 = \sqrt{1 + 2(k_3^2 - k_1^2)} = \sqrt{1 + 2\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{22}}{4}$$

$$k_5 = \sqrt{1 + 5(k_3^2 - k_2^2)} = \sqrt{1 + 5\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{46}}{4}$$

$$k_6 = \sqrt{1 + 3(k_4^2 - k_2^2)} = \sqrt{1 + 3\left[\left(\frac{\sqrt{22}}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{79}}{4}$$

$$k_7 = \sqrt{1 + 7(k_4^2 - k_3^2)} = \sqrt{1 + 7\left[\left(\frac{\sqrt{22}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{121}}{4}$$

$$k_8 = \sqrt{1 + 4(k_5^2 - k_3^2)} = \sqrt{1 + 4\left[\left(\frac{\sqrt{46}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{172}}{4}$$

$$k_{۹} = \sqrt{۱ + ۹(k_۵^۲ - k_۴^۲)} = \sqrt{۱ + ۹\left[\left(\frac{\sqrt{۴۶}}{۴}\right)^۲ - \left(\frac{\sqrt{۲۲}}{۴}\right)^۲\right]} = \frac{\sqrt{۲۳۲}}{۴}$$

$$k_{۱۰} = \sqrt{۱ + ۵(k_۶^۲ - k_۴^۲)} = \sqrt{۱ + ۵\left[\left(\frac{\sqrt{۷۹}}{۴}\right)^۲ - \left(\frac{\sqrt{۲۲}}{۴}\right)^۲\right]} = \frac{\sqrt{۳۰۱}}{۴}$$

**۳۰.** برای به‌دست آوردن فاصله‌ی کمینه بین دو اتومبیل، بهتر است چارچوب مرجع را بر مبنای اتومبیل ۱ هنگامی که به تقاطع می‌رسد انتخاب کنیم. شکل بالا در صورت مسئله مسیر مستقیم حرکت اتومبیل ۲ را نشان می‌دهد که از نقطه‌ی دید اتومبیل ۱ مشاهده می‌شود. فاصله‌ی کمینه بین اتومبیل‌ها زمانی است که ناظر به‌طور عمودی به مسیر حرکت اتومبیل ۲ نگاه کند. این فاصله برابر است با: $d_{\text{کمینه}} = d\cos\theta$، که $d$ فاصله‌ی معلوم بین دو اتومبیل است. بنابه شکل، زاویه‌ی $\theta$ در محاسبه‌ی فاصله، همان زاویه‌ی $\theta$ در نمودار سرعت‌هاست. در نتیجه، داریم:

$$\cos\theta = \frac{v_۱}{(v_۱^۲ + v_۲^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

و به این ترتیب فاصله‌ی کمینه بین دو اتومبیل برابر است با:

$$d_{\text{کمینه}} = d\cos\theta = \frac{dv_۱}{(v_۱^۲ + v_۲^۲)^{\frac{۱}{۲}}}$$

**۳۱.** **روش اول:** چون سرعت $v(t)$ با $x$ رابطه‌ی عکس دارد، $v = k/x$، و $k$ یک مقدار ثابت است. مشتق $x$ نسبت به زمان برابر است با $v(t)$، بنابراین داریم:

$$\frac{k}{x} = \frac{dx}{dt}$$

یا

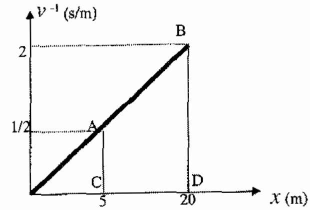
$$k\,dt = x\,dx$$

اکنون با انتگرال‌گیری از دو طرف در بازه‌ی زمانی معلوم $t = ۰$ تا $t = t$ در سمت چپ و بازه‌ی مکانی معلوم $x = ۵\,\mathrm{m}$ تا $x = ۲۰\,\mathrm{m}$ در سمت راست، جواب را به‌دست می‌آوریم:

$$kt = \frac{(۲۰)^۲}{۲} - \frac{۵^۲}{۲} = \frac{۳۷۵}{۲}\,\mathrm{m}^۲$$

در $t = ۰$، $v = ۲\,\mathrm{m/s}$ و $x = ۰/۵\,\mathrm{m}$ است. بنابراین، $k = ۱۰\,\mathrm{m}^۲/\mathrm{s}$ و $t = ۱۸/۷۵\,\mathrm{s}$ است.

**روش دوم:** یک روش حل غیرمحاسباتی زیبا و کوتاه برای این مسئله وجود دارد. منحنی $v^{-1}$ را برحسب $x$ در نظر بگیرید. مدت زمان مورد نظر برابر مساحت ذوزنقه‌ی ABCD است.




این مساحت و در نتیجه جواب مسئله برابر است با ۱۸٫۷۵ s.

**۳۲.** مبدأ دستگاه مختصات را نقطه‌ی K (نقطه‌ی شروع حرکت قایق) در نظر می‌گیریم، جهت مثبت محور $x$ را به طرف پایین رودخانه و جهت مثبت محور $y$ را در عرض رودخانه به طرف نقطه‌ی M در نظر می‌گیریم. بنابراین مختصات نقطه‌ی مقصد یعنی L برابر $(-۰٫۵, ۰٫۲۵)$ km است.

اگر جهت حرکت قایق به طرف بالای رودخانه با جهت مثبت محور $y$ها زاویه‌ی $\phi$ بسازد در این صورت آهنگ حرکت برابر است با:

$$\frac{dy}{dt} = u\cos\phi \qquad \text{و} \qquad \frac{dx}{dt} = v - u\sin\phi$$

$u = ۵\,\text{km/h}$ سرعت قایق در آب ساکن و $v = ۲\,\text{km/h}$ سرعت جریان رودخانه است.

اگر $T$ را زمان حرکت تا نقطه‌ی L در نظر بگیریم داریم:

$$y = (۵\cos\phi)T = a = ۰٫۲۵\,\text{km}$$

و

$$x = (۲ - ۵\sin\phi)T = -b = -۰٫۵\,\text{km}$$

مؤلفه‌های سرعت هر دو ثابت‌اند. با حل کردن این معادلات برای $T$ نتیجه می‌گیریم که:

$$T = \frac{۰٫۲۵}{۵}\cos\phi = -\frac{۰٫۵}{۲ - ۵\sin\phi}$$

و آن را به‌صورت جبری می‌نویسیم:

$$۱٫۲۵\sin\phi - ۲٫۵\cos\phi = ۰٫۵$$

این معادله‌ی مثلثاتی با استفاده از یک ترفند معیار حل می‌شود که شامل تقسیم کردن به عامل $(۵^{۳/۲}/۴)$ و وارد کردن زاویه‌ی کمکی $\beta$ با روابط $\cos\beta = (۱/۵)^{۱/۲}$ و

$\sin\beta = (۲/۵)^{۱/۲}$ است. بنابراین معادله‌ی فوق به‌صورت $۲/۵^{۳/۲} = (\phi - \beta)$ تبدیل می‌شود و رادیان $۰٫۱۷۹۹ \approx (\phi - \beta)$. چون رادیان $۱٫۱۰۷۱ \approx \beta$ داریم، رادیان $۱٫۲۸۷۰ \approx \phi$. ($\beta$ زاویه‌ای است که وتر KL با جهت مثبت محور $y$ می‌سازد، بنابراین $[\phi - \beta]$ زاویه‌ای است که قایق باید نسبت به جریان رودخانه پیش برود.) با جایگذاری این نتیجه در هر یک از معادلات داریم: دقیقه $۱۰٫۷ =$ ساعت $۰٫۱۷۹ = T$. قایق در آب ساکن، همان مسافت $۰٫۵۵۹$ km را در مدت $۰٫۱۱۲$ ساعت می‌پیماید.

**۳۳.** مبدأ در نقطه‌ی تعادل و جهت افزایش $x$ به سمت راست است. اگر دو جسم در مبدأ باشند، نیروی خالص وارد بر آن‌ها صفر است. اگر دو جسم در فاصله‌ی کوچک $x$ در طرف راست مبدأ باشند، نیرویی که فنر به سمت راست وارد می‌کند به اندازه‌ی $kx$ کم‌تر از مقدار آن در وضعیت تعادل است. در ضمن، نیرویی که فنر به سمت چپ وارد می‌کند به اندازه‌ی $۳kx$ کم‌تر از مقدار آن در وضعیت تعادل است. بنابراین، اگر دو جسم در نقطه‌ی $x$ باشند، مقدار نیروی خالص روی آن‌ها $-۴kx$ است. با استفاده از قانون دوم نیوتون برای مجموعه‌ی دو جسم داریم:

$$-۴kx = ۲ma_x$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم زیرین داریم:

$$k(x_۱ - x) - f = ma_x$$

$f$ اندازه‌ی نیروی اصطکاک است. با حل کردن معادله‌ی اول برای $ma_x$ و جایگذاری نتیجه‌ی آن در معادله‌ی دوم داریم:

$$k(x_۱ - x) - f = -۲kx$$

با حل این معادله برای $f$ داریم

$$f = k(x_۱ + x)$$

مقدار بیشینه‌ی $x$ برابر دامنه‌ی $A$ و مقدار بیشینه‌ی $f$ برابر $\mu_s mg$ است. به این ترتیب $\mu_s mg = k(x_۱ + A_{\text{بیشینه}})$. با حل کردن معادله برای $A_{\text{بیشینه}}$ داریم:

$$A_{\text{بیشینه}} = \frac{\mu_s mg}{k} - x_۱$$

**۳۴.** **روش اول:** وقتی جسم را به اندازه‌ی $x$ جابه‌جا می‌کنیم، فنر به اندازه‌ی $(۱/۲)x$ کشیده می‌شود و نیرویی برابر $(۱/۲)kx$ به آن وارد می‌شود. نیرویی که به جسم وارد می‌شود برابر

$$F = \frac{۱}{۴}kx$$

است. از رابطه‌ی معیار دوره‌ی تناوب دستگاه جسم و فنر داریم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{۱}{۴}k}} = ۴\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**روش دوم:** اگر در یک لحظه‌ی دلخواه، قرقره به اندازه‌ی فاصله‌ی $y$ در راستای قائم از زیر فنر در حالت عادی جابه‌جا شود جسم به اندازه‌ی فاصله‌ی $۲y$ از زیر مکان فنر در حالت عادی جابه‌جا می‌شود. در نتیجه، انرژی جنبشی جسم برابر است با:

$$K = \frac{۱}{۲}m\left(۲\frac{dy}{dt}\right)^۲$$

و انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با:

$$U = \frac{۱}{۲}ky^۲ - mg(۲y)$$

جابه‌جایی قرقره از وضعیت تعادل $(y_۰)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$-\frac{dU}{dy}\bigg|_{y_۰} = ۰ \Rightarrow ky_۰ = ۲mg \Rightarrow U = \frac{۱}{۲}k(y-y_۰)^۲ \equiv \frac{۱}{۲}kx^۲$$

با وارد کردن یک ثابت غیرمهم، و توجه به این نکته که $x$ مقدار کشیدگی فنر از حالت تعادل است می‌توانیم بنویسیم:

$$K = \frac{۱}{۲}(۴m)\left(\frac{dx}{dt}\right)^۲$$

بنابراین جرم مؤثر دستگاه برابر $۴m$ و ثابت مؤثر فنر $k$ است. در نتیجه

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = ۲\pi\sqrt{\frac{۴m}{k}} \Rightarrow T = ۴\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

**۳۵.** وقتی آونگ‌ها به‌طور قائم آویزان‌اند، نیروی کشش نوار لاستیکی صفر است. اگر هر یک از گلوله‌ها به اندازه‌ی $x$ جابه‌جا شوند، نوار لاستیکی به اندازه‌ی $۲x$ کشیده می‌شود، در نتیجه نیروی کشش آن برابر $۲kx$ است.

نیروی گرانش و کشش فنر با هم اثر می‌کنند و نیروی بازگرداننده‌ی اضافه‌ی $mgx/L$ را روی هر گلوله ایجاد می‌کنند. پس نیروی بازگرداننده‌ی کل روی هر گلوله هنگامی که گلوله‌ها از

مکان تعادل خود به طرف بیرون حرکت می‌کنند، برابر است با: $-(2k+mg/L)x$ و هنگامی که به طرف داخل حرکت می‌کنند برابر است با $-(mg/L)x$ و دوره‌ی حرکت هماهنگ ساده $T = 2\pi/\omega$ است. بنابراین دوره در اولین نیم‌چرخه (به طرف خارج) برابر است با:

$$P_1 = 2\pi \left[\frac{m}{\left(\frac{2k+mg}{L}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{L}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

و در نیم‌چرخه‌ی دوم (به طرف داخل) برابر است با:

$$P_2 = 2\pi \left[\frac{m}{\left(\frac{mg}{L}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} = 2\pi \left(\frac{g}{L}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

برای به‌دست آوردن دوره‌ی حرکت، دو نیم‌چرخه را با هم جمع می‌کنیم:

$$T = \frac{P_1 + P_2}{2} = \pi \left[\left(\frac{2k}{m} + \frac{g}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{g}{L}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

۳۶. مورچه‌ها همواره روی یک چندضلعی دوار مشابه نمونه‌ی اصلی و هم‌مرکز با آن قرار دارند. بنابراین، بردار سرعت یک مورچه زاویه‌ی ثابت $\beta = 90^\circ - (\alpha/2)$ با بردار شعاعی داخلی می‌سازد، که $\alpha = 360^\circ/n$، زاویه‌ی مرکزی روبه‌روی ضلع اولیه‌ی $d$ است. در نتیجه، سرعت شعاعی (داخلی) ثابت مورچه برابر است با: $v\sin(\alpha/2)$. از طرف دیگر فاصله‌ی شعاعی اولیه‌ی مورچه برابر است با:

$$\frac{d}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

بنابراین، مدت زمانی که طول می‌کشد تا یک مورچه به مرکز برسد برابر است با:

$$\frac{d}{2v\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad \left(\alpha = \frac{360^\circ}{n}\right)$$

۳۷. با فرض برخورد کشسان کامل، مؤلفه‌ی افقی سرعت برخورد وارونه می‌شود. توپ دقیقاً در همان فاصله‌ای در جلوی دیوار فرود می‌آید که از پشت دیوار پرتاب شده بود. فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب تا دیوار را $D$ در نظر می‌گیریم. چون توپ در فاصله‌ی $2D$ در جلوی دیوار به زمین برخورد می‌کند، باید در فاصله‌ی $2D$ در پشت دیوار به زمین برخورد کرده باشد، بنابراین برد افقی توپ $3D$ است.

اکنون حرکت توپ به سمت دیوار را بررسی می‌کنیم. فاصله‌ی نقطه‌ی پرتاب تا دیوار $D - ۲۰\ \mathrm{m}$ است. نقطه‌ی فرود در فاصله‌ی $۲D - ۲۰\ \mathrm{m}$ از دیوار قرار دارد که برد $۳D - ۴۰\ \mathrm{m}$ را به‌وجود می‌آورد. این وضعیت غیرممکن است بنابراین نقطه‌ی پرتاب باید $۲۰\ \mathrm{m}$ دیگر از دیوار دورتر شود. چون توپ در فاصله‌ی $D$ از نقطه‌ی پرتاب به سطح زمین برخورد می‌کند، فاصله‌ی نقطه‌ی فرود تا دیوار برابر $۲۰\ \mathrm{m}$ یا $۲D + ۲۰\ \mathrm{m}$ است. برد توپ برابر است با: $D + ۴۰\ \mathrm{m}$ یا $۳D + ۴۰\ \mathrm{m}$. چون برد $۳D$ است، فقط وضعیت اول قابل قبول است و $D = ۲۰\ \mathrm{m}$ خواهد بود.

در نهایت اگر توپ به آن طرف دیوار پرتاب شود، در فاصله‌ی $۳D = ۶۰\ \mathrm{m}$ دورتر از نقطه‌ی پرتاب به زمین فرود خواهد آمد.

۳۸. اگر دستگاه مختصات را به گونه‌ای بچرخانیم که سطح شیب‌دار بر محور افقی آن منطبق باشد، شتاب دو مؤلفه خواهد داشت: یکی به طرف پایین $a_{y'} = -g\cos\theta$ و یکی افقی $a_{x'} = g\sin\theta$. در این دستگاه، سرعت اولیه مؤلفه‌های زیر را دارد:

$$v_x = v_\circ \sin\theta \qquad \text{و} \qquad v_y = v_\circ \cos\theta$$

زمان هر پرش با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$t_b = \frac{۲v_y}{-a_y} = \frac{۲v_\circ}{g}$$

جابه‌جایی افقی با رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta x = v_x t + ۰{,}۵ a_x t^۲$$

از این دو معادله به‌دست می‌آوریم:

$$d_{۱۲} = v_\circ \sin\theta \left(\frac{۲v_\circ}{g}\right) + ۰{,}۵ g\sin\theta \left(\frac{۲v_\circ}{g}\right)^۲ = \frac{۴v_\circ^۲ \sin\theta}{g}$$

و

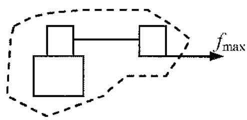
$$d_{۱۳} = v_\circ \sin\theta \left(\frac{۴v_\circ}{g}\right) + ۰{,}۵ g\sin\theta \left(\frac{۴v_\circ}{g}\right)^۲ = \frac{۱۲v_\circ^۲ \sin\theta}{g}$$

چون $d_{۲۳} = d_{۱۳} - d_{۱۲}$ در نتیجه

$$\frac{d_{۱۲}}{d_{۲۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۳۹. نیروی اصطکاک بیشینه از ضرب کردن ضریب اصطکاک ایستایی در نیروی عمودی تکیه‌گاه بین دو جسم به‌دست می‌آید. نیروی عمودی تکیه‌گاه، در این حالت، با وزن جسم بالایی برابر است، پس $f_{\text{بیشینه}} = \mu_s mg$. نیروی اصطکاک کجا بیش‌تر است؟ نقش اصطکاک بین دو جسم پشتی، شتاب دادن به جسم زیرین $(M)$ است. از طرف دیگر، نقش اصطکاک بین دو جسم جلویی شتاب دادن به جسم بالایی و همه اجسام پشت آن است $(m+m+M)$ (چون همه‌ی اجسام به شکل واحد حرکت می‌کنند، می‌توان مجموعه را به‌صورت یک جسم در نظر گرفت). واضح است که، اصطکاک در ابتدا بین دو جسم جلویی به بیش‌ترین مقدار خود می‌رسد. بر اساس مقدار اصطکاک بیشینه و جرمی که این نیرو به آن شتاب می‌دهد، می‌توان شتاب بیشینه‌ی این اجسام را مشخص کرد:

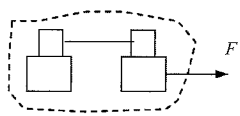
$$a_{\text{بیشینه}} = \frac{\sum F_{\text{بیشینه}}}{m_{\text{کل}}} = \frac{f_{\text{بیشینه}}}{(m+m+M)} = \frac{\mu_s mg}{2m+M}$$




اکنون اگر کل مجموعه را یک واحد در نظر بگیریم، $F$ موجب شتاب گرفتن همه‌ی جرم‌ها $(m+m+M+M)$ می‌شود. بنابراین:

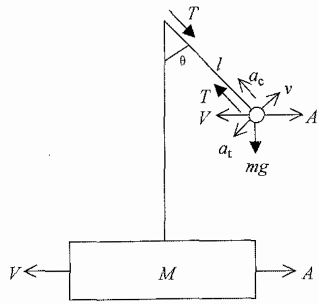
$$F = \sum F_{\text{بیشینه}} = m_{\text{کل}}\, a_{\text{بیشینه}} = (m+m+M)\frac{\mu_s mg}{2m+M}$$

$$= \boxed{\frac{2\mu_s mg(m+M)}{2m+M}}$$




۴۰. اگر زاویه‌ای را که ریسمان با راستای قائم در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌سازد $\theta$ در نظر بگیریم، به این ترتیب گلوله‌ی آونگ حرکت را در زاویه‌ی $90^\circ$ آغاز و تا زاویه‌ی $-90^\circ$ نوسان می‌کند، و سپس هر قسمت از دستگاه دوباره به حالت سکون درمی‌آید و دوباره تا بی‌نهایت به عقب و جلو نوسان می‌کند. باید ثابت کنیم نیروی کشش بیشینه در زاویه‌ی $\theta = 0$ رخ می‌دهد که نخ در راستای قائم قرار دارد. باید عبارتی برای کشش نخ در زاویه‌ی دلخواه به‌دست آوریم و سپس آن را بیشینه کنیم.

ما $1/4$ دوره‌ی نوسان را در نظر می‌گیریم که گلوله‌ی آونگ با کاهش سرعت $(v)$ نسبت به نقطه‌ی آویز به طرف راست و بالا نوسان می‌کند و بلوک با سرعت رو به کاهش $V$ به سمت چپ می‌رود. به این ترتیب شتاب آن $(A)$ در جهت راست خواهد بود. نمودار جسم آزاد گلوله‌ی آونگ و پایه به همراه نقطه‌ی آویز را در نظر بگیرید.




دو نیروی وارد بر گلوله‌ی آونگ عبارت‌اند از نیروی کشش $(T)$ و وزن $(mg)$. شتاب گلوله نسبت به زمین برابر با جمع برداری شتاب پایه‌ی آونگ $(A)$ و شتاب گلوله‌ی آونگ نسبت به پایه $(a)$ است. $a$ را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم: شتاب مرکزگرا، $a_c = v^۲/l$ و شتاب مماسی، $a_t$ و جهت آن‌ها در شکل نشان داده شده است. بنابه قانون دوم نیوتون برای گلوله‌ی آونگ در جهت شعاعی داریم:

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^۲}{l} - mA\sin\theta \qquad (۱)$$

و برای پایه‌ی آونگ در جهت افقی داریم:

$$T\sin\theta = MA \qquad (۲)$$

معادله‌ی (۲) را برای $A$ حل و آن در معادله‌ی (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$T\left(۱ + \frac{m}{M}\sin^۲\theta\right) = mg\cos\theta + m\frac{v^۲}{l} \qquad (۳)$$

با استفاده از قوانین پایستگی سرعت $v$ را به‌دست می‌آوریم، با توجه به این‌که سرعت گلوله‌ی آونگ نسبت به زمین برابر با جمع برداری $v$ و $V$ است.

فرض کنید سطح مرجع انرژی پتانسیل گرانشی در مکان اولیه‌ی گلوله انتخاب شود به‌صورتی که انرژی کل دستگاه $(E)$ صفر باشد. از طرف دیگر انرژی کل باید برابر با جمع انرژی جنبشی و پتانسیل دستگاه در همان لحظه باشد،

$$\frac{۱}{۲}m\left[(v\cos\theta - V)^۲ + (v\sin\theta)^۲\right] + \frac{۱}{۲}MV^۲ = mgl\cos\theta = ۰ \qquad (۴)$$

در ضمن پایستگی تکانه‌ی خطی در راستای افقی ایجاب می‌کند که:

$$m(v\cos\theta - V) = MV \qquad (۵)$$

اگر معادله‌ی (۵) را برای $V$ حل کنیم و آن را در معادله‌ی (۴) جایگذاری کنیم داریم:

$$m\frac{v^{۲}}{l} = ۲mg\cos\theta \frac{M+m}{M+m\sin^{۲}\theta} \tag{۶}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۶) در (۳) عبارت مورد نظر برای $T$ به‌صورت تابعی از $\theta$ به‌دست می‌آید

$$\frac{T}{mg} = \frac{۳\cos\theta + \frac{m}{M}(۳\cos\theta - \cos^{۳}\theta)}{\left(۱+\frac{m}{M}\sin^{۲}\theta\right)^{۲}} \tag{۷}$$

برای بیشینه کردن رابطه‌ی فوق باید صورت کسر تا حد امکان بزرگ و مخرج کسر تا حد امکان کوچک باشد. هر دو حالت زمانی صادق است که $\theta = ۰^\circ$ باشد. بنابراین،

$$\frac{T_{\text{بیشینه}}}{mg} = ۳ + ۲\frac{m}{M} \tag{۸}$$

بررسی هر دو حالت حدی این عبارت جالب خواهد بود. اگر $M/m \to \infty$ آنگاه $T_{\text{بیشینه}} = ۳mg$، که کشش ریسمان در نقطه‌ی زیرین نوسان گلوله (مربوط به شتاب مرکزگرای $۲g$) هنگام نوسان در یک کمان نیم‌دایره است، در انتهای پایه‌ی آونگ متصل به زمین است (زمین به‌صورت یک جسم خیلی سنگین اثر می‌کند). از طرف دیگر، اگر $M/m \to ۰$ از آن‌جا که نیروی خارجی افقی روی دستگاه وجود ندارد، مرکز جرم نمی‌تواند به یک طرف حرکت کند. اگر $M = ۰$ گلوله‌ی آونگ به‌طور افقی نسبت به زمین حرکت نمی‌کند ولی آزادانه به طرف پایین سقوط می‌کند و بلوک بدون جرم به نحوی می‌لغزد که ریسمان کاملاً کشیده می‌ماند. نیروی کشش ریسمان صفر است (چون نیروی افقی خالصی به جسم بی‌جرم وارد نمی‌شود.) تا این‌که زاویه به صفر می‌رسد و در آن نقطه نیروی کشش به‌طور ناگهانی (ولی یکنواخت) منحرف می‌شود تا ضربه‌ی لازم برای وارونه کردن حرکت عمود گلوله‌ی آونگ ایجاد شود.

**نکته:** اگر فرض کنیم نیروی کشش بیشینه مربوط به لحظه‌ای است که گلوله‌ی آونگ از پایین‌ترین نقطه عبور می‌کند، در این صورت روش حل کمی متفاوت خواهد بود. نیروی کشش بیشینه وقتی ایجاد می‌شود که ریسمان در حالت قائم باشد. در این وضعیت (که آن را حالت اول می‌نامیم)، هر دو نیروی کشش ریسمان ($T$) و نیروی وزن ($mg$) عمودی‌اند، بنابراین (مطابق با قانون دوم نیوتون)

$$T - mg = ma_{\text{my}}$$

$a_{\text{my}}$ شتاب عمودی جرم $m$ در آن لحظه است. این شتاب را می‌توان به‌صورت زیر نوشت: $a_{\text{my}} = v_{\text{rel}}^{۲}/l$ (شتاب مرکزگرا) که در آن $v_{\text{rel}}$ سرعت جرم $m$ نسبت به نقطه‌ی اتصال است.

پس داریم:

$$T = m\left(g + \frac{v_{\text{rel}}^{۲}}{l}\right)$$

با استفاده از پایستگی انرژی $v_{\text{rel}}$ را محاسبه می‌کنیم. انرژی دستگاه در حالت اول برابر است با: $E_{\text{i}} = mgl$ (سطح مرجع انرژی پتانسیل گرانشی را در مکان نهایی قرار می‌دهیم).

انرژی کل در مکان نهایی برابر است با:

$$E_{\text{f}} = \frac{۱}{۲}mv_m^{۲} + \frac{۱}{۲}Mv_M^{۲}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}mv_m^{۲} + \frac{۱}{۲}Mv_M^{۲} = mgl$$

توجه کنید که در مکان نهایی هر دو جرم $m$ و $M$ در حال حرکت‌اند، چون نیروی برایند روی دستگاه $(m+M)$ صفر است (پایستگی تکانه‌ی خطی)، به همین دلیل:

$$m\vec{v}_m + M\vec{v}_M = \vec{۰} \Rightarrow \vec{v}_M = -\frac{m}{M}\vec{v}_m \Rightarrow v_M^{۲} = \frac{m^{۲}}{M^{۲}}v_m^{۲}$$

و داریم:

$$\frac{۱}{۲}mv_m^{۲} + \frac{۱}{۲}M\frac{m^{۲}}{M^{۲}}v_m^{۲} = mgl \Rightarrow \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{m}{M}\right)v_m^{۲} = gl \Rightarrow v_m^{۲} = \frac{۲gl}{۱ + \frac{m}{M}}$$

اکنون بنابه رابطه‌ی:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v}_m - \vec{v}_M = \vec{v}_m + \frac{m}{M}\vec{v}_m = \left(۱ + \frac{m}{M}\right)\vec{v}_m$$

داریم:

$$v_{\text{rel}}^{۲} = \left(۱ + \frac{m}{M}\right)^{۲} v_m^{۲} = \left(۱ + \frac{m}{M}\right)(۲gl) \Rightarrow \frac{v_{\text{rel}}^{۲}}{l} = ۲g\left(۱ + \frac{m}{M}\right)$$

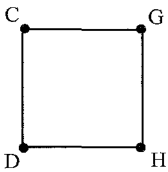
با قرار دادن این رابطه در عبارت $T$، داریم:

$$T = m\left(g + ۲g + ۲g\frac{m}{M}\right) = mg\left(۳ + ۲\frac{m}{M}\right)$$

نیروی کشش بیشینه‌ی ریسمان برابر است با:

$$mg\left(۳+۲\frac{m}{M}\right)$$

توجه کنید که اگر $m \gg M$ در نتیجه $T \approx ۳mg$ که نتیجه‌ی معیار (برای جرم ثابت $M$) است. اگر $M = m$ در نتیجه $T = ۵mg$.



۴۱. چون نقاط A و D سرعت یکسانی دارند و مکعب صلب است، هر دو نقطه از مکعب که یک خط موازی با AD از آن‌ها می‌گذرد هم باید همان سرعت را داشته باشند. بنابراین کافی است فقط وجه CDHG را در نظر بگیریم.

دستگاه مرجعی در نظر می‌گیریم که در آن D ساکن است، پس این مربع فقط می‌تواند حول نقطه‌ی D، هم‌جهت یا خلاف جهت عقربه‌های ساعت بچرخد. سرعت نقطه‌ی H نسبت به D یا به طرف بالا یا به طرف پایین است. چون سرعت واقعی H برابر $۲v$ است، سرعت H نسبت به D یا $۳v$ (بالاسو) یا $v$ (پایین‌سو) است. دو حالت را به‌طور جداگانه در نظر می‌گیریم:

**حالت ۱:** سرعت H نسبت به D برابر $۳v$ (به طرف بالا) است. $\hat{\mathrm{i}}$ و $\hat{\mathrm{j}}$ به ترتیب معرف بردارهای یکه در جهت افقی و عمودی و $s$ طول ضلع مربع است (برای مثال، $\overrightarrow{\mathrm{H}} = s\hat{\mathrm{i}}$). سرعت در H نسبت به D برابر $۳v\hat{\mathrm{j}}$ است و چون مربع حول D می‌چرخد، سرعت در نقطه‌ی $x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}}$ برابر است با

$$-۳v\left(\frac{y}{s}\right)\hat{\mathrm{i}} + ۳v\left(\frac{x}{s}\right)\hat{\mathrm{j}}$$

و سرعت واقعی این نقطه برابر است با:

$$-۳v\left(\frac{y}{s}\right)\hat{\mathrm{i}} + ۳v\left(\frac{x}{s}\right)\hat{\mathrm{j}} - v\hat{\mathrm{j}}$$

اندازه‌ی این سرعت برابر است با:

$$\sqrt{\left(-۳v\frac{y}{s}\right)^۲ + (۳v\frac{x}{s} - v)^۲} = v\sqrt{۹\left(\frac{y}{s}\right)^۲ + \left(۳\frac{x}{s} - ۱\right)^۲}$$

با توجه به این‌که $x, y \in [۰, s]$، رابطه‌ی فوق زمانی بیشینه می‌شود که: $x = y = s$، یعنی در نقطه‌ی G. سرعت در این نقطه برابر $\sqrt{۱۳}\,v$ است.

**حالت ۲:** سرعت نقطه‌ی H نسبت به D برابر $v$ (پایین‌سو) است.

سرعت نقطه‌ی $x\hat{\mathrm{i}}+y\hat{\mathrm{j}}$ برابر است با:

$$v\left(\frac{y}{s}\right)\hat{\mathrm{i}}-v\left(\frac{x}{s}\right)\hat{\mathrm{j}}$$

و سرعت واقعی آن برابر است با:

$$v\left(\frac{y}{s}\right)\hat{\mathrm{i}}-v\left(\frac{x}{s}\right)\hat{\mathrm{j}}-v\hat{\mathrm{j}}$$

اندازه‌ی این سرعت برابر است با:

$$\sqrt{\left(v\frac{y}{s}\right)^{۲}+(-v\frac{x}{s}-v)^{۲}}=v\sqrt{\left(\frac{y}{s}\right)^{۲}+\left(\frac{x}{s}+۱\right)^{۲}}$$

چون $x,y\in[۰,s]$، رابطه‌ی بالا هنگامی بیشینه می‌شود که $x=y=s$ باشد، یعنی در نقطه‌ی G. سرعت در این نقطه برابر $\sqrt{۵}\,v$ است. نقاطی که بیش‌ترین سرعت را دارند در امتداد ضلع FG واقع شده‌اند.

**۴۲.** چون اسکیت‌بورد و جسم در حال سقوط، هر دو با شتاب یکسان حرکت می‌کنند، می‌توانیم آن‌ها را یک جسم واحد در نظر بگیریم. مطابق شکل ۲ در صورت مسئله، در هر سه حالت نیروها موازی با شتاب‌اند. می‌توانیم قانون دوم نیوتون را برای هر حالت به‌کار ببریم:

$$\text{حالت ۱}:\quad Mg=(M+m)a_{۱} \qquad (۱)$$

$$\text{حالت ۲}:\quad Mg-f=(M+m)a_{۲} \qquad (۲)$$

$$\text{حالت ۳}:\quad Mg-۲f=(M+m)a_{۳} \qquad (۳)$$

اگر رابطه‌ی (۲) را برای $f$ حل کنیم و سپس آن را در رابطه‌ی (۳) جایگذاری کنیم، داریم

$$Mg-۲(Mg-(M+m)a_{۲})=(M+m)a_{۳}$$

یا

$$Mg=(M+m)(۲a_{۲}-a_{۳}) \qquad (۴)$$

با جایگذاری $Mg$ از رابطه‌ی (۱) در رابطه‌ی (۴) داریم:

$$a_{۱}=(۲a_{۲}-a_{۳}) \qquad (۵)$$

بنابه صورت مسئله، شتاب حالت دوم $n$ مرتبه کم‌تر از حالت اول است، بنابراین $a_{۲}=a_{۱}/n$ و در نتیجه

$$\frac{a_{۱}}{a_{۳}}=\frac{۲}{۲-n}$$

واضح است که در رابطه‌ی فوق $n < ۲$ است. اگر $n \geq ۲$، نیروی اصطکاک آن‌قدر بزرگ است که مانع از حرکت چرخ‌دستی می‌شود. به‌جای نوشتن نسبت $a_۱$ به $a_۳$، بهتر است نسبت $a_۳$ به $a_۱$ را به‌دست آوریم:

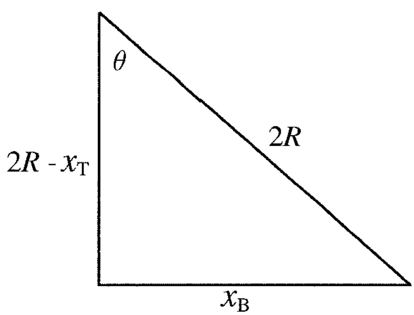
$$\frac{a_۳}{a_۱} = \begin{cases} \frac{۲-n}{n} & ۱ \leq n < ۲ \\ ۰ & n \geq ۲ \end{cases}$$

۴۳. لحظه‌ای را در نظر بگیرید که مرکز استوانه‌ی بالایی به اندازه‌ی $x_{\mathrm{T}}$ به طرف پایین و مرکز استوانه‌ی پایینی به اندازه‌ی $x_{\mathrm{B}}$ به طرف راست حرکت کرده است. در این لحظه، استوانه‌ها به‌ترتیب با سرعت‌های $v_{\mathrm{T}}$ و $v_{\mathrm{B}}$ در حال حرکت‌اند. مطابق شکل ۱ داریم:

$$x_{\mathrm{T}} = ۲R(۱ - \cos\theta)$$

بنابه پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{m(v_{\mathrm{B}}^۲ + v_{\mathrm{T}}^۲)}{۲} = mgx_{\mathrm{T}} = ۲mgR(۱ - \cos\theta)$$




شکل ۱

از شکل ۱ داریم:

$$x_{\mathrm{B}}^۲ + (۲R - x_{\mathrm{T}})^۲ = (۲R)^۲$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان به‌دست می‌آوریم

$$x_{\mathrm{B}}v_{\mathrm{B}} - (۲R - x_{\mathrm{T}})v_{\mathrm{T}}$$

در نتیجه:

$$v_{\mathrm{T}} = \frac{v_{\mathrm{B}}x_{\mathrm{B}}}{(۲R - x_{\mathrm{T}})} = v_{\mathrm{B}}\tan\theta$$

با حذف $v_{\mathrm{T}}$ از معادله‌ی پایستگی انرژی داریم:

$$v_{\mathrm{B}}^{۲} = \frac{۴gR(۱-\cos\theta)}{۱+\tan^{۲}\theta}$$

اگر از رابطه‌ی فوق نسبت به $\theta$ مشتق بگیریم و آن را مساوی صفر قرار دهیم:

$$\cos\theta_m = \frac{۲}{۳}$$

در زاویه‌ی $\theta_m$، مقدار $v_{\mathrm{B}}$ بیشینه است. در این نقطه، سرعت استوانه‌ی زیرین برابر است با:

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{\frac{۱۶gR}{۲۷}}$$

از دیدگاه ریاضی، سرعت بعد از $\theta_m$ کاهش می‌یابد. در این صورت شتاب و در نتیجه نیروی افقی برای زاویه‌های بزرگ‌تر از $\theta_m$ باید در جهت چپ (منفی) باشد. ولی نیروی تماسی وارد بر استوانه‌ی زیرین از طرف استوانه‌ی بالایی نمی‌تواند به طرف چپ باشد. بنابراین استوانه‌ی زیرین تماس خود را با استوانه‌ی بالایی از دست می‌دهد و با سرعت بیشینه‌ی $\sqrt{(۱۶gR/۲۷)}$ حرکت می‌کند.

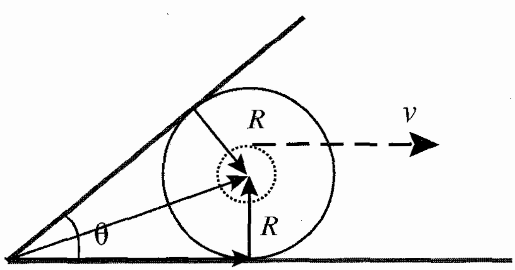
۴۴. اگر یویو فاقد لغزش باشد، باید سرعت نقطه‌ی اتصال بین یویو و زمین برابر صفر باشد. اگر یویو با سرعت زاویه‌ای $\omega_{\mathrm{y}}$ بغلتد، قسمت فوقانی آن باید سرعتی برابر $\omega_{\mathrm{y}}(۲R)$ و مرکز یویو باید سرعتی برابر $\omega_{\mathrm{y}}R$ داشته باشد.

هر نقطه‌ای در قسمت فوقانی به فاصله‌ی $y$ از مرکز یویو، سرعت $\omega_{\mathrm{y}}(R+y)$ دارد. ما به نتیجه‌ای علاقه داریم که در آن نخ باز می‌شود.

چون این نقطه در قسمت فوقانی در فاصله‌ی $r$ از مرکز قرار گرفته است، سرعتش برابر $v=\omega_{\mathrm{y}}(R+r)$ است. بنابراین سرعت مرکز یویو برحسب سرعت نخ برابر است با:

$$\omega_{\mathrm{y}}R = \left(\frac{v}{R+r}\right)R = v\left(\frac{R}{R+r}\right)$$

بردار مکان مرکز یویو در شکل زیر نشان داده شده است.



اگر مبدأ مختصات را رأس در نظر بگیریم، بردار مکان مرکز یویو را می‌توان به مؤلفه‌ی افقی $x$ و مؤلفه‌ی عمودی $y = R$ تجزیه کرد. سرعت مرکز نسبت به زمین برابر $v[R/(R+r)]$ است و سرعت افقی مرکز برابر است با $dx/dt$ (مرکز در راستای قائم حرکت نمی‌کند بنابراین $dy/dt = ۰$).

از روی شکل می‌توان رابطه‌ی زیر را به‌دست آورد:

$$\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right) = \left(\frac{R}{x}\right)$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان داریم:

$$\sec^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)\cdot\left(\frac{\omega}{۲}\right) = -\frac{R}{x^۲}\frac{dx}{dt} = -\frac{R}{\left(\frac{R}{\tan\left(\frac{\theta}{۲}\right)}\right)^۲}\left(v\frac{R}{R+r}\right)$$

$$\sec^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)\cdot\left(\frac{\omega}{۲}\right) = -\tan^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)\left(\frac{v}{R+r}\right)$$

با حل معادله‌ی فوق برای $\omega$، سرعت زاویه‌ای میله به‌دست می‌آید:

$$\omega = -۲\frac{v}{R+r}\frac{\tan^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)}{\sec^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)} = -۲\frac{v}{R+r}\sin^۲\left(\frac{\theta}{۲}\right)$$

از آن‌جا که میله خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌چرخد، سرعت زاویه‌ای منفی است.

**۴۵.** برای این‌که جرم $m$ ساکن بماند، باید نیروی بالاسوی اصطکاک جنبشی با مؤلفه‌ی پایین‌سوی نیروی وزن (در امتداد سطح) خنثی شود.

$$F_{\text{k}} = mg\sin\theta$$

بنابراین نیروی خالص مؤثر بر $M$ (جهت پایین سطح شیب‌دار را مثبت می‌گیریم.) برابر است با:

$$F_{\text{خالص}} = Mg\sin\theta + mg\sin\theta = Ma$$

در نتیجه

$$a = \frac{g\sin\theta(M+m)}{M}$$

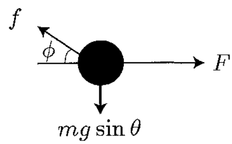
با استفاده از $v_{\text{f}} = v/۲$ و $v_{\text{f}}^۲ = v_۰^۲ + ۲ad$ داریم:

$$\text{فاصله} = \frac{۳v_۰^۲ M}{۸g\sin\theta(M+m)}$$

۴۶. چهار نیرو بر جسم وارد می‌شود: نیروی عمودی تکیه‌گاه ($N$) در راستای قائم به طرف بیرون سطح، نیروی گرانش ($mg$) در راستای قائم و پایین‌سو، نیروی $F$ در جهت حرکت، و نیروی اصطکاک ایستایی ($f$) پیش از شروع حرکت جسم. زمانی که جسم در آستانه‌ی لغزیدن روی سطح قرار دارد، باید مقدار نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه باشد، یعنی $f = \mu_{\rm s} N$. برایند مؤلفه‌ی نیروها در راستای عمود بر سطح برابر صفر است بنابراین:

$$N = mg\cos\theta \Rightarrow f = \mu_{\rm s} mg\cos\theta \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، مؤلفه‌ی نیروها در راستای موازی با سطح شیب‌دار مطابق نمودار زیر است:




توجه کنید که نیروی اصطکاک باید با راستای $F$ زاویه‌ی $\phi$ بسازد زیرا نیروی اصطکاک در ابتدا دو نیروی دیگر را مطابق شکل خنثی می‌کند.

$$F = f\cos\phi \qquad (۲)$$

کم‌ترین مقدار نیروی $F$ که موجب شروع لغزش جسم شود عبارت است از:

$$f\sin\phi = mg\sin\theta \Rightarrow f = \frac{mg\sin\theta}{\sin\phi} \qquad (۳)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۳) در (۲) و استفاده از $\cos\phi = \sqrt{۱ - \sin^۲\phi}$ داریم:

$$F = mg\sin\theta\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\phi} - ۱} \qquad (۴)$$

همچنین با جایگذاری معادله‌ی (۳) در (۱) داریم:

$$\frac{۱}{\sin\phi} = \frac{\mu_{\rm s}\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (۵)$$

حال معادله‌ی (۵) را در (۴) قرار می‌دهیم و داریم:

$$F = mg\sqrt{\mu_{\rm s}^۲\cos^۲\theta - \sin^۲\theta} \qquad (۶)$$

در این حالت $\mu_{\rm s} > \tan\theta$ است، در غیر این صورت شیء حتی در غیاب نیروی $F$ به طرف پایین خواهد لغزید. توجه کنید که اگر $\mu_k < \mu_{\rm s}$ شیء پس از شروع حرکت شتاب می‌گیرد.

۴۷. چون جرم فنر در مقایسه با جرم جسم $(m)$ کوچک است، نیروی کشش تقریباً ثابت است: $T = mg$. بنابراین کشیدگی فنر برابر $L = mg/k$ و طول کل آن برابر $۲L = ۲mg/k$ است. پس چگالی خطی فنر کشیده‌شده برابر است با:

$$\mu = \frac{m}{۲L} = \frac{k}{۲g}$$

سرعت امواج روی فنر برابر

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = g\sqrt{\frac{۲m}{k}}$$

و زمان حرکت تپ در طول فنر برابر است با:

$$t = \frac{۲L}{v} = \sqrt{\frac{۲m}{k}}$$

۴۸. **روش اول:** فرض کنیم سطح زمین مسطح، مقاومت هوا ناچیز و دو جسم (پرتابه) بدون چرخش حرکت می‌کنند.

برد یک پرتابه $(d)$، با سرعت پرتاب $V$، زاویه‌ی پرتاب $(\theta)$ و شتاب گرانش $(g)$ به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$d = \frac{۲\cos\theta\sin\theta V^{۲}}{g} = \frac{V^{۲}\sin ۲\theta}{g}$$

رابطه‌ی فوق از حرکت دوبعدی پرتابه نتیجه‌گیری می‌شود. از این رابطه می‌توان نتیجه‌گیری کرد که برد پرتابه برای دو زاویه‌ی پرتاب که متمم هم‌اند، یکسان است. به این معنی که زاویه‌ی پرتاب سنگ A، $(\theta)$ متمم زاویه‌ی پرتاب سنگ B است. در نتیجه می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin\varphi = \cos\theta \quad \text{و} \quad \cos\varphi = \sin\theta$$

برای یافتن فاصله‌ی کمینه میان این دو سنگ که همزمان پرتاب شده‌اند، به تابع زمانی فاصله‌ی جدایی آن‌ها نیاز داریم. اگر در ابتدا سنگ A را در مبدأ مختصات و سنگ B را در مکان $(d, ۰)$ قرار دهیم، بردار مکانی سنگ A نسبت به سنگ B به‌صورت تابعی از زمان به شکل زیر خواهد بود:

$$\overrightarrow{r}_{\mathrm{A/B}} = [V_t(\cos\theta + \sin\theta) - d]\hat{i} + [Vt(\sin\theta - \cos\theta)]\hat{j}$$

مربع طول این بردار برابر است با:

$$\overrightarrow{r}_{A/B}\cdot\overrightarrow{r}_{A/B}=R^{۲}=d^{۲}+۲(V_t)^{۲}-۲dV_t(\cos\theta+\sin\theta)$$

برای کمینه کردن این طول، مشتق زمانی می‌گیریم و نتیجه را مساوی صفر قرار می‌دهیم، سپس زمان را به‌دست می‌آوریم و از آن برای محاسبه‌ی فاصله‌ی کمینه استفاده می‌کنیم.

$$\frac{d}{dt}R^{۲}=۴V_t^{۲}-۲Vd(\cos\theta+\sin\theta)=۰$$

$$t_{\min}=\frac{d(\cos\theta+\sin\theta)}{۲V}$$

$$R^{۲}(t_{\min})=d^{۲}+۲V^{۲}\frac{d^{۲}(\cos\theta+\sin\theta)^{۲}}{۴V^{۲}}-۲dV\frac{d(\cos\theta+\sin\theta)}{۲V}(\cos\theta+\sin\theta)$$

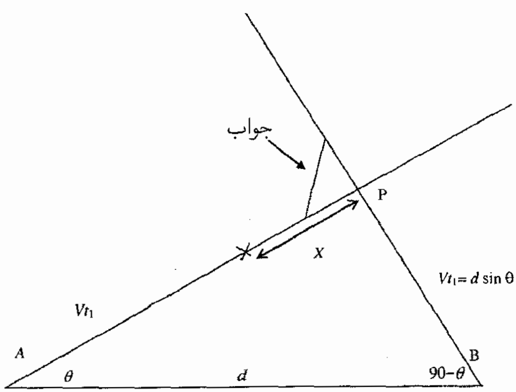
$$=\frac{d^{۲}}{۲}(۱-۲\cos\theta\sin\theta)$$

اگر از رابطه‌ی فوق جذر بگیریم داریم:

$$r_{\min}=d\sqrt{\frac{۱-\sin ۲\theta}{۲}}=\frac{\sin ۲\theta}{g}V^{۲}\sqrt{\frac{۱-\sin ۲\theta}{۲}}$$

رابطه‌ی دوم با استفاده از فرمول بُرد به‌دست آمده است.

**روش دوم:** ابتدا می‌بینیم که هر دو سنگ فاصله‌ی یکسان $۰/۵gt^{۲}$ را زیر خط راستی که هر پرتابه تحت آن پرتاب شده است می‌پیماید، به این معنی که فاصله‌ی میان سنگ‌ها بدون در نظر گرفتن نیروی گرانش یکسان است. بنابراین خطوط راست را در نظر می‌گیریم.




دو خط همدیگر را تحت زاویه‌ی قائمه قطع می‌کنند. فرض کنیم $t_۱$ مدت زمانی است که پرتابه‌ی تندتر (B) به نقطه‌ی برخورد (P) برسد. در این لحظه، سنگ A هنوز در فاصله‌ای دورتر از

نقطه‌ی برخورد قرار دارد $(X)$:

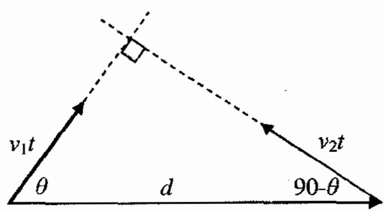
$$X = d\cos\theta - vt_{۱}$$

$vt_{۱}$ برابر $d\sin\theta$ است.

زمانی که جسم B از نقطه‌ی برخورد (P) عبور می‌کند، فاصله‌ی بین دو سنگ معادل وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ساق‌های آن $X$ است. طول این وتر زمانی کمینه است که دو ساق آن با هم برابر باشند، بنابراین کم‌ترین فاصله‌ی جدایی دو سنگ برابر است با:

$$D_{\min} = \frac{d\sqrt{۲}(\cos\theta - \sin\theta)}{۲}$$

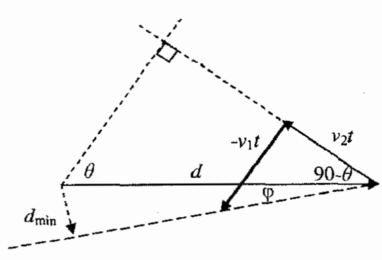
**روش سوم:** از آن‌جا که دو جسم در هوا حرکت می‌کنند، هر پرتابه به اندازه‌ی $(۱/۲)\overrightarrow{g}t^{۲}$ زیر بردار $\overrightarrow{v}_{\text{i}}t$ سقوط می‌کند. چون در هر لحظه هر دو پرتابه فاصله‌ی عمودی یکسانی را سقوط خواهند کرد، قسمت شتاب‌دار حرکت حذف می‌شود و مسئله به‌جای یافتن فاصله‌ی جدایی دو سنگ به بررسی وضعیتی که شتابی وجود ندارد خلاصه می‌شود. علاوه‌بر این، چون دو پرتابه سرعت اولیه‌ی یکسان دارند زوایایشان باید متمم هم باشد، و بنابراین بردار سرعت اولیه‌ی آن‌ها باید بر هم عمود باشد.




فاصله‌ی بین دو پرتابه برابر است با:

$$\overrightarrow{d} + \overrightarrow{v}_{۲}t - \overrightarrow{v}_{۱}t$$

با رسم مجدد این بردارها و قرار دادن بردار $-\overrightarrow{v}_{۱}t$ در ابتدای بردار $\overrightarrow{v}_{۲}t$ یک روش هندسی برای تعیین مقدار کمینه‌ی فاصله در اختیار خواهیم داشت:



ابتدای بردار که معرف فاصله‌ی بین پرتابه‌هاست روی خط‌چینی قرار می‌گیرد که تمام مقادیر ممکن $\vec{d}+\vec{v}_۲t-\vec{v}_۱t$ را نشان می‌دهد. فاصله‌ی کمینه‌ی بردار $(d_{\min})$ بر این خط‌چین عمود است.

چون اندازه‌ی $v_۱$ و $v_۲$ یکسان است، این دو یک مثلث با زوایای $۹۰^\circ - ۴۵^\circ - ۴۵^\circ$ می‌سازند. بنابراین زاویه‌ی $\varphi$ بین بردار $\vec{d}$ و خط‌چینی که تمام مقادیر ممکن $\vec{d}+\vec{v}_۲t-\vec{v}_۱t$ را نشان می‌دهد برابر است با:

$$۴۵^\circ-(۹۰^\circ-\theta)=\theta-۴۵^\circ$$

از قضیه‌های مثلثاتی نتیجه می‌گیریم که:

$$d_{\min}=d\sin(\theta-۴۵^\circ)$$

**۴۹.** سه حالت ممکن برای این مسئله وجود دارد:

۱. اگر جسم در مدت حرکت اولیه $(t)$، در چند نقطه متوقف شود در مدت حرکت ثانویه ساکن خواهد ماند.

$$d'=۰$$

۲. اگر جسم در مدت حرکت دوم $(t')$ متوقف شود، باید مسافتی را که قبل از سکون می‌لغزد به‌دست آوریم. زمانی که هل دادن انجام می‌شود، تنها نیروی افقی وارد بر جسم، نیروی اصطکاک $(f)$ است. چون $f=\mu_k n$، $n=mg$ و $\sum F=-f=ma$ بنابراین شتاب جسم برابر است با $-\mu_k g$. اکنون، با استفاده از تعریف شتاب داریم:

$$a=\frac{v_f-v_۰}{t}$$

و معادله‌ی جابه‌جایی در شتاب ثابت:

$$d=\frac{v_۰+v_f}{۲}t$$

$v_۰$ معرف سرعت جسم بلافاصله بعد از هل دادن و $v_f$ معرف سرعت جسم بعد از زمان $t$ است. با ترکیب جبری این معادله‌ها و شتاب داریم:

$$v_f=\frac{d}{t}-\frac{\mu_k gt}{۲}$$

حالا باید فاصله‌ی مورد نیاز پس از توقف با سرعت اولیه و شتاب مذکور را محاسبه کنیم. از رابطه‌ی $v_۲=v_۰^۲+۲ad$ استفاده می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$d'=\frac{(۲d-\mu_k gt^۲)^۲}{۸\mu_k t^۲ g}$$

**۳.** این حالت مربوط به حرکت پیوسته پس از طی مدت زمان دوم $(t')$ است. اگر $v_\circ$ معرف سرعت بلافاصله پس از هل دادن، $v_۱$ سرعت پس از زمان $t$ و $v_۲$ سرعت پس از زمان $t'$ باشد، با استفاده از معادله‌های مشابه قسمت دوم داریم:

$$\frac{d}{t} - \frac{\mu_k g t}{۲} = v_۱ \qquad و \qquad \frac{d'}{t'} + \frac{\mu_k g t'}{۲} = v_۱$$

با ترکیب این معادله‌ها داریم:

$$d' = \frac{۲dt' - \mu_k g t t'(t+t')}{۲t}$$

**۵۰.** شن تقریباً به‌صورت یکنواخت از روزنه عبور می‌کند و بنابراین زمان کل $T$ متناسب است با حجم شن موجود $(H^۳)$ (با توجه به این‌که هدف ما به‌دست آورن یک تخمین مناسب است، از تفاوت حجم مخروط و مکعب صرف‌نظر می‌کنیم). زمان $T$ همچنین متناسب است با شتاب گرانشی $(g)$، قطر روزنه $(d)$ و چگالی شن $(\rho)$، بنابراین

$$T \approx H^۳ \times f(g, d, \rho)$$

از آن‌جا که $T$ بیانگر زمان است و تنها $g$ دارای بُعد زمانی است، تابع $f$ باید متناسب با معکوس ریشه‌ی دوم $g$ باشد. به همین ترتیب $T$ نمی‌تواند به $\rho$ وابسته باشد اما متناسب است با $d^{-۵/۲}$؛ در نتیجه $T \approx H^۳/\sqrt{d^۵ g}$. ضریب تناسب یک عدد بدون بُعد است و چون به چیزی بستگی ندارد می‌توان آن را از مرتبه‌ی ۱ در نظر گرفت. (اگرچه تخمین‌هایی شبیه این در برخی از شاخه‌های علم فیزیک بی‌اندازه خطرناک‌اند!)

برای مثال اگر $H$ برابر چند سانتی‌متر و $d$ در حدود یک میلی‌متر باشد، $T$ در مدت زمان تخلیه‌ی کامل، در حدود چند دقیقه خواهد بود.

## الکتریسیته و مغناطیس

**۵۱.** می‌توان از رابطه‌ی ظرفیت خازن موازی استفاده کرد:

$$C = \varepsilon_\circ \frac{A}{d}$$

مطابق تعریف ظرفیت، بار روی هر صفحه برابر است با: $Q = CE$ و $E$ نیروی محرکه‌ی مولد

(و ولتاژ دو سر خازن) است. جریان از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$
$$I(t) = E\left(\frac{dC}{dt}\right)$$
$$I(t) = E\left(\frac{dC}{dd}\right)\left(\frac{dd}{dt}\right)$$

و با توجه به این‌که

$$\frac{dC}{dd} = -\varepsilon_\circ \frac{A}{d^۲}$$
$$d \approx d_\circ \Rightarrow \frac{dC}{dd} \approx -\varepsilon_\circ \frac{A}{d_\circ^۲}$$

همچنین:

$$\frac{dd}{dt} = a\omega \sin \omega t$$
$$\Rightarrow I(t) = \left(E\varepsilon_\circ \frac{A}{d_\circ^۲}\right)(a\omega \sin \omega t)$$

بنابراین مقدار جریان برابر است با:

$$I = E\varepsilon_\circ \frac{Aa\omega}{d_\circ^۲}$$

در نتیجه داریم:

$$a = \frac{Id_\circ^۲}{EA\omega\varepsilon_\circ}$$

**۵۲.** با استفاده از رابطه‌ی نیروی وارد بر سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی و قانون دوم نیوتون می‌نویسیم:

$$F = m\frac{dv}{dt} = BIl$$

$B$ شدت میدان، $I$ شدت جریان و $l$ طول سیم است.

با استفاده از قانون فارادی و قانون اهم داریم:

$$I = \frac{E}{R} = -\frac{Blv}{R}$$

$E$ نیروی محرکه‌ی القایی است. بنابراین

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^۲l^۲v}{mR}$$

علامت منفی معرف کاهش سرعت است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$v\,dt = -\left(\frac{mR}{B^۲l^۲}\right)dv$$

از آن‌جا که:

$$x = \int v\,dt$$

می‌توان نوشت:

$$x = -\left(\frac{mR}{B^۲l^۲}\right)\int dv$$

با جایگذاری محدوده‌ی مشخص انتگرال ($v$ برای حد پایین و صفر برای حد بالا)، می‌توان مسافت $x$ را که میله قبل از توقف طی می‌کند محاسبه کرد:

$$x = \frac{mvR}{B^۲l^۲}$$

**۵۳.** ضریب تناسب زاویه‌ی انحراف با جریان در آمپرسنج‌ها را با $k$ نشان می‌دهیم، به این ترتیب: $\theta_i = k_iI_i$.

اکنون با فرض جریان‌های برابر در حالت سری، اختلاف پتانسیل‌های برابر در حالت موازی و استفاده از قانون اهم داریم:

حالت سری: $\theta_۲ = k_۲\frac{V}{r_۱+r_۲}$ (۲) $\quad \theta_i = k_i\frac{V}{r_۱+r_۲}$ (۱)

حالت موازی: $\theta'_۲ = k_۲\frac{V}{r_۲}$ (۴) $\quad \theta'_i = k_۱\frac{V}{r_۱}$ (۳)

با تقسیم [(۴)/(۲)]/[(۳)/(۱)] و بازنویسی داریم:

$$r_۲ = r_۱\frac{\theta_۲\theta'_۱}{\theta_۱\theta'_۱}$$

**۵۴.** بعد از بستن کلید، جریان گذرا و وابسته به زمان داریم، ولی بعد ازگذشت زمان طولانی جریان مستقیم ثابت از مدار عبور خواهد کرد و توزیع بار روی کره‌ها تغییر نمی‌کند. بنابراین کره‌ها روی جریان حلقه‌ی اصلی تأثیر نخواهند گذاشت. از جنبه‌ی نظری، هرکره یک خازن تشکیل می‌دهد که صفحه‌ی دیگر آن زمین است و با هر کره‌ی دیگر نیز یک خازن می‌سازد. در این مسئله از حالت دوم چشم‌پوشی می‌کنیم (از جنبه‌ی نظری اگر $n$ کره داشته باشیم $n(n-۱)/۲$ ظرفیت داریم). ظرفیت از نوع اول یک کره‌ی رسانا به شعاع $r$ برابر است با

$$C = ۴\pi\varepsilon_\circ r \qquad (۱)$$

علاوه‌بر این، با تعیین ظرفیت می‌توانیم بین شعاع کره و اختلاف پتانسیل پیوند برقرار کنیم:

$$C = \frac{Q_n}{U_n} \qquad (۲)$$

$Q_n$ بار $n$امین کره و $U_n$ اختلاف پتانسیل میان زمین و $n$امین کره است. کره‌ها را از سمت چپ شماره‌گذاری می‌کنیم، به این ترتیب اولین کره از چپ را کره‌ی صفرم و آخرین کره را $N$ام می‌نامیم.

$$CU_n = Q_n \qquad (۳)$$

$$\sum_{n=\circ}^{N} CU_n = \sum_{n=\circ}^{N} Q_n \qquad (۴)$$

از آن‌جا که ظرفیت همه‌ی کره‌ها یکسان است، می‌توانیم $C$ را از داخل جمع بیرون بکشیم و داریم:

$$C\sum_{n=\circ}^{N} U_n = Q \qquad (۵)$$

بعد ازگذشت زمان طولانی جریان مستقیم مدار برابر خواهد بود با:

$$I = \frac{E}{NR} \qquad (۶)$$

و بنابراین پتانسیل $n$اُمین کره‌ی کوچک برابر است با:

$$U_n = nIR = n\frac{E}{NR}R = \frac{E}{N}n \qquad (۷)$$

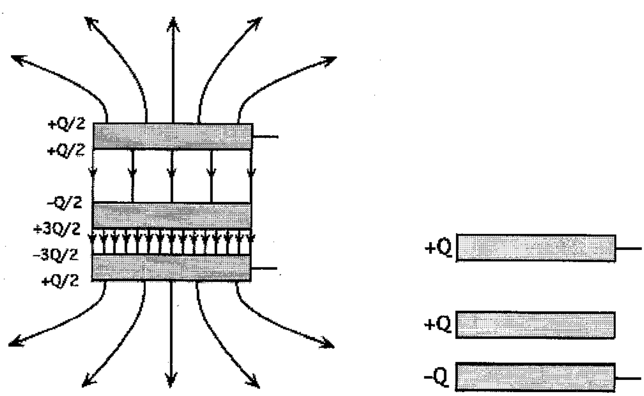
با جایگذاری رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۵) سرانجام شعاع کره‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} r &= \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{\sum\limits_n U_r} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{\frac{E}{N}\sum\limits_n n} \\ &= \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_\circ}\frac{NQ}{E\,\frac{N(N+۱)}{۲}} = \frac{۱}{۲\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{E}\frac{۱}{N+۱} \qquad (۸) \\ r &= \frac{۱}{۲\pi\varepsilon_\circ}\frac{Q}{E}\frac{۱}{N+۱} \end{aligned}$$

$N = ۲۰۰۸$ است.

**۵۵.** فرض کنیم صفحه‌های خازن که روبه‌روی هم قرار دارند مساحت یکسان دارند و سطح آن‌ها در مقایسه با فاصله‌ی بینشان بسیار بیش‌تر است. در این‌صورت می‌توانیم از میدان در لبه‌های خازن صرف‌نظر کنیم. با این فرض می‌دانیم که مقدار بار روی صفحه‌های خازن برابر است و علامت مخالف دارد. این خازن سه‌صفحه‌ای در ابتدا منزوی است و مطابق شکل ۱ (الف) بار $+Q$ دارد، بنابراین جهت خطوط میدان به طرف بیرون سطح است. اگر فرض کنیم فاصله با سطح زمین زیاد است میدان خارجی تقریباً متقارن خواهد بود و بار روی بالاترین و پایین‌ترین صفحات $Q/۲$ است. مطابق شکل ۱ (ب) بار و جهت خطوط میدان روی بقیه‌ی سطح‌ها کاملاً معلوم می‌شود.

توجه کنید که پتانسیل صفحه‌ی بالایی نسبت به صفحه‌ی میانی و در نتیجه نسبت به صفحه‌ی




ب) توزیع بار روی سطوح

الف) کل بار روی صفحات

**شکل ۱**

پایینی بیش‌تر است. همچنین شدت میدان الکتریکی بین سطوح بالایی برابر با ۱/۳ شدت میدان بین سطوح پایینی است.

به دلیل این‌که فاصله‌ی بین صفحه‌های بالایی دوبرابر فاصله‌ی بین صفحه‌های پایینی است اختلاف پتانسیل آن‌ها ۲/۳ اختلاف پتانسیل صفحه‌های پایینی خواهد بود. باید نکات زیر را در نظر داشته باشیم:

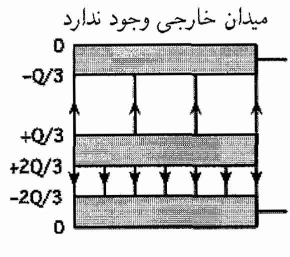
۱. با اتصال صفحه‌های بالایی و پایینی به زمین، پتانسیل آن‌ها برابر و بار اضافی روی سطوح خارجی حذف می‌شود (چون میدان خارجی بین مجموعه و سطح زمین وجود ندارد).

۲. صفحه‌ی میانی بار $+Q$ را حفظ می‌کند، چون منزوی است.

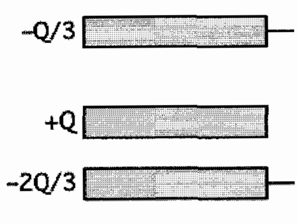
۳. برای این‌که اختلاف پتانسیل بین صفحه‌ی میانی و صفحه‌ی بالایی با اختلاف پتانسیل صفحه‌ی میانی و پایانی یکسان باشد، باید میدان الکتریکی بین صفحه‌های بالایی ۱/۲ میدان بین صفحه‌های پایینی باشد.

۴. بنابراین بار روی سطح بالایی صفحه‌ی میانی باید ۱/۲ بار روی سطح پایین آن باشد یعنی $+Q/۳$ روی سطح بالایی و $+۲Q/۳$ روی سطح پایینی آن.

جواب‌ها در شکل ۲ نشان داده شده است.




الف) توزیع بار روی سطوح




ب) کل بار روی صفحات

**شکل ۲**

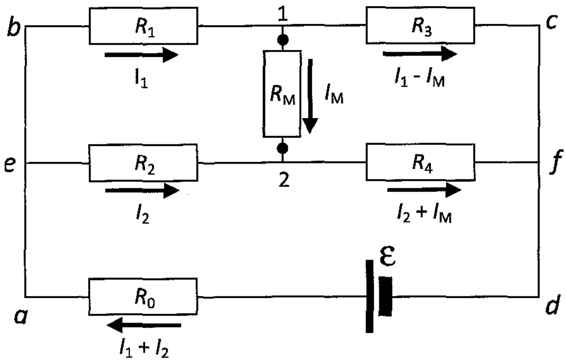
با مقایسه‌ی بارهای اولیه و نهایی روی صفحه‌ها داریم:

۱. بار کل $-Q/۳$ از صفحه‌ی پایینی به طرف زمین شارش می‌کند (از طریق گالوانومتر ۱).

۲. بار کل $+۴Q/۳$ از صفحه‌ی بالایی به طرف زمین شارش می‌کند (از طریق گالوانومتر ۲).

توجه کنید که بار خالص شارش‌شده به زمین $(+Q)$ برابر بار اضافی اولیه روی مجموعه‌ی سه صفحه‌ی خازن‌هاست که در واقع همین مقدار هم باید باشد.

**۵۶.** مقاومت‌ها را با $R_۰$، $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ و نیروی محرکه‌ی مولد را با $\varepsilon$ نمایش می‌دهیم (مطابق شکل).




همچنین فرض می‌کنیم مقاومت $R_{\rm M}$ بین نقاط ۱ و ۲ قرارگرفته است. جریان عبوری از هر مقاومت با پیکانی درکنار آن نشان داده شده است. برای یک آمپرسنج ایده‌آل $R_{\rm M} = ۰$ و برای یک ولت‌سنج ایده‌آل $I_{\rm M} = ۰$ است. با استفاده از قانون اهم (یا قانون ولتاژکیرشهف) در حلقه‌ی $abcda$ و حلقه‌ی $aefda$ معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\varepsilon=(I_۱+I_۲)R_۰+I_۱R_۱+(I_۱-I_{\rm M})R_۳=(R_۰+R_۱+R_۳)I_۱+I_۲R_۰-I_{\rm M}R_۳\\ \varepsilon=(I_۱+I_۲)R_۰+I_۲R_۲+(I_۲+I_{\rm M})R_۴=(R_۰+R_۲+R_۴)I_۱+I_۱R_۰+I_{\rm M}R_۴\end{cases} \quad (۱)$$

اگر عبارت خلاصه‌شده‌ی $R_{\rm ijk\ldots} \equiv R_{\rm i}+R_{\rm j}+R_{\rm k}+\cdots$ را در نظر بگیریم کارمان ساده‌تر می‌شود. بنابراین معادلات بالا را بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases}R_{۰۱۳}I_۱+R_۰I_۲=\varepsilon+R_۳I_{\rm M}\\ R_۰I_۱+R_{۰۲۴}I_۲=\varepsilon-R_۴I_{\rm M}\end{cases} \quad (۲)$$

از این دستگاه می‌توان $I_۱$ و $I_۲$ را برحسب $\varepsilon$، $I_{\rm M}$ و $R$ها به‌دست آورد. برای مثال می‌توان معادله‌ی اول را در $R_{۰۲۴}$ و معادله‌ی دوم را در $R_۰$ ضرب و سپس معادله‌ی دوم را از معادله‌ی اول تفریق کرد. در این‌صورت به‌دست می‌آوریم:

$$I_۱=\varepsilon\frac{R_{۲۴}}{R_۰R_{۱۲۳۴}+R_{۱۳}R_{۲۴}}+I_{\rm M}\frac{R_۰R_{۳۴}+R_۳R_{۲۴}}{R_۰R_{۱۲۳۴}+R_{۱۳}R_{۲۴}} \quad (۳)$$

به همین صورت، اگر معادله‌ی اول را در $R_0$ و معادله‌ی دوم را در $R_{013}$ ضرب و سپس معادله‌ی دوم را از معادله‌ی اول تفریق کنیم، $I_2$ به‌دست می‌آید

$$I_2 = \varepsilon \frac{R_{13}}{R_0 R_{1234} + R_{13} R_{24}} - I_{\mathrm{M}} \frac{R_0 R_{34} + R_4 R_{13}}{R_0 R_{1234} + R_{13} R_{24}} \qquad (۴)$$

اختلاف پتانسیل میان نقاط ۱ و ۲ برابر است با:

$$V_{12} = V_{e2} - V_{b1} = I_2 R_2 - I_1 R_1$$

با جایگذاری $I_1$ و $I_2$ در معادله‌ی فوق، می‌توان $V_{12}$ را برحسب $\varepsilon$، $I_{\mathrm{M}}$ و $R$ها نوشت:

$$V_{12} = \varepsilon \left( \frac{R_2 R_{13} - R_1 R_{24}}{R_0 R_{1234} + R_{13} R_{24}} \right) - I_{\mathrm{M}} \left( \frac{R_0 R_{12} R_{34} + R_1 R_3 R_{24} + R_2 R_4 R_{13}}{R_0 R_{1234} + R_{13} R_{24}} \right) \qquad (۵)$$

این اختلاف پتانسیل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$V_{12} = \varepsilon A - I_{\mathrm{M}} B \qquad (۶)$$

ضریب‌های $A$ و $B$ نماینده‌ی عامل‌های داخل پرانتزند که فقط به مقاومت‌های داخل مدار بستگی دارند.

وقتی یک آمپرسنج ایده‌آل $(R_{\mathrm{M}} = 0)$ بین نقاط ۱و ۲ بسته می‌شود، اختلاف پتانسیل $V_{12} = 0$ و جریان برابر $I_{\mathrm{M}} = I$ است. به این ترتیب از معادله‌ی (۶) داریم:

$$\varepsilon A = IB \qquad (۷)$$

وقتی یک مقاومت $R$ بین نقاط ۱ و ۲ بسته می‌شود، $I_{\mathrm{M}} = i$ و $V_{12} = i_R$ و از معادله‌ی (۶) داریم:

$$iR = \varepsilon A - iB = IB - iB \qquad (۸)$$

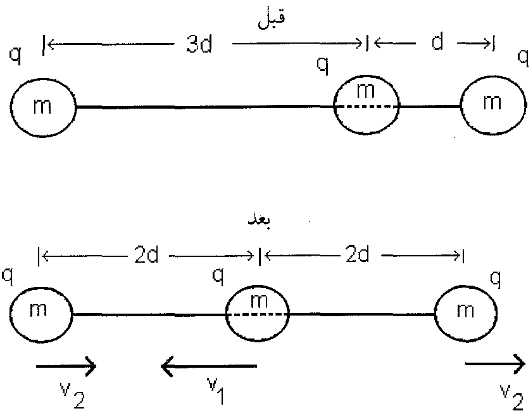
در این‌جا از معادله‌ی (۷) استفاده کرده‌ایم تا $\varepsilon A$ را با $IB$ جایگزین کنیم. اگر این رابطه را برای $B$ حل کنیم داریم:

$$B = \frac{iR}{I - i} \qquad (۹)$$

وقتی یک آمپرسنج ایده‌آل بین نقاط ۱ و ۲ بسته می‌شود، $I_{\rm M} = ۰$ است و در نتیجه ولتاژ برابر است با:

$$V_{۱۲} = \varepsilon A - ۰ = IB \qquad \text{یا} \qquad V_{۱۲} = \frac{Ii}{I-i}R \tag{۱۰}$$

**۵۷.** چون بار الکتریکی به‌طور یکنواخت توزیع شده است، می‌توان بارها را بار نقطه‌ای در نظر گرفت.




با توجه به شکل قبل و بعد از رها کردن مجموعه، اگر جهت راست را مثبت و جهت چپ را منفی در نظر بگیریم، با استفاده از پایستگی تکانه داریم:

$$\sum \overrightarrow{p}_b = \sum \overrightarrow{p}_a$$

$$۰ = ۲mv_۲ - mv_۱ \Rightarrow v_۲ = \frac{v_۱}{۲}$$

سرعت بار الکتریکی میانی هنگامی بیشینه است که در وسط و با فاصله‌ی برابر از دو بار الکتریکی دیگر قرار گیرد. همچنین، یک نیروی خالص به سمت راست وجود دارد تا از کاهش مقدار بار الکتریکی جلوگیری کند. وضعیت بار میانی حتی اگر دو بار انتهایی حرکت کنند به همین صورت خواهد بود.

با استفاده از قانون پایستگی انرژی و با توجه به مکان بار میانی هنگامی که سرعت بیشینه است داریم:

$$E_{\rm b} = E_{\rm a}$$

$$PE_{\rm b} = KE + PE_{\rm a}$$

$$\frac{kq^۲}{۳d} + \frac{kq^۲}{d} = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + \frac{۱}{۲}(۲m)v_۲^۲ + \frac{۲kq^۲}{۲d}$$

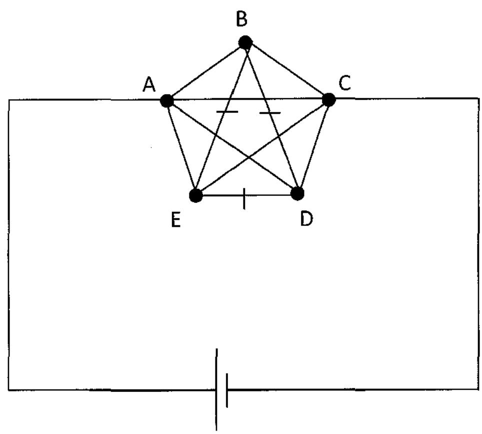
با استفاده از قانون پایستگی تکانه و نتیجه‌ی بالا برای $v_۲$ و ساده کردن داریم:

$$\frac{kq^۲}{۳d} = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ + m\frac{v_۱^۲}{۴}$$
$$\frac{kq^۲}{۳d} = \frac{۳mv_۱^۲}{۴}$$

و سرانجام برای سرعت بیشینه داریم:

$$v_۱ = \frac{۲q}{۳}\sqrt{\frac{k}{md}}$$

.۵۸




پنج ضلعی‌ای که در شکل بالا نشان داده شده است در نقاط A و C به یک منبع تغذیه متصل می‌شود. به‌دلیل این‌که هر نقطه به نقاط دیگر متصل می‌شود، تمام نقاط (B، D و E) هم‌پتانسیل‌اند. بنابراین از سیم‌هایی که نقاط B، D و E را به هم متصل می‌کنند جریانی عبور نمی‌کند، و فقط چهار مسیر موازی وجود دارد که در حل مسئله اهمیت دارد. مقاومت یکی از آن‌ها $R$ و مقاومت بقیه $۲R$ است.

برای $n$ نقطه، $n - ۱$ مسیر وجود دارد. بنابراین $n - ۲$ مسیر با مقاومت $۲R$ و یک مسیر با مقاومت $R$ داریم. مقاومت مؤثر از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{R} + (n - ۲)\frac{۱}{۲R}$$
$$r = \frac{۲}{n}R$$

برای $n = ۲۰۱۰$ داریم: $r = R/۱۰۰۵$.

۵۹. در ابتدا، بار مثبت روی صفحه‌های هر دو خازن یکسان است، که آن را $Q$ می‌نامیم. در حالت پایدار ولتاژ خازن‌ها باید به ولتاژ باتری اضافه شود:

$$V = \frac{Q}{۲C} + \frac{Q}{C} = \frac{۳Q}{۲C} \Rightarrow Q = \frac{۲}{۳}CV$$

وقتی سیم را اضافه می‌کنیم دو سر خازن $C$ را اتصال کوتاه کرده‌ایم. این کار باعث تخلیه‌ی خازن و کاهش انرژی ذخیره‌شده در آن از مقدار

$$\frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{C} = \frac{۲}{۹}CV^۲$$

به صفر می‌شود.

در این میان، مدار به حالت پایدار جدیدی گذر می‌کند که در آن $V = Q'/۲C$ است و $Q'$ بار جدید روی صفحه‌ی مثبت خازن $۲C$ است. بنابراین انرژی ذخیره‌شده در خازن $۲C$ از مقدار

$$\frac{۱}{۲}\frac{Q^۲}{۲C} = \frac{۱}{۴}\frac{۴}{۹}CV^۲ = \frac{۱}{۹}CV^۲$$

به

$$\frac{۱}{۲}Q'V = \frac{۱}{۲}(۲CV^۲) = CV^۲$$

تغییر کرده است.

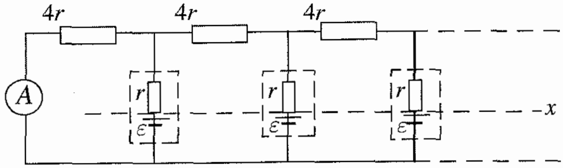
چون تغییر انرژی خازن $C$ برابر $-(۲/۹)CV^۲$ و تغییر انرژی خازن $۲C$ برابر

$$CV^۲ - \frac{۱}{۹}CV^۲ = \frac{۸}{۹}CV^۲$$

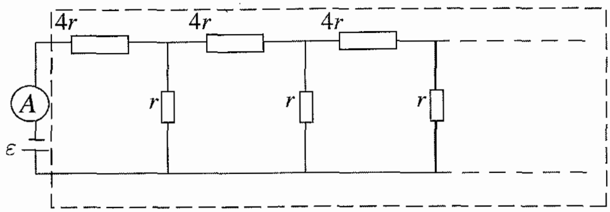
است، تغییر کل انرژی در دو خازن برابر $۲/۳CV^۲$ خواهد بود.

در حالت اتصال کوتاه خازن $C$، بار الکتریکی روی خازن $۲C$ از $(۲/۳)CV$ به $۲CV$ افزایش می‌یابد. برای انتقال بار اضافی به خازن $C$ به اندازه‌ی $(۴/۳)CV^۲$ کار انجام می‌شود. اگر این مقدار کار انجام‌شده و انرژی اضافی به میزان $(۲/۳)CV^۲$ در خازن‌ها ذخیره شود، انرژی باقی‌مانده به میزان $(۲/۳)CV^۲$ به گرما تبدیل می‌شود.

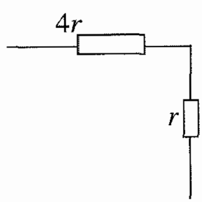
۶۰. هر یک از باتری‌های واقعی را می‌توان با یک پیل ایده‌آل و مقاومت درونی باتری جایگزین کرد. بنابراین می‌توانیم مدار را به‌صورت شکل صفحه‌ی بعد ترسیم کنیم:



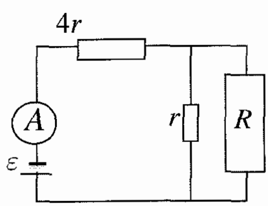

خطی که با $x$ مشخص شده معرف نقاطی است که پتانسیل آن‌ها با هم برابر است. آن‌ها می‌توانند با یک سیم ایده‌آل به هم متصل شوند بی‌آن‌که تأثیری روی مدار داشته باشد. یک مدار هم‌ارز را می‌توان با یک پیل ایده‌آل و آرایشی از مقاومت‌ها (محصور در خط‌چین) مطابق شکل زیر رسم کرد:




عناصر آرایش یک‌بُعدی مقاومت‌ها شبیه شکل زیر است




به‌دلیل این‌که همه‌ی عناصر فوق فقط شامل مقاومت‌اند، زنجیره را می‌توان با یک مقاومت معادل $R$ جایگزین کرد. با استفاده از سنت ریشه‌دار افزودن یک عنصر دیگر به زنجیره و توجه به این نکته که مقاومت به‌دلیل طولانی بودن زنجیره تغییر نمی‌کند، مدار را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم:




مقاومت مدار از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$R = \left(\frac{۱}{R} + \frac{۱}{r}\right)^{-۱} + ۴r$$

و با بازنویسی داریم:

$$R^{۲} - ۴rR - ۴r^{۲} = ۰$$

اگر مقادیر مثبت را نگه داریم:

$$R = (۲ + ۲\sqrt{۲})r$$

مقدار $\varepsilon$ با رابطه‌ی $\varepsilon = IR$ به $I$ و $R$ پیوند می‌خورد و داریم:

$$\varepsilon = (۲ + ۲\sqrt{۲})Ir$$

یا

$$\varepsilon \approx ۴/۸۲Ir$$

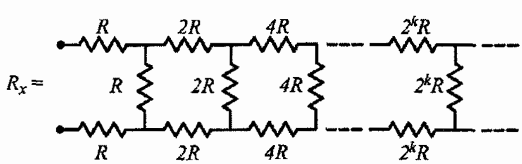
مقاومت معادل زنجیره $(۴/۸۲r)$ تفاوت زیادی با مقاومت $۵r$ ندارد، زیرا زنجیره تنها از یک عنصر تشکیل می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم مقاومت معادل سریعاً به مقدار مجانبی نزدیک می‌شود. مقاومت مؤثر برای یک زنجیره‌ی دوعنصری برابر است با:

$$R = \frac{۲۹}{۶}r$$

یا

$$R \approx ۴/۸۳r$$

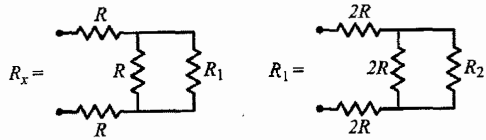
۶۱. **روش اول**: مطابق شکل ۱ قصد داریم $R_x$ را محاسبه کنیم




**شکل ۱**. نردبان $۲^k$ بی‌نهایت

برای حل مسئله معادل سه مقاومت اول را با بقیه‌ی مقاومت‌ها که با $R_۱$ معرفی می‌کنیم به‌دست می‌آوریم: (شکل ۲ را ببینید.)

$$R_x = ۲R + ۲R \| R_۱ \left(a \| b \equiv \frac{ab}{a+b}\right) \qquad (۱)$$




**شکل ۲**. براساس دو مرحله‌ی اول تحلیل، می‌توان نردبان مقاومت را به‌صورت سه مقاومت با مقدار معلوم و یک مجموعه مقاومت نامعلوم در ادامه‌ی مدار نشان داد. این فرایند تا بی‌نهایت ادامه می‌یابد تا یک عبارت کامل برای مقاومت نردبان به‌دست آید.

می‌توانیم این فرایند را برای $R_۱$ به‌کار ببریم:

$R_۱$ را به‌صورت سه مقاومت و یک مقاومت مجموع جدید به نام $R_۲$ تعریف می‌کنیم. به‌طورکلی:

$$r_k = ۲^{k+۱} + ۲^k || r_{k+۱} \tag{۲}$$

می‌توانیم معادله‌ی (۲) را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$r_k = ۲^{k+۱} + \frac{۲^k}{۱ + \frac{۲^k}{r_{k+۱}}} \tag{۳}$$

می‌توانیم با شروع از $r_۰$ یک عبارت کامل برای $r_x$ بنویسیم و با جایگذاری مکرر در معادله‌ی (۳) عبارت‌هایی برای $r_۱$، $r_۲$ و غیره به‌دست آوریم، به‌شرطی که این کار را بی‌نهایت‌بار تکرار کنیم. یک عبارت دقیق برای $r_x$ به‌دست می‌آوریم. حاصل کارکسر پیوسته‌ی زیر است:

$$r_x = ۲ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۴ + \cfrac{۲}{۱ + \cfrac{۲}{۸ + \cfrac{۴}{۱ + \cfrac{۴}{۱۶ + \cfrac{۸}{۱ + \cfrac{۸}{r_۴}}}}}}}} \tag{۴}$$

می‌توان معادله‌ی (۴) را به شکل خلاصه‌تر زیر نوشت:

$$r_x = ۲ + \frac{۱}{۱+}\,\frac{۱}{۴+}\,\frac{۲}{۱+}\,\frac{۲}{۸+}\,\frac{۴}{۱+}\,\frac{۴}{۱۶+}\,\frac{۸}{۱+}\,\frac{۸}{۳۲+}\,\frac{۱۶}{۱+}\,\frac{۱۶}{۶۴}\cdots$$

اگر اولین جمله را با $b_۰$، و صورت و مخرج $j$امین کسر را به‌ترتیب با $a_j$ و $b_j$ معرفی کنیم داریم:

$$b_j = \begin{cases} ۱ & j \text{ فرد} \\ ۲^{\frac{j}{۲+۱}} & j \text{ زوج} \end{cases} \qquad a_j = \begin{cases} ۲^{\frac{j-۱}{۲}} & j \text{ فرد} \\ a_{j-۱} & j \text{ زوج} \end{cases} \tag{۵}$$

مشکل کسر پیوسته این است که برای تعیین مقدار آن باید از انتها شروع کنیم و به طرف عقب برگردیم. چون در این حالت کسر بی‌نهایت داریم، می‌توانیم یک حقه‌ی کوچک بزنیم! خوشبختانه، راهی برای شروع در ابتدا و اعمال روش بازگشتی وجود دارد و نتیجه‌ی کار همگرا خواهد بود. با تقریب اول $r_k \cong ۳ \times ۲^k$، که به بی‌نهایت میل می‌کند، و یک مقاومت بی‌نهایت موازی با مدار، تغییری در آن مدار ایجاد نمی‌کند.

رابطه‌های بازگشتی به‌صورت زیر است:

$$A_j = b_j A_{j-۱} + a_j A_{j-۲} \qquad B_j = b_j B_{j-۱} + a_j B_{j-۲} \tag{۶}$$

با مقدار اولیهٔ

$$\begin{aligned} A_{-۱} &= ۱ \qquad B_{-۱} = ۰ \\ A_۰ &= b_۰ \qquad B_۰ = ۱ \end{aligned} \tag{۷}$$

اگر $j = n$ داریم:

$$r_n = \frac{A_n}{B_n} \tag{۸}$$

برای دستیابی به جواب می‌توانیم از برنامه‌ی صفحه‌گسترده استفاده کنیم. یک جواب به‌صورت زیر است:

$$R_x = ۲/۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۸۲R \tag{۹}$$

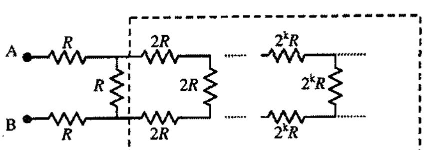
**جدول ۱**. جدول مقادیر $r_x$ به‌صورت تابعی از عددهای عبارت بازگشتی. همگرایی بسیار سریع است، اگرچه تا تعیین رقم اعشار چهاردهم کمی طول می‌کشد.

| $j$ | $b_j$ | $a_j$ | $A_j$ | $B_j$ | $f_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-۱$ | | | ۱ | ۰ | |
| ۰ | ۲ | | ۲ | ۱ | |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۳ | ۱ | ۳/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ |
| ۲ | ۴ | ۱ | ۱۴ | ۵ | ۲/۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ |

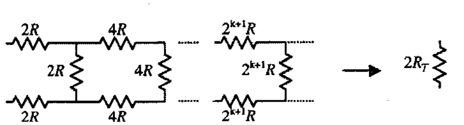
جدول ۱ (ادامه)

| $j$ | $b_j$ | $a_j$ | $A_j$ | $B_j$ | $f_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۳ | ۱ | ۲ | ۲۰ | ۷ | ۲٫۸۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۶ |
| ۴ | ۸ | ۲ | ۱۸۸ | ۶۶ | ۲٫۸۴۸۴۸۴۸۴۸۴۸۴۸۵ |
| ۵ | ۱ | ۴ | ۲۶۸ | ۹۴ | ۲٫۸۵۱۰۶۳۸۲۹۷۶۷۲۳ |
| ۶ | ۱۶ | ۴ | ۵۰۴۰ | ۱۷۶۸ | ۲٫۸۵۰۶۷۸۷۳۳۰۳۱۶۷ |
| ۷ | ۱ | ۸ | ۷۱۸۴ | ۲۵۲۰ | ۲٫۸۵۰۷۹۳۶۵۰۷۹۳۶۵ |
| ۸ | ۳۲ | ۸ | ۲۷۰۲۰۸ | ۹۴۷۸۴ | ۲٫۸۵۰۷۷۶۵۰۲۳۶۳۲۷ |
| ۹ | ۱ | ۱۶ | ۳۸۵۱۵۲ | ۱۳۵۱۰۴ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۶۲۰۰۸۵۲۷ |
| ۱۰ | ۶۴ | ۱۶ | ۲۸۹۷۳۰۵۶ | ۱۰۱۶۳۲۰۰ | ۲٫۸۵۰۷۸۰۸۵۶۴۲۳۱۷ |
| ۱۱ | ۱ | ۳۲ | ۴۱۲۹۷۹۲۰ | ۱۴۴۸۶۵۲۸ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۸۴۳۲۸۸۳ |
| ۱۲ | ۱۲۸ | ۳۲ | ۶٫۱۲E + ۰۹ | ۲٫۱۸E + ۰۹ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۰۳۲۰۹۹ |
| ۱۳ | ۱ | ۶۴ | ۸٫۸۶E + ۰۹ | ۳٫۱۱E + ۰۹ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۶۰۴۷۰۲۲ |
| ۱۴ | ۲۵۶ | ۶۴ | ۲٫۶۶E + ۱۲ | ۹٫۳۵E + ۱۱ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۸۹۵۵۷۶ |
| ۱۵ | ۱ | ۱۲۸ | ۳٫۸E + ۱۲ | ۱٫۳۳E + ۱۲ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۴۰۷۷۳ |
| ۱۶ | ۵۱۲ | ۱۲۸ | ۲٫۲۹E + ۱۵ | ۸٫۰۲E + ۱۴ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۴۰۲۹ |
| ۱۷ | ۱ | ۲۵۶ | ۳٫۲۶E + ۱۵ | ۱٫۱۴E + ۱۵ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۶۰۴۲ |
| ۱۸ | ۱۰۲۴ | ۲۵۶ | ۳٫۹۲E + ۱۸ | ۱٫۳۸E + ۱۸ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۷۴۱ |
| ۱۹ | ۱ | ۵۱۲ | ۵٫۵۹E + ۱۸ | ۱٫۹۶E + ۱۸ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۸۳۱ |
| ۲۰ | ۲۰۴۸ | ۵۱۲ | ۱٫۳۵E + ۲۲ | ۴٫۷۲E + ۲۱ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۸۱۸ |
| ۲۱ | ۱ | ۱۰۲۴ | ۱٫۹۲E + ۲۲ | ۶٫۷۳E + ۲۱ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۸۲۲ |
| ۲۲ | ۴۰۹۶ | ۱۰۲۴ | ۹٫۲۳E + ۲۵ | ۳٫۲۴E + ۲۵ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۸۲۱ |
| ۲۳ | ۱ | ۲۰۴۸ | ۱٫۳۲E + ۲۶ | ۴٫۶۲E + ۲۵ | ۲٫۸۵۰۷۸۱۰۵۹۳۵۸۲۱ |

روش دوم:

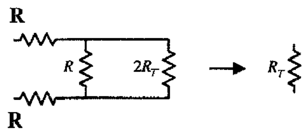



شکل ۱




شکل ۲

اگر $R_T$ معرف مقاومت کل بین نقاط A و B مدار بی‌نهایت شکل ۱ باشد و قسمتی از مدار را داخل کادر نشان دهیم، می‌بینیم که این مدار بی‌نهایت دقیقاً شبیه مدار اصلی به‌نظر می‌رسد با این تفاوت که مقدار هر مقاومت اکنون دوبرابر شده است. بنابراین، مقاومت کل این مدار دقیقاً دوبرابر مدار اصلی، یا $۲R_T$ است. اکنون، مدار اصلی را می‌توان دوباره رسم کرد (شکل ۳)، که در آن $۲R_T$ به‌جای کل مدار داخل کادر جایگزین شده است.




شکل ۳

چون این مدار مقاومت $R_T$ دارد، بنابراین $R_T = R + R + (R \| ۲R_T)$ (علامت $\|$ معرف ترکیب موازی مقاومت‌هاست). با محاسبه داریم:

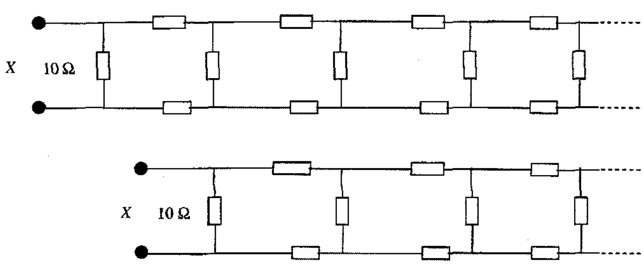
$$R_T = ۲R + \left(\frac{۱}{R} + \frac{۱}{۲R_T}\right)^{-۱}$$

$$= ۲R + \frac{۲RR_T}{۲R_T + R} \rightarrow ۲R_T^۲ - ۵RR_T - ۲R^۲ = ۰$$

تنها جواب مثبت این معادله‌ی درجه‌ی دوم به‌صورت زیر است:

$$R_T = \left(\frac{۵ + \sqrt{۴۱}}{۴}\right) R$$

**۶۲.** دو مدار بی‌نهایت $۱۰\Omega$ را مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیریم




شکل ۱

هر دو مدار باید مقاومت معادل یکسان $(X)$ داشته باشند. به‌عبارت دیگر، $X$ برابر است با مقاومت $۱۰\Omega$ که با مقاومت $X + ۲۰$ موازی است.

$$X = \frac{(۱۰)(۲۰ + X)}{(۳۰ + X)}$$

$$X^۲ + ۳۰X = ۱۰X + ۲۰۰$$

$$X^۲ + ۲۰X - ۲۰۰ = ۰$$

$$X = ۱۰(\sqrt{۳} - ۱)$$

$$X = ۷/۳۲۱\Omega$$

بنابراین اگر مقاومت $۷/۳۲۱\Omega$ را به انتهای مدار مورد نظر اضافه کنیم، مقاومت کل مدار $۷/۳۲۱\Omega$ خواهد بود. (بدون در نظر گرفتن تعداد حلقه‌ها!)

۶۳. جریان‌های $I_۱$، $I_۲$ و $I_x$ را که از مقاومت‌های $R_۱$، $R_۲$ و $R_x$ عبور می‌کنند مشخص می‌کنیم. فرض می‌کنیم جهت جریان $I_۱$ به طرف بالا، $I_۲$ به طرف پایین و $I_x$ هم به طرف پایین است. قانون ولتاژ کیرشهف را در حلقه‌ی بیرونی شکل به‌کار می‌بریم:

$$\varepsilon_۱ + \varepsilon_۲ - I_۱(r_۱ + R_۱) - I_۲(r_۲ + R_۲) = ۰$$

با جایگذاری مقادیر کمیت‌های معلوم داریم:

$$I_۱ + I_۲ = ۱/۵\text{A}$$

طبق صورت مسئله ولت‌سنج‌ها باید عددهای یکسانی را نشان دهند. چون جهت جریان در ولت‌سنج‌ها معلوم نیست می‌توانیم بنویسیم:

$$|\varepsilon_۱ - I_۱r_۱| = |\varepsilon_۲ - I_۲r_۲|$$

با جایگذاری مقادیر کمیت‌های معلوم داریم:

$$۲I_۱ - I_۲ = ۵\text{A} \quad \text{یا} \quad ۲I_۱ + I_۲ = ۱۵\text{A}$$

از ترکیب موارد فوق با نتیجه‌ی قانون ولتاژ کیرشهف، دو جواب مختلف برای $I_۱$ و $I_۲$ به‌دست می‌آید:

$$I_۱ = \frac{۱۳}{۶}\text{A} \quad \text{و} \quad I_۲ = -\frac{۲}{۳}\text{A}$$

یا

$$I_۱ = \frac{۲۷}{۲}\mathrm{A} \quad و \quad I_۲ = -۱۲\mathrm{A}$$

طبق قانون جریان کیرشهف داریم: $I_\mathrm{x} = I_۱ - I_۲$، بنابراین جریان عبوری از مقاومت $R_\mathrm{x}$ برابر است با:

$$I_\mathrm{x} = \frac{۱۷}{۶}\mathrm{A} \quad یا \quad I_\mathrm{x} = \frac{۵۱}{۲}\mathrm{A}$$

اما در این‌جا به مشکلی برمی‌خوریم. توجه کنید که هر دو جواب $I_۲$ منفی‌اند ــ بنابراین احتمالاً جهت $I_۲$ را در ابتدا اشتباه تعیین کرده‌ایم! قانون ولتاژ کیرشهف را روی یکی دیگر از حلقه‌های مدار به‌کار می‌بریم ــ حلقه‌ی سمت چپ را انتخاب می‌کنیم، در نتیجه داریم:

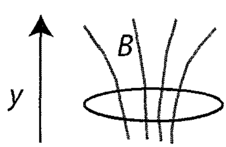
$$\varepsilon_۱ - I_۱(r_۱ + R_۱) - I_\mathrm{x}R_\mathrm{x} = ۰$$

بنابراین مقاومت $R_\mathrm{x}$ برابر است با:

$$R_\mathrm{x} = \frac{\varepsilon_۱ - I_۱(r_۱ + R_۱)}{I_\mathrm{x}} = -\frac{۷۰}{۱۷}\Omega \quad یا \quad -\frac{۷۰}{۱۵۳}\Omega$$

چون جواب منفی برای مقاومت قابل قبول نیست، نتیجه می‌گیریم شرایط مسئله واقعی نیست.

۶۴. حلقه تحت تأثیر نیروی گرانش در میدان مغناطیسی غیریکنواخت سقوط می‌کند. هنگام سقوط، جریان چرخشی $I$ در حلقه به‌وجود می‌آید. به‌دلیل تغییر شار مغناطیسی $(\Phi)$ نیروی محرکه‌ی القایی $\varepsilon$ در حلقه تولید می‌شود. جهت این جریان به‌گونه‌ای است که با حلقه مخالفت می‌کند. انرژی به‌صورت گرما تلف می‌شود. اگر حلقه با سرعت ثابت سقوط کند، آهنگ کاهش انرژی پتانسیل گرانشی باید برابر آهنگ گرمای تولیدشده باشد و بنابراین نیروی مغناطیسی برابر نیروی گرانش زمین است.




نیروی محرکه‌ی القایی با استفاده از قانون فارادی برابر است با:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (۱)$$

شار مغناطیسی در زمان $t$ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Phi = BA = B_\circ(۱ + ky)\frac{\pi d^۲}{۴} \qquad (۲)$$

$A$ مساحت حلقه است. از معادله‌ی (۱) داریم:

$$\varepsilon = -\frac{B_\circ k\pi d^۲}{۴}\frac{dy}{dt} \qquad (۳)$$

توجه کنید که $-\frac{dy}{dt}$، سرعت نهایی $(V_t)$ است.

از قانون اهم داریم: $I = \frac{\varepsilon}{R}$ که $R$ مقاومت حلقه است. آهنگ تولید گرما برابر است با:

$$I^۲R = \frac{\varepsilon^۲}{R}$$

و آهنگ کاهش انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با:

$$mg\frac{dy}{dt}$$

از پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{\varepsilon^۲}{R} = -mg\frac{dy}{dt} = mgV_t \qquad (۴)$$

حال با جایگذاری $\varepsilon$ از رابطه‌ی (۳) در رابطه‌ی (۴) و چند عملیات جبری، سرعت نهایی به‌دست می‌آید:

$$V_t = ۱۶\frac{mgR}{B_\circ^۲k^۲\pi^۲d^۴}$$

۶۵. رابطه‌ی میدان الکتریکی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$E = k(۱ + \cos\Omega t)\cos\omega t = k\cos\omega t + \frac{۱}{۲}k\cos(\omega - \Omega)t + \frac{۱}{۲}k\cos(\omega + \Omega)t$$

حاصل‌ضرب دو کسینوس با استفاده از اتحادهای مثلثاتی معیار، بسط می‌یابد. این سه جمله مربوط است به فوتون‌هایی با انرژی $h\omega$، $h(\omega - \Omega)$ و $h(\omega + \Omega)$. آخرین انرژی از انرژی یونش $۰/۷\,\mathrm{eV}$ بیش‌تر می‌شود. این اختلاف برابر انرژی الکترون خروجی است.

۶۶. انرژی جنبشی الکترون‌ها به محض خروج برابر اختلاف انرژی فوتون‌های تابشی و انرژی آستانه است:

$$K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_\circ}$$

انرژی جنبشی الکترون‌های خروجی به انرژی پتانسیل تبدیل می‌شود، $U = eEd$، در حالی که الکترون‌ها در جهت میدان الکتریکی تأخیری حرکت می‌کنند. با این فرض که میدان تقریباً یکنواخت باشد داریم:

$$K = Eed$$

و

$$\lambda_\circ = \left(\frac{۱}{\lambda} - \frac{eEd}{hc}\right)^{-۱}$$

۶۷. انرژی ذخیره‌شده در خازن را پس از برداشتن صفحه‌ی دی‌الکتریک و انرژی ذخیره‌شده در حالت تعادل نهایی را مشخص می‌کنیم. اتلاف انرژی خازن در منبع تغذیه و مقاومت مصرف می‌شود. ظرفیت، ولتاژ، بار و انرژی ذخیره‌شده در خازن را در لحظات مختلف تعیین می‌کنیم. قبل از برداشتن صفحه‌ی دی‌الکتریک داریم:

$$C_۱ = kC, \quad V_۱ = V, \quad Q_۱ = kCV, \quad U_۱ = \frac{۱}{۲}(kC)V^۲$$

بعد از برداشتن صفحه‌ی دی‌الکتریک داریم:

$$C_۲ = C, \quad V_۲ = kV, \quad Q_۲ = kCV, \quad U_۲ = \frac{۱}{۲}C(kV)^۲$$

(انرژی اضافی خازن از طریق کاری که برای خارج کردن صفحه‌ی دی‌الکتریک انجام می‌شود به‌دست آمده است.) حالت تعادل نهایی برقرار می‌شود:

$$C_۳ = C, \quad V_۳ = V, \quad Q_۳ = CV, \quad U_۳ = \frac{۱}{۲}CV^۲$$

اتلاف انرژی از خازن برابر است با:

$$U_{\text{اتلاف}} = U_۲ - U_۳ = \frac{۱}{۲}CV^۲(k^۲ - ۱)$$

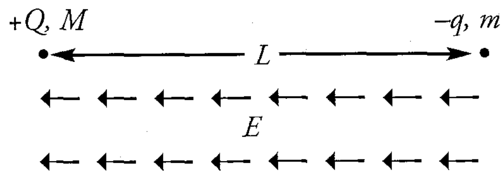
انرژی ورودی به منبع تغذیه برابر است با

$$U_B = (Q_۲ - Q_۳)V = CV^۲(k - ۱)$$

بنابه قانون پایستگی انرژی، انرژی ورودی به مقاومت برابر است با:

$$U_R = U_{\text{اتلاف}} - U_B = \frac{۱}{۲}CV^۲(k-۱)^۲$$

.۶۸




به‌منظور حفظ فاصله‌ی ثابت، دو ذره باید شتاب یکسانی داشته باشند. برای به‌دست آوردن این شتاب، نیروهای وارد بر ذره‌ها را بررسی می‌کنیم. نیروهای وارد بر ذره‌ی $Q$: نیروی مربوط به میدان الکتریکی وارد بر $Q$ برابر $QE$ که جهت آن به سمت چپ است، نیروی مربوط به ذره‌ی $q$ وارد بر $Q$ برابر $kQ|q|L^۲$ که جهت آن به سمت راست است.

با فرض این‌که $Q > |q|$، مجموعه‌ی دو بار به سمت چپ شتاب می‌گیرد. قانون دوم نیوتون در مورد حرکت ذره‌ی $Q$ به‌صورت زیر است:

$$QE - \frac{kQ|q|}{L^۲} = Ma \qquad (۱)$$

مجموعه‌ی دو بار الکتریکی را داخل میدان الکتریکی در نظر می‌گیریم. دو بار الکتریکی با هم شتاب می‌گیرند. فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر در حالت تعادل برابر $L$ است.

شتاب مشترک آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{F_{\text{خالص}}}{\text{جرم کل}} = \frac{(Q-q)E}{(M+m)} \qquad (۲)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲) در (۱) داریم:

$$QE - \frac{kQ|q|}{L^۲} = M\left\{\frac{(Q-q)E}{(M+m)}\right\} \qquad (۳)$$

با حل معادله‌ی (۳) برای $L$، نتیجه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آید:

$$L = \sqrt{\frac{(M+m)kQq}{E(qM+Qm)}}$$

وقتی بار $(-q, m)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد نتیجه‌ی یکسانی به‌دست می‌آید. اگر اندازه‌ی بار الکتریکی بیش‌تر باشد تفاوتی در نتیجه‌ی مسئله ایجاد نمی‌شود.

۶۹. فرض کنیم جرم به اندازه‌ی $y$ پایین آمده است و در این حالت سرعت آن برابر $v$ است. تغییر شار مغناطیسی عبوری از مدار یک نیروی محرکه‌ی القایی $BLv$ ایجاد می‌کند (قانون فارادی). این نیروی محرکه خازن را باردار می‌کند

$$q = CBLv$$

با مشتق‌گیری نسبت به زمان، جریان حلقه را تعیین می‌کنیم

$$I = CBL\frac{dv}{dt}$$

نیروی مغناطیسی روی میله‌ی حامل جریان (که اگر میله به طرف پایین حرکت کند به طرف بالاست.) به‌صورت زیر است:

$$F_{\text{مغناطیسی}} = BIL = CB^۲L^۲\frac{dv}{dt}$$

با توجه به نیروی خالص پایین‌سو وارد بر میله و قانون دوم نیوتون داریم:

$$mg - ky - CB^۲L^۲\frac{dv}{dt} = m\frac{d^۲y}{dt^۲}$$

با تغییر متغیر $u = y - mg/k$ معادله‌ی حرکت را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{d^۲u}{dt^۲} + \frac{k}{m + CB^۲L^۲}u = ۰$$

معادله‌ی فوق معادله‌ی آشنای حرکت هماهنگ ساده با بسامد زاویه‌ای

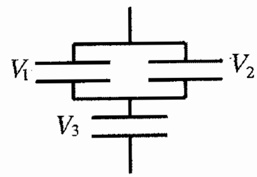
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + CB^۲L^۲}}$$

است و بنابراین دوره‌ی نوسان آن برابر است با:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m + CB^۲L^۲}{k}}$$

۷۰. فرض کنیم ولت‌سنج‌ها ایده‌آل‌اند و جریانی از آن‌ها نمی‌گذرد. نقطه‌های ۱ و ۲ دارای پتانسیل $V/۳$ و نقطه‌ی ۳ دارای پتانسیل $۲V/۳$ است. بنابراین می‌توانیم ولت‌سنج‌ها را با یکی از روش‌های زیر مدل‌سازی کنیم:

۱. هر ولت‌سنج با یک خازن نشان داده شود.



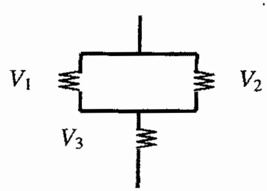

ولتاژ دو طرف شبکه خازنی برابر $V' = V/۳$ است. ظرفیت کل برابر $C'$ است. ظرفیت هر خازن برابر $C$ است.

$$\frac{۱}{C'} = \frac{۱}{C} + \frac{۱}{۲C} \Rightarrow C' = \frac{۲C}{۳}$$

$Q = V'C' = ۲VC/۹$ مقدار بار الکتریکی شبکه است.

$$V_۳ = \frac{Q}{C} = \frac{۲V}{۹}, \quad V_۲ = V_۱ = \frac{Q}{۲C} = \frac{V}{۹}$$

۲. هر ولت‌سنج با مقاومت $r$ و شرط $r \to \infty$ نشان داده می‌شود:




ولتاژ دو سر شبکه مقاومتی برابر $V' = V/۳$ دارد. مقاومت کل $r'$ است. مقدار هر مقاومت $r$ است. بنابراین $r' = ۳r/۲$ و $r' = r + r/۲$ و

$$I = \frac{V'}{r'} = \frac{V}{۳r'} = \frac{۲V}{۹r}$$

که جریان (بسیار کوچک) عبوری از شبکه است.

بنابراین:

$$V_۳ = Ir = \frac{۲V}{۹}, \quad V_۲ = V_۱ = \frac{Ir}{۲} = \frac{V}{۹}$$

۷۱. المنت گرمایی شامل چند قطعه سیم است که به‌طور موازی به هم متصل شده‌اند. اگر توان گرمایی بیشینه باشد، از هر قطعه باید جریانی عبور کند که مقدار آن تا حد امکان زیاد باشد که با توجه به شرایط مسئله این مقدار برابر ۲A است. بنابراین مقاومت هر قطعه باید برابر $۱۱۰\ \mathrm{V}/۲\ \mathrm{A} = ۵۵\Omega$ باشد. چون $۵۳۶/۵۵ = ۹{,}۷۴$ بنابراین فقط می‌توانیم از ۹ قطعه استفاده کنیم. هر قطعه طولی برابر $L(۵۵/۵۳۶)$ خواهد داشت، که $L$ طول سیم اصلی است. (قطعه‌ی دهم بسیار کوتاه خواهد بود و باید حذف شود.) بنابراین توان گرمایی برابر است با:

$$۹ \times ۱۱۰\ (\mathrm{V}) \times ۲\ (\mathrm{A}) = ۱۹۸۰\ \mathrm{W}$$

۷۲. جرم و بار گوی را به‌ترتیب با $m$ و $q$ نشان می‌دهیم. تعادل نیروهای اولیه روی سطح گوی به‌صورت $mg = qE$ است، که در آن $E$ اندازه‌ی میدان الکتریکی در محل گوی است. اگر چگالی بار سطحی یکنواخت صفحه‌ی $\sigma$ باشد، می‌توانیم بار روی دیسک به شعاع $r$ را با اضافه کردن بار یکنواخت $-Q = -\sigma\pi r^۲$ به آن حذف کنیم. چون این دیسک کوچک است، میدان الکتریکی که در محل گوی ایجاد می‌کند، مشابه میدان الکتریکی حاصل از یک بار نقطه‌ای است و بنابراین گوی تحت تأثیر نیروی الکتریکی خنثی نشده‌ی مربوط به این میدان به طرف پایین شتاب می‌گیرد. اندازه‌ی این شتاب از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$ma = \frac{qQ}{۴\pi\varepsilon_\circ h^۲} = \frac{\left(\frac{mg}{E}\right)(\sigma\pi r^۲)}{۴\pi\varepsilon_\circ h^۲} \qquad (۱)$$

مقدار دو بار از دو معادله‌ی قبلی جایگذاری می‌شود. چون صفحه بزرگ و به‌طور یکنواخت باردار شده است، می‌توانیم فرض کنیم میدان الکتریکی که صفحه‌ی کامل ایجاد می‌کند با میدان حاصل از یک صفحه‌ی بی‌نهایت بزرگ $E = \sigma/۲\varepsilon_\circ$ یکسان است. با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی (۱) نتیجه می‌گیریم:

$$\mathrm{a} = \frac{g}{۲}\left(\frac{r}{h}\right)^۲ = ۴{,}۹\mu\mathrm{m/s}^۲ \qquad (۲)$$

توجه کنید که این نتیجه با این فرض به‌دست می‌آید که $h$ در مقایسه با فاصله‌ی افقی گوی تا نزدیک‌ترین لبه‌ی صفحه بسیار کوچک است. در این‌صورت گوی در ابتدا صرفاً خنثی

است و در حالت تعادل پایدار قرار ندارد. در واقع، شیب عمودی کوچک میدان الکتریکی که به ابعاد محدود صفحه مربوط می‌شود (بدون توجه به جریان هوا و اختلال‌های کوچک دیگر) می‌تواند به‌راحتی شتاب‌هایی بیش از مقدار ناچیز معادله‌ی (۲) ایجاد کند.

**۷۳.** سرعت‌های نهایی ذره‌ها را با $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$ مشخص می‌کنیم. انرژی اولیه‌ی دستگاه از نوع انرژی پتانسیل (نسبت به یک مرجع بی‌نهایت) است، در حالی که انرژی نهایی کلاً جنبشی است، بنابراین قانون پایستگی انرژی ایجاب می‌کند:

$$\sum_{j>i} \frac{kq_i q_j}{r_{ij}} = \sum_i \frac{۱}{۲} m v_i^۲ \Rightarrow \frac{۸kq^۲}{mr} = v_۱^۲ + ۲v_۲^۲ + ۵v_۳^۲ \qquad (۱)$$

که $k = (۱/۴)\pi\varepsilon_۰$ ثابت قانون کولن است.

دینامیک و سینماتیک دستگاه را هنگام جدایی بارها بررسی می‌کنیم. در وضعیت اولیه، با این فرض که جهت راست، مثبت باشد، نیروهای الکتریکی خالص روی سه بار الکتریکی هر یک با جمع نیروهای الکتریکی مربوط به دو بار دیگر مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} ma_۱ &= \frac{kq^۲}{r^۲}\left[-\frac{۱}{۱} - \frac{۲}{۴}\right] \Rightarrow a_۱ = -۳\left(\frac{kq^۲}{۲mr^۲}\right) \\ ۲ma_۲ &= \frac{kq^۲}{r^۲}\left[+\frac{۱}{۱} - \frac{۲}{۱}\right] \Rightarrow a_۲ = -۱\left(\frac{kq^۲}{۲mr^۲}\right) \\ ۵ma_۳ &= \frac{kq^۲}{r^۲}\left[+\frac{۲}{۴} + \frac{۲}{۱}\right] \Rightarrow a_۳ = +۱\left(\frac{kq^۲}{۲mr^۲}\right) \end{aligned} \qquad (۲)$$

$a$ معرف شتاب است. چون ذره‌ها از حال سکون خارج می‌شوند، جابه‌جایی و سرعت آن‌ها به نسبت ۱+ : ۱− : ۳− تغییر می‌کند. اگر جابه‌جایی (کوچک) ذره‌ی سوم، $+x$ باشد و مبدأ مختصات را در مکان اولیه‌ی ذره‌ی ۱ انتخاب کنیم، مکان ذره‌ها بعد از این افزایش زمانی به‌ترتیب $-۳x$، $r-x$ و $۲r+x$ است. باید توجه کنیم که فاصله‌ی بین ذره‌های ۱ و ۲ (یعنی $r+۲x$) برابر فاصله‌ی بین ذره‌های ۲ و ۳ است، دقیقاً به همان شکلی که در ابتدا بود. به این ترتیب شتاب‌های جدید، اگرچه ضعیف‌ترند، دوباره به‌نسبت ۱+ : ۱− : ۳− خواهند بود. در نتیجه، جابه‌جایی‌ها و سرعت‌ها همیشه به نسبت ۱+ : ۱− : ۳−اند. (توجه کنید که این نتیجه با قانون پایستگی تکانه‌ی خطی سازگار است که ایجاب می‌کند مرکز جرم ثابت بماند.) بنابراین داریم

$$v_۱ = -۳v_۳ \quad \text{و} \quad v_۲ = -v_۳ \qquad (۳)$$

با جایگذاری این دو نتیجه در معادله‌ی (۱) داریم:

$$v_3 = \sqrt{\frac{kq^2}{2mr}} \Rightarrow K_3 = \frac{1}{2}5mv_3^2 = \frac{5kq^2}{4r} \qquad (4)$$

بنابراین از معادله‌ی (۳) داریم:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{9kq^2}{4r} \quad \text{و} \quad K_2 = \frac{1}{2}\times mv_2^2 = \frac{kq^2}{2r} \qquad (5)$$

۷۴. آهنگ گرمایش یخ برابر توان الکتریکی مصرف‌شده، $V^2/R$ است که $R$ مقاومت سیم گرماده است. بنابراین برای ظرف‌های ۱ و ۲، نسبت آهنگ انرژی الکتریکی مصرفی برابر است با: $(380\ \mathrm{V}/220\ \mathrm{V})^2$. زمان ذوب یخ در ظرف ۲ نسبت به ظرف ۱، پنج برابر بیش‌تر است (نه ۳برابر)، پس نشت گرمایی به محیط وجود دارد.

فرض کنیم ظرف‌ها در یک روز زمستانیِ سرد در محیط خارج قرار گرفته‌اند. در نتیجه دمای محیط $T_0 < 0^\circ\mathrm{C}$ است. بنابه قانون سرد کردن نیوتون، آهنگ اتلاف گرما از یخ به محیط برابر است با: $P_{\text{اتلاف}} = k\Delta t$. این مقدار تا ذوب شدن کامل یخ ثابت می‌ماند.

به منظور ذوب یخ در ظرف‌های ۱ و ۲ باید مقدار گرمای خالص یکسانی به هر یک انتقال دهیم:

$$\left(\frac{V_1^2}{R} - P_{\text{اتلاف}}\right)t_1 = \left(\frac{V_2^2}{R} - P_{\text{اتلاف}}\right)t_2 \qquad (1)$$

با حل این معادله و استفاده از مقادیر معلوم داریم $P_{\text{اتلاف}}R = (156\ \mathrm{V})^2$ . اگر گرمکن را با $156\mathrm{V}$ به‌کار اندازیم دقیقاً اتلاف گرما با محیط را موازنه کرده‌ایم. اگر فقط از ولتاژ $110\ \mathrm{V}$ در گرمکن الکتریکی استفاده کنیم، ظرف گرما از دست می‌دهد و دمای یخ به‌جای ذوب شدن پایین خواهد آمد.

در واقع، می‌توانیم تخمین بزنیم که دمای ظرف ۳ پایین می‌آید تا دوباره تعادل گرمایی بین آهنگ گرمای ورودی و خروجی برقرار شود. روش حل بالا را می‌توان با استفاده از قانون سردکردن نیوتون به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

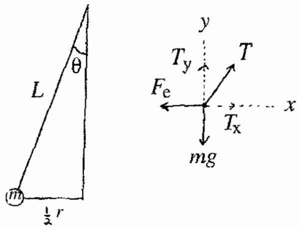
$$k(0^\circ\mathrm{C} - T_0)R = (156\ \mathrm{V})^2 \qquad (2)$$

از طرف دیگر، تعادل گرمایی وقتی حاصل می‌شود که

$$k(T_f - T_0)R = (110\ \mathrm{V})^2 \qquad (3)$$

با تقسیم معادله‌ی (۳) بر (۲) و ساده کردن آن داریم: $T_f = T_\circ / ۲$. برای مثال، اگر دمای محیط $-۱۰^\circ C$ باشد، پس دمای ظرف ۳ به‌طور نمایی کاهش یافته و در نهایت به $-۵^\circ C$ می‌رسد.

**۷۵.** نمودار نیروی هر گلوله را رسم می‌کنیم:




نیروی کولنی برابر است با:

$$F_e = \frac{kq_۱q_۲}{r^۲} = \frac{k[q(۱-bt)^{۱/۵}][q(۱-bt)^{۱/۵}]}{r^۲}$$

$$F_e = \frac{kq^۲(۱-bt)^۳}{r^۲}$$

مؤلفه‌ی افقی نیروی کشش نخ برابر است با:

$$T_x = T\sin\theta$$

از مؤلفه‌ی عمودی کشش نخ داریم:

$$T_y = mg$$

$$T\cos\theta = mg$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

در نتیجه، با جایگذاری داریم:

$$T_x = T\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = mg\tan\theta$$

با به‌کار بردن تعریف تانژانت داریم:

$$T_x = mg\tan\theta = mg\frac{\left(\frac{r}{۲}\right)}{L} = \frac{mgr}{۲L}$$

در نتیجه، قانون دوم نیوتون را در راستای افقی به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{mgr}{۲L} - \frac{kq^۲(۱-bt)^۳}{r^۲} = ma_x$$

اگر بار الکتریکی به کندی تخلیه شود ($b$ کوچک باشد)، می‌توانیم فرض کنیم دستگاه به حالت تعادل نزدیک است و $a_x$ بسیار کوچک خواهد بود.

$$a_x \approx ۰$$

بنابراین:

$$\frac{mgr}{۲L} - \frac{kq^۲(۱-bt)^۳}{r^۲} \approx ۰$$
$$\frac{mgr}{۲L} = \frac{kq^۲(۱-bt)^۳}{r^۲}$$
$$r^۳ = \frac{۲Lkq^۲(۱-bt)^۳}{mg}$$
$$r = \left(\frac{۲Lkq^۲(۱-bt)^۳}{mg}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \left(\frac{۲Lkq^۲}{mg}\right)^{\frac{۱}{۳}}(۱-bt)$$

با مشتق‌گیری، سرعت را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{dr}{dt} = -b\left(\frac{۲Lkq^۲}{mg}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$
$$v = -\left(\frac{۲Lkq^۲b^۳}{mg}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

۷۶. نقاط هم‌جوار K و M در اختلاف پتانسیل $V$ قرار دارند. این وضعیت فیزیکی معادل برهم‌نهی دو پیکربندی فیزیکی دیگر است. در پیکربندی اول نقطه‌ی K نسبت به مرز که در بی‌نهایت قرار دارد دارای پتانسیل $V/۲$ است. جریان $i$ که از نقطه‌ی K می‌گذرد بنابه قانون کیرشهف در سه مسیر جریان می‌یابد:

جریان $i/۳$ از K تا M عبور می‌کند. در پیکربندی دوم M نسبت به مرز دارای پتانسیل $V/۲$ است. جریان $i$ از M می‌گذرد و دوباره بنابه تقارن و قانون کیرشهف، جریان $i/۳$ از K به M می‌گذرد. در نتیجه‌ی برهم‌نهی این دو پیکربندی، جریان خالص $۲i/۳$ در شاخه‌ی KM و اختلاف پتانسیل $V$ بین پایانه‌های این شاخه برقرار است. بنابه قانون اُهم، افت پتانسیل مقاومت در KM برابر $(۲i/۳)R$ است. بنابه قانون کیرشهف داریم

$$V = \frac{۲i}{۳}R$$

و مقاومت مؤثر عبارت است از

$$R_{KM} = \frac{V}{i} = \frac{۲}{۳}R$$

مقاومت مؤثر بین K و L به روش مشابهی به‌دست می‌آید. اگر K در پتانسیل $V/۲$ باشد، جریان $i$ در سه مسیر پخش می‌شود. سپس جریان $i/۳$ در KM در دو مسیر پخش می‌شود و در نتیجه جریان در ML برابر $i/۶$ است. اگر L در پتانسیل $-V/۲$ باشد، جریان در ML (از M به سمت L) برابر $i/۳$ و در KM برابر $i/۶$ است. بنابه برهم‌نهی در KM (و همین‌طور در ML) داریم

$$\frac{i}{۳} + \frac{i}{۶} = \frac{i}{۲}$$

در نتیجه

$$V = i_{\mathrm{KM}}R + i_{\mathrm{ML}}R = iR$$

و مقاومت مؤثر برابر است با

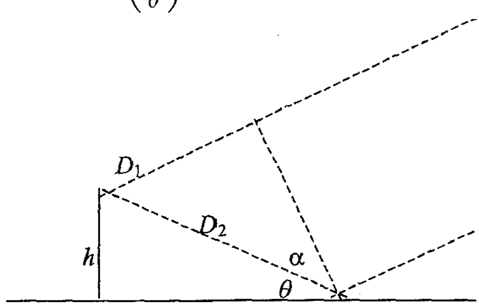
$$R_{\mathrm{KL}} = R = ۱۰\Omega$$

**توجه:** مقاومت مؤثر بین گره‌های هم‌جوار در یک توری مربع‌شکل بی‌نهایت $R/۲$ و در یک توری مثلث‌شکل بی‌نهایت $R/۳$ است.

# اپتیک

۷۷. فاصله‌ی نقطه‌ی بازتاب تا بالای دکل $D_۲ = h/\sin\theta = h/\theta$ (برای زوایای کوچک). فاصله‌ی مشابه مسیر مستقیم از چشمه به گیرنده: $D_۱ = D_۲ \sin\alpha$. ولی $\alpha = (\pi - \pi/۲ - ۲\theta)$، بنابراین

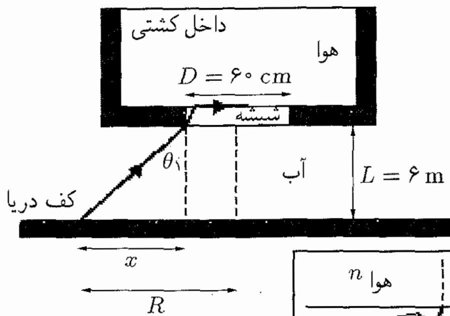
$$D_۱ = D_۲ \cos ۲\theta = \left(\frac{h}{\theta}\right)(۱ - ۲\theta^۲) \qquad \text{(برای زوایای کوچک)}$$

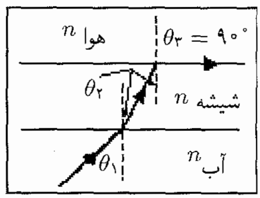


بنابراین اختلاف مسیر برابر است با: $D_۲ - D_۱ = ۲h\theta$. زمانی که ماهواره از ۳ به ۶ درجه بالای افق پیش می‌رود، اختلاف مسیر به اندازه‌ی یک طول موج تغییر می‌کند، بنابراین:

$$\lambda = ۲h(۶ - ۳)\frac{\pi}{۱۸۰} = ۰/۴۲\,\mathrm{m}$$

۷۸. شکل زیر وضعیت حدی را نشان می‌دهد. در ابتدا پرتو نور دوبار در آب شکسته می‌شود. در مرز جدایی آب و شیشه (اولین شکست) و در مرز شیشه و هوا (شکست دوم).




در این حالت حدی، شکست دوم با زاویه‌ی $\theta_۳ = ۹۰^\circ$ اتفاق می‌افتد (شروع بازتاب کلی). قانون اسنل برای دو شکست به‌صورت زیر است:

$$n_{\text{آب}} \sin\theta_۱ = n_{\text{شیشه}} \sin\theta_۲ = n_{\text{هوا}} \sin\theta_۳ \Rightarrow (\sin\theta_۱)_{\max}$$

$$= \frac{n_{\text{هوا}}}{n_{\text{آب}}} = \frac{۱/۰۰}{۱/۳۳} \Rightarrow (\theta_۱)_{\max} \cong ۴۸/۸^\circ$$

فقط نقاطی که $\theta_۱ < (\theta_۱)_{\max}$ از داخل کشتی قابل مشاهده‌اند. همچنین داریم:

$$\tan\theta_۱ = \frac{x}{L} \Rightarrow x_{\max} = L\tan(\theta_۱)_{\max} \cong (۶/۰\ \mathrm{m})\tan(۴۸/۸^\circ) \cong ۶/۸۴\,\mathrm{m}$$

شعاع منطقه‌ی قابل مشاهده برابر است با:

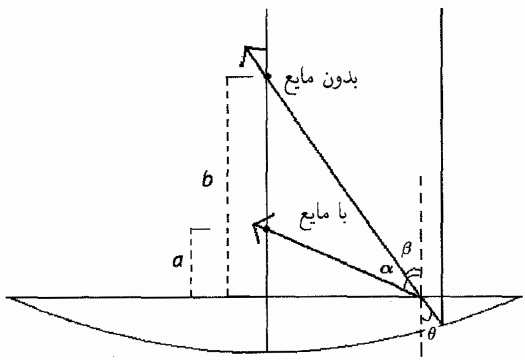
$$R = x_{\max} + \frac{D}{۲} \cong ۶/۸۴\,\mathrm{m} + ۰/۳۰\ \mathrm{m} = ۷/۱۴\,\mathrm{m}$$

مساحت قابل مشاهده از داخل پنجره برابر است با:

$$A = \pi R^{۲} \cong \pi(۷/۱۴\,\mathrm{m})^{۲} = ۱۶۰\,\mathrm{m}^{۲}$$

توجه کنید که این نتیجه به ضخامت یا ضریب شکست شیشه بستگی ندارد.

۷۹. ستاره در فاصله‌ی بسیار دور قرار دارد، طوری که پرتوهای نوری که از طرف آن به سطح آینه می‌تابند تقریباً مستقیم‌اند. به این ترتیب وقتی آینه با مایع شفاف پوشیده می‌شود پرتوها نمی‌شکنند. آن‌ها به سطح آینه برخورد می‌کنند، درست مانند زمانی که مایع داخل آینه وجود نداشته باشد. پرتوها فقط هنگام خروج از مایع و ورود به هوا می‌شکنند.




اگر فرض کنیم قطر آینه در مقایسه با شعاع انحنای آن بسیار کم‌تر است:

$$\tan\theta \approx \sin\theta$$

اگر مایع وجود نداشته باشد:

$$\sin\theta \approx \tan\beta = \frac{x}{b}$$

$x$ فاصله از مرکز آینه است. (فرض می‌کنیم فاصله‌های $a$ و $b$ بسیار بزرگ‌تر از عمق مایع آینه است، چون شعاع انحنا بسیار بزرگ است.) اگر مایع وجود داشته باشد، پرتوهای نور تحت زاویه‌ی $\alpha$ می‌شکنند و تصویری نزدیک‌تر از فاصله‌ی $b$ نسبت به آینه تشکیل می‌دهند

$$n\sin\theta \approx ۱\tan\alpha$$

$$\Rightarrow n\tan\beta = \tan\alpha$$

$$\frac{nx}{b} = \frac{x}{a}$$

$$a = \frac{b}{n}$$

تصویر جدید در فاصله‌ی $b/n$ از آینه تشکیل می‌شود.

۸۰. فرض کنیم اگر سطح کوژ باشد علامت شعاع انحنای سطح کروی ماده‌ای به ضریب شکست $n$ در یک محیط مادی به ضریب شکست $n_{\text{محیط}}$ مثبت است (اگر سطح کاو باشد، منفی است). در این حالت رابطه‌ی بین فاصله‌ی شیء $(d_{\rm o})$ و فاصله‌ی تصویر $(d_{\rm i})$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{n_1}{d_{\rm o}}+\frac{n}{d_{\rm i}}=\frac{n-n_1}{R_1} \qquad (1)$$

رابطه‌ی فوق در حالتی صادق است که شیء در محیط مادی با ضریب شکست $n_1 = n_{\text{محیط}}$ واقع شود و تصویر از داخل سطحی به شعاع $R_1$ مشاهده شود.

از طرف دیگر، فرض کنید شیء در فاصله‌ای برابر $d'_{\rm o}$ از سطح کروی به شعاع $R_2$ قرارگیرد و تصویرش در محیطی به ضریب شکست $n_2$ در فاصله‌ی $d'_{\rm i}$ تشکیل شود. بنابراین رابطه‌ی مشابه با معادله‌ی (۱) به‌صورت زیر است:

$$\frac{n}{d'_{\rm o}}+\frac{n_2}{d'_{\rm i}}=\frac{n-n_2}{R_2} \qquad (2)$$

[معادله‌ی (۲) را با تعویض فاصله‌های شیء و تصویر و افزودن علامت پریم به آن‌ها و جایگذاری زیرنویس‌های ۱ و ۲ از معادله‌ی (۱) به‌دست می‌آوریم.]

اکنون می‌توانیم با این فرض که تصویر سطح اول، شیء مقابل سطح دوم باشد، یک عدسی بسازیم. اگر فاصله‌ی بین سطوح اول و دوم عدسی $L$ باشد، داریم:

$$d_{\rm i}+d'_{\rm o}=L \qquad (3)$$

برای یک عدسی نازک داریم:

$$L\approx 0 \Rightarrow d'_{\rm o}=-d_{\rm i}$$

با جایگذاری این نتیجه در معادله‌ی (۲) و اضافه کردن آن به معادله‌ی (۱) داریم:

$$\frac{n_1}{d_{\rm o}}+\frac{n_2}{d'_{\rm i}}=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n-n_2}{R_2} \qquad (4)$$

رابطه‌ی فوق معادله‌ی عمومی سازنده‌ی عدسی است، $d_{\rm o}$ فاصله‌ی عدسی نازک (از جنس شیشه به ضریب شکست $n$) از یک شیء در محیط با ضریب شکست $n_1$ است، $d'_{\rm i}$ فاصله

از عدسی تا تصویر تشکیل‌شده در محیطی به ضریب شکست $n_۲$ است. برای عدسی که دو طرف آن هواست، داریم $n_۱ = n_۲ = ۱$. براساس معادله‌ی (۴)

$$\frac{۱}{f_۱} = (n - ۱)\frac{۲}{R} \qquad (۵)$$

چون شعاع انحنای دو سطح کوژ برابر $R$ است. از طرف دیگر، وقتی عدسی به‌طور کامل زیر آب قرار دارد، معادله‌ی (۴) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{۱/۳۳}{f_۲} = (n - ۱/۳۳)\frac{۲}{R} \qquad (۶)$$

با حل کردن معادله‌ی (۵) و (۶) برای $n$ و $R$ داریم

$$R = \frac{۰/۶۶ f_۱ f_۲}{f_۲ - ۱/۳۳ f_۱} \qquad (۷)$$

و

$$n = \frac{۱/۳۳(f_۲ - f_۱)}{f_۲ - ۱/۳۳ f_۱}$$

اکنون فرض کنید یک طرف عدسی هوا و طرف دیگر آن آب باشد. با حالتی شروع می‌کنیم که شیء در بی‌نهایت باشد $(d_o = \infty)$ [و از سمت هوا $(n_۱ = ۱)$]. پس تصویر در طرفی که آب است $(n_۲ = ۱/۳۳)$ درکانون تشکیل می‌شود، $d'_i = f_{\text{آب}}$ به‌نحوی که، بنابه معادله‌ی (۴)

$$\frac{۱/۳۳}{f_{\text{آب}}} = \frac{n - ۱}{R} + \frac{n - ۱/۳۳}{R} \qquad (۸)$$

از طرف دیگر، اگر شیء در فاصله‌ی بی‌نهایت در طرفی که آب است قرار گیرد، تصویر در طرف هوا در فاصله‌ی $d'_i = f$ تشکیل می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{f_{\text{هوا}}} = \frac{n - ۱/۳۳}{R} + \frac{n - ۱}{R} \qquad (۹)$$

(توجه‌کنید که دوکانون عدسی مانند زمانی که عدسی در یک ماده فرو برده می‌شود به‌طور متقارن در دو طرف آن قرار نمی‌گیرند. در عوض کانون عدسی در طرف آب ۳۳٪ دورتر از فاصله‌ی کانونی آن در طرف هواست.) با جایگذاری معادله‌ی (۷) در معادله‌ی (۸) و (۹) و مرتب‌کردن آن نتیجه می‌گیریم:

$$d \equiv f_{\text{آب}} + f_{\text{هوا}} = \frac{۴/۶۶ f_۱ f_۲}{f_۲ + ۱/۳۳ f_۱} \qquad (۱۰)$$

۸۱. $x$ را فاصله‌ی شیء از عدسی اول (که فاصله‌ی کانونی $f_1$ دارد.) و $x'$ را فاصله‌ی تصویر از همان عدسی در نظر می‌گیریم:

$$x' = \frac{f_1 x}{x - f_1}$$

بزرگ‌نمایی عدسی اول برابر است با:

$$M_1 = -\frac{x'}{x} = -\frac{f_1 x}{(x - f_1)x} = -\frac{f_1}{(x - f_1)}$$

تصویر عدسی اول، شیء عدسی دوم (با فاصله‌ی کانونی $f_2$) محسوب می‌شود و فاصله‌ی این شیء برابر $(L - x')$ است. $y$ را فاصله‌ی تصویر عدسی دوم در نظر می‌گیریم. از معادله‌ی عدسی‌ها داریم:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{L - x'} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{L - \frac{f_1 x}{(x - f_1)}}$$

$$= \frac{1}{f_2} - \frac{(x - f_1)}{L(x - f_1) - f_1 x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{q - f_2(x - f_1)}{f_2 q}$$

که

$$q \equiv L(x - f_1) - f_1 x$$

یا

$$y = \frac{f_2 q}{q - f_2(x - f_1)}$$

بزرگ‌نمایی عدسی دوم برابر است با:

$$M_2 = -\frac{y}{L - x'} = -\frac{y}{L - \frac{f_1 x}{(x - f_1)}} = -\frac{y(x - f_1)}{q}$$

$$M_2 = \frac{f_2 q(x - f_1)}{[q - f_2(x - f_1)]q} = -\frac{f_2(x - f_1)}{[q - f_2(x - f_1)]}$$

بزرگ‌نمایی کل مجموعه‌ی اپتیکی برابر است با:

$$M = M_1 M_2 = \left[\frac{-f_2(x - f_1)}{q - f_2(x - f_1)}\right]\left[-\frac{f_1}{(x - f_1)}\right]$$

$$= \frac{f_1 f_2}{L(x - f_1) - f_1 x - f_2(x - f_1)}$$

اگر $M$ عدد ثابتی باشد، بنابراین $dM/dx = 0$ و

$$\frac{dM}{dx} = \frac{-f_1 f_2[L - f_1 - f_2]}{[L(x - f_1) - f_1 x - f_2(x - f_1)^2]} = 0$$

بنابراین $L = f_1 + f_2$ و بزرگ‌نمایی برابر است با:

$$M = \frac{f_1 f_2}{[(f_1 + f_2)(x - f_1) - f_1 x - f_2 x + f_1 f_2]} = -\frac{f_2}{f_1}$$

۸۲. وضعیت اولیه را در نظر بگیرید. چون یکی از تصویرها در فاصله‌ی $5\,\mathrm{m}$ تشکیل می‌شود، در نتیجه یکی از عدسی‌ها تخت است. (چون پرتوهایی که دوبار از عدسی عبور می‌کنند به هیچ‌وجه نمی‌توانند تصویری در $5\,\mathrm{m}$ ایجاد کنند چرا که طبق محاسبات $n < 1$ خواهد شد. بنابراین صفحه‌ی این عدسی در واقع باید تخت باشد.) معادله‌ی ساخت عدسی برای پرتوهایی که از آن عبور می‌کنند به‌صورت زیر است:

$$f_1 = \frac{R}{(n - 1)}$$

$R$ شعاع انحنای سطح کاو، $n$ ضریب شکست عدسی و $f_1$ فاصله‌ی کانونی عدسی است. برای یک سطح کاو به شعاع $R$، فاصله‌ی کانونی $(f_2)$ را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$f_2 = \frac{R}{2}$$

پرتوهایی که از شیء بازمی‌تابند از عدسی عبور و از سطح کاو بازتابیده و دوباره از عدسی عبور می‌کنند تا از سطح تخت عدسی خارج شده و یک تصویر مجازی تشکیل دهند:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_1} = \frac{2}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{2(n - 1)}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2n}{R}$$

وقتی گردشگر برمی‌گردد، پرتوهای شیء که از عدسی عبور می‌کنند یک تصویر مجازی هم تشکیل می‌دهند:

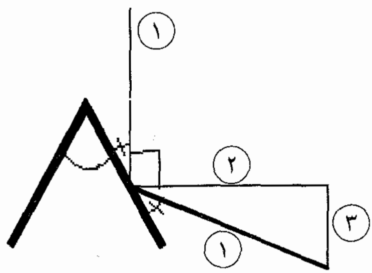
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b_3} = \frac{1}{f_1} = \frac{(n - 1)}{R}$$

با حذف $R$ از هر دو معادله، $(n - 1)(5\,\mathrm{m}) = n(5/3\,\mathrm{m})$. بنابراین

$$n = 1/5$$

۸۳. فرض کنیم سطح سیاه‌رنگ شکل زیر، خاصیت بازتاب و تراگسیلندگی ناچیزی داشته باشد و از خاصیت جذب و تراگسیلندگی ماده‌ی بازتابنده نیز صرف‌نظر کنیم.

اگر حرکت به‌دلیل انتقال تکانه‌ی تابش خورشیدی به جسم مخروطی صورت می‌گیرد، در نتیجه تکانه کاملاً به سطح مخروطی منتقل می‌شود به شرطی که مخروط با ماده‌ای سیاه‌رنگ پوشیده شود. به این ترتیب اگر از ماده‌ی بازتابنده استفاده شود هفتاد درصد تکانه باید منتقل شود. با این اطلاعات می‌توانیم نمودار زیر را رسم کنیم:




تکانه‌ی فوتون‌های فرودی و بازتابیده با خطوط (۱) نشان داده شده‌اند. خطوط (۲) و (۳) به‌ترتیب مؤلفه‌های $X$ و $Y$ تکانه‌ی فوتون‌های بازتابیده را نشان می‌دهند. اگر میزان انتقال تکانه هفتاددرصد باشد، تکانه در جهت $Y$ [(۳)] بعد از برخورد باید سی‌درصد تکانه‌ی اصلی باشد در حالی که مقدار تکانه‌ی کل (۱) ثابت می‌ماند. برای محاسبه‌ی زاویه‌ی مخروط می‌توان از قضیه‌های مثلثاتی استفاده کرد:

$$\theta = ۲\frac{\left[۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - \sin^{-۱}\left(\frac{۰/۳}{۱}\right)\right]}{۲}$$

یا

$$\theta = ۹۰^\circ - \sin^{-۱}(۰/۳) \approx ۷۲/۵۴^\circ$$

۸۴. فرض کنیم $T$ زمان معلوم $t$ در پایان کار، $h_۱$ فاصله‌ی چشمه‌ی نور تا کف ظرف و $h$ ارتفاع ظرف باشد.

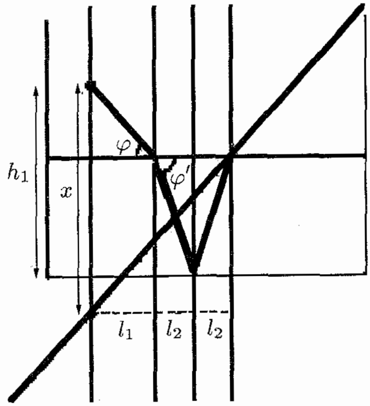
$kt$ را سطح مایع در زمان $t$ در نظر می‌گیریم که در آن $k$ یک عدد ثابت است.

چون $kT = h$،

$$k = \frac{h}{T}$$

حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

**الف)** $kt \leq h_۱$




شکل ۱

از شکل ۱ داریم:

$$l_۱ = \frac{h_۱ - kt}{\tan\varphi}, \qquad l_۲ = \frac{kt}{\tan\varphi}, \qquad l = l_۱ + ۲l_۲$$

رابطه‌ی بین $\phi$ و $\phi'$ با قانون اسنل برای پرتوهای پیرامحوری داده می‌شود:

$$\frac{۱}{\tan\varphi'} \cong \cos\varphi' = \frac{\cos\varphi}{n} \cong \frac{۱}{n\tan\varphi}$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} x &= l\tan\varphi + h_۱ - kt \\ &= ۲h_۱ + ۲k\left(\frac{\tan\varphi}{\tan\varphi'} - ۱\right)t = ۲h_۱ + ۲k\left(\frac{۱}{n} - ۱\right)t \end{aligned}$$

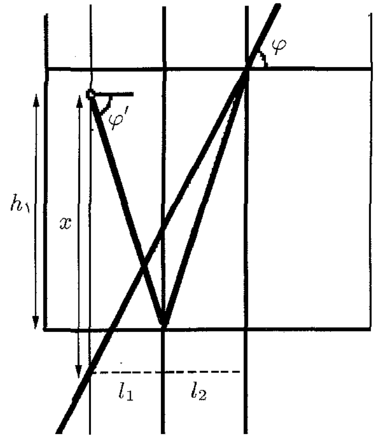
بنابراین سرعت تصویر برابر است با:

$$v = \frac{dx}{dt} = ۲k\left(\frac{۱}{n} - ۱\right) = ۲\frac{h}{T}\left(\frac{۱}{n} - ۱\right)$$

ب) $h_۱ \leq k \cdot t \leq h$

در این حالت، از شکل ۲ داریم:

$$l_۱ = \frac{h_۱}{\tan\varphi}, \qquad l_۲ = \frac{kt}{\tan\varphi}, \qquad l = l_۱ + l_۲ = \frac{h_۱ + kt}{\tan\varphi}$$




**شکل ۲**

اکنون رابطه‌ی بین $\phi$ و $\phi'$ را که با قانون اسنل برای پرتوهای پیرامحوری داده می‌شود، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\tan\varphi} \cong \cos\varphi = \frac{\cos\varphi'}{n} \cong \frac{1}{n\tan\varphi'}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x &= l\tan\varphi' - (kt - h_1) \\ &= (h_1 + kt)\left(\frac{\tan\varphi'}{\tan\varphi}\right) + h_1 - kt \\ &= \left(\frac{1}{n} + 1\right) h_1 + \left(\frac{1}{n} - 1\right) kt \end{aligned}$$

بنابراین سرعت تصویر برابر است با:

$$v = \frac{dx}{dt} = k\left(\frac{1}{n} - 1\right) = \frac{h}{T}\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

۸۵. راه‌حل این مسئله نشان می‌دهد که فکر کردن قبل از محاسبه کار خوبی است. اولین فکر این است که اگر اولین تصویر میانی در مرکز کره تشکیل شود، آینه‌ی کروی نقره‌ای در همان نقطه، تصویر دومی ایجاد خواهد کرد. پرتوها همگی کاملاً شعاعی‌اند. مسئله حل شد! تقریباً.

در این حالت پرتوهای شعاعی خروجی با سطح بازتابنده مواجه و واگرا می‌شوند و هرگز تصویری تشکیل نمی‌شود. این پاسخ درست نیست.

اگر دو تصویر میانی در مرکز آینه‌ی کروی تشکیل شود وضعیت چطور است؟ هیچ راهی برای این‌که تصویر اول در فاصله‌ی کم‌تر از $r$ از رأس تشکیل شود وجود ندارد. و اگر این تصویر تشکیل نشود پس تصویر دوم در فاصله‌ی نزدیک‌تر از $r$ به رأس آینه تشکیل می‌شود. بنابراین تصویر حقیقی بعد از شکست دوم تشکیل نمی‌شود.

از آن‌جا که تصویرهای میانی در داخل کره تشکیل نمی‌شوند فقط یک احتمال باقی می‌ماند ــ همگرایی پرتوهای ورودی برای تشکیل یک تصویر در مرکز آینه‌ی کروی. پرتوهای بازتابیده به‌طور متقارن مسیرهایی را دنبال می‌کنند که با توجه به پرتوهای ورودی چیده شده‌اند. اگر:

$$\text{فاصله‌ی تصویر} = ۲r \qquad \text{فاصله‌ی شیء} = s$$

$$n = \text{ضریب شکست} = ۲/۴ \qquad \text{شعاع انحنا} = R$$

با استفاده از تقریب پرتو پیرامحوری داریم:

$$\frac{۱}{s} + \frac{n}{۲r} = \frac{n-۱}{r}$$

با حل کردن آن برای $s$ به‌دست می‌آوریم:

$$s = ۵r$$

۸۶. فرض کنیم جو تهار مطابق شکل صورت مسئله از لایه‌های نازک گاز به ضخامت $\Delta h$ تشکیل شده است و ضریب شکست در هر لایه مقداری ثابت است. لایه‌ای که در ارتفاع $h$ قرار دارد ضریب شکست $n(h)$ دارد، و لایه‌ای که در ارتفاع $h+\Delta h$ قرار می‌گیرد ضریب شکستی برابر

$$n(h+\Delta h)[n(h+\Delta h) < n(h)]$$

دارد. اگر ارتفاع $h$ کافی باشد، باریکه‌ی لیزری در مرز مشترک با لایه‌ی فوقانی بازتاب کلی می‌کند، چون به زاویه‌ی حد $(\theta)$ رسیده است. با به‌کار بردن قانون اسنل داریم:

$$n(h)\sin\theta = n(h+\Delta h) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل صورت مسئله و با در نظر گرفتن این‌که $\Delta h \ll R+h$ داریم:

$$\sin\theta = \frac{R+h}{R+h+\Delta h} = \frac{۱}{۱+\frac{\Delta b}{R+b}} \approx ۱ - \frac{\Delta h}{R+h} \qquad (۲)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲) در (۱) و انجام دادن عملیات جبری، معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{n(h+\Delta h)-n(h)}{\Delta h}=-\frac{n(h)}{R+h} \qquad (۳)$$

اگر $\Delta h \to ۰$ معادله‌ی (۳) به معادله‌ی دیفرانسیل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{dn}{dh}=-\frac{n(h)}{R+h} \qquad (۴)$$

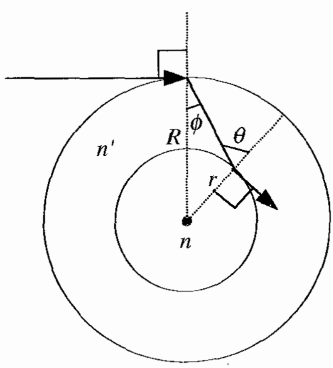
ولی، همان‌طور که می‌دانیم، روی سیاره $n(h)=n_۰-bh$ است و بنابراین

$$\frac{dn}{dh}=-b$$

با جایگذاری این رابطه در معادله‌ی (۴) داریم:

$$h=\frac{n_۰-bR}{۲b}$$

۸۷. حالت حدی برای نفوذ به داخل مایع وقتی اتفاق می‌افتد که پرتو تابش از هوا دقیقاً نزدیک به سطح خارجی لوله و به‌طور مماس بر آن فرود آید و پرتو تراگسیلیده‌ی داخل مایع هم به‌صورت مماس و دقیقاً نزدیک به سطح داخلی لوله (مطابق شکل زیر) باشد.




در ابتدا با به‌کار بردن قانون اسنل در سطح خارجی داریم:

$$\sin\phi=\frac{۱}{n'} \qquad (۱)$$

و سپس در مرز جدایی شیشه‌ـمایع:

$$\sin\theta=\frac{n}{n'} \qquad (۲)$$

در گام بعدی قانون سینوس‌ها را در مثلثی به‌کار می‌بریم که با دو ضلع خط‌چین به نام‌های $R$ و $r$ و پرتو در حال انتشار در شیشه ساخته می‌شود:

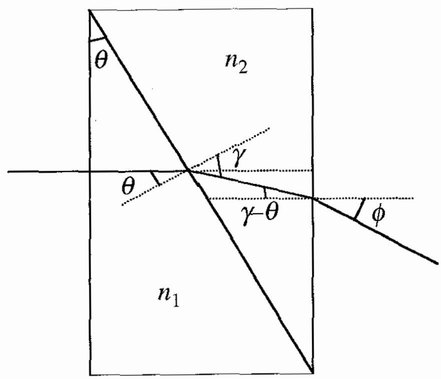
$$\frac{\sin\phi}{r} = \frac{\sin(\pi-\theta)}{R} = \frac{\sin\theta}{R} \qquad (۳)$$

اکنون می‌توانیم معادله‌ی (۱) و (۲) را در معادله‌ی (۳) جایگذاری و آن را ساده کنیم و کم‌ترین مقدار شعاع داخلی را به‌دست آوریم:

$$r = \frac{R}{n}$$

همانند بسیاری از مسائلی که مربوط به انتشار پرتو در چند محیط است، فقط ضریب شکست اولین محیط (هوا) و آخرین محیط (مایع) در مسئله ظاهر می‌شود.

۸۸. زاویه‌های داخلی شکست در شکل زیر رسم شده‌اند.




با به‌کار بردن قانون اسنل در مرز قطری مشترک بین دو منشور داریم:

$$n_۱ \sin\theta = n_۲ \sin\gamma \Rightarrow n_۱\theta \cong n_۲\gamma \qquad \text{(برای زوایای کوچک)} \qquad (۱)$$

در گام بعدی می‌توانیم قانون اسنل را در سطح عمودی خارجی منشور دوم به‌کار ببریم و داریم:

$$n_۲ \sin(\gamma-\theta) = \sin\phi \Rightarrow n_۲\gamma - n_۲\theta \cong \phi \qquad (۲)$$

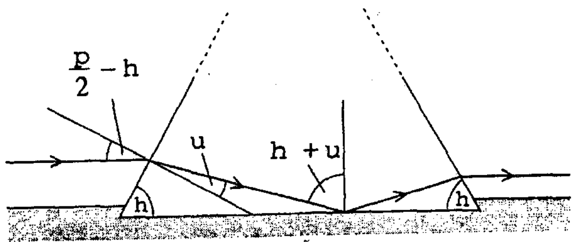
با این فرض که پرتو وارد هوا می‌شود، با جایگذاری معادله‌ی (۱) در اولین جمله‌ی سمت چپ معادله‌ی (۲) داریم:

$$dn \equiv n_۱ - n_۲ = \frac{\phi}{\theta}$$

۸۹. فرض کنیم زاویه‌ی بین پرتو نور و خط قائم بر سطح منشور در نقطه‌ای که پرتو وارد منشور می‌شود $\phi$ باشد. با استفاده از قانون اسنل هنگام ورود پرتو نور به درون شیشه داریم

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = ng\sin\phi$$

$n_{\rm g}$ ضریب شکست شیشه است. با کمی عملیات هندسی درمی‌یابیم که زاویه‌ی بین پرتو ورودی خط قائم بر وجه مشترک شیشه‌ـآب در نقطه‌ای که پرتو می‌تابد $\phi + \theta$ است.



آب

اگر بازتاب کلی اتفاق بیفتد این زاویه از $\sin^{-۱}(n_{\rm w}/n_{\rm g})$ تجاوز خواهد کرد. $n_{\rm w}$ ضریب شکست آب است. با استفاده از دو شرط فوق و استفاده از فرمول

$$\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$$

برای حذف $\phi$ داریم

$$n_{\rm g}^{۲} - n_{\rm w}^{۲} \geq \cos^{۲}\theta(n_{\rm g}^{۲} + ۱ - ۲n_{\rm w})$$

با قرار دادن مقادیر عددی در رابطه‌ی فوق شرط مسئله ارضا می‌شود.

# ترمودینامیک

۹۰. با این فرض مسئله را حل می‌کنیم که لوله‌ی آزمایش در داخل مایع با یک گیره که در شکل نشان داده نشده است در عمق مورد نظر به حالت غوطه‌ور نگه داشته شده است. فرض می‌کنیم گاز کامل باشد، بنابراین حاصل‌ضرب فشار و حجم آن $Ax$ ($x$ ارتفاع پیستون از انتهای لوله‌ی آزمایش است.) ثابت است، و برابر است با مقدار اولیه‌ی آن ($PAl$) که $A$ مساحت سطح مقطع لوله‌ی آزمایش است. بنابراین هنگامی که پیستون در ارتفاع $x$ قرار دارد فشار گاز برابر است با:

$$p = \frac{Pl}{x} \qquad (۱)$$

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم. اولین احتمال این است که فشار اولیه‌ی گاز کم‌تر یا برابر با فشار جو باشد: $P \leq P_{\mathrm{a}}$.

در این حالت جو پیستون را به داخل لوله خواهد راند تا جایی که $x = Pl/P_{\mathrm{a}}$ و حالت تعادل برقرار شود (مطابق رابطه‌ی (۱)). این حالت به هیچ‌وجه حالت شناوری در داخل مایع ایجاد نمی‌کند، بنابراین $h_{\min} = 0$. این حالت بدیهی است. حالت جالب‌تری که اتفاق می‌افتد این است که $P > P_{\mathrm{a}}$، که بعداً آن را بررسی می‌کنیم.

احتمال دوم حالت حدی دیگری است که زمانی به‌وجود می‌آید که پیستون در انتهای فوقانی لوله‌ی آزمایش قرار گیرد، در این‌صورت $x = l$. در این حالت، فشار گاز داخل لوله با مقدار اولیه‌ی آن ($P$) برابر است. بنابراین تعادل نیروهای وارد بر پیستون ایجاب می‌کند که فشار گاز روی سطح پایینی آن با فشار مایع روی سطح بالایی برابر باشد:

$$P = P_{\mathrm{a}} + (h - l)gd \qquad (۲)$$

اگر مقدار $h$ را که در این معادله صدق می‌کند با $h_1$ نشان دهیم داریم:

$$h_1 = \frac{P - P_{\mathrm{a}}}{gd} + l \qquad (۳)$$

از آن‌جا که $P > P_{\mathrm{a}}$، بنابراین $h_1$ باید از $l$ کوچک‌تر باشد و لوله‌ی شناور در مایع می‌تواند در این عمق در حالت تعادل باشد. پس مقدار $h_1$، مقدار کمینه‌ی $h$ تحت شرایط مورد نظر است.

به‌دلیل وابستگی به مقادیر متغیر در معادله‌ی (۳) می‌توانیم مقدار کم‌تری برای $h$ به‌دست آوریم در صورتی که لوله را بالاتر بیاوریم و به مایع اجازه دهیم که پیستون را تا ارتفاع $x$ که کم‌تر از $l$ است فرو ببرد. فشار داخل لوله از معادله‌ی (۱) به‌دست می‌آید و باید با فشار هیدروستاتیکی وارد بر پیستون در عمق $h - x$ برابر باشد. بنابراین باید در معادله‌ی (۲) جایگذاری زیر را انجام دهیم:

$$\frac{Pl}{x} = P_{\mathrm{a}} + (h - x)gd \qquad (۴)$$

و معادله را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$h = \frac{Pl}{xgd} - \frac{P_{\mathrm{a}}}{gd} + x \qquad (۵)$$

اگر از رابطه‌ی فوق نسبت به $x$ مشتق بگیریم و حاصل را مساوی صفر قرار دهیم مقدار بهینه‌ی $x$ به‌دست می‌آید:

$$x_{\text{بهینه}} = \sqrt{\frac{Pl}{gd}} \qquad (۶)$$

نتیجه‌ی فوق در صورتی قابل قبول است که $l >$ بهینه $x$ باشد (به این ترتیب ارتفاع پیستون در لوله نسبت به احتمال دوم پایین‌تر خواهد بود). این نامساوی در صورتی برقرار است که $P < lgd$ به‌شرطی که شرایط مسئله نیز برقرار باشد. بنابراین می‌توانیم معادله‌ی (۶) را در معادله‌ی (۵) جایگذاری و مقدار کمینه‌ی $h$ را محاسبه کنیم:

$$h_۲ = ۲\sqrt{\frac{Pl}{gd}} - \frac{P_\mathrm{a}}{gd} \qquad (۷)$$

حال باید نشان دهیم که $h_۲ < h_۱$، که یک روش مناسب برای بررسی این نکته استفاده از رابطه‌ی بی‌بعد زیر است:

$$\frac{h_۱ - h_۲}{l} = \left(۱ - \sqrt{\frac{P}{lgd}}\right)^۲ \qquad (۸)$$

و نیز استفاده از معادله‌های (۳) و (۷). مشاهده می‌کنیم که طرف راست معادله‌ی (۸) نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $h_۲$ باید کوچک‌تر از $h_۱$ باشد.

### خلاصه‌ی سه حالت ممکن

۱. اگر $P \le P_\mathrm{a}$، بنابراین $h_{\text{کمینه}} = ۰$.

۲. اگر $P$ از فشار جو و از اختلاف فشار هیدرواستاتیکی در طول لوله $(lgd)$ بیش‌تر باشد، در این‌صورت $h_{\text{کمینه}} = h_۱$.

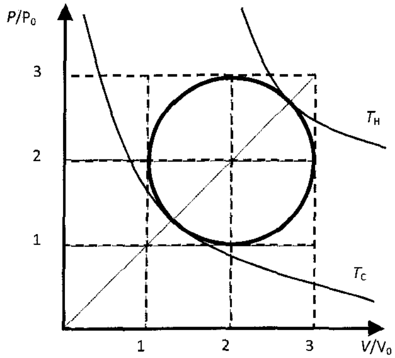
۳. در نهایت اگر $lgd > P > P_\mathrm{a}$ باشد، داریم $h_{\text{کمینه}} = h_۲$. برای ارزیابی مسئله، از معادله‌ی (۸) داریم $h_۱ = h_۲$، به‌شرطی که $P = lgd$ باشد، بنابراین جواب حالت‌های ۲ و ۳ به یک جواب خلاصه می‌شود.

**۹۱.** ابتدا نمودار $PV$ را با استفاده از کمیت‌های بی‌بعد $P/P_۰$ و $V/V_۰$ رسم می‌کنیم. بنابراین چرخه‌ی دایره‌ای‌شکل، محیط دایره‌ای به شعاع واحد است، که مرکز آن در نقطه‌ی (۲ و ۲) قرار می‌گیرد.

هدف ما به‌دست آوردن مقادیر بیشینه و کمینه‌ی دما در چرخه است ــ منحنی‌های هذلولی تک‌دمای $T_\mathrm{H}$ و $T_\mathrm{C}$ در شکل صفحه‌ی بعد، مربوط به دمای مطلق چشمه‌های گرم و سرد چرخه‌ی کارنوی مورد نظر ماست.

نقطه‌ی تماس منحنی تک‌دما و چرخه‌ی دایره‌ای‌شکل به‌صورت زیر است:

$$\frac{P}{P_۰} = \frac{V}{V_۰} = ۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{P}{P_۰} = \frac{V}{V_۰} = ۲ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$




بنابراین مطابق قانون گازهای کامل ($PV = nRT$)، می‌توان نوشت:

$$\left(۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ P_\circ V_\circ = nRT_H \quad \text{و} \quad \left(۲ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ P_\circ V_\circ = nRT_C$$

بازده در چرخه‌ی کارنو به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\eta = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{\left(۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ - \left(۲ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}{\left(۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}$$

$$= \frac{۴\sqrt{۲}}{\left(۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲} = \frac{۱۶\sqrt{۲}}{(۴ + \sqrt{۲})^۲}$$

در نهایت داریم:

$$\eta = \%۷۷/۱۹$$

**۹۲**. وقتی انتهای فوقانی لوله (به شعاع داخلی $r$) باز باشد، فشار جو هم به سطح فوقانی و هم به سطح پایینی ستون آب به ارتفاع $۲۰$ mm وارد می‌شود.

بنابراین وزن آن $\rho\pi r^۲ hg$ (که $\rho = ۱۰۰۰\ \mathrm{kg/m^۳}$ چگالی آب است.) با نیروی مویینگی ($F_{\text{مویینگی}}$) مربوط به نیروی چسبندگی میان شیشه و آب در اطراف سطح فوقانی لوله خنثی می‌شود.

$$F_{\text{مویینگی}} = \rho\pi r^۲ hg \qquad (۱)$$

(نیروی چسبندگی بین کناره‌ی ستون آب و شیشه هم وجود دارد، ولی نیروی خالصی به آب وارد نمی‌کند.)

اگر انتهای فوقانی لوله قبل از این‌که انتهای پایینی آن داخل آب فرو برده شود محکم بسته شود، ستونی از هوا به طول اولیه‌ی $L = ۵۰۰\ \mathrm{mm}$ را حبس کرده‌ایم، که می‌توان آن را به‌صورت یک گاز ایده‌آل تک‌دما در نظر گرفت. فرض کنید در این هنگام ستون آب تا ارتفاع $h'$ در داخل لوله بالا بیاید. ستون آب، هوا را با فشار پیمانه‌ای $P$ متراکم می‌کند:

$$\begin{aligned} P_iV_i = P_fV_f \Rightarrow P_{\text{جو}} L\pi r^{۲} \\ = (P_{\text{جو}} + P)(L - h')\pi r^{۲} \\ \Rightarrow P = P_{\text{جو}} \frac{h'}{L - h'} \approx P_{\text{جو}} \frac{h'}{L} \end{aligned} \qquad (۲)$$

$P_{\text{جو}} = ۱۰۱\ \mathrm{kPa}$.

اکنون چهار نیروی وارد بر ستون آب داریم: اختلاف بین فشار بالاسوی جو روی سطح فوقانی و فشار پایین‌سوی ستون هوا روی سطح فوقانی آب ضربدر سطح مقطع داخلی لوله، نیروی مویینگی به طرف بالا روی سطح فوقانی و نیروی وزن آن به طرف پایین. تعادل نیروها به‌صورت زیر آرایش می‌یابد.

$$\rho\pi r^{۲} h' g + P\pi r^{۲} = F_{\text{مویینگی}} \qquad (۳)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱) و (۲) و مرتب کردن مجدد آن داریم:

$$h' = h\left[۱ + \frac{P_{\text{جو}}}{\rho g L}\right]^{-۱} = ۰{,}۹۲۵\,\mathrm{mm} \qquad (۴)$$

توجه کنید که $h' \ll L$، که تقریب در آخرین مرحله‌ی معادله‌ی (۲) را توجیه می‌کند.

۹۳. در ابتدا دو پیستون در حالت تعادل‌اند. بنابراین، فشار زیر آن‌ها باید با هم برابر باشد. چون بالای پیستون‌ها خلأ است، نیروی فشارنده روی هر پیستون باید وزن آن پیستون را خنثی کند. بنابراین سطح مقطع پیستونی که جرم آن دوبرابر است هم دوبرابر خواهد بود. این دو سطح را با $A$ و $۲A$ نشان می‌دهیم. اگر بار کل روی پیستون سبک‌تر را دوبرابر کنیم، بار اضافه روی آن موجب می‌شود پیستون در تمام مدت در ته استوانه قرار گیرد و همه‌ی گاز داخل استوانه‌ی دوم فشرده شود. با توجه به این‌که فشار هیدرواستاتیکی در ستون $۴۰\ \mathrm{cm}$ تحت شرایط متعارف دچار تغییر جزیی می‌شود، می‌توان فرض کرد فشار در تمام گاز یکسان است. اما فشار در استوانه‌ی دوم پیستون دوم را نگه می‌دارد که وزن آن تغییر نکرده است. بنابراین فشار گاز قبل و بعد از اضافه

کردن بار اضافی ۱ kg یکسان است. به‌علاوه، دما و تعداد مول‌های گاز یکسان‌اند. بنابراین، حجم گاز باید ثابت نگه داشته شود. حجم اولیه برابر $۳Ah$ است. حجم نهایی برابر $۲AH$ است. با برابر قرار دادن این دو عبارت داریم:

$$H = ۱/۵h = ۰/۶۰\ \mathrm{m}$$

۹۴. صفحه‌ی فلزی به‌دلیل جذب نور خورشید از سطح فوقانی به مساحت $A$ گرم می‌شود. اگر فرض کنیم خورشید در یک روز آفتابی در وسط آسمان قرار دارد، آهنگ جذب انرژی روی صفحه برابر است با: $P_{\text{جذب}} = eIA$، ثابت خورشید $I = ۱۳۵۰\ \mathrm{W/m^۲}$ است. $e$ ضریب گسیل صفحه‌ی فلزی کدر است که برابر با ضریب جذب است، $\alpha = ۱ - \rho$، $\rho$ میانگین بازتابندگی طیف خورشید است.

از طرف دیگر، صفحه به دو روش انرژی را به محیط اطراف می‌دهد. اول، هدایت الکتریکی از صفحه به هوا. به‌دلیل برخورد مولکول‌های جو با سطوح صفحه‌ی فلزی فرض می‌کنیم در اطراف صفحه به‌اندازه‌ی کافی جریان هوا (همرفت) وجود دارد و گرادیان دمایی قابل توجهی وجود ندارد: یعنی دمای هوای اطراف همواره نزدیک ۳۰۰ K است. دوم، مبادله‌ی تابش میان صفحه و محیط اطراف به غیر از خورشید. در مورد صفحه‌ی زیرین اصولاً زمین یک محیط اپتیکی محسوب می‌شود در حالی که در مورد صفحه‌ی فوقانی محیط‌های اپتیکی وابستگی زیادی به طول موج، اتصال صفحه به گازهای گلخانه‌ای جوی و به فضای آزاد دارد. در نتیجه ارائه‌ی یک مدل کامل اتلاف انرژی گرمایی صفحه کار پیچیده‌ای خواهد بود. به هر حال فرض می‌کنیم هر دو طرف صفحه با محیط در تعامل است و دمایی در حدود $T_۰ = ۳۰۰\ \mathrm{K}$ دارد. از آن‌جا که این دما نزدیک به دمای سطوح صفحه‌ی فلزی است، می‌توانیم قانون خنک‌سازی نیوتون را برای انواع مبادله‌ی گرما بپذیریم و فرض کنیم آهنگ اتلاف انرژی از هر سطح صفحه‌ی فلز برابر است با: $P_{\text{اتلاف}} = cA(T - T_۰)$، $T$ دمای سطح مربوط و $c$ یک عدد ثابت است (که می‌تواند به گسیلندگی‌ها در طول موج‌های فرابنفش، ثابت استفان‌ـبولتزمن $\sigma$، فشار جو، سطح مقطع برخورد و غیره وابسته باشد).

وقتی صفحه‌ی فلزی به حالت تعادل می‌رسد، آهنگ انرژی حاصل از جذب در سطح فوقانی باید با آهنگ اتلاف در سطح‌های فوقانی و پایینی برابر باشد:

$$eIA = cA(T_{\text{بالا}} - T_۰) + cA(T_{\text{پایین}} - T_۰)$$
$$\Rightarrow T_{\text{متوسط}} \equiv \frac{۱}{۲}(T_{\text{بالا}} + T_{\text{پایین}}) = \text{ثابت} \qquad (۱)$$

یعنی دمای متوسط سطح صرف‌نظر از ضخامت صفحه یک عدد ثابت است (برابر با $T_\circ + eI/۲c$). از آن‌جا که دمای متوسط فلز سطح اصلی $۳۵۰\ \mathrm{K}$ است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که دماهای دو سطح با رابطه‌ی زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{۱}{۲}(T_{\text{بالا}} + T_{\text{پایین}}) = ۳۵۰\ \mathrm{K} \Rightarrow T_{\text{بالا}} = ۷۰۰\ \mathrm{K} - T_{\text{پایین}} \qquad (۲)$$

که برای سطح اصلی به ضخامت $t$ و سطح جدید به ضخامت دوبرابر صادق است.

مطلب بعدی، بررسی آهنگ رسانش گرمایی از سطح بالایی به پایین صفحه‌ی فلزی است

$$P_{\text{رسانش}} = kA\frac{T_{\text{بالا}} - T_{\text{پایین}}}{nt} = kA\frac{۷۰۰\ \mathrm{K} - ۲T_{\text{پایین}}}{nt} \qquad (۳)$$

که برای سطح اصلی $n = ۱$ و برای سطح جدید $n = ۲$ و $k$ ضریب رسانش گرمایی صفحه‌های فلزی است. اگر فقط سطح پایینی را در نظر بگیریم، بنابه معادله‌ی (۳) آهنگ دریافت انرژی باید با آهنگ اتلاف انرژی به محیط اطراف برابر باشد:

$$kA\frac{۷۰۰\ \mathrm{K} - ۲T_{\text{پایین}}}{nt} = cA(T_{\text{پایین}} - T_\circ) \qquad (۴)$$

این معادله را دوبار بنویسید، یک‌بار برای صفحه‌ی اصلی و بار دوم برای صفحه‌ی جدید و نسبت دو معادله را به‌دست آورید تا ثابت‌های مختلف حذف شوند.

$$\frac{\frac{(۷۰۰\ \mathrm{K} - ۲/۳۴۰\ \mathrm{K})}{۱}}{\frac{(۷۰۰\ \mathrm{K} - ۲T_{\text{پایین}})}{۲}} = \frac{۳۴۰\ \mathrm{K} - ۳۰۰\ \mathrm{K}}{T_{\text{پایین}} - ۳۰۰\ \mathrm{K}} \qquad (۵)$$

$T_{\text{پایین}}$ مربوط به دمای پایین صفحه‌ی جدید است. معادله‌ی (۵) به آسانی مرتب می‌شود و داریم:

$$\boxed{T_{\text{پایین}} = ۳۳۳/۳\ \mathrm{K} \Rightarrow T_{\text{بالا}} = ۳۶۶/۷\ \mathrm{K}} \qquad (۶)$$

اگر اتلاف گرما از سطوح فلز کاملاً از طریق تابشی باشد و به‌صورت زیر بیان شود:

$$P^{\text{بالا}}_{\text{اتلاف}} = e_I \sigma A T^۴_{\text{بالا}}$$

که مربوط به سطح بالایی در تماس با فضای آزاد است و برای سطح پایینی که با زمین در تماس است داریم:

$$P^{\text{پایین}}_{\text{اتلاف}} = e_{IR} \sigma A (T^۴_{\text{پایین}} - T^۴_\circ)$$

دراین‌جا $e_{IR}$ گسیلمندی متوسط طول موج‌های فروسرخ است. (مقدار بیشینه در حدود $۱۰\,\mu\mathrm{m}$ برای سطوح فلزی به دمای $۳۵۰\,\mathrm{K}$ است.) اکنون معادله‌ی (۵) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\frac{۲۰}{۱}}{\frac{[(۳۶۰^۴+۳۴۰^۴-T^۴_{\text{پایین}})^{\frac{۱}{۴}}-T_{\text{پایین}}]}{۲}} = \frac{۳۴۰^۴-۳۰۰^۴}{T^۴_{\text{پایین}}-۳۰۰^۴} \qquad (۷)$$

با حل عددی رابطه‌ی فوق به جواب‌های زیر می‌رسیم:

$$T_{\text{پایین}} = ۳۳۳/۲\,\mathrm{K} \Rightarrow T_{\text{بالا}} = ۳۶۵/۴\,\mathrm{K}$$

با تفاوت اندکی نسبت به جواب (۶).

**۹۵.** $k$ را ثابت فنر در نظر می‌گیریم. در حالت تعادل، $PA = kh$ ($P$ فشار، $A$ مساحت پیستون و $h$ ارتفاع پیستون است.) بنابراین $P_۱/P_۲ = h_۱/h_۲$. از قانون گازهای کامل داریم: $P_۱V_۱/T_۱ = P_۲V_۲/T_۲$ ($T$ دمای مطلق گاز است).

$$V = hA \Rightarrow \frac{P_۱h_۱}{T_۱} = \frac{P_۲h_۲}{T_۲}$$

با جایگذاری $T_۲ = ۲T_۱$ داریم:

$$P_۲ = \frac{۲P_۱h_۱}{h_۲}$$
$$\left(\frac{h_۱}{h_۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}$$

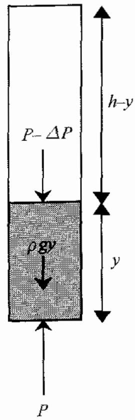
وقتی دمای گاز $۲T$ می‌شود پیستون تا ارتفاع $\sqrt{۲}h$ بالا می‌رود.

**۹۶.** فشار جو با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$P = \rho g H \qquad (۱)$$

$\rho$ چگالی جیوه است (که تقریباً برابر $۷۶\,\mathrm{cm}$ است).

نیروها روی ستون جیوه در تعادل‌اند (ارتفاع ستون جیوه $y$ است که باید مشخص شود.) طوری که پس از بیرون کشیدن لوله از داخل مخزن، جیوه در داخل لوله نگه داشته می‌شود (سطح مقطع لوله را برابر واحد در نظر می‌گیریم تا نیرو و فشار با هم برابر شوند).




فشار هوای محبوس در فضای بالای جیوه قبل از این‌که لوله را از مخزن خارج کنیم از $P_\mathrm{i} = P$ به $P_\mathrm{f} = P - \Delta P$ کاهش می‌یابد زیرا به‌طور همدما از حجم اولیه‌ی $V_i = h/۲$ تا حجم نهایی $V_\mathrm{f} = h - y$ منبسط شده است (با این فرض که سطح مقطع لوله واحد است). اگر هوا را به‌صورت گاز کامل در نظر بگیریم داریم:

$$P_\mathrm{i}V_\mathrm{i} = nRT = P_\mathrm{f}V_\mathrm{f} \Rightarrow P\frac{h}{۲} = (P - \Delta P)(h - y) \qquad (۲)$$

اما تعادل نیروها روی ستون جیوه در شکل قبل برابر است با:

$$P = P - \Delta P + \rho g y \Rightarrow \Delta P = \rho g y \qquad (۳)$$

حال با جایگذاری معادله‌ی (۱) و (۳) در (۲) و ساده کردن آن، یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برای $y$ به‌دست می‌آوریم:

$$y^۲ - (h + H)y + \frac{۱}{۲}hH = ۰ \qquad (۴)$$

با حل این معادله، جوابی را انتخاب می‌کنیم که علامت $\Delta$ی آن منفی است (چون باید $y < h/۲$)

$$y = \frac{H + h - \sqrt{H^۲ + h^۲}}{۲} \qquad (۵)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که این جواب برای همه‌ی مقادیر مثبت متناهی $H$ مثبت است. حالت‌های حدی به‌صورت زیر است:

$H \to ۰$ اگر $\Rightarrow y \to ۰$ (یعنی آزمایش در یک محفظه‌ی خلأ انجام می‌شود.)

$H \to \infty$ اگر $\Rightarrow y \to \frac{h}{۲}$ (در یک محیط با فشار بالا)

دو حالت حدی جالب دیگر به‌صورت زیر است:

(یعنی آزمایش در یک لوله با طول بسیار کم انجام می‌شود.) $h \to ۰$ اگر $\Rightarrow y \to ۰$

(با استفاده از یک لوله‌ی بسیار بلند) $h \to \infty$ اگر $\Rightarrow y \to \frac{H}{۲}$

۹۷. معادله‌ی ارتباط آهنگ شارش گرما با اختلاف دما به‌صورت زیر است:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T - T_{\mathrm{R}})$$

$T$ دمای سطح ظرف، $T_{\mathrm{R}}$ دمای اتاق و ثابت $\alpha$ به رسانایی الکتریکی مواد و شکل ظرف بستگی دارد. ظرف‌ها مشابه هم‌اند بنابراین ثابت $\alpha$ برای هر دو یکسان است. ظرف‌ها از فلز ساخته شده و گرما را به خوبی هدایت می‌کنند. این ویژگی، اختلاف بین دو ظرف را کمینه می‌کند که حاصل سطح مقطع بزرگ‌تر آب در ظرفی است که گوی در آن فرو برده شده است.

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha(T - T_{\mathrm{R}})$$

$$dQ = \alpha(T - T_{\mathrm{R}})dt$$

$$mc\,dT = \alpha(T - T_{\mathrm{R}})dt$$

$$\frac{mcdT}{(T - T_{\mathrm{R}})} = \alpha dt$$

بنابه معادله‌ی فوق، زمان سرد کردن تا دمای $T$ متناسب با مقدار گرمای خروجی از ظرف است $(Q = mc\Delta T)$. بنابراین:

$$k = \frac{(m\mathrm{c_w}\Delta T + m\mathrm{c_b}\Delta T)}{m\mathrm{c_w}\Delta T}$$

$$k = \frac{(\mathrm{c_w} + \mathrm{c_b})}{\mathrm{c_w}}$$

و سرانجام:

$$\mathrm{c_b} = (k - ۱)\mathrm{c_w}$$

۹۸. حجم و فشار نهایی به‌ترتیب $V' = ۱/۲۵V$ و $P'$ است. اگر هلیم را یک گاز کامل در نظر بگیریم می‌توانیم در شرایط دمای ثابت بنویسیم: $PV = P'V'$، طوری که $P' = ۰/۸P$. چون فشار خارجی برابر $۰/۵P$ است، فشار خالص به طرف بیرون روی سطح بالون برابر $۰/۳P$ است. بنابراین نیروی فشاری خالص روی نیمه‌ی بالون برابر $۰/۳P\pi R^۲$ است، که $R$ شعاع نهایی

بالون است، و از رابطه‌ی $۱/۲۵V = ۴\pi R^{۳}/۳$ به‌دست می‌آید. این نیرو باید نیروی کشسانی $\sigma \Delta A$ را خنثی کند، که $\Delta A = ۲\pi R t$ سطح مقطع ماده‌ی سازنده‌ی بالون در صفحه‌ی میانی است. $t$ در این‌جا ضخامت ماده‌ی بالون است که از رابطه‌ی $d = m/(۴\pi R^{۲} t)$ به‌دست می‌آید. با ترکیب معادله‌ها داریم:

$$\sigma = \frac{۹PVd}{۱۶m}$$

**۹۹.** آهنگ انتقال گرما از یک میله از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$P = \frac{Q}{T} = kA\frac{t_{\mathrm{h}} - t_{\mathrm{c}}}{L} = C(t_{\mathrm{h}} - t_{\mathrm{c}})$$

$A$ مساحت، $L$ طول و $k$ هدایت گرمایی است (که تنها عامل تفاوت‌زا در دو آزمایش محسوب می‌شود). از آن‌جا که $A(t_{\mathrm{h}} - t_{\mathrm{c}})/L$ یک مقدار ثابت است، آن را با نماد $C$ نشان می‌دهیم. هنگامی که دو میله را به‌صورت سری قرار می‌دهیم داریم:

$$P = \frac{A(t_{\mathrm{h}} - t_{\mathrm{c}})}{\frac{L_۱}{k_۱} + \frac{L_۲}{k_۲}}$$

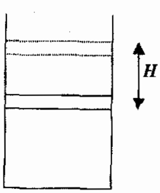
در این حالت $L_۱ = L_۲ = L$ بنابراین:

$$P = \frac{A(t_{\mathrm{h}} - t_{\mathrm{c}})}{L}\left(\frac{۱}{\frac{۱}{k_۱} + \frac{۱}{k_۲}}\right) = C\left(\frac{k_۱ k_۲}{k_۱ + k_۲}\right) \Rightarrow \frac{۱}{P} = \frac{۱}{P_۱} + \frac{۱}{P_۲}$$

$$T_۱ = \frac{Q}{P_۱}, \quad T_۲ = \frac{Q}{P_۲} \quad \text{و} \quad T = \frac{Q}{P}$$

$$T = \frac{Q}{P} = \frac{Q}{P_۱} + \frac{Q}{P_۲} = T_۱ + T_۲ = ۸۰ \text{ دقیقه}$$

**۱۰۰.** حالت تعادل اولیه‌ی سیستم را با پانوشت (۱)، حالتی که پیستون بالا برده می‌شود (در وضعیت تعادل گرمایی) را با پانوشت (۲) و حالت تعادل نهایی را با پانوشت (۳) نشان می‌دهیم. فشار، حجم، دما و تعداد مول‌های گاز هلیم را با نمادهای $P$، $V$، $T$ و $n$ نشان می‌دهیم. در حالت (۱) فشار بین پیستون (به جرم $m$ و سطح مقطع $A$) و گاز هلیم موازنه می‌شود و می‌توانیم بنویسیم:




$$P_۱ = \frac{mg}{A} + P_{\text{جو}} \qquad (۱)$$

در این رابطه فشار جو روی پیستون $P_{\text{جو}}$ در نظر گرفته شده است. در هر دو حالت (۱) و (۲)، گاز در وضعیت تعادل گرمایی با محیط در دمای $T_\circ$ است، بنابراین می‌توانیم با استفاده از قانون گازهای کامل بنویسیم:

$$P_۱V_۱ = nRT_\circ = P_۲V_۲ \quad (۲)$$

$R$ ثابت جهانی گازهاست.

وقتی گاز عایق‌بندی می‌شود، در مدت زمان گذار از حالت (۲) به حالت (۳) گرمایی به داخل یا خارج گاز مبادله نمی‌شود. به هر حال فشار جو روی سیستم گاز و پیستون کار خارجی انجام می‌دهد. بنابراین انرژی مکانیکی آن $(E)$ به‌صورت زیر افزایش می‌یابد:

$$P_{\text{جو}}Ah = E_۳ - E_۲ + \frac{۳}{۲}P_۳V_۳ - \frac{۳}{۲}P_۲V_۲ - mgh \quad (۳)$$

رابطه‌ی فوق مطابق قانون اول ترمودینامیک با فرض این‌که پیستون مسافت $h$ را بین حالت‌های (۲) و (۳) به طرف پایین حرکت می‌کند نوشته شده است. تساوی دوم از آن‌جا نتیجه شده است که انرژی گرمایی گاز تک‌اتمی مانند هلیم برابر $۳PV/۲$ است و پیستون به اندازه‌ی $mgh$ انرژی پتانسیل گرانشی از دست می‌دهد. در پایان، گاز دوباره پیستون را به حالت تعادل درمی‌آورد. پس مطابق معادله‌ی (۱) داریم $P_۳ = P_۱$. تغییر حجم خالص گاز بین حالت‌های (۱) و (۳) به‌صورت $V_۳ - V_۱ = A(H-h)$ است که مربوط به حرکت پیستون به طرف بالا و پایین است. با جایگذاری این دو رابطه در معادله‌ی (۳) و با استفاده از معادله‌های (۱) و (۲) و ساده کردن نتیجه‌ی نهایی داریم

$$h = ۰/۶H \quad (۴)$$

یعنی می‌توانیم بگوییم: پیستون در فاصله‌ی $۰/۴H$ بالای مکان اولیه‌اش در حالت (۱) متوقف می‌شود.