

تاریخ ریاضی

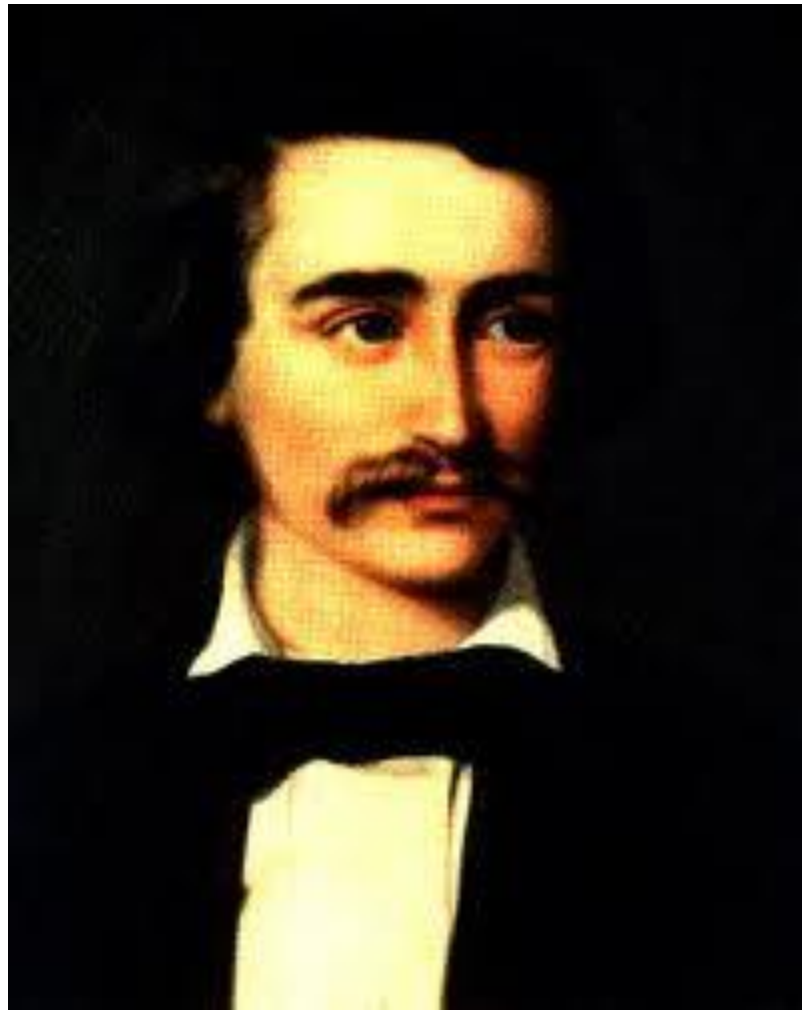
جلسه هشتم

THE TIME HAS COME FOR
THE *GREAT*
TRUTH!



I AM HELD CAPTIVE
AGAINST
MY WILL!







I see it, but I don't believe it.

...و تاریخ نگاشته می شود

تا نشان دهد افسانه بی پایه است،

اما افسانه خیلی زود جای تاریخ را می گیرد چون افسانه

دلفریب تر است.

۲۹ نوامبر ۱۸۷۳

اجازه دهید پرسشی را مطرح کنم که با آنکه از دیدگاه
نظری برایم از جذابیت خاصی برخوردار است خودم
نمی‌توانم به آن پاسخ دهم. شاید شما بتوانید به آن پاسخ
دهید که در این صورت اگر پاسخ‌تان را برایم بنویسید
خیلی خوشبخت خواهم شد.

پرسش این است

تمام اعداد صحیح مثبت مانند n را در نظر می‌گیریم و آن را با (n) نمایش می‌دهیم.

تمام اعداد حقیقی مثبت مانند x را در نظر گرفته و آن را با نماد (x) نمایش می‌دهیم.

پرسش مزبور به بیان ساده این است که آیا (n) می‌تواند با (x) به گونه‌ای در تناظر باشد که هر کدام از اجزای یکی فقط و فقط نظیر یکی از اجزای دیگری باشد؟

در نگاه اول هر کسی با خودش می‌گوید نه این کار امکان‌پذیر نیست چرا که (n) از اجزای گسسته تشکیل شده در حالی که (X) یک پیوستار است.

اما با اقامه این دلیل چیزی به دست نمی‌آید، و با آنکه به این نظر تمایل دارم که (n) و (X) هیچ تناظر یک-به-یکی را نمی‌پذیرند، نمی‌توانم توضیحی که در پی آن هستم بیابم. هر چند ممکن است این موضوع ساده باشد.

این پرسش چندان هم بی‌مورد نیست

چون

کلیت متشکل از اعداد گویای مثبت می‌تواند در تناظر یک
به یک با اعداد صحیح قرار گیرد.

یادداشت‌های ددکیند

1. او هم پاسخ این پرسش را نمی‌داندست.
2. می‌توانسته نشان دهد که مجموعه تمام اعداد جبری شمارش پذیر است.
3. این پرسش به نظر او چندان جالب نبود.

کانتور، ۲ دسامبر

از دریافت پاسخ شما به نامه‌ام فوق‌العاده خوشحال شدم. من از این جهت این پرسش را با شما مطرح کردم که از چند سال قبل مرا به خود مشغول داشته است. و برایم مشخص نبود که فقط از دید من سرسختی می‌کرد، یا ذاتاً پرسش سرسختی است. با توجه به این که نوشته‌اید شما هم نتوانسته‌اید به آن پاسخ دهید من این طور فرض می‌کنم که شق دوم درست است.

علاوه بر این می‌خواهم این مطلب را هم اضافه کنم که من **هیچگاه به صورت جدی به آن نپرداخته‌ام** چرا که هیچ جذابیت خاصی از دید عملی برایم ندارد.

همچنین با شما در این مورد که گفته‌اید ارزش تلاش کردن را ندارد هم عقیده‌ام.

اگر می‌شد، چی می‌شد!

با وجود این اگر می‌شد به آن پاسخ داد خیلی خوب بود.
به عنوان مثال اگر پاسخ آن منفی باشد، اثبات جدیدی از
قضیه لیوویل در مورد وجود اعداد متعالی در اختیار
خواهیم داشت.

هان، شرمنده!

اما آن اظهار نظرم در مورد این که این پرسش چندان
اسحقاق تلاش ندارد، به طور قطع با اثبات کانتور برای
وجود اعداد متعالی رد شد.

کرونکر

اعداد طبیعی شایسته ترین مخلوق خداوندی هستند و تنها اعدادی می باشند که «وجود دارند».

در مورد این چنین «اثبات وجود»، فقط یک نوع قضاوت
درست است: «این حکم ثابت نشده است».

همان رشته از افکار

۵ ژانویه ۱۸۷۴

با توجه به پرسشی که اخیراً ذهن مرا مشغول کرده است به نظرم می‌رسد که همان رشته از افکار پرسش زیر را فراروی ما قرار می‌دهد:

آیا یک سطح (مثلاً یک مربع شامل مرزش) می‌تواند در رابطه یک-به-یک با یک خط (مثلاً یک پاره‌خط با نقاط انتهایی‌اش) قرار بگیرد به طوری که هر نقطه از سطح به نقطه‌ای از خط متناظر شود، و برعکس هر نقطه از خط به نقطه‌ای از سطح متناظر شود؟

در حال حاضر به نظرم می‌رسد که پاسخ دادن به این پرسش
هم چندان کار ساده‌ای نیست؛ اگرچه تمایل به **منفی**
بودن پاسخ این پرسش آن‌چنان زیاد است که ارایه
اثباتی برای آن بی‌مورد به نظر می‌رسد.

دیگران

برو بابا، خدا روزیت رو یه جای دیگه بده!

اینکه معلومه، مجموعه‌های **با بعد متفاوت** را نمی‌توان بدین
گونه با هم متناظر کرد.

ددکیند

۱۸ می ۱۸۷۴
یادآوری کانتور

۱۸۷۵

پاسخ، بی پاسخ

۱۸۷۶

پاسخ، بی پاسخ

کانتور، ۲۰ ژوئن ۱۸۷۷

... مایلم از نظر شما را در مورد این که روند استنتاجی مرا از دیدگاه حسابی دقیق می‌دانید آگاه شوم.

مسئله این است که نشان دهیم سطوح، احجام و در واقع هر ساختار ρ بعدی پیوسته می‌توانند در تناظری یک‌به‌یک با خطوط پیوسته (یعنی ساختارهایی یک‌بعدی) باشند. به این ترتیب، سطوح، احجام و در واقع تمام ساختار ρ بعدی پیوسته با خم‌ها هم‌توان خواهند بود. این مطلب با ایده پذیرفته شده در میان حامیان هندسه جدید که با فراغ بال از ساختارهای نامتناهی، دو برابر نامتناهی، سه برابر نامتناهی و ρ برابر نامتناهی سخن می‌رانند در تضاد است. حتی گاهی سخن از این به میان می‌آید که نامتناهی نقاط یک صفحه یا یک حجم از به توان دو یا به توان سه رساندن نامتناهی نقاط یک خط حاصل می‌شود.

تغییر جهت

از

طرح پرسش درمورد وجود دوسویی

به

ارایه راهی برای ساختن دوسویی

نقطه‌ای مانند (x, y) را در $[0, 1] \times [0, 1]$ در نظر می‌گیریم

و به جای x و y بسط اعشاری آنها را می‌نویسیم:

$$(x, y) = (0/abcde\dots, 0/\alpha\beta\gamma\delta\epsilon)$$

البته بعضی از اعداد حقیقی بیش از یک نمایش اعشاری دارند که در چنین مواردی نمایش‌هایی را در نظر می‌گیریم که به رشته نامتناهی از ارقام ۹ ختم می‌شوند. ایده کانتور این است که (x, y) به نقطه‌ای مانند $z \in [0, 1]$ نگاشته شود که به صورت زیر داده شده است:

$$z = 0/a\alpha b\beta c\gamma d\delta e\epsilon\dots$$

با توجه به این که به وضوح می‌توانیم با استفاده از بسط اعشاری z نقاط x و y را که z به آنها نسبت داده شده استخراج کنیم، این شیوه تناظر مورد نظر را در اختیار ما قرار خواهد داد.

ددکیند، ۲۲ ژوئن ۱۸۷۷

آفرین اداره پست آلمان

مشکلی کوچک،

که شاید رفع آن برای شما کاری نداشته باشد.

عددی مانند

۰.۱۲۰۱۰۱۰۱۰۱۰۱...

با هیچ زوج مرتبی نظیر نشده است.

من نمی دانم که این ایراد به استخوان بندی ایده شما آسیب
می زند یا نه، اما نخواستم این مطلب مخفی بماند.

روز بعد!

متأسفانه ایراد شما کاملاً درست است؛ اما خوشبختانه این ایراد فقط به برهان آسیب می‌زند و محتوای قضیه از آسیب آن در امان است. به خاطر این که با نشان دادن این که ساختار متشکل از متغیرهای حقیقی $x_1, x_2, \dots, x_p$ در رابطه‌ای یک به یک با متغیر y که تمامی مقادیر بازه را اختیار نمی‌کند و بعضی از مقادیر مانند y'' را شامل نیست من چیزی بیش از آنچه که متوجه شده بودم را اثبات کرده‌ام.

دو روز بعد

پریروز کارت پستی برای تان فرستادم که در آن ایراد پیدا شده توسط شما را در اثباتم تأیید کرده بودم و گفته بودم می‌توانم این ایراد را برطرف کنم. اما اکنون باید از این که برطرف کردن آن طرز برخورد پیچیده‌تر لازم دارد معذرت‌خواهی کنم. هر چند ممکن است این موضوع به خاطر طبیعت موضوع باشد و من نباید خودم را سرزنش کنم یا ممکن است بعداً معلوم شود که ایراد اثبات قبلی را به روشی ساده‌تر از آنچه که اکنون من از عهده‌اش برآمده‌ام می‌توان برطرف کرد. ولی چون در حال حاضر مهم‌ترین دغدغه من متقاعد کردن شماست خود را مجاز می‌دانم اثبات دیگری را برای تان بفرستم که آن را حتی پیش از اثبات قبلی یافته بودم.

ساختار اثبات

- ساختن یک دوسویی بین نقاط گنگ مربع (نقاطی که هر دو مولفه‌ی آن گنگ اند) و نقاط گنگ پاره خط
- نشان دادن اینکه اعداد گنگ بین $\circ$ و 1 را می‌توان در یک دوسویی با بازه بسته $\circ$ و 1 قرار داد.

«در هم تنیدن» کسره‌های مسلسل

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}$$

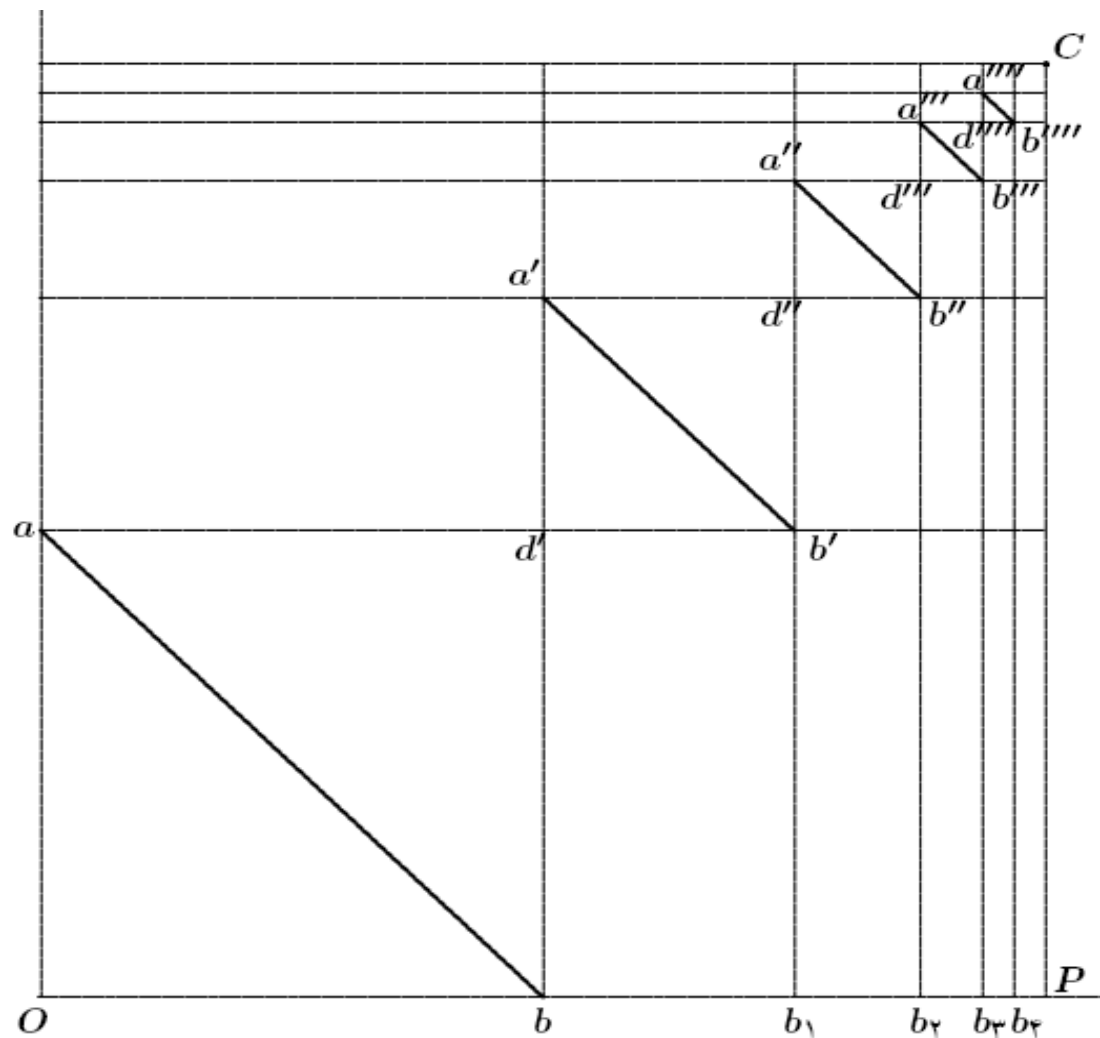
ساختار قسمت سخت اثبات

- نشان دادن اینکه اعداد گنگ بازه بسته $\circ$ و ۱ با بازه بسته $\circ$ و ۱ منهای یک دنباله شمارا از اعداد گنگ (که به یک میل می کنند) در تناظر یک به یک قرار دارند.
- نشان دادن اینکه این مجموعه دوم را می توان با بازه بسته $\circ$ و ۱ در تناظر یک به یک قرار داد.

برای اثبات قسمت دوم کافی است قضیه زیر را
به طور پیاپی به کار برد

اعدادی مانند y که می توانند هر یک از مقادیر بازه $(0, \dots, 1)$ به جز صفر باشند را می توان به صورتی یک به یک
به اعدادی مانند x نسبت داد که می تواند بدون هیچ محدودیتی هر یک از مقادیر بازه $(0, \dots, 1)$ باشند.

ساختن دو سویی مورد نظر



تابع کانتور از $[0, 1]$ به $[0, 1]$

دوباره بعد

سال‌هاست که من تلاش‌های انجام گرفته بر پایه کارهای گاوس، ریمان، هلمهولتز و دیگران را به منظور روشن نمودن تمامی پرسش‌های مرتبط با مبانی غایی هندسه تعقیب می‌کنم. موضوعی که توجه مرا به خود جلب کرده بود این بود که تمام کندوکاوهای شاخص در این حوزه از پیش فرض اثبات نشده‌ای پی‌گیری می‌شد که به نظر من نه تنها به خودی خود روشن نبود بلکه نیاز به توجیه داشت. منظورم این پیش فرض است که برای مشخص کردن نقاط یک منیفلد ρ تایی به طور سرتاسری پیوسته به ρ متغیر حقیقی مستقل نیاز است و در مورد هر منیفلد مفروض این تعداد مختصات را نه می‌توان افزود و نه کاست.

این پیش فرض از دید من هم پذیرفته شده بود و تقریباً متقاعد شده بودم که درست است. تنها تفاوت بین دیدگاه من و سایرین این بود که من آن را قضیه‌ای تلقی می‌کردم که نیاز مبرمی به اثبات داشت. پس این عقیده را در یک پرسش قالب‌بندی کرده و با بسیاری از همکارانم در گوتینگن، به ویژه در مراسم بزرگداشت گاوس، مطرح نمودم. پرسش این بود: "آیا می‌توان یک ساختار پیوسته ρ بعدی، که $\rho > 1$ ، را به صورتی یک به یک با یک ساختار پیوسته یک بعدی مرتبط نمود به صورتی که به هر نقطه از اولی فقط و فقط یک نقطه از دومی نسبت داده شود؟"

برای بسیاری از کسانی که این پرسش را از آنها پرسیدم با توجه به آشکار بودن خودبه خود این که تعیین یک نقطه در یک توسیع ρ بعدی همواره به ρ مختص مستقل ضروری است، این که چرا من چنین پرسشی را مطرح می‌کنم فوق‌العاده عجیب بود. با وجود این، هر کس که معنای این پرسش را درک کرد مجبور به تأیید این مطلب شد که این چرا به این پرسش باید بر اساس "آشکاری خود به خود" پاسخ نه داد به بررسی نیاز دارد. باید بگویم تا همین اواخر من هم از طرفدارن این مطلب بودم که به احتمال زیاد باید به این پرسش پاسخ منفی داد. تا این که اخیراً به رشته پیچیده‌ای از افکار برخورددم که بر اساس آنها قانع شدم که پاسخ این پرسش یک آری است که مولای درز آن نمی‌رود و به دنبال آن، اثباتی را یافتم که که پیروز برای‌تان فرستادم.

به این ترتیب می‌توانیم قدرت حیرت‌انگیزی را که در اعداد حقیقی معمولی یا اعداد گنگ نهفته است ببینیم. قدرتی که ما را قادر می‌سازند با استفاده از آنها به صورتی یکتا عناصر یک منیفلد p بعدی به صورت پیوسته را فقط با استفاده از یک مختص تعیین کنیم. یک بار دیگر می‌خواهم اضافه کنم که قدرت این اعداد از این هم فراتر می‌رود؛ یعنی همان‌طور که از چشم شما هم دور نخواهند ماند، اثبات مرا بدون زحمت زیاد می‌توان به منیفلدهای با بعد بسیار بزرگ گسترش داد، مشروط به این که بعد نامتناهی آنها دارای این ویژگی باشد که از نوع دنباله‌های نامتناهی ساده باشد.

حالا برای من روشن است که تمامی استنباط های ریاضی و فلسفی که بر پایه این پیش فرض نادرست انجام گرفته اند دیگر قابل پذیرش نیستند و تفاوت به دست آمده بین ساختارهای با بعد متفاوت را نه بر اساس تعداد مختصات مستقل عددی که تا این زمان یک صفت مشخصه به حساب می آمد، بلکه باید در اجزای دیگری جستجو کنیم.

ددکیند کجایی؟

۲۹ ژوئن

اگر حس می‌کنید من با درخواست‌های پیایی از لطف و صبر شما سوء استفاده می‌کنم بی‌تابی مرا در این مورد نادیده بگیرید. مطالبی که این اواخر برای شما فرستادم برای خودم هم آنقدر غیرمنتظره و تازه بودند که تا زمانی که از شما دوست محترم دربارهٔ صحت آنها پاسخی دریافت نکنم ذهنم آرام نخواهد گرفت. به همین دلیل تا زمانی که موافقت شما را دریافت نکرده باشم، فقط می‌توانم بگویم: *Je le vois, mais je ne le crois pas*. از شما درخواست می‌کنم برایم کارت پستالی بفرستید و به من اطلاع دهید فکر می‌کنید چقدر طول می‌کشد این موضوع را بررسی کنید و یا این که اصلاً من می‌توانم به دریافت پاسخی از شما به این درخواست در دسرسازم امیدوار باشم.

ددکیند، ۲ جولای

یک بار دیگر اثبات شما را بررسی کردم و هیچ خللی در آن
نیافتم؛ کاملاً مطمئنم که قضیه‌ی جالب شما درست است
و به خاطر آن به شما تبریک می‌گویم.

با وجود این همان‌طور که در کارت‌پستال قبلی هم اشاره کردم من می‌خواهم توضیحاتی دهم که در مخالفت با نتیجه‌گیری‌های مرتبط با مفهوم منیفلد ρ بعدی است که شما در نامهٔ ۲۵ ژوئن به اثبات این قضیه افزوده بودید. از عبارات شما این‌طور برمی‌آید - تعبیر من ممکن است درست نباشد - که با اتکا به قضیه‌تان می‌خواهید تردیدهایی در مورد معنا یا اهمیت این مفهوم القا کنید ...

بر خلاف این، من (علی‌رغم درستی قضیه شما یا حتی نتایج حاصل از تأملاتی که این قضیه منشأ آنهاست) اعتماد و اطمینانم را نسبت به این موضوع اعلام می‌کنم که بعد یک منیفلد پیوسته نخستین و مهم‌ترین ناوردای آن است (من حتی هنوز وقت نکرده‌ام که برای اثبات آن اقدام کنم) و خود را ملزم می‌دانم در این مورد از سایر نویسندگان پیشین دفاع کنم ... کسانی که به وضوح بر سر این پیش فرض کاملاً طبیعی به صورتی غیررسمی به توافق رسیده‌اند که در یک شیوه جدید تعیین نقاط یک منیفلد پیوسته با اتکا به مختصات جدید، این مختصات باید توابعی (به طور کلی) پیوسته از مختصات قبلی باشند ...

شما مجبور شده‌اید که یک نوع **ناپیوستگی** شدید را در
تناظر تان بپذیرید چنانکه همه چیز را تا کوچکترین
اجزایش در هم می‌ریزد به گونه‌ای که به نظر می‌رسد هر
جز به هم پیوسته در دامنه، در تصویر تجزیه شده و از
هم گسیخته می‌شود.

الان مدتی است که من فکر می‌کنم این قضیه درست است: "اگر بتوان یک تناظر مرتبه دوم یک به یک کامل بین نقاط یک منیفلد پیوسته a بعدی A و نقاط یک منیفلد پیوسته b بعدی B یافت در صورتی که a و b برابر نباشند، این تناظر لزوماً به شدت ناپیوسته خواهد بود."

منم می خواستم همینو بگم!

بیش از آنکه من بخواهم نتیجه‌ام علیه اعتقاد به نظریه‌ی
منیفلد به کار گرفته شود، می‌خواهم برای محافظت از
قضیه‌های آن مورد استفاده قرار گیرد.

گفتمان

خوب است یا باید است؟