

فصل ۲: الگو و دنباله

الگو و دنباله خطی

درسنامه ۱

دنباله اعداد: به چند عدد دنبال هم یک دنباله می‌گوییم.

الگو: در واقع پیدا کردن رابطه‌ای، بین جملات (اعداد) یک دنباله است به طوری که بتوانیم جملات بعدی آن را حدس بزنیم؛ مثلاً

مثال: $\{5, 8, 11, 14, \dots\}$ = حدس بعدی $\Rightarrow$ ؟

الگوها و دنباله‌های مختلفی وجود دارد که یکی از ساده‌ترین آن‌ها معروف به الگو یا دنباله خطی است که به آن دنباله حسابی (عددی) نیز می‌گوییم.

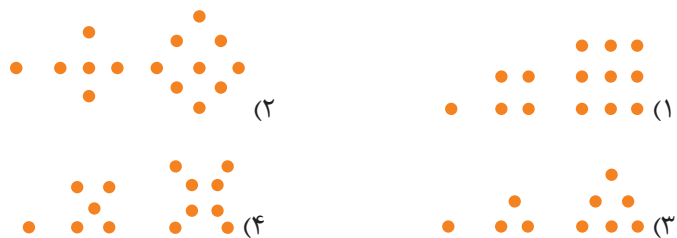
دنباله خطی: به دنباله‌هایی (الگوهای) مانند مثال بالا که در آن‌ها اعداد با شیب ثابتی در حال افزایش یا کاهش هستند را دنباله خطی می‌گوییم و یک دنباله خطی (درجه یک) به صورت $t_n = an + b$, $n \in \mathbb{N}$ نمایش می‌دهیم، که در آن n شماره جمله و a همان شیب ثابت دنباله است که به آن قدر نسبت دنباله نیز می‌گویند. این فرم نمایش t_n (مقدار جمله n ام) برحسب n (شماره جمله) را جمله عمومی دنباله (الگو) می‌گوییم.

در دنباله خطی تفاضل بین هر دو جمله متوالی، مقدار ثابتی است که همان قدرنسبت یا شیب بوده و ضریب n در جمله عمومی دنباله (الگو) می‌باشد.

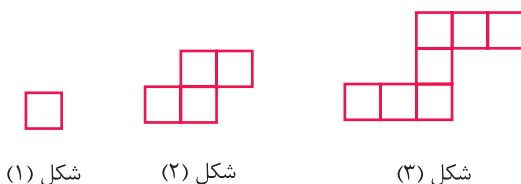
مثال: $\{5, 8, 11, 14, \dots\} \Rightarrow$ جمله عمومی الگو (دنباله) $t_n = 3n + 2$

در دنباله بالا جملات به اضافه ۳ شده‌اند، پس قدرنسبت دنباله یعنی ضریب n برابر ۳ است: $t_n = 3n + ?$. حال اگر $n = 1$ قرار دهیم، باید مقدار دنباله ۵ شود، پس علامت سؤال برابر ۲ است. می‌توانستیم بگوییم: برای $n = 2$ باید جواب ۸ شود که باز هم علامت سؤال همان ۲ می‌شود.

۱ تعداد نقاط در کدام یک از الگوهای زیر، یک الگوی خطی است؟



۲ با توجه به الگوی مقابل در شکل ۱۰ ام چند مربع داریم؟



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(۱) ۲۰

(۲) ۲۸

(۳) ۲۹

(۴) ۳۱

۳ الگوی سؤال قبل، شکل چندم دارای ۷۳ مربع است؟

(۱) ۲۴

(۲) ۲۶

(۳) ۲۹

(۴) ۲۵



الگوهای غیر خطی

درسنا ۲

الگوهای غیر خطی
 الگوی درجه دوم
 الگوی نمایی
 دیگر الگوهای غیر خطی مانند کسری، رادیکالی و ...

از مهم‌ترین الگوهای غیر خطی که در کتاب‌تان به آن اشاره شده است، الگوی درجه دوم و الگوی نمایی (دنباله هندسی) است:

الگوهای غیر خطی درجه دوم: $t_n = an^2 + bn + c; (a \neq 0)$

مثال: $t_n = 3n^2 - 5n + 1 \Rightarrow \{-1, 3, 13, 29, \dots\}$
 $+4 +10 +16$

همانطور که در مثال بالا می‌بینید در الگو (دنباله) درجه دوم، جملات با شیب ثابت تغییر نکرده‌اند، یعنی غیر خطی است. اما

دنباله تفاضلات آن به صورت $\{4, 10, 16, \dots\}$ می‌باشد. با اندکی دقت متوجه می‌شویم که خود دنباله تفاضلات در دنباله درجه دوم خطی و شیب (قدر نسبت) آن ۶ بوده که $6 \div 2 = 3$ همان ضریب n^2 است.

نتیجه دنباله درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ یک دنباله غیر خطی است، اما دنباله تفاضلات جملات متوالی آن، خطی است که اگر قدرنسبت (شیب) این دنباله تفاضلات را نصف کنیم، ضریب n^2 بدست می‌آید.

الگوی مربعی

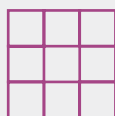
یک نوع الگوی غیر خطی درجه دوم است:



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$t_n = n^2 \Rightarrow \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ دنباله مربعی با شروع از ۱

$t_n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ دنباله مربعی با شروع از ۴

تذکر دقت کنید که در دنباله مربعی بالا قدرنسبت دنباله تفاضلات $\{5, 7, 9, \dots\}$ برابر ۲ و ضریب n^2 برابر یک است.

نکته دنباله‌های درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ شامل یک بخش مربعی an^2 یعنی a برابر دنباله مربعی و یک بخش درجه یک $bn + c$ می‌باشند، که با این دید می‌توان پس از پیدا کردن ضریب n^2 (نصف قدرنسبت دنباله تفاضلات)، جمله عمومی دنباله را بدست آورد.

در دنباله $\{1, 4, 11, 22, \dots\}$ جمله هفتم دنباله کدام است؟

۴ در دنباله $\{1, 4, 11, 22, \dots\}$ جمله هفتم دنباله کدام است؟

۳۷ (۱) ۶۹ (۲) ۵۶ (۳) ۷۹ (۴)

۵ جمله چندم دنباله درجه دوم $\{5, 8, 13, \dots\}$ برابر ۶۲۹ است؟

۲۴ (۱) ۲۵ (۲) ۲۶ (۳) ۲۷ (۴)

۶ در دنباله $\{5, 12, 22, 35, 51\}$ جمله بیستم دنباله کدام است؟

۶۵۱ (۱) ۶۷۲ (۲) ۶۲۴ (۳) ۶۴۷ (۴)

۷ با توجه به شکل‌های زیر در شکل چندم، ۱۴۰ نقطه خواهیم داشت؟

۹ (۱) ۱۰ (۲)

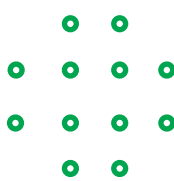
۱۱ (۳) ۱۲ (۴)

(کتاب درسی دهم و مشابه سنجش ۹۶)

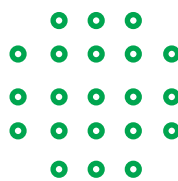
(کتاب درسی دهم)



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



نوعی دنباله غیر خطی درجه دوم است که ضریب n^2 در آن $(a = \frac{1}{2})$ است، به شکل‌ها و روابط زیر نگاه کنید:

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

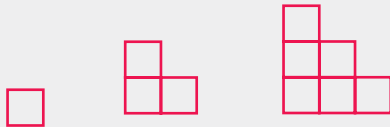


شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۱ نقطه

 $1+2=3$ نقطه $1+2+3=6$ نقطه

شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

تعداد مربع‌های $t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

برای محاسبه مجموع جملات یک دنباله خطی می‌توان از قاعده گوس استفاده کرد:

$$\text{مجموع} = \frac{(\text{جمله اول} + \text{جمله آخر}) \times \text{تعداد جملات}}{2}$$

$$t_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اولی آخری تعداد

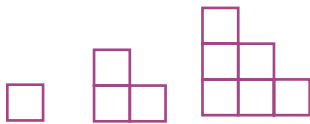
دقت کنید اگر دنباله مثلثی با شروع از صفر باشد $t_n = \frac{n(n-1)}{2}$ و اگر با شروع از ۳ باشد $t_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ است.

در دنباله مثلثی $\{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$ جمع هر دو جمله متوالی تشکیل یک دنباله مربعی به صورت $\{4, 9, 16, 25, \dots\}$ را می‌دهند.

به عبارتی اگر t_n یک دنباله مثلثی باشد: $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$

مثلاً مجموع جملات هفتم و هشتم یک دنباله مثلثی با شروع از ۱، برابر مربع شماره جمله بزرگتر است؛ یعنی $8^2 = 64$.

(مشابه انسانی ۹۳ داخل)



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

۸ در الگوی شکل مقابل، در شکل چهاردهم چند مربع داریم؟

(۱) ۸۴

(۲) ۹۸

(۳) ۱۰۵

(۴) ۱۰۸

۹ جمله بیستم دنباله اعداد $\{3, 6, 10, 15, \dots\}$ کدام است؟

(۴) ۲۴۱

(۳) ۲۳۱

(۲) ۲۱۰

(۱) ۲۵۳

(کتاب درسی)

۱۰ با توجه به الگوی شکل‌های زیر، در شکل دهم چند نقطه وجود دارد؟



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

(۱) ۲۰۰

(۲) ۱۹۰

(۳) ۲۱۰

(۴) ۲۳۱



۱۱ در الگوی شکل مقابل مجموع تعداد نقطه‌های شکل پانزدهم و شانزدهم کدام است؟



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

- (۱) ۲۵۶
(۲) ۲۲۵
(۳) ۴۰۰
(۴) ۳۸۶

الگوهای دو رنگی: گاهی فقط روی دنباله رنگی خواسته شده تمرکز می‌کنیم و گاهی باید هردو رنگ را مد نظر قرار داده و ارتباط بین آن‌ها را بررسی کنیم.

۱۲ با توجه به الگوی زیر، برای ۶۴ کاشی تیره، چند کاشی سفید لازم است؟

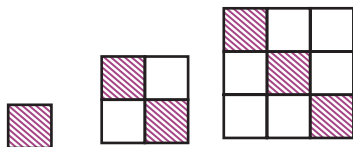
(کتاب درسی)



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید
۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید

- (۱) ۱۰۰
(۲) ۵۰
(۳) ۲۰۰
(۴) ۳۰

۱۳ در الگوی شکل مقابل، تعداد مربع‌های سفید شکل پانزدهم کدام است؟

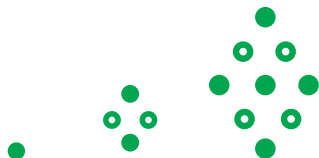


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

- (۱) ۲۰
(۲) ۲۴۰
(۳) ۲۰۵
(۴) ۱۹۵

۱۴ در الگوی زیر، تعداد دایره‌های توپر در شکل یازدهم کدام است؟

(انسانی داخل ۸۸)

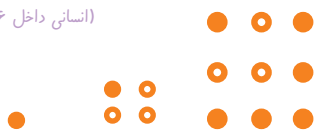


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

- (۱) ۶۱
(۲) ۶۲
(۳) ۶۳
(۴) ۶۴

۱۵ در الگوی زیر تفاضل صفرهای توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است؟

(انسانی داخل ۸۶)



شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

- (۱) صفر
(۲) ۱۷
(۳) ۱۹
(۴) ۲۱

۱۶ در الگوی سؤال قبل، تعداد دایره‌های تو خالی (سفید) در جمله سیزدهم کدام است؟

- (۱) ۵۵
(۲) ۶۶
(۳) ۷۲
(۴) ۷۸

گاهی مسئله دسته‌های مختلفی از اعداد است که باید یک الگوی مناسب برای آن پیدا کنیم، به دو سؤال از کنکور سراسری که در زیر آمده دقت کنید:

۱۷ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می‌کنیم که تعداد هر دسته برابر شماره آن دسته باشد: $(۱), (۲, ۵), (۷, ۹, ۱۱), \dots$ ، مجموع

(تجربی داخل ۹۴)

دو جمله اول و آخر دسته سی ام کدام است؟

- (۱) ۱۷۰۰
(۲) ۱۷۵۰
(۳) ۱۸۰۰
(۴) ۱۸۵۰

۱۸ در سؤال قبل، جمله آخر دسته بیستم کدام است؟

(ریاضی خارج ۹۱)

- (۱) ۴۱۹
(۲) ۴۲۰
(۳) ۴۱۸
(۴) ۴۲۱

سوالات بیشتر از تیپ مسائل بالا را می‌توانید در آزمون‌های جامع (۲) و (۳) آفر همین فصل ببینید.



دنباله‌های بازگشتی: در این دنباله‌ها، هر جمله برحسب جمله یا جملات قبلی و بعدی داده می‌شود که با داشتن یک یا دو جمله از آن، می‌توان بقیه جملات و در نتیجه الگوی بین آن‌ها را بدست آورد.

$$\dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$$

دقت کنید معمولاً در این مسائل ساده‌تر است که فرم بازگشتی را به بیان فارسی برگردانید؛ مثلاً:

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_2 + a_1 + 3 \\ a_4 = a_3 + a_2 + 4 \\ \vdots \\ a_{10} = a_9 + a_8 + 1 \end{cases}$$

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n + 2 \Rightarrow$ هر جمله برابر است با مجموع دو جمله قبلی به اضافه شماره آن جمله

معمولاً در این مسائل یک یا دو تا از جملات (مثلاً a_1) را می‌دهند، پس باید از آن جمله معلوم شروع کرده و طبق ترجمه فارسی که انجام داده‌ایم یا براساس عددگذاری در n ، بقیه جملات را بدست بیاوریم. الگو هم نمی‌خواهد!

گاهی بعد از پیدا کردن چند جمله، الگویی برای آن می‌یابیم و گاهی هم مثل همین سؤال ۱۹ (کنکور ۹۵) ساده‌تر از این فرماست!!

۱۹ در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ، جمله هشتم این دنباله کدام است؟ (تجربی داخل ۹۵)

$$127 \quad (1) \quad 159 \quad (2) \quad 247 \quad (3) \quad 255 \quad (4)$$

۲۰ دنباله فیبوناچی به صورت $F_1 = F_2 = 1$ و $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ را در نظر بگیرید. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

$$8 \quad (1) \quad 13 \quad (2) \quad 21 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

۲۱ در یک دنباله با جمله n ام a_n داریم: $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (n+1)$ جمله سی ام این دنباله کدام است؟

$$365 \quad (1) \quad 465 \quad (2) \quad 435 \quad (3) \quad 496 \quad (4)$$

دیگر دنباله‌های معمولی:

۲۲ جمله عمومی دنباله $\left\{-1, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \dots\right\}$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟

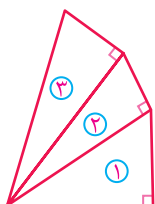
$$(-1)^n \frac{2n-1}{2^{n-1}} \quad (1) \quad (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} \quad (2)$$

$$(-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^n} \quad (3) \quad (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \quad (4)$$

۲۳ جمله $(2n-1)$ ام دنباله‌ای به صورت $n^2 + 1$ است جمله پنجم این دنباله کدام است؟

$$11 \quad (1) \quad 26 \quad (2) \quad 10 \quad (3) \quad 15 \quad (4)$$

۲۴ یک سری مثلث قائم الزاویه که همگی در یک رأس مشترک اند و اندازه یک ضلع قائمه همه آن‌ها ۱ واحد است، چنان رسم می‌شوند که ضلع قائم مثلث بعدی وتر مثلث قبلی است. مساحت نهمین مثلث کدام است؟ (تجربی ۸۸)



$$\frac{3}{4} \quad (1) \quad \frac{5}{4} \quad (2)$$

$$\sqrt{2} \quad (3) \quad \frac{3}{2} \quad (4)$$



دنباله حسابی (تعریف و جمله عمومی)



خب تازه میشه گفت این فصل داره شروع میشه!!! در این فصل دو دنباله مهم رو کاملاً تحلیل و بررسی می‌کنیم، دنباله حسابی و دنباله هندسی.

دنباله حسابی، یک الگوی خطی است که با شیب (قدرنسبت) ثابتی در حال افزایش یا کاهش می‌باشد، به عبارتی اختلاف هر دو جمله متوالی، مقدار ثابتی است که به آن قدرنسبت می‌گوییم و با d نشان می‌دهیم.

مثلاً در دنباله $3, 7, 11, 15, \dots$ قدرنسبت $d = 4$ و دنباله افزایشی است، اما در $d = -4, -1, 3, \dots$ و دنباله کاهشی است. در هر دو دنباله مذکور جمله اول $a = 3$ است.

$$\{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a + (n-1)d & \text{جمله عمومی (n ام) دنباله حسابی} \\ a & \text{جمله اول} \end{cases}$$

اگر d را در پرانتز ضرب کنیم داریم: $a_n = dn + a - d$ یعنی اولاً دنباله حسابی درجه ۱ (خطی) است، ثانیاً ضریب n همان قدرنسبت (شیب) است.

$$(نکته) \begin{cases} d > 0 \Rightarrow \text{دنباله حسابی صعودی} \\ d < 0 \Rightarrow \text{دنباله حسابی نزولی} \\ d = 0 \Rightarrow \text{دنباله حسابی ثابت} \end{cases}$$

در حالت کلی مسائل این درسنامه دو مدل هستند: برخی شماره جمله را داده و مقدار جمله را می‌خواهند که از فرمول $a_n = a + (n-1)d$ استفاده می‌کنیم و در مدل دیگر مقدار جمله را داده و شماره جمله را می‌خواهند، می‌توان ابتدا جمله عمومی را با همین فرمول بدست آورد و برابر مقدار داده شده قرار داد تا n بدست آید و یا می‌توان مستقیماً از فرمول زیر استفاده کنیم

$$که از فرمول اصلی گرفته شده است: n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 \quad \text{تعداد جملات (شماره جمله)}$$

نکته همانطور که گفته شد، قدرنسبت دنباله حسابی، همان عدد ثابتی است که به هر جمله اضافه و یا از آن کم می‌شود تا جمله بعدی را بسازد یعنی در واقع $d = a_2 - a_1$ یا $d = a_3 - a_2$ یا، فرقی ندارد؛ هر جمله منهای جمله قبلی برابر قدرنسبت است، بهتر است بگوییم: $d = a_{n+1} - a_n$ یا $d = a_n - a_{n-1}$

۲۵ کدام دنباله زیر حسابی است؟

$$(1) 2^n \quad (2) \sqrt{2n+1} \quad (3) \frac{5}{n+1} \quad (4) (n+1)^2 - n^2$$

۲۶ جملات دنباله a_n به صورت $\{-1, 1, 3, 5, \dots\}$ است. دنباله $b_n = a_n + a_{n+1}$ چگونه است؟

$$(1) \text{ حسابی با قدرنسبت } 2 \quad (2) \text{ حسابی با قدرنسبت } 4 \quad (3) \text{ دنباله ثابت} \quad (4) \text{ دنباله ای غیر حسابی}$$

۲۷ چندمین جمله از دنباله حسابی $2, 5, 8, \dots$ برابر ۵۶ است؟

$$(1) 17 \quad (2) 18 \quad (3) 19 \quad (4) 20$$

۲۸ جمله دهم از دنباله حسابی $\frac{1}{\sqrt{2-1}}, 3+2\sqrt{2}, 5+\frac{6}{\sqrt{2}}, \dots$ کدام است؟

$$(1) 19+10\sqrt{2} \quad (2) 19+9\sqrt{2} \quad (3) 20+11\sqrt{2} \quad (4) 20+10\sqrt{2}$$

۲۹ چندمین جمله از دنباله حسابی $2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \dots$ چهار و نیم برابر جمله چهارم است؟

$$(1) 20 \quad (2) 22 \quad (3) 25 \quad (4) 27$$

۳۰ در دنباله حسابی $65, 62, 59, \dots$ اولین جمله منفی جمله چندم دنباله است؟

$$(1) 21 \quad (2) 22 \quad (3) 23 \quad (4) 24$$

۳۱ چه تعداد از جملات دنباله $3, 7, 11, \dots$ اعداد سه رقمی هستند؟

$$(1) 224 \quad (2) 225 \quad (3) 226 \quad (4) 223$$



چند رابطه مهم در دنباله حسابی

درسنامه ۶

در اینجا می‌خواهیم یک مطلب مهم رو یاد بگیرید. آنقدر این مطلب مهم بوده که در یک درسنامه جداگانه گذاشتیم براتون!!!

نکته اگر a_n و a_m جملات n ام و m ام یک دنباله حسابی باشند، آن گاه:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_n = a_m + (n-m)d \Rightarrow a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \end{cases}$$

اینو که بلر بودی!!

نتیجه با معلوم بودن دو جمله مختلف از یک دنباله حسابی، به سادگی با رابطه $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$ یعنی $d = \frac{\text{اختلاف مقدار جملات}}{\text{اختلاف شماره جملات}}$ می‌توان قدرنسبت را بدست آورد.

یه وقتایی داریم دانش‌آموز d, a_m رو داره ولی برای اینکه a_n را از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ بدست بیاره، میره و از a_m ، ابتدا a_1 را بدست بیاره و بعد در a_n جایگزاری میکنه!!! آفه پکاریه چرا از $a_n = a_m + (n-m)d$ استفاده نمی‌کنید که a_1 لازم نباشه!!!

مثلاً: $\begin{cases} d = 3 \\ a_5 = 7 \end{cases} \xrightarrow{a_{15}=?} a_{15} = a_1 + 14d \xrightarrow{\text{اما بهتره بگیم}} a_{15} = a_5 + 10d = 7 + 10 \times 3 = 37$

(مشابه کتاب درسی)

۲۲ در یک دنباله حسابی جمله سوم ۱۵ و جمله دهم برابر ۶- است. جمله پانزدهم این دنباله کدام است؟

- (۱) -۲۴ (۲) -۲۱ (۳) -۱۸ (۴) -۲۷

(مشابه کتاب درسی)

۲۳ در یک دنباله حسابی جمله چهارم ۵- و جمله دوازدهم ۲۷ است. جمله چندم دنباله برابر ۹۹ است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۲۹ (۳) ۳۰ (۴) ۳۱

(آزاد ۷۸)

۲۴ جمله دهم یک دنباله حسابی از جمله سوم آن ۴۲ واحد کمتر است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) -۶ (۴) -۴

۲۵ در یک دنباله حسابی جمله پنجم برابر ۵ و جمله هشتم از جمله پانزدهم ۱۴ واحد بیشتر است، جمله بیستم دنباله کدام است؟

- (۱) -۲۳ (۲) -۲۷ (۳) -۳۳ (۴) -۲۵

(آزاد ۷۸)

۲۶ در دنباله حسابی $2, \frac{7}{4}, \dots$ جملات $a_3, a_7, a_{11}, \dots$ تشکیل یک دنباله حسابی دیگر می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) -۱ (۳) -۴ (۴) $\frac{1}{4}$

۲۷ در دنباله حسابی با جمله n ام t_n ، $t_m = n$ ، $t_n = m$ می‌باشد، در این صورت t_{m+1} کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $n+1$ (۳) $n-1$ (۴) $m-1$

در سؤال بالا t_{m+n} مقدار است؟؟؟ در آزمون جامع (۲) حل شده!!

پیشینه عزیزان در حالت کلی با معلوم بودن دو دسته از اطلاعات یک دنباله حسابی می‌توان با تشکیل و حل یک دستگاه دو معادله جمله اول (a) و قدرنسبت (d) را بدست آورد و با داشتن آن دو هر چیزی بدست می‌آید. در درسنامه قبل، در آن دو دسته اطلاعات چون دو جمله معلوم بود، ما به جای حل دستگاه از روابط گفته شده استفاده کردیم. ولی همیشه که اینجوری نیست؛ گاهی می‌بوریم دستگاه تشکیل دهیم!

۲۸ در یک دنباله حسابی، جمله اول و پنجم قرینه یکدیگرند و مجموع جملات ششم و دهم دنباله ۳۰- است. جمله چندم این دنباله ۵۴- است؟

- (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۱ (۴) ۲۲

(ریاضی خارج ۸۵)

۲۹ در یک دنباله حسابی، مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد، جمله یازدهم کدام است؟

- (۱) ۷/۵ (۲) ۸ (۳) ۸/۵ (۴) ۹



روابط اندیسی در دنباله حسابی

درسنا مه ۷

قبل از روابط اندیسی بگم که گاهی فقط یک دسته اطلاعات از دنباله حسابی معلوم است که قاعدتاً با یک معادله نمی توان دو مجهول a و d را بدست آورد؛ اما می توان رابطه ای بین a ، d ، بدست آورد که فواسته سؤال مرتبط با آن رابطه بدست آمده است.

فب، اندیس همان شماره جمله است (در اینجا) مثلاً در a_n ، n را اندیس یا شماره جمله می گوئیم که روابط خاصی دارد؛

دانستن روابط اندیسی زیر بین عملیات حسابی و شماره عملیات در حل مسائل شامل یک دسته اطلاعات مفید خواهد بود.

چون

نکته ۱ $n + m = p + q \Rightarrow a_n + a_m = a_p + a_q$ (مثال) $a_4 + a_6 = a_1 + a_9 \Rightarrow 4 + 6 = 1 + 9$

نکته ۲ $\begin{cases} n + m = 2k \Rightarrow a_n + a_m = a_k + a_k = 2a_k \\ k = \frac{n+m}{2} \Rightarrow a_k = \frac{a_n + a_m}{2} \end{cases}$ (مثال) $a_4 + a_6 \neq a_1 \Rightarrow a_4 + a_6 = 2a_5$ یا $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2}$

نکته ۳ $n + m + p = 3k \Rightarrow a_m + a_n + a_p = 3a_k$ مثلاً $\xrightarrow{\text{مدل سه تایی}} a_1 + a_2 + a_9 = 3a_4 \xrightarrow{\text{چون}} 1 + 2 + 9 = 12 = 3 \times 4$
 $\searrow \Rightarrow 2a_6$ یا a_{12}

این سه تا سؤال پایین رو حل کن تا فوب روی این درسامه مسلط بشی.

۴۰. مجموع جملات چهارم و دوازدهم یک دنباله حسابی برابر ۲۰ است. جمله هشتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶

۴۱. در یک دنباله حسابی با جمله n ام t_n ، $t_3 + t_{14} + t_{19} = 48$ است. جمله دوازدهم دنباله کدام است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۳۶ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۴۲. در یک دنباله حسابی مجموع جملات دوم و هشتم برابر ۱۲ است. مجموع جملات سوم، پنجم و هفتم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱۸ (۳) ۳۰ (۴) ۶

۴۳. در یک دنباله حسابی $t_5^2 - t_{15}^2 = 7$ و $t_{10} = 7$ است. جمله بیستم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۱۴ (۳) ۳۲ (۴) ۲۵

فرم خاصی از نوشتن چندجمله متوالی در یک دنباله حسابی

درسنا مه ۸

در برخی مسائل که بحث ضرب و جمع جملات دنباله حسابی مطرح است، ساده تر است سه جمله متوالی را به صورت $x-d$ ، x ، $x+d$ نشان دهیم:

نکته $x-d, x, x+d$ سه جمله متوالی حسابی $\begin{cases} \text{مجموع سه جمله متوالی} = x-d + x + x+d = 3x \\ \text{حاصل ضرب سه جمله متوالی} = (x-d).x.(x+d) = x(x^2 - d^2) \end{cases}$ اتحاد مزدوج رفتیم

نکته جمله وسط $5x \Rightarrow 5 \times$ مجموع $x-2d, x-d, x, x+d, x+2d \Rightarrow$ پنج جمله متوالی دنباله حسابی

نتیجه مجموع تعداد فردی از جملات متوالی یا متساوی الفاصله در یک دنباله حسابی برابر (جمله وسط $\times$ تعداد جملات) است.

مثال ۱ متوالی $a_5 + a_6 + a_7 = 3a_6$

مثال ۲ $a_7 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{12} = 5a_7$ متساوی الفاصله $\xrightarrow{\text{یا اینجوری}} a_7 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{12} = 5a_7$

در مثال ۲ بالا جملات متوالی نیستند اما تقارن دارند؛ از طرفی می دانیم $a_7 + a_{12} = 2a_7$ ، $a_4 + a_{10} = 2a_7$ پس $2a_7 + 2a_7 + a_7 = 5a_7$

تذکر اگر تعداد جملات زوج باشد؛ مجموع آن ها برابر است با: (میانگین دو جمله وسط $\times$ تعداد)

البته در حالت تعداد جملات زوج توصیه می شود با فرمول $a_n = a + (n-1)d$ جملات را بر حسب a ، d نوشته و جمع بزنی تا دچار اشتباه نشویم.

نکته در برخی مسائل که صحبت از ضرب ۴ جمله متوالی حسابی باشد و مجبور باشیم از اتحاد مزدوج، جهت سادگی محاسبات استفاده کنیم، می توانیم دنباله زیر را با فرض قدرنسبت $2d$ نه d ! به صورت زیر بنویسیم و در پایان x و d را بیاییم:

$(x-3d), (x-d), (x+d), (x+3d) \longrightarrow (x^2 - d^2)(x^2 - 9d^2)$

تست نداریم اما سؤال ۴۹ رو با این روش حل کردیم



۴۴ در یک دنباله حسابی، مجموع پنج جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم، چند برابر جمله اول است؟

(تجربی خارج ۹۱)

$\frac{3}{2}$ (۱)	$\frac{5}{2}$ (۲)	۳ (۳)	۴ (۴)
-------------------	-------------------	-------	-------

سؤال بعدی قبلی مومه و احتمال اینکه در کنگره‌های ۹۸ به بعد مشابه آن بیار زیاده!!!

۴۵ مجموع پنج جمله اول از یک دنباله حسابی صعودی مساوی ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگتر سه برابر مجموع سه جمله کوچکتر است.

قدرنسبت آن کدام است؟ (انسانی داخل ۹۳) (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴ (۱)	۵ (۲)	۶ (۳)	۷ (۴)
-------	-------	-------	-------

۴۶ در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله متوالی برابر ۱۵ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱۰۵ است. جمله بزرگتر کدام است؟

۵ (۱)	۳ (۲)	۷ (۳)	۹ (۴)
-------	-------	-------	-------

درسنامه ۹ زاویه‌ها و دنباله حسابی

نکته اگر زاویه‌های یک مثلث تشکیل دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d بدهند حتماً زاویه متوسط 60° است، یعنی این سخ زاویه به صورت $60^\circ + d$ و $60^\circ - d$ خواهند بود.

↓
زاویه متوسط کوچکترین زاویه

اثبات این نکته در زیر آمده است:

$$(x-d) + x + (x+d) = 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$$

سه جمله متوالی حسابی (زاوایای مثلث)

نتیجه اگر زاوایای یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی بدهند، از آن‌جا که بزرگترین زاویه 90° و زاویه متوسط 60° است، پس قدرنسبت $d = 30^\circ$ و اندازه زاویه‌ها به صورت 90° و 60° و 30° خواهند بود.

نکته به طور کلی یک n ضلعی محدب برابر $(n-2)$ مثلث قابل افراز است. پس مجموع زاوایای آن برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است، که با تقسیم آن بر تعداد زاویه‌ها (n)، میانگین زاویه به صورت به $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ به دست می‌آید.

نکته اگر زاوایای یک n ضلعی محدبی که n عددی فرد باشد، تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، آن‌گاه زاویه متوسط برابر $x = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ است و زاویه‌ها به صورت $(x-d, x, x+d, \dots)$ خواهند بود.

مثال اگر زاوایای یک پنج ضلعی محدب تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، می‌توان آن‌ها را به صورت $(x-2d, x-d, x, x+d, x+2d)$ نشان داد، که زاویه متوسط (x) طبق یادآوری فوق برابر با $x = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$ است. لذا کوچکترین زاویه $108^\circ - 2d$ و بزرگترین زاویه $108^\circ + 2d$ و مجموع کوچکترین و بزرگترین زاویه‌ها در آن برابر $2x = 216^\circ$ خواهد بود.

تذکر برای n ضلعی‌های محدبی که n زوج باشد، زاویه متوسط نداریم. اما متوسط (میانگین) زاویه‌ها قابل تعریف و برابر $x = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ است، که اگر این زاویه تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، برای $n = 4$ به صورت زیر خواهد بوی:

$$x - \frac{3d}{2}, x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}, x + \frac{3d}{2} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجموع زوایا} = (4-2) \times 180^\circ = 360^\circ \\ \text{میانگین زوایا} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ \end{cases}$$

مثال زاوایای یک چهار ضلعی محدب تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت 30° می‌دهند. کوچکترین زاویه این چهار ضلعی چند درجه است؟

حل $x = \frac{2 \times 180^\circ}{4} = 90^\circ \Rightarrow x - \frac{3d}{2} = 90^\circ - \frac{3 \times 30^\circ}{2} = 45^\circ$



۴۷. زوایای یک مثلث تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت ۲۰ درجه داده‌اند. بزرگترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

- (۱) 60° (۲) 80° (۳) 100° (۴) 120°

۴۸. زوایای یک پنج ضلعی محدب تشکیل دنباله حسابی داده‌اند، به طوری که یک سوم مجموع سه زاویه بزرگتر مساوی مجموع دو زاویه کوچکتر است، بزرگترین زاویه آن کدام است؟

- (۱) 108° (۲) 162° (۳) 216° (۴) 135°

۴۹. اندازه زوایای یک چهارضلعی محدب تشکیل یک دنباله حسابی داده‌اند. اگر بزرگترین زاویه 150° باشد، قدرنسبت این دنباله چند درجه است؟

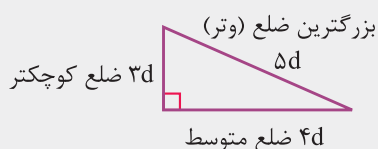
- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴) ۴۵

درست‌مه ۱۰

اضلاع مثلث قائم‌الزاویه و دنباله حسابی

در مورد زاویه و دنباله حسابی در درسنامه (۹) صحبت کردیم در اینجا می‌خواهیم درباره طول اضلاع مثلث، آن هم فقط قائم‌الزاویه صحبت کنیم:

نکته وقتی طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند به صورت $3d, 4d, 5d$ می‌باشند.



$$\text{محیط مثلث} = 3d + 4d + 5d = 12d$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 3d \times 4d = 6d^2$$

برای اثبات می‌توان از فیثاغورس استفاده کرد. کافی است $(x+d)^2 = x^2 + (x-d)^2$ را ساده کنیم تا $x = 4d$ (ضلع متوسط) بدست آید.

۵۰. اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ داده‌اند. طول وتر این مثلث کدام است.

- (۱) ۵ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

۵۱. اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنباله‌ای حسابی می‌دهند. اگر عدد مساحت آن پنج برابر عدد محیط آن باشد، اندازه ضلع متوسط کدام است؟

(سنجش ۹۳)

- (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴) ۴۰

درست‌مه ۱۱

دنباله باقیمانده‌های تقسیم

این درسنامه را با یک سؤال از شما شروع می‌کنم: اولین عدد طبیعی که باقیمانده تقسیم آن بر ۵ برابر ۳ باشد کدام است؟ لابر می‌گوید ۱۱۳ نه؟ پس پندر ۱۱۶۸ نه؟ فور ۱۱۳

بله، باقیمانده تقسیم ۳ بر ۵ برابر همان ۳ است! فب پس ۳ اولین عدد، ۸ دومین عدد و ۱۳ سومین عدد است، یعنی دنباله $3, 8, 13, \dots$ با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۵ حالا وقتشه نکته این درسنامه را بهتون بگم:

نکته مجموعه اعداد طبیعی که باقیمانده تقسیم آن‌ها بر b برابر r است، تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت $d = b$ و جمله اول $a_1 = r$ می‌دهند. فقط دقت کنید که اگر $r = 0$ باشد، یعنی بخش‌پذیر باشد، آنگاه چون صفر، عددی طبیعی نیست $a_1 = b$ می‌گیریم و جمله عمومی $t_n = bn$ می‌شود. یعنی هم a_1 و هم قدرنسبت d ، هر دو هستند.

۵۲. دنباله اعداد طبیعی که باقیمانده تقسیم آن‌ها بر ۷ برابر ۲ است را در نظر بگیرید. جمله بیستم این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۳۲ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۴۲ (۴) ۱۲۸

۵۳. چند عدد طبیعی سه رقمی وجود دارد که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشند؟

- (۱) ۱۴۹ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۱ (۴) ۱۵۲



شرط حسابی بودن سه عدد و محاسبه واسطه حسابی دو عدد

درسنا مه ۱۲

نکته وقتی a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند که دو برابر وسطی برابر حاصل جمع اولی و آخری باشد، یعنی:

$$2b = a + c \xrightarrow{\text{نتیجه}} b = \frac{a + c}{2}$$

برای اثبات آن کافی است به یاد آوریم که قدرنسبت این سه جمله از رابطه $d = b - a$ یا $d = c - b$ بدست می‌آید، پس $b - a = c - b$ است و از اینجا $2b = a + c$ می‌شود.

علاوه بر نکته خیلی مهم و کاربردی بالا، لازم است اعلام کنیم که میانگین یا واسطه حسابی دو یا چند عدد همانطور که خودتان بلد هستید، از تقسیم جمع اعداد بر تعداد آنها بدست می‌آید.

$$\text{جمع آن‌ها} = \frac{\text{واسطه حسابی چند عدد}}{\text{تعداد}} \Rightarrow \frac{\text{جمع دو عدد}}{2} = \text{واسطه حسابی دو عدد}$$

۵۴ اعداد $1 - 5p, 4 - 3p, 3 - 2p$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (ریاضی ۸۴ و مشابه شنجش ۹۵)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

(سنجش)

۵۵ واسطه حسابی بین دو عدد $1 + \sqrt{3}$ و $\frac{2}{1 - \sqrt{3}}$ کدام است؟

۱ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲)

صفر (۱)

۵۶ در دنباله حسابی $... y, -11, x, 23$ مقدار y کدام است؟

-۲۰ (۴)

-۲۲ (۳)

-۲۸ (۲)

-۳۸ (۱)

۵۷ در دنباله حسابی $7\sqrt{3} + a, b, \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ مقدار b کدام است؟

 $3 + 6\sqrt{3}$ (۴) $4 + 6\sqrt{3}$ (۳) $4 + 5\sqrt{3}$ (۲) $3 + 4\sqrt{3}$ (۱)درج k واسطه حسابی بین دو عدد a و b

درسنا مه ۱۳

اگر بین دو عدد a, b بخواهیم k عدد دیگر طوری قرار دهیم که این $k + 2$ عدد تشکیل دنباله‌ای حسابی بدهند (درج k واسطه حسابی) آن گاه قدرنسبت دنباله به صورت زیر خواهد بود:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} \Rightarrow d = \frac{t_{k+2} - t_1}{k+2-1} \Rightarrow d = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow \begin{cases} b \text{ عدد انتهایی} \\ a \text{ عدد ابتدایی} \\ k \text{ تعداد واسطه‌ها} \\ d \text{ قدر نسبت} \end{cases}$$

تذکر دقت کنید که اگر a را جمله اول (a_1) و b را جمله $(k+2)$ ام در نظر بگیرید، می‌توانید به جای فرمول بالا از فرمول اصلی $d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$ استفاده کنید. در حل تست‌ها اینکار را کرده‌ایم.

نکته توجه داشته باشید که تعداد واسطه‌های حسابی از تعداد جملات، دو واحد کمتر است.

$$n = \frac{b-a}{d} + 1 \xrightarrow{-2} \boxed{k = \frac{b-a}{d} - 1} \text{ تعداد واسطه‌های حسابی}$$

۵۸ بین ۸- و ۲۲ پنج عدد به گونه‌ای درج کرده‌ایم که هفت عدد حاصل تشکیل دنباله‌ای حسابی بدهند. قدرنسبت دنباله حاصل کدام است؟

۷/۵ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۵/۵ (۱)

۵۹ بین $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ و $6 + 22\sqrt{2}$ چند واسطه حسابی درج کنیم تا قدرنسبت دنباله حاصل، برابر $1 + 3\sqrt{2}$ باشد؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)



دو سؤال بالا که مستقیماً از فرمول‌ها بودند. سؤال بعدی را یک درجه، شاید ۴ پند درجه ۱۱ دشوارتر کرده ایم و به پورایی ترکیبی است. اما تو میتونی!!!

۶۰ جملات سوم و یازدهم یک دنباله حسابی، ۱۱ و ۴۳ است. در یک دنباله حسابی دیگر، بین اعداد ۳- و ۴۵ چند واسطه حسابی درج کنیم به طوری که جمله چهارم هر دو دنباله، یکسان باشد؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

درست‌مه ۱۴ جملات مشترک دو دنباله حسابی

جملات مشترک دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های d_1, d_2 تشکیل یک دنباله حسابی جدید می‌دهند که قدرنسبت آن ک.م.م d_1, d_2 می باشد. برای مشخص کردن اولین جمله مشترک، باید هردو دنباله را ادامه دهیم تا به اولین جمله مشترک برسیم.

تذکر برخی دانش آموزان برای محاسبه قدرنسبت جدید، جملات دنباله‌ها را ادامه می‌دهند تا دومین جمله مشترک را پیدا کنند؛ اما همانطور که در نکته بالا گفته شد، نیازی به این کار نیست، چون می‌توانیم ک.م.م d_1, d_2 را در نظر بگیریم.

۶۱ در دو دنباله حسابی به صورت " $2, 7, 12, \dots$ " و " $8, 11, 14, \dots$ " چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ (ریاضی خارج ۹۴ - مشابه خارج ۹۵)

- ۵۸ (۱) ۵۹ (۲) ۶۰ (۳) ۶۱ (۴)

۶۲ پنجاه جمله اول دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 7, d_1 = 4$ و پنجاه جمله اول دنباله حسابی با جمله اول $b_1 = -3, d_2 = 6$ چند جمله مساوی دارند؟

- ۲۹ (۱) ۲۸ (۲) ۱۷ (۳) ۱۶ (۴)

درست‌مه ۱۵ مجموع جملات با ردیف زوج و فرد در دنباله حسابی

به سادگی می‌توان ثابت کرد در یک دنباله حسابی با تعداد جملات زوج، مجموع جملات با شماره زوج به اندازه $\frac{n}{2}d$ از مجموع جملات با شماره فرد بیشتر هستند. اینطور بگم که:

$$S_{\text{زوج}} - S_{\text{فرد}} = \frac{n}{2}d$$

$$\text{اثبات} \begin{cases} \text{زوج} & S = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_n \\ \text{فرد} & S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{n-1} \end{cases}$$

$$S_{\text{زوج}} - S_{\text{فرد}} = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = d + d + \dots + d = \frac{n}{2}d$$

۶۳ در یک دنباله حسابی، با ۳۰ جمله، مجموع جملات با شماره زوج ۱۰۰ و مجموع جملات با شماره فرد ۱۴۵ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۶۴ در ۳۲ جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات با ردیف زوج ۱۲۰ و مجموع جملات کل جملات $\frac{8}{5}$ مجموع با ردیف فرد است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

- ۵ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۶ (۴)



اعمال جبری روی جملات دنباله حسابی

درسنا مه ۱۶

نکته ۱ اگر همه جملات یک دنباله حسابی را با عددی جمع یا تفریق کنیم، قدرنسبت دنباله تغییری نمی کند.

نکته ۲ اگر همه جملات یک دنباله را در k ضرب یا بر آن تقسیم کنیم، قدرنسبت نیز در عدد k ضرب یا تقسیم می شود.

نکته ۳ اگر به قدرنسبت دنباله ای k واحد اضافه یا کم کنیم به جمله n ام دنباله $(n-1)k$ واحد اضافه یا کم می شود.

نکته ۴ اگر به جمله اول دنباله ای k واحد اضافه یا کم کنیم، به جمله n ام نیز k واحد اضافه یا کم می شود.

۶۵ اگر قدرنسبت دنباله $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ برابر d باشد، قدرنسبت دنباله $2a_1 - 3, 2a_2 - 3, 2a_3 - 3, \dots$ کدام است؟

- (۱) d (۲) $2d$ (۳) $3d - 3$ (۴) $d - 3$

۶۶ در سؤال قبل قدرنسبت دنباله حسابی $a_3, a_7, a_{11}, \dots$ کدام است؟

- (۱) d (۲) $2d$ (۳) $4d$ (۴) $2d$

۶۷ در یک دنباله حسابی اگر به جمله اول ۳ واحد اضافه شود، به جمله بیستم چند واحد اضافه می شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۶۰ (۳) ۵۷ (۴) اضافه نمی شود.

۶۸ در یک دنباله حسابی اگر به قدرنسبت دنباله ۳ واحد اضافه شود، به جمله بیستم دنباله چند واحد اضافه می شود؟

- (۱) ۳ (۲) ۶۰ (۳) ۵۷ (۴) اضافه نمی شود.

فب حالا به سؤال ترکیبی از این درسامه! اعتماد به نفس داشته باش، تو میتونی!!!

۶۹ در یک دنباله حسابی اگر به جمله اول، ۴۲ واحد اضافه کنیم، از قدرنسبت دنباله چند واحد کم کنیم، به طوری که جمله پانزدهم دنباله تغییری نکند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

فرم بازگشتی دنباله حسابی

درسنا مه ۱۷

نکته می دانیم اختلاف دو جمله متوالی در دنباله حسابی برابر قدرنسبت است که در واقع با همین مفهوم می توان فرم بازگشتی دنباله حسابی را نوشت:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + d \\ a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

مثال $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 5 \Rightarrow d = +2 \Rightarrow \{5, 7, 9, 11, \dots\}$

تذکر در این مدل مسائل نام دنباله حسابی ذکر نمی شود که شما باید از روی فرم بازگشتی آن متوجه حسابی بودن آن شوید.

۷۰ در دنباله a_n ، $a_1 = 71$ و $a_n = a_{n+1} + 3$ این دنباله چند جمله مثبت دارد؟

- (۱) ۲۳ (۲) ۲۴ (۳) ۲۵ (۴) ۲۶

۷۱ در یک دنباله با جمله عمومی a_n ، داریم: $a_n - a_{n+1} = 3$ و جملات سوم و هفتم قرینه یکدیگرند. جمله پانزدهم دنباله کدام است؟

- (۱) -۳۰ (۲) ۳۰ (۳) -۳۲ (۴) ۳۲

۷۲ قطار سریع السیری به طور آزمایشی فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت و برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبلی کاسته می شود تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش بینی شده برسد. تعداد نوبت های آزمایشی کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

(انسانی داخل ۸۶)



بالافره دنباله حسابی در عین سادگی اما با تنوع سوال زیادهش مرسوم شد. دنباله هندسی تنوع سوال کمتری دارد، ولی وقتی با حسابی ترکیب بشه، سوالات جالبی میشه طرح کرد.

تعریف: اگر در دنباله‌ای، هر عدد از ضرب مقدار ثابتی در جمله قبل ساخته شود، یک دنباله هندسی به وجود می‌آید. در واقع نسبت دو جمله متوالی مقدار ثابتی است که به آن قدر نسبت می‌گوییم و با r نشان می‌دهیم. (قدیما با q نشان می‌دادند!) به مثال‌های زیر توجه کنید:

$3, 6, 12, 24, \dots \rightarrow \begin{cases} \text{افزایشی با جملات مثبت} \\ r = 2 \\ a_1 = \text{کوچکترین جمله} \end{cases}$	$-3, -6, -12, -24, \dots \rightarrow \begin{cases} \text{کاهشی با جملات منفی} \\ r = 2 \\ a_1 = \text{بزرگترین جمله} \end{cases}$
$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots \rightarrow \begin{cases} \text{کاهش با جملات مثبت} \\ r = \frac{1}{2} \\ a_1 = \text{بزرگترین جمله} \end{cases}$	$-3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \dots \rightarrow \begin{cases} \text{افزایشی با جملات منفی} \\ r = \frac{1}{2} \\ a_1 = \text{کوچکترین جمله} \end{cases}$

$3, -6, 12, -24, \dots \rightarrow r = -2$ ، جملات نوسانی، نه صعودی و نه نزولی

$3, 3, 3, 3, \dots \rightarrow r = 1$ دنباله ثابت، به اصطلاح هم صعودی و هم نزولی!

بررسی افزایش یا کاهش بودن دنباله هندسی به شفافیت دنباله حسابی نسبت و از قوانین زیر پیروی می‌کند:

$$\left\{ \begin{array}{l} r < 0 \Rightarrow \text{یکی در میان + و - عوض می‌شود، نه صعودی و نه نزولی} \\ r > 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{جملات مثبت} \Rightarrow \text{افزایشی} \\ \text{جملات منفی} \Rightarrow \text{کاهشی} \end{cases} \\ 0 < r < 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{جملات مثبت} \Rightarrow \text{کاهشی} \\ \text{جملات منفی} \Rightarrow \text{افزایشی} \end{cases} \\ r = 1 \Rightarrow \text{دنباله ثابت، هم صعودی و هم نزولی} \end{array} \right.$$

ژلوفن ۱ هرگاه در دنباله هندسی از عبارت غیر کاهشی یا غیر افزایشی صحبت شد، حتماً قدر نسبت منفی است ($r < 0$).

ژلوفن ۲ هرگاه در دنباله هندسی، همه جملات مثبت یا همگی منفی باشند (هم علامت) قطعاً $r > 0$ است.

یادآوری یک دنباله حسابی برای $d > 0$ ، افزایشی و برای $d < 0$ نسبت کاهشی و برای $d = 0$ ثابت است.

نتیجه دنباله ثابت $a, a, a, \dots$ هم حسابی و هم هندسی است. حسابی با قدر $d = 0$ و هندسی است با قدر نسبت $r = 1$.

نکته هر جمله تقسیم بر جمله قبلی $\Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ قدر نسبت $\Rightarrow$ در دنباله هندسی

هر جمله منهای جمله قبلی $= a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = \dots = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$ قدر نسبت $\Rightarrow$ در دنباله حسابی

فب حالا بریم سراغ مناسبه جمله عمومی دنباله هندسی و دیگر روابط آن:

$$\{a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, \dots\} \xrightarrow{\text{الگو}} a_1 \cdot r^n \xrightarrow{\text{جمله عمومی}} a_n = a_1 r^{n-1}$$

ژلوفن در جمله عمومی دنباله هندسی n در توان است، یعنی یک الگوی نمایی. فقط دقت کنید که عبارت توان باید درجه ۱ (خطی) باشد، مثلاً: $a_n = 3 \times 2^{5n+7}$

دقت کنید برای سرعت عمل در محاسبات مسائل دنباله هندسی لازم است شما توان‌های مختلف را به صورت جدول زیر حفظ باشید. مثلاً اگر ۲۴۳ دیدید، بدون معطلی بگویید ۳^۵ است!!!



$4 = 2^2$	$3 = 3^1$	$5 = 5^1$	$6 = 6^1$	$7 = 7^1$	توجه داشته باشید توان‌هایی که پایه ۴ یا ۸ باشد با توجه به رابطه $(a^n)^m = a^{nm}$ تبدیل به پایه ۲ می‌شوند: $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$ $64 = 2^6 = 4^3$
$8 = 2^3$	$9 = 3^2$	$25 = 5^2$	$36 = 6^2$	$49 = 7^2$	
$16 = 2^4$	$27 = 3^3$	$125 = 5^3$	$216 = 6^3$	$343 = 7^3$	
$32 = 2^5$	$81 = 3^4$	$625 = 5^4$			
$64 = 2^6$	$243 = 3^5$	$3125 = 5^5$			
$128 = 2^7$	$729 = 3^6$				
$256 = 2^8$					
$512 = 2^9$					
$1024 = 2^{10}$					

۷۳ کدام یک از دنباله‌های زیر یک دنباله هندسی است؟

$$a_n = 5^{n^2-1} \quad (4) \quad a_n = \frac{5}{2^{n+1}} \quad (3) \quad a_n = 2n + 3 \quad (2) \quad a_n = n^2 \quad (1)$$

۷۴ جمله اول (a) قدر نسبت (r) در دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = 2 \left(\frac{-1}{2} \right)^{n-1}$ کدام است؟

$$r = -\frac{1}{2}, a = -\frac{3}{2} \quad (4) \quad r = \frac{1}{4}, a = -\frac{3}{2} \quad (3) \quad r = -\frac{1}{2}, a = 3 \quad (2) \quad r = \frac{1}{4}, a = 3 \quad (1)$$

۷۵ جمله دوازدهم دنباله هندسی $\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, 3, -6, \dots$ و ۱۲ کدام است؟

$$\frac{-3}{512} \quad (4) \quad \frac{3}{512} \quad (3) \quad -\frac{3}{1024} \quad (2) \quad \frac{3}{1024} \quad (1)$$

۷۶ یازدهمین جمله دنباله حسابی $\dots, 5, 9, 13$ ، برابر جمله چندم دنباله هندسی $\dots, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ است؟

$$(1) \text{ پنجم} \quad (2) \text{ ششم} \quad (3) \text{ هفتم} \quad (4) \text{ هشتم}$$



در دنباله هندسی نیز مانند دنباله حسابی با معلوم بودن دو دسته اطلاعات از دنباله می توان با تشکیل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول و حل آن، قدر نسبت (r) و جمله اول (a) را به دست آورد؛ با این تفاوت که در دنباله حسابی، حل دستگاه به روش حذفی جمع یا تفریق دو معادله انجام می شد، اما در دنباله هندسی حل دستگاه به روش تقسیم کردن دو معادله بر هم و ساده سازی انجام می گیرد و گاهی قبل از تقسیم کردن نیاز به فاکتورگیری است.

زلفون اگر دو جمله مختلف از یک دنباله هندسی معلوم باشند به سادگی می توان r و a و هر جمله ایی از آن را به دست آورد. به روابط زیر دقت کنید:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \xrightarrow{\text{تعمیم}} a_n = a_m r^{n-m} \xrightarrow{\text{رابطه مهم}} \frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$$

مثلاً اگر a_7, a_3 معلوم باشند آنگاه:

$$\begin{cases} \frac{a_7}{a_3} = r^{7-3} = r^4 \\ \frac{a_7}{a_3} = \frac{ar^6}{ar^2} = r^{6-2} = r^4 \end{cases}$$

به هر حال با معلوم بودن r و قرار دادن آن در یکی از جملات، a_1 نیز به دست می آید. دقت کنید اگر a_n را بخواهند، نیازی به a_1 نیست، چون از رابطه $a_n = a_m r^{n-m}$ هم میشه استفاده کنیم..

تذکر اگر دو جمله از دنباله هندسی مساوی هم باشند، قطعاً $r = 1$ یا $r = -1$ بوده است $\left(\frac{am}{an} = r^{m-n} = 1 \right)$

یعنی به صورت $a, a, a, a, \dots$ یا $a, -a, a, -a, \dots$ است. اگر در مسئله قید شود که مجموع جملات دنباله هندسی صفر است، قطعاً $r = -1$ و تعداد جملات زوج بوده است!!

۷۷ در یک دنباله هندسی غیر کاهشی، جملات سوم و هفتم دنباله ۱۱۲ و ۷ هستند جمله دهم دنباله کدام است؟

$$\frac{-7}{256} \quad (4) \qquad \frac{7}{256} \quad (3) \qquad \frac{-7}{128} \quad (2) \qquad \frac{7}{128} \quad (1)$$

۷۸ در یک دنباله هندسی غیر کاهشی، مجموع دو جمله اول ۷۲ و مجموع دو جمله دوم، برابر ۸ است. کوچکترین جمله این دنباله کدام است؟

(مشابه سنجش ۹۵)

$$-36 \quad (4) \qquad -54 \quad (3) \qquad -72 \quad (2) \qquad -108 \quad (1)$$

۷۹ در یک دنباله هندسی t_n با جملات مثبت، $t_1, t_4, t_6 = 24$ و $\frac{t_5}{t_7} = \frac{1}{3}$ است. جمله سوم دنباله کدام است؟

$$\frac{1}{4} \quad (4) \qquad 4 \quad (3) \qquad \frac{1}{2} \quad (2) \qquad 2 \quad (1)$$

۸۰ در یک دنباله هندسی غیر ثابت با جمله عمومی a_n ، $a_4 = a_1 = 2$ است. مجموع هفده جمله اول این دنباله کدام است؟

$$-2 \quad (4) \qquad 2 \quad (3) \qquad 34 \quad (2) \qquad \text{صفر} \quad (1)$$

۸۱ در یک دنباله هندسی با جملات منفی اگر جمله هفتم ۲ برابر جمله پنجم باشد، مجموع سه جمله پنجم چند برابر مجموع سه جمله دوم است؟

$$-16\sqrt{2} \quad (4) \qquad -16 \quad (3) \qquad 16\sqrt{2} \quad (2) \qquad 16 \quad (1)$$



فرم بازگشتی دنباله هندسی

درسنا مه ۲۰

با توجه به تعریف دنباله هندسی هر جمله r برابر جمله قبل است (r قدر نسبت)، پس به بیان ریاضی یعنی $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ یا $a_{n+1} = ra_n$. به این صورت نمایش دنباله هندسی، فرم بازگشتی آن می‌گوییم.

دقت کنید ممکن است نمایش به صورت $a_n = ra_{n-1}$ باشد، به هر حال مهم یک مطلب است: جمله قبلی $r \times$ = هر جمله

یادآوری در دنباله حسابی $a_{n+1} = a_n + d$ یا $a_n = a_{n-1} + d$ بود! در واقع همان تعریف قدر نسبت که گفتیم: $a_{n+1} - a_n = d$

حل یک سوال از این نکته، فالی از لطف نیست. خیلی دقت کنید که سوتی ندرید!

۸۲ اگر جمله n ام یک دنباله a_n باشد، به طوری که $a_1 = 4$ و $a_n + 2a_{n+1} = 0$ ، آنگاه جمله دوازدهم این دنباله کدام است؟

$$\frac{-1}{512} \quad (1) \quad \frac{1}{512} \quad (2) \quad \frac{1}{1024} \quad (3) \quad \frac{-1}{1024} \quad (4)$$

۸۳ در دنباله a_n ، $a_{n+1} = 3a_n$ و $a_4 = 54$. جمله n ام دنباله کدام است؟

$$\frac{2}{3^{n-1}} \quad (1) \quad 2 \times 3^{n+1} \quad (2) \quad 2^{n-3} \times 3^{n-1} \quad (3) \quad 2 \times 3^{n-1} \quad (4)$$

دنباله هندسی و درصد افزایش یا کاهش جملات

درسنا مه ۲۱

نکته اگر در دنباله‌ای هر جمله نسبت به جمله قبل $x\%$ کمتر یا بیشتر باشد، d آنگاه دنباله مذکور یک دنباله هندسی با قدر نسبت

$$r = 1 \pm \frac{x}{100} \text{ است.}$$

برای ملموس‌تر شدن نکته بالا به مثال زیر توجه کنید. اثبات نکته هم در بطن حل مثال آمده است!

مثال در یک دنباله با جمله اول ۵، هر جمله نسبت به جمله قبل ۲۰٪ افزایش یافته است. جمله عمومی این دنباله کدام است؟

$$\text{حل) } \begin{cases} a_2 = a_1 + \frac{20}{100} a_1 = (1 + 0.2) a_1 = 1.2 a_1 \\ a_3 = a_2 + \frac{20}{100} a_2 = (1 + 0.2) a_2 = 1.2 a_2 = 1.2 \times 1.2 a_1 = (1.2)^2 a_1 \\ a_n = a_1 \times (1.2)^{n-1}, r = 1.2 \end{cases}$$

$$a_n = 5 \times (1.2)^{n-1} = 5 \times \left(\frac{12}{10}\right)^{n-1} = 5 \times \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} = \frac{6^{n-1}}{5^{n-2}}$$

دقت کنید اگر در مثال بالا ۲۰٪ کاهش داشتیم، قدر نسبت $r = 1 - 0.2 = 0.8$ یا همان ۸۰٪ بود.

تذکر در مسائل کاربردی این مدل دنباله‌های هندسی اگر مقدار اولیه a باشد، پس از n روز یا n سال، ar^n داریم نه ar^{n-1} برای درک

بهتر این تذکر، دو سؤال بعدی را حل کنید.

۸۴ در یک بانک، اگر سود سپرده گذاری ۲٪ درصد سالانه باشد، با مبلغ اولیه سپرده گذاری P ، پس از پایان سال n ام، مبلغ کل سپرده

چقدر خواهد شد؟

$$\begin{aligned} P \times (0.2)^{n-1} \quad (1) & \quad P \times (0.2)^n \quad (2) \\ P \times (1.2)^{n-1} \quad (3) & \quad P \times (1.2)^n \quad (4) \end{aligned}$$

۸۵ در ظرف آبی که در آن سوراخی ایجاد شده است، هر روز $\frac{1}{5}$ (۲۰ درصد) آب آن هدر می‌رود. پس از ۵ روز، حجم آب ظرف حدوداً

(مشابه به تمرین کتاب درسی)

چه کسری از حجم اولیه آن است؟

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad \frac{1}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \text{صفر} \quad (4)$$



مجموع جملات با ردیف زوج یافرد در یک دنباله هندسی

درسنامه ۲۲

با اینکه موضوع مجموع جملات دنباله هندسی (s_n) در کتاب درسی ریاضی یازدهم تجربی مطرح نشده است، اما نکته زیر برگرفته از تعریف دنباله هندسی و در چهار چوب مطالب کتاب درسی می‌باشد و امکان طرح سوال از آن وجود دارد.

نکته در یک دنباله هندسی با تعداد جملات زوج و قدر نسبت r ، مجموع جملات با شماره زوج، r برابر مجموع جملات با شماره فرد است؛ یعنی:

s مخفف کلمه **sum** به معنی مجموع است.

$$\frac{s_{\text{زوج}}}{s_{\text{فرد}}} = r \rightarrow \frac{s_{\text{فرد}}}{s_{\text{زوج}}} = \frac{1}{r}$$
 دو نتیجه دیگر هم می‌توان در ارتباط با مجموع کل جملات از رابطه بالا استخراج کرد:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\text{مجموع کل جملات}}{\text{مجموع جملات به شماره فرد}} &= \frac{s_{\text{کل}}}{s_{\text{فرد}}} = \frac{s_{\text{زوج}} + s_{\text{فرد}}}{s_{\text{فرد}}} = 1 + \frac{s_{\text{زوج}}}{s_{\text{فرد}}} = 1 + r \\ \frac{s_{\text{کل}}}{s_{\text{زوج}}} &= \frac{s_{\text{فرد}} + s_{\text{زوج}}}{s_{\text{زوج}}} = 1 + \frac{1}{r} \end{aligned} \right.$$

فب اثبات رابطه بالا رو هم بگیریم تا مفهومی یاد گرفتن ریاضی رو هم رعایت کرده باشیم!!

$$\frac{s_{\text{زوج}}}{s_{\text{فرد}}} = \frac{a_2 + a_4 + a_6 + \dots}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots} = \frac{ar + ar^3 + ar^5 + \dots}{a + ar^2 + ar^4 + \dots} = \frac{r(a + ar^2 + ar^4 + \dots)}{(a + ar^2 + ar^4 + \dots)} = r$$

$$\text{یه جور دیگه: } \frac{a_2 + a_4 + a_6 + \dots}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots} = \frac{a_1 r + a_3 r + a_5 r + \dots}{a_1 + a_3 + a_5 + \dots} = r$$

۸۶ در یک دنباله هندسی با تعداد جملات زوج و قدر نسبت $r = 5$ ، مجموع تمام جملات، چند برابر مجموع تمام جملات با شماره زوج است؟

$$\begin{array}{cccc} 5 & (1) & 6 & (2) \\ & & \frac{6}{5} & (3) \\ & & \frac{7}{6} & (4) \end{array}$$

۸۷ تعداد جملات یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن سه برابر مجموع تمام جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

(ریاضی داخل ۹۴)

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & (1) & \frac{1}{2} & (2) \\ & & 2 & (3) \\ & & 3 & (4) \end{array}$$



نکته ۱ اگر به هر یک از جملات یک دنباله هندسی عددی ثابت اضافه یا آن کم کنیم، دیگر دنباله هندسی نیست، مگر اینکه دنباله هندسی ثابت $(r=1)$ بوده باشد. به دو مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} 3, 6, 12, \dots \xrightarrow{+12} 15, 18, 24, \dots \rightarrow \text{دیگر هندسی نیست} \\ 3, 3, 3, \dots \xrightarrow{+2} 5, 5, 5, \dots \rightarrow \text{باز هم هندسی است} \end{cases}$$

نکته ۲ مجموع یا تفاضل دو دنباله هندسی با قدر نسبت‌های برابر، یک دنباله هندسی با همان قدر نسبت، خواهد بود. به مثال زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} a_n : 3, 6, 12, \dots (r=2) \\ b_n : 5, 10, 20, \dots (r=2) \end{cases} \Rightarrow a_n + b_n : 8, 16, 32, \dots$$

اثبات:
$$\begin{cases} a_n : a_1 r^{n-1} \\ b_n : b_1 r^{n-1} \end{cases} \rightarrow a_n \pm b_n = (a_1 \pm b_1) r^{n-1}$$

نکته ۳ اگر هر یک از جملات دنباله هندسی را در عدد ثابت غیر صفر k ضرب کنیم، دنباله حاصل نیز هندسی با همان قدر نسبت قبلی (r) است.

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots, a_1 r^{n-1} \xrightarrow{\times k} ka_1, ka_2, \dots, ka_1 r^{n-1} \\ 3, 6, 12, \dots \xrightarrow{\times 5} 15, 30, 60, \dots \rightarrow \text{در هر دو حالت } r=2 \text{ است.} \end{cases}$$

نکته ۴ اگر هر یک از جملات دنباله هندسی را به توان k برسانیم، دنباله جدید نیز هندسی است، اما با قدر نسبت r^k ! (یادتونه)

$$\begin{cases} a_n = a_1 r^{n-1} \rightarrow b_n = (a_1 r^{n-1})^k = a_1^k (r^k)^{n-1} \\ 1, 3, 9, 27, \dots \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1, 9, 81, \dots \rightarrow r=9 \end{cases}$$

نکته ۵ اگر قدر نسبت یک دنباله هندسی را k برابر کنیم، جمله n ام آن k^{n-1} برابر می‌شود.

اثبات:
$$a_n = a, r^{n-1} \xrightarrow{\times k} b_n = a \times (kr)^{n-1} = k^{n-1} \times ar^{n-1} = k^{n-1} \times a_n$$

نکته ۶ اگر همه جملات یک دنباله هندسی را به توان (-1) برسانیم، یعنی همه جملات را معکوس کنیم، آن گاه دنباله حاصل هندسی با قدر

$$\begin{cases} 3, 6, 12, \dots \rightarrow r=2 \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \rightarrow r=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{نسبت } \frac{1}{r} \text{ (همان } r^{-1} \text{)}$$

نتیجه اگر طول اضلاع یک مثلث، تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت r بدهند، ارتفاع نظیر این اضلاع تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{r}$ می‌دهند.

چون مساحت مثلث (ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2}$) ثابت است، پس قاعده (ضلع) و ارتفاع وارد بر آن با یکدیگر نسبت عکس دارند:

اضلاع: $a_1, a_2, a_3 \xrightarrow{s=\frac{1}{2}ah} \text{ارتفاعها: } \frac{as}{a_1}, \frac{2s}{a_2}, \frac{2s}{a_3}$

۸۸ قدر نسبت دو دنباله هندسی برابر و جمله اول یکی، دو برابر جمله اول دیگری است. جمله n ام دنباله اول چند برابر جمله n ام

(تجرب ۷۵)

دنباله دوم است؟

$$2^n \quad (1) \quad 2n \quad (2) \quad 2^n \quad (3) \quad n^2 \quad (4)$$

۸۹ در یک دنباله هندسی اگر قدر نسبت را دو برابر کنیم، جمله هفتم دنباله چند برابر می‌شود؟

$$2 \quad (1) \quad 128 \quad (2) \quad 64 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \text{تغییر نمی‌کند}$$



۹۰ اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله اول یک دنباله هندسی با قدر نسبت ۲ باشند، کدام گزینه، سه جمله اول یک دنباله هندسی است؟

$$(1) \quad a_1 + 1, a_2 + a_1, a_3 + a_2 \quad (2) \quad a_1 + 1, a_2 + 4, a_3 + 16$$

$$(3) \quad a_1 + 1, a_1 + 2, a_3 + 3 \quad (4) \quad a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4$$

۹۱ اگر طول اضلاع یک مثلث تشکیل دنباله هندسی غیر ثابت با قدر نسبت r داده باشند، ارتفاع‌های نظیر این اضلاع....

(۱) تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. (۲) تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت r می‌دهند.

(۳) تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{r}$ می‌دهند. (۴) تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت r^2 می‌دهند.

حاصل ضرب جملات دنباله هندسی



گاهی ساده‌تر است که سه جمله متوالی یک دنباله هندسی را به صورت $\frac{x}{r}, x, xr$ بنویسیم. معمولاً در مسائلی، این سبک نوشتن لازم می‌شود که صحبت از ضرب جملات شده است؛ چون:

$$(3) \text{ (وسطی)} \Rightarrow \frac{x}{r} \times x \times xr = x^3 \Rightarrow \text{حاصل ضرب سه جمله متوالی دنباله هندسی}$$

$$(5) \text{ (وسطی)} \Rightarrow \frac{x}{r^2} \times \frac{x}{r} \times x \times r \times xr^2 = x^5 \Rightarrow \text{حاصل ضرب پنج جمله متوالی دنباله هندسی}$$

نکته حاصل ضرب n جمله متوالی (یا متساوی الفاصله یا متقارن) از یک دنباله هندسی (n فرد)، برابر با جمله وسط به توان تعداد جملات می‌باشد.

(n فرد) (جمله وسط) = حاصل ضرب n جمله متقارن از یک دنباله هندسی

معمولاً جملات متوالی داده می‌شود، اما لزومی به متوالی بودن نیست؛ کافی است متساوی الفاصله (متقارن) باشند به مثال زیر توجه کنید:

$$\text{مثال} \quad a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 = ar^3 \times ar^4 \times ar^5 \times ar^6 \times ar^7 \times ar^8 = a^6 r^{30} = (ar^5)^6 = (a_7)^6$$

در مثال بالا دیدید که حاصل ضرب ۵ جمله داده شده برابر a_7^5 شد!

تذکره اگر تعداد جملات زوج باشد، نمی‌توان برای حاصل ضرب جملات از رابطه وسطی به توان تعداد استفاده کرد و چاره‌ای جز نوشتن آنها برحسب ar^{n-1} و ضرب آنها وجود ندارد.

(مشابه به تمرین کتاب درسی)

۹۲ حاصل ضرب چهارده جمله اول دنباله هندسی ... و $25/0$ و $125/0$ کدام است؟

$$(1) \quad 25^1 \quad (2) \quad -25^1 \quad (3) \quad 2^{49} \quad (4) \quad -2^{49}$$

۹۳ حاصل ضرب پنج جمله دوم یک دنباله هندسی غیر کاهشی برابر ۲۴۳ است. اگر جمله چهارم این دنباله برابر ۴۸ باشد، جمله پانزدهم آن کدام است؟

$$(1) \quad \frac{3}{128} \quad (2) \quad -\frac{3}{128} \quad (3) \quad \frac{3}{256} \quad (4) \quad -\frac{3}{256}$$

۹۴ در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچکترین و بزرگترین این سه عدد کدام است؟

(تجرب داخل ۹۰)

$$(1) \quad 4 \quad (2) \quad 5 \quad (3) \quad 6 \quad (4) \quad 7$$

۹۵ در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب نه جمله اول برابر ۸ است. حاصل ضرب $a_1 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdot a_8$ چقدر است؟

(آزاد ۸۱)

$$(1) \quad 2\sqrt[3]{2} \quad (2) \quad 2\sqrt{2} \quad (3) \quad 2\sqrt[3]{2} \quad (4) \quad 4$$



شرط هندسی بودن یک دنباله و واسطه هندسی دو عدد

درسنا ۲۵ مه

با یک مثال شروع کنیم: ۱۲ و ۶ و ۳ سه جمله متوالی هندسی هستند. وسطی به توان ۲، برابر حاصل ضرب اولی در آخری است یعنی $۶^2 = ۳ \times ۱۲$!!! این قانون هر دنباله هندسی به صورت زیر برقرار است:

نکته وقتی a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی هستند که: $b^2 = ac$

$$a, b, c \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{b}{a} \\ r = \frac{c}{b} \end{cases} \xrightarrow{\text{برابر هم}} \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} b^2 = ac$$

فیب حالا با توجه به رابطه بالا واسطه هندسی دو عدد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

خلاصه بگم اینکه برای محاسبه واسطه هندسی، کافی است جذر حاصل ضرب آنها را بدست آوریم.

مثلاً واسطه هندسی دو عدد ۳ و ۱۲ برابر است با: $\sqrt{۳ \times ۱۲} = \sqrt{۳۶} = ۶$

$$\left. \begin{aligned} a, b, c &\xrightarrow{\text{حسابی}} ۲b = a + c \\ y, x &\xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} \frac{x+y}{۲} \end{aligned} \right\}$$

یادآوری در رابطه با این نکته، در مورد دنباله حسابی داریم:

ژلوفن برای حل مسائلی که k واسطه هندسی بین دو عدد a, b درج شده است: $t, \dots, ?, ?, a$ کافی است توجه داشته باشیم که تعداد واسطه‌ها ۲ واحد از تعداد جملات کمتر است ($k = n - ۲$ یا $n = k + ۲$) و نیازی به فرمول خاصی نیست! هر چند می‌توان رابطه $r^{k+1} = \frac{b}{a}$ را اثبات کرد و از آن در حل این مسائل استفاده نمود.

یادآوری برای درج k واسطه حسابی بین دو عدد a, b نیز دو رابطه داشتیم که می‌توانستیم از آنها استفاده نکنیم!!

$$k = \frac{b-a}{d} - ۱, d = \frac{b-a}{k+۱}$$

۹۶ اگر دنباله $a, \sqrt{۵} + ۱, ۴, \dots$ هندسی باشد، واسطه هندسی اعداد $a, ۱$ کدام است؟

$$\begin{aligned} (۱) & \frac{\sqrt{۵}+۱}{\sqrt{۵}-۱} & (۲) & \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲} & (۳) & \frac{\sqrt{۵}+۲}{۲} & (۴) & \frac{\sqrt{۵}+۳}{۲} \end{aligned}$$

۹۷ با اضافه کردن مقدار ثابتی به اعداد $-۱, ۱, ۱۵$ این اعداد تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$$(۱) \frac{۴}{۳} \quad (۲) \frac{۳}{۴} \quad (۳) ۷ \quad (۴) \frac{۷}{۳}$$

۹۸ اعداد $p, ۲p+۱, ۲p, ۲p$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی افزایشی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

$$(۱) ۲ + \sqrt{۳} \quad (۲) ۲ - \sqrt{۳} \quad (۳) ۳ \quad (۴) \sqrt{۳}$$

۹۹ اعداد $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{z}, \frac{1}{y}, \frac{1}{x}$ تشکیل یک دنباله هندسی غیر کاهشی می‌دهند. اختلاف بزرگترین و کوچکترین جملات این دنباله کدام است؟

$$(۱) ۴ \quad (۲) ۱۲ \quad (۳) ۱۰ \quad (۴) ۶$$

اگر سؤال بالا رو ننوشتی حل کنی، ناامید نشو! فعلاً در این مرحله تست‌های آموزشی، هدف اصلی تکمیل یادگیری و به تسلط رسیدن شماست. اگر سؤالی رو بلد نبودی یا به سفتی حل کردی، هتماً مارک دار کن تا بعداً پندرت بار دیگر حل کنی و کلاهی بشه واست! سؤالات درج چند واسطه هندسی، به دو صورت کلی مطرح می‌شود: یکی تعداد واسطه را داده و قدرنسبت یا ... می‌خواهد و دیگری قدرنسبت را داده و تعداد واسطه‌ها را می‌خواهد.

۱۰۰ بین اعداد $\frac{1}{۴}$ و $\frac{1}{۸}$ چهار عدد دیگر به گونه‌ای درج کرده‌ایم که این شش عدد تشکیل یک دنباله هندسی افزایشی بدهند، دومین واسطه کدام است؟

$$(۱) ۲ \quad (۲) \frac{۱}{۲} \quad (۳) ۱ \quad (۴) ۴$$



۱۰۱) بین اعداد $\sqrt{2}$ و 256 چند واسطه درج کنیم به گونه‌ای که اعداد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی کاهشی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{2}}{4}$ بدهند؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۰۲) واسطه هندسی ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + 6x + 4 = 0$ چقدر از واسطه حسابی ریشه‌های این معادله بیشتر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۴

مسائل ترکیبی دنباله حسابی و هندسی (۱)



حالا که یاد گرفتید a, b, c وقتی حسابی هستند که $2b = a + c$ و وقتی هندسی هستند که $b^2 = ac$ و وقتی هم حسابی و هم هندسی اند که دنباله ثابت باشد، وقتشه دو نکته ترکیبی زیر را مطرح کنیم:

$$\text{یادآوری: } \begin{cases} a, b, c \xrightarrow{\text{هندسی}} b^2 = ac \Rightarrow \text{واسطه هندسی} = \sqrt{ac} \\ a, b, c \xrightarrow{\text{حسابی}} 2b = a + c \Rightarrow \text{واسطه حسابی} = \frac{a+c}{2} \end{cases}$$

📌 **نکته ۱** اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه توابع توانی (نمایی) آنها به صورت k^a, k^b, k^c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی خواهند بود. (k عدد مثبت معلوم و مخالف ۱)

فکر می‌کنم لازمه اثبات نکته بالا را هم ببینید. از آخر شروع به اثبات می‌کنیم:

$$a, b, c \text{ دنباله حسابی اند} \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow k^{2b} = k^{a+c} \Rightarrow k^{2b} = k^a \times k^c \Rightarrow (k^b)^2 = k^a \times k^c \xrightarrow{\text{شرط دنباله هندسی}} k^a, k^b, k^c \text{ اثبات}$$

دقت کنید اگر a, b, c حسابی با قدرنسبت d باشند، k^a, k^b, k^c هندسی با قدرنسبت $r = k^d$ هستند؛ چون:

$$d = b - a, r = \frac{k^b}{k^a} = k^{b-a} = k^d$$

حالا برعکس نکته بالا به صورت زیر است که با موضوع لگاریتم که در فصل (۴) سال یازدهم آمده است نیز تلفیق می‌شود:

📌 **نکته ۲** اگر اعداد مثبت و متمایز a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه توابع لگاریتمی $\log_k^a, \log_k^b, \log_k^c$ ، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. و برعکس آن به این معنی است که اگر لگاریتم‌های a, b, c در مبنای k تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، آنگاه خود a, b, c تشکیل یک دنباله هندسی با قدرنسبت $r = k^d$ می‌دهند!!

لابر با فوریت میگی این قدرنسبت‌ها پی بود که باز این وسط ظهور کرد!!! نگران نباش الان اثباتش می‌کنیم:

$$\log_k^a, \log_k^b, \log_k^c \xrightarrow{\text{حسابی اند}} 2\log_k^b = \log_k^a + \log_k^c \Rightarrow \log_k^{b^2} = \log_k^{ac} \Rightarrow b^2 = ac$$

پس a, b, c هندسی اند. و اما داستان قدرنسبت‌ها:

$$\begin{cases} \text{در } d = \log_k^b - \log_k^a \Rightarrow \log_k^{\frac{b}{a}} = d \Rightarrow \frac{b}{a} = k^d \Rightarrow r = k^d \\ \text{در } r = \frac{b}{a} = ? \end{cases}$$

می‌فواستم نکته بالارو در فصل لگاریتم بیارم اما، تریج دره شد در هر دو فصل بیایر!!!

۱۰۳) اگر $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{a+b}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه:

(۱) a, b, c نیز سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند.

(۲) a, b, c تشکیل دنباله‌ای هندسی می‌دهند.

(۳) a^2, b^2, c^2 سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند.

(۴) a^2, b^2, c^2 تشکیل دنباله‌ای حسابی می‌دهند.



۱۰۴ اگر z, y, x تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ بدهند، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) x^2, y^2, z^2 تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت ۹ می‌دهند.
 (۲) $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{3}$ می‌دهند.
 (۳) x^2, y^2, z^2 تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت ۹ می‌دهند.
 (۴) $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ تشکیل دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{8}$ می‌دهند.

۱۰۵ اگر $\log^a, \log^b, \log^c$ تشکیل یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۳ بدهند، آنگاه اعداد a, b, c تشکیل یک دنباله با قدرنسبت می‌دهند؟

- (۱) هندسی و $r=9$ (۲) هندسی و $r=8$ (۳) حسابی و $r=9$ (۴) حسابی و $r=8$

یادتونه چه موقع یک دنباله هم حسابی بود و هم هندسی!!؟

۱۰۶ دنباله $2, 1, 2a-2, 2b+1, a+b$ هم حسابی و هم هندسی است. مجموع ده جمله اول این دنباله کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۲۰ (۳) ۳۰ (۴) ۴۰

دو سؤال چون دار دیگه از این تیپ دنباله‌های ترکیبی حل کنید و بعرض میریم سراغ درسنامه آفرین مدل سوالات ترکیبی دنباله.

۱۰۷ اعداد متمایز a, b, c تشکیل دنباله حسابی و اعداد a, b, c تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۰۸ واسطه حسابی دو عدد a و b ($a > b$)، دو برابر واسطه هندسی آنهاست. مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- (۱) $7-4\sqrt{3}$ (۲) ۷ (۳) $7+4\sqrt{3}$ (۴) $4+2\sqrt{3}$

مسائل ترکیبی دنباله حسابی و هندسی (۲)

درسنامه ۲۷

این درسنامه در واقع آموزش‌های یک تیپ سؤال خاص ترکیبی از دنباله‌های حسابی و هندسی است. آموزش را با حل یک سؤال شروع می‌کنیم و به سه روش مختلف آن را حل می‌کنیم و در پایان نکته تستی آن را می‌گوییم!

سؤال: جملات سوم، پنجم و هشتم یک دنباله حسابی غیر ثابت، به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

روش اول: در این روش از $b^2 = ac$ به عنوان شرط سه جمله متوالی هندسی استفاده می‌کنیم. البته مانند زیر آن را روی جملات حسابی داده شده اعمال می‌کنیم:

حسابی

$$a_3, a_5, a_8 \Rightarrow a+2d, a+4d, a+7d \xrightarrow[b^2=ac]{\text{متوالی هندسی}} (a+4d)^2 = (a+2d)(a+7d)$$

$$\xrightarrow{\text{سازده سازی}} 4d^2 = ad \Rightarrow a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 9ad + 16d^2 \Rightarrow \text{اتحاد مربع و جمله مشترک}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=0 \\ a=2d \end{cases} \Rightarrow \text{(دنباله غیر ثابت) غ ق ق} \Rightarrow r = \frac{\text{یک جمله}}{\text{جمله قبلی آن}} = \frac{a+4d}{a+2d} \xrightarrow{a=2d} r = \frac{2d+4d}{2d+2d} = \frac{6d}{4d} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$



ادامه دروس

روش دوم نام آن را روش تفاضلات می‌گذاریم که کمتر استفاده می‌شود، اما یک فرمول تستی بسیار ناب و زیبا از آن استخراج می‌شود. پس به دقت روش حل آن را دنبال کنید:

یادآوری حسابی: $a_m - a_n = (m - n)d$

ابتدا یک یادآوری و سپس حل مسئله:

$$\begin{cases} x, xr, xr^2 : \text{سه جمله متوالی یک دنباله هندسی} \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ a_3, a_5, a_8 : \text{جملات حسابی متناظر با هندسی} \end{cases}$$

$$\text{تفاضلات: } \begin{cases} xr^2 - xr = a_8 - a_5 \\ xr - x = a_5 - a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xr(r-1) = 3d \quad (2) \\ x(r-1) = 2d \quad (1) \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم کردن}} \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{xr(r-1)}{x(r-1)} = \frac{3d}{2d} \Rightarrow r = \frac{3}{2}$$

خب پایان حل این روش دوم را مجدداً نگاه کنید $r = \frac{3}{2}$ ، از کجا آمده؟! از $a_8 - a_5$ یعنی اختلاف شماره جملات پنجم و هشتم!! از کجا آمده؟! از اختلاف جملات سوم و پنجم!!

پس می‌توان نکته زیر را استخراج کرد:

یه نکته باحال: اگر جملات n ام، m ام و k ام یک دنباله حسابی غیر ثابت به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن گاه قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با: $r = \frac{k-m}{m-n}$ (فقط حواست به صورت و مخرج کسر باشه)

فب مهبراً به صورت سؤال مطرح شده در این درسامه نگاه کنید و با روش سوم (فوق سرعتی) آن را حل کنید:

سؤال: جملات سوم، پنجم و هشتم یک دنباله حسابی؟

روش سوم $r = \frac{3}{2}$

فطراً!!! هتماً روش تشریفی، مفهوماً روش اول را یاد بگیرید، چون گاهی سؤالات طوری طراحی می‌شوند که دیگر با فرم خاص گفته شده نیست و نمی‌توان از فرمول تستی استفاده کرد، در تست‌های پایین با چنین مسائلی برخورد خواهید کرد.



۱۰۹ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند. قدرنسبت دنباله هندسی کدام است؟

(تجربی داخل ۹۲)

$$(1) \frac{5}{3} \quad (2) \frac{7}{4} \quad (3) \frac{7}{3} \quad (4) \frac{9}{4}$$

اهسنت بر تو، اولین سؤال دخترپه کنگور سراسری تجربی ۹۲ رو در ۲ ثانیه حل کردی!!

دو سؤال بعدی رو هم میتونی از همون نکته استفاده کنی، ولی باید به کارهایی دیگه هم بعدش انجام بدی تا به گزینه درست برسی.

۱۱۰ در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. چندمین جمله این دنباله صفر است؟

(تجربی داخل ۸۸)

$$(1) 9 \quad (2) 10 \quad (3) 11 \quad (4) 12$$

۱۱۱ جملات پنجم، سوم و هفتم یک دنباله حسابی غیر ثابت به ترتیب جمله اول، دوم و سوم یک دنباله هندسی هستند. اگر جمله چهارم دنباله هندسی برابر $\frac{1}{8}$ باشد، جمله پانزدهم دنباله هندسی کدام است؟

(مشابه سنجش ۹۷)

$$(1) 256 \quad (2) -256 \quad (3) 512 \quad (4) -512$$



همانطور که در درسنامه هم اشاره کردیم در این مسائل ترکیبی شما باید روش‌های اصلی و تشریفی رو هم مسلط باشید، چون شاید مثل کنکور تجربی قارچ ۹۲، اینفوری سؤال بیاد.....

۱۱۲ در یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم، می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچکترین آنها است؟

(تجربی خارج ۹۲)

$$۷+۴\sqrt{۳} \quad (۴)$$

$$۵+۴\sqrt{۳} \quad (۳)$$

$$۵+۲\sqrt{۳} \quad (۲)$$

$$۲+\sqrt{۳} \quad (۱)$$

اندیشه حسابی @andishehesabi



پاسخنامه کلیدی فصل ۲: الگو و دنباله

سؤال	پاسخ
۹۷	۳
۹۸	۴
۹۹	۲
۱۰۰	۳
۱۰۱	۲
۱۰۲	۲
۱۰۳	۲
۱۰۴	۴
۱۰۵	۲
۱۰۶	۴
۱۰۷	۳
۱۰۸	۳
۱۰۹	۳
۱۱۰	۳
۱۱۱	۲
۱۱۲	۴

سؤال	پاسخ
۶۵	۲
۶۶	۳
۶۷	۱
۶۸	۳
۶۹	۲
۷۰	۲
۷۱	۱
۷۲	۴
۷۳	۳
۷۴	۳
۷۵	۴
۷۶	۲
۷۷	۲
۷۸	۴
۷۹	۱
۸۰	۴
۸۱	۲
۸۲	۴
۸۳	۱
۸۴	۳
۸۵	۲
۸۶	۳
۸۷	۳
۸۸	۱
۸۹	۳
۹۰	۴
۹۱	۳
۹۲	۴
۹۳	۲
۹۴	۲
۹۵	۱
۹۶	۲

سؤال	پاسخ
۳۳	۳
۳۴	۳
۳۵	۴
۳۶	۲
۳۷	۳
۳۸	۳
۳۹	۲
۴۰	۲
۴۱	۳
۴۲	۲
۴۳	۳
۴۴	۳
۴۵	۴
۴۶	۳
۴۷	۲
۴۸	۲
۴۹	۳
۵۰	۳
۵۱	۴
۵۲	۲
۵۳	۲
۵۴	۴
۵۵	۱
۵۶	۲
۵۷	۲
۵۸	۲
۵۹	۲
۶۰	۲
۶۱	۳
۶۲	۴
۶۳	۴
۶۴	۲

سؤال	پاسخ
۱	۲
۲۲	۲
۳	۴
۴	۴
۵	۲
۶	۱
۷	۲
۸	۳
۹	۳
۱۰	۲
۱۱	۱
۱۲	۴
۱۳	۱
۱۴	۱
۱۵	۴
۱۶	۴
۱۷	۳
۱۸	۱
۱۹	۴
۲۰	۲
۲۱	۲
۲۲	۱
۲۳	۳
۲۴	۴
۲۵	۴
۲۶	۲
۲۷	۳
۲۸	۱
۲۹	۳
۳۰	۳
۳۱	۲
۳۲	۲