فصل سوم

حد و پیوستگی

دکتر یوسف کوه‌مسکن

ریاضی ۲

AvaEducation16.blog.ir

AvaEducation16@gmail.com

@AvaEducation16

@AvaEducation16

توضیحات

- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی @AvaEducation16 نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
  - **بسیار ساده** جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
  - **ساده** جهت تثبیت مطالب
  - **متوسط** جهت تمرین بیشتر مطالب
  - **سخت** جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

فهرست مطالب

پیشگفتار

این فایل شامل مطالب کلاس ریاضی ۲ دانشگاه است که در ترم‌های گذشته تدریس شده و در سایت teacher16.blog.ir ارائه شده بود. اکنون به جهت استفاده عمومی در دسترس مخاطبان خواهد بود. در انتهای فایل، تمریناتی جهت خود ارزیابی دانشجویان اضافه شده که حل آن‌ها بسیار توصیه می‌گردد. لازم به ذکر است فایل حل تمرینات در زمان مناسب در سایت قرار می‌گیرد. با آرزوی آنکه مطالب ارائه شده برای دانشجویان محترم مفید باشد.

۱ مقدمه

حد و پیوستگی یکی از مباحث مهم در ریاضی یک هستند که کاربردهای فراوانی در مشتق دارند. در ریاضی دو محاسبه حد کمی متفاوت از آنچه قبلاً آموزش داده شده می‌باشد. توابع مورد حد در این فصل عموماً دو یا سه متغیره هستند که در ادامه توضیح داده می‌شود. ابتدا به مروری از تعریف حد تک متغیره پرداخته می‌شود و سپس موضوع مهم این فصل که به حد چند متغیره مربوط است، ارائه خواهد شد.

۲ تعریف حد تک متغیره

بر اساس تعریف حد داریم:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

یعنی تابع $f(x)$ به مقدار دلخواه به L نزدیک می‌شود، اگر x به اندازه کافی به c نزدیک شود.
اگر L یک عدد محدود باشد، حد فوق وجود دارد و $f(x)$ همگرا به L است. در غیر این صورت $f(x)$ واگرا می‌شود هنگامی که $x \to c$ می‌رود. همچنین هرگاه مقدار حد در یک نقطه با مقدار تابع در آن برابر باشد، تابع مورد نظر در آن نقطه پیوسته است.

۳ تعریف پیوستگی

بر اساس تعریف هرگاه حد تابع f در نقطه c با مقدار تابع f در آن نقطه برابر باشد، آن تابع در نقطه c پیوسته است:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

توجه شود که رابطه فوق سه شرط را به صورت ضمنی رعایت می‌کند. اول آنکه مقدار $f(c)$ تعریف شده است. یعنی $x = c$ در دامنه تابع f قرار دارد. دوم آنکه حد تابع f در نقطه c وجود دارد. سوم آنکه مقدار تابع با مقدار حد در نقطه c با هم برابرند.

مثال ۱ به ازای چه مقداری از a تابع زیر در نقطه $x = -2$ پیوسته است؟

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 3 & x \geq -2 \\ \frac{a(x+2)}{x^2+x-2} & x < -2 \end{cases}$$

پاسخ: باید حد چپ و راست برابر بوده و با مقدار تابع هم برابر باشند.

$$f(-2) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = (-2)^2 - a(-2) + 3 = 2a + 7$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{a(x+2)}{x^2+x-2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{a(x+2)}{(x+2)(x-1)} = -\frac{a}{3}$$

با برابر قرار دادن دو عبارت اخیر مقدار پارامتر مجهول تعیین می‌شود:

$$-\frac{a}{3} = 2a + 7 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

۴ روش‌های تعیین مقدار حد تک متغیره

در این بخش به مروری از مطالب مربوط به حد تک متغیره می‌پردازیم. هم‌ارزی، قضیه فشردگی، حد در بینهایت و ... با چند مثال بررسی می‌شود.

یادآوری هم‌ارزی در صفر:

$$\sin u \sim u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots$$
$$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots$$
$$\tan u \sim u + \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15}u^5 + \cdots$$
$$\tan^{-1} u \sim u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \cdots$$
$$e^u \sim 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$$
$$\frac{1}{1-u} \sim 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots$$

مثال ۲ حدود تک متغیره زیر را بدست آورید.

الف- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}{x-1}$ ب- $\lim_{z\to e} \ln\frac{1}{z^3}$ ج- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+1}{2x+3}$

د- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ ه- $\lim_{u\to 2} \frac{4-u^2}{u-2}$ و- $\lim_{y\to 0} \frac{y-2\sin\frac{y}{2}}{y^3}$

ز- $\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{x^2}$ ح- $\lim_{x\to 2} (x-2)^2 \sin\frac{x+2}{(x-2)^2}$ ط- $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - 2x^2 + 3x^6}{(2x^2-4x-\sqrt{x})^3}$

ی- $\lim_{x\to 0} \ln x^{3x^2-2x}$ ک- $\lim_{t\to +\infty} \frac{1+e^{-t}+2e^t}{3e^t-4e^{-2t}}$ ل- $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

م- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{x(1-x)}$ ن- $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ س- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

پاسخ:

الف- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{1-x}}{x-1}=1$ تنها با جایگذاری این نتیجه بدست آمد و حالت ابهام وجود ندارد.

ب- $\lim\limits_{z\to e}\ln\dfrac{1}{z^3}=\lim\limits_{z\to e}-3\ln z=-3$ تنها با جایگذاری این نتیجه بدست آمد و حالت ابهام وجود ندارد.

ج- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+1}{2x+3}=\dfrac{1+1}{3}=\dfrac{2}{3}$ تنها با جایگذاری این نتیجه بدست آمد و حالت ابهام وجود ندارد.

د- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$ حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید که باید با ضرب در مزدوج رفع ابهام گردد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}\times\frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2})}=-1$$

ه- حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید.

$$\lim_{u\to 2}\frac{4-u^2}{u-2}=\lim_{u\to 2}\frac{(2-u)(2+u)}{u-2}=\lim_{u\to 2}-(2+u)=-4$$

و- حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید که باید با استفاده از هم ارزی $\sin u\sim u-\frac{u^3}{6}$ یا دو بار استفاده از هوپیتال رفع ابهام گردد.

$$\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin\frac{y}{2}}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y-2(\frac{y}{2}-\frac{(y/2)^3}{6})}{y^3}=\frac{1}{24}$$

ز-

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{x^2}=+\infty$$

ح- به کمک قضیه فشردگی یا ساندویچ داریم:

$$-1\leq\sin\frac{x+2}{(x-2)^2}\leq 1\quad\Rightarrow\quad -(x-2)^2\leq(x-2)^2\sin\frac{x+2}{(x-2)^2}\leq(x-2)^2$$

چون حد توابع کران بالا و پایین تابع مورد حد در $x=2$ برابر با صفر است، در نتیجه

$$\lim_{x\to 2}(x-2)^2\sin\frac{x+2}{(x-2)^2}=0$$

ط- در حد بینهایت، جملات هم‌ارز با توان بزرگتر هستند، در صورت کسر جمله $3x^6$ و در مخرج کسر جمله $(2x^2)^3$ غالب است و در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x-2x^2+3x^6}{(2x^2-4x-\sqrt{x})^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^6}{(2x^2)^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^6}{8x^6}=\frac{3}{8}$$

ی- $\lim\limits_{x\to0}\ln x^{3x^2-2x}=\lim\limits_{x\to0}(3x^2-2x)\ln x$ حالت ابهام $0\times\infty$ به وجود می‌آید که باید با استفاده از هوپیتال و تبدیل صفر به مخرج کسر، رفع ابهام گردد.

$$\lim_{x\to0}(3x^2-2x)\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{(3x^2-2x)}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{6x-2}{(3x^2-2x)^2}}=0$$

ک- $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1+e^{-t}+2e^t}{3e^t-4e^{-2t}}$ جمله غالب در حد به سمت مثبت بی‌نهایت در صورت $2e^t$ و در مخرج $3e^t$ است:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{2e^t}{3e^t}=\frac{2}{3}$$

ل- از غالب بودن جملات $-e^{-x}$ و e^{-x} در حد منفی بی‌نهایت استفاده می‌شود.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}}=-1$$

م- حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید که باید با استفاده از هم ارزی $\sin x\sim x$ رفع ابهام گردد.

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cos x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{(1-x)}=1$$

ن- حالت ابهام 1^∞ به وجود می‌آید. اگر تابع داده شده را y فرض کنیم داریم:

$$y=(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}},\quad\Rightarrow\quad \ln y=\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}$$

اکنون حد طرف راست تساوی فوق را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos\sqrt{x})}{x}&\overset{HOP}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\cos\sqrt{x})'}{\cos\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to0}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\\&=\lim_{x\to0}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{1}\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

در رابطه فوق یکبار از هم‌ارزی $\sin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ نیز استفاده کردیم. پاسخ نهایی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Rightarrow \quad \ln y = -\frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad y = e^{-\frac{1}{2}}, \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

س- حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید که باید با استفاده هوپیتال رفع گردد.

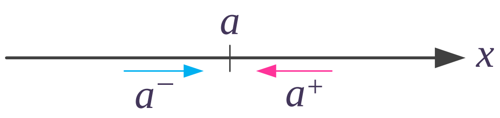
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h} \overset{HOP}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{4}(16+h)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$$

۵ حد چند متغیره

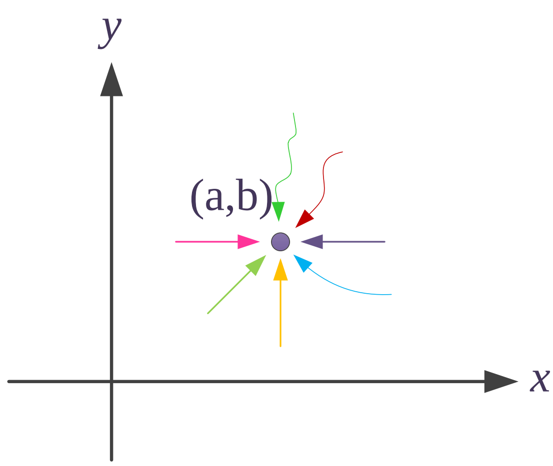
حد دو یا چند متغیره مانند حد تک متغیره تعریف می‌شود. به عنوان مثال هنگامی که حد تابع $f(x,y)$ در همسایگی نقطه (a,b) تعریف شده و برابربا L است می‌نویسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

در حد تک متغیره هنگامی که حد چپ و راست با هم برابر بود، حد تعریف می‌شد و در غیر این صورت حد وجود نداشت. دلیل آنکه حد چپ و راست برای داشتن حد تعریف می‌شد این بود که مسیر رسیدن به یک نقطه خاص روی محور x یا از چپ بود و یا از راست. به شکل زیر توجه کنید. برای آنکه حد به



ازای $a \to x$ محقق شود، تنها دو مسیر برای رسیدن به این مقدار وجود دارد. در هر دو مسیر باید یک مقدار برای حد بدست آید.
اما در حد دو یا چند متغیره، مسیرهای متعدد برای رسیدن به نقطه مورد حد وجود دارد. به شکل زیر توجه کنید.



برخی مسیرها به خط مستقیم هستند و برخی دیگر به صورت منحنی خاصی به نقطه (a,b) نزدیک می‌شوند. در صورتی می‌توانیم در یک نقطه حد داشته باشیم که تمام مسیرها، منجر به یک مقدار حد شوند. البته هنگامی که حد دارای ابهام باشد این مشکل به وجود می‌آید و در موارد معمول مانند آنچه در حد تک متغیره بود، تنها با جایگذاری نقطه داده شده، مقدار حد تعیین می‌شود.

توجه: تعریف پیوستگی در توابع چند متغیره هم مانند توابع تک متغیره است. باید حد تابع در نقطه داده شده با مقدار تابع در آن نقطه برابر باشد.

مثال ۳ مقادیر حدهای چند متغیره زیر را تعیین کنید.

الف- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos(x^3-y+\pi x)$ ب- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x+e^y}{2\cos x+3\sin y}$ ج- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

د- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ه- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} e^{-x^2-y^2-z^2}\cos(x+y+z)$

پاسخ:

الف- با جایگذاری به جواب می‌رسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos(x^3-y+\pi x) = \cos\pi = -1$$

ب- با جایگذاری به جواب می‌رسیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x+e^y}{2\cos x+3\sin y} = \frac{1+1}{2+0} = 1$$

ج- این حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است، اما به سادگی رفع ابهام می‌شود (اتحاد مزدوج)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 = 0$$

د- این حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است، اما به سادگی رفع ابهام می‌شود (اتحاد مزدوج)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}} &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x+y}+\sqrt{y})} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} \\ &= 0\end{aligned}$$

ه- با جایگذاری به جواب می‌رسیم:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,-1)} e^{-x^2-y^2-z^2}\cos(x+y+z) = e^{-2}$$

تعریف مسیرهای مختلف و امتحان نمودن آن‌ها معمولا راهی برای رد کردن حد در آن نقطه است و هیچگاه داشتن حد را اثبات نمی‌کند. در ادامه مثال‌هایی ارائه شده‌اند که با یک مثال نقض و یافتن یک مسیر جدید عدم وجود حد مشخص می‌گردد.

مثال ۴ مقادیر حدهای چند متغیره زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

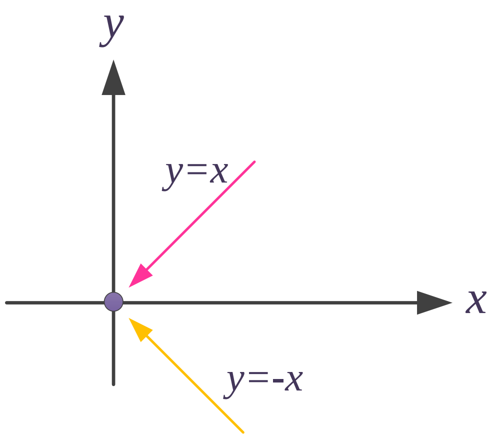
الف- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ب- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6}$ ج- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

پاسخ:

الف- با جایگذاری به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. اگر روی مسیر $y=mx$ حرکت کنیم، آنگاه حد دو متغیره فوق به صورت تک متغیره تبدیل خواهد شد و داریم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

چون مقدار بدست آمده به m بستگی دارد و با تغییر این پارامتر و مسیرهای مختلف، مقدار حد عوض می‌شود در نتیجه حد فوق وجود ندارد. در شکل زیر برای نمونه دو مسیر مختلف خط مستقیم به سمت مبدا نمایش داده شده است. در هر مسیر منجر به یک مقدار حد شده است.



به ازای مسیر $y=x$ مقدار حد برابر است با $\frac{1}{2}$ و به ازای مسیر $y=-x$ مقدار حد برابر است با $-\frac{1}{2}$.

ب- با جایگذاری به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. در این مثال اگر روی مسیر مستقیم مانند $y=mx$ حرکت کنیم، جواب حد به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^3}{x^2+(mx)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^4}{x^2+m^6x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3x^2}{1+m^6x^4} = 0$$

اما اگر روی مسیر $x = y^3$ حرکت کنیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3y^3}{(y^3)^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{2y^6} = \frac{1}{2}$$

چون نتایج متفاوت از مسیرهای مختلف ایجاد شد، پس حد فوق وجود ندارد.

نکته: به عنوان یک قاعده سرانگشتی، هنگامی که درجه صورت بیشتر از مخرج باشد، حد وجود دارد. البته این قاعده همیشگی نیست. عموما برای مشخص نمودن عدم وجود حد، تلاش می‌شود از مسیری به مبدا نزدیک شویم که تمام جملات صورت یا مخرج دارای یک درجه باشند. در مثال ب روی مسیری حرکت کردیم که درجه مخرج برابر با 6 شد.

ج- با جایگذاری به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. در این مثال اگر روی منحنی مانند $x = m_1z^2$ و $y = m_2z^2$ حرکت کنیم، جواب حد به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4} &= \lim_{z\to 0} \frac{(m_1z^2)(m_2z^2)+(m_2z^2)z^2+(m_1z^2)z^2}{(m_1z^2)^2+(m_2z^2)^2+z^4} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{(m_1m_2+m_2+m_1)z^4}{(m_1^2+m_2^2+1)z^4} \\ &= \frac{m_1m_2+m_2+m_1}{m_1^2+m_2^2+1}\end{aligned}$$

چون مقدار حد به ضرایب m_1 و m_2 بستگی دارد، در نتیجه این حد وجود ندارد.

نکته: در برخی حدها، استفاده از مختصات قطبی می‌تواند فرآیند رسیدن به جواب یا وجود حد یا عدم وجود حد را ساده کند. در این نوع مسائل می‌توان از تبدیل مختصات دکارتی به قطبی استفاده نمود. همان طور که می‌دانیم در مختصات دکارتی دو متغیره $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ در نظر گرفته می‌شود. اگر مقدار r به سمت صفر میل کند، مقدار حد نیز باید صرف نظر از θ صفر شود. در این صورت حد وجود دارد. اما اگر حد به زاویه θ وابسته باشد، این حد وجود ندارد.

مثال ۵ مقادیر حدهای چند متغیره زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ ب- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+2x^2y^2+y^4}$ ج- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

د- $\lim_{(x,y)\to(0,1)} (x+y-1)\sin^2\frac{1}{x^2-y^2+1}$ ه- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}-1}{x^2+y^2}$ و- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

پاسخ:

الف- با جایگذاری به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin\theta=0$$

در رابطه فوق، مقدار حد صفر شد و به زاویه θ هیچ بستگی نداشت. در واقع این موضوع نشان می‌دهد که از هر مسیری که به مبدا برسیم، مقدار حد ثابت است. چون در هر حال باید مقدار r کم شود.

ب- با جایگذاری به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. مخرج کسر را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت:

$$x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2$$

با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3(r\sin\theta)}{\left((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^3\theta\sin\theta}{r^4}=\cos^3\theta\sin\theta$$

چون حد فوق به مقدار زاویه θ بستگی دارد، پس این حد وجود ندارد.

ج- با جایگذاری به حالت ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{\sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r}=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin\theta=0$$

در رابطه فوق، مقدار حد صفر شد و به زاویه θ هیچ بستگی نداشت.

د- به کمک قضیه فشردگی یا ساندویچ داریم:

$$0\le\sin^2\frac{1}{x^2-y^2+1}\le 1\quad\Rightarrow\quad 0\le(x+y-1)\sin^2\frac{1}{x^2-y^2+1}\le(x+y-1)$$

چون حد توابع کران بالا و پایین تابع مورد حد در $(x,y)=(0,1)$ برابر با صفر است، در نتیجه

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}(x+y-1)\sin^2\frac{1}{x^2-y^2+1}=0$$

ه- با استفاده از مختصات قطبی و جایگذاری $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ در مسئله داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{e^{-r^2}-1}{r^2}\overset{HOP}{=}\lim_{r\to 0}\frac{-2re^{-r^2}}{2r}=-1$$

حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود آمد که با استفاده از هوپیتال، رفع ابهام شد.

و- حالت ابهام $\frac{0}{0}$ به وجود می‌آید. با استفاده از مختصات قطبی $x = r\cos\theta$ و $y = \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta$ در مسئله داریم:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta\sin^2(\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0}\cos^2\theta\sin^2(\frac{r}{\sqrt{2}}\sin\theta) = 0$$

توجه شود که در این مثال تغییر متغیر قطبی با اندکی تفاوت نسبت به مختصات قطبی در مثال‌های قبل به کار رفت. در موارد مشابه نیز می‌توان از این تغییر متغیر استفاده نمود تا مخرج کسر تبدیل به r^2 شود.

مثال ۶ به ازای چه مقداری از a تابع زیر در نقطه $(0,0)$ پیوسته است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+xy^2-x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ a & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

پاسخ: باید حد تابع چندمتغیره با مقدار آن در مبدا برابر باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+xy^2-x^2-y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x^2+y^2)-(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x-1)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

مقدار تابع در نقطه داده شده برابر با a است. در نتیجه

$$a = -1$$

۶ تمرین

۱. حدود تک متغیره زیر را بدست آورید.

الف- $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{6-5x-x^3}-\sqrt{6-5x+x^3}}{x^3}$

ب- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}-2e^{-\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{2}}}{-3e^{\frac{x}{2}}+2e^{-\frac{x}{3}}+3e^{-\frac{x}{2}}}$

ج- $\lim_{x\to 1}(x-1)^{\frac{1}{x-1}}$

د- $\lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{1}{2}\tan^{-1}2x}{x^3}$

ه- $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1-\sqrt{e^{x^2}}})$

۲. حدود چند متغیره زیر را بدست آورید.

الف- $\lim_{(x,y)\to(-1,-1)} \frac{x^3-y^3}{x-y}$

ب- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(\sqrt{x^2+y^2})-\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ج- $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy-2xz-3xz}{x^2+9y^2+16z^2}$

د- $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

۳. به ازای چه مقداری از a توابع زیر پیوسته هستند؟

الف-

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-3x+2}{x-2} & x<2\\ x^2-a(x+1) & x\geq 2\end{cases}$$

ب-

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2xy+y^2-1}{x-y-1} & (x,y)\neq(1,0)\\ a & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

هر موفقیت بزرگی نتیجه هزاران تلاش
کوچک و عادی است که مورد توجه و
ستایش دیگران قرار نمی‌گیرد.

برایان تریسی