ص ۸۹

به نام خدا

نام درس : معادلات دیفرانسیل

نام کتاب : معادلات دیفرانسیل و کاربرد آنها

تالیف : دکتر اصغر کرایه چیان .

تعریف : فرض کنید $y = y(x)$ یک تابع مجهول و x تنها متغیر مستقل آن باشد هر ارتباط بین x و y و مشتقات y نسبت به x (یعنی $y', y'', \dots$) را یک معادله دیفرانسیل معمولی گوییم . پیوند معمولی تاکیدی بر آن است که y تنها یک متغیر مستقل دارد . زمانیکه تابع y بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد آنگاه با معادلات با مشتقات جزئی سروکار داریم . در این درس به بررسی و حل برخی معادلات دیفرانسیل معمولی می پردازیم و از این به بعد از ذکر پیوند معمولی آن خودداری می کنیم .

مثال ①: $y' = 5y$ یا به بیان دقیق‌تر $\frac{dy}{dx} = 5y$ یک معادله دیفرانسیل (معمولی) است . در واقع در پی بدست آوردن تابعی هستیم (همان y) که 5 برابر آن برابر مشتق آن باشد . بعداً خواهیم دید که $y = e^{5x}$ یک جواب است .

زیرا

$$y' = 5e^{5x} = 5y.$$

مثال ②: $x^2 y'' + 3xy' + 6y = \operatorname{Ln} x \; ; (x > 0)$

مثال ③: $yy' + (y'')^2 = 0$

مثال ④: $y^{(5)} + 3y''' + 2y = e^x$

Scanned with CamScanner

تعریف: مرتبه یک معادله دیفرانسیل، بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله است.

پس مثال ① از مرتبه 1 ، مثال‌های ② و ③ از مرتبه 2 و مثال ④ از مرتبه 15 است.

معرفی برخی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و روش حل آنها

① معادله جدایی پذیر

- شکل کلی معادله جدایی عبارتست از

$$M(x)\,dx = N(y)\,dy$$

که در آن M تابعی تنها بر حسب x و N تابعی تنها بر حسب y است. برای حل از طرفین انتگرال می‌گیریم یعنی می‌نویسیم

$$\int M(x)\,dx + C = \int N(y)\,dy.$$

- مثال: معادله زیر را حل کنید

$$(1+x)\,y\,dx + x\,dy = 0$$

حل: می‌نویسیم

$$(1+x)\,y\,dx = -x\,dy \Rightarrow \frac{1+x}{x}\,dx = -\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1+x}{x}}_{M}\,dx = \underbrace{\frac{-1}{y}}_{N}\,dy \qquad \text{(جدایی پذیر)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1+x}{x}\,dx = -\int \frac{1}{y}\,dy \Rightarrow \int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\rightarrow \ln|x| + x + c = -\ln|y|$$

$$\Rightarrow \ln|x| + \ln|y| + \ln|c| = -x$$

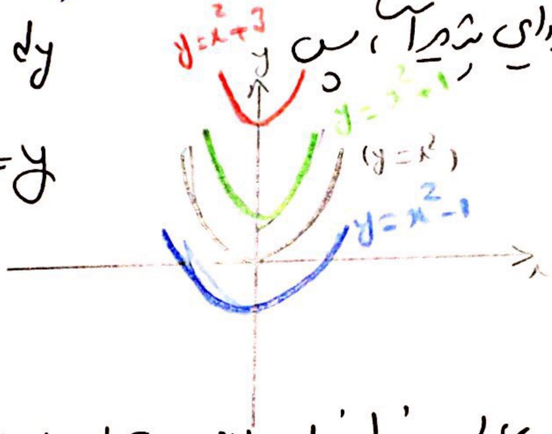
$$\Rightarrow \ln|cxy| = -x \Rightarrow |cxy| = e^{-x}.$$

مثال: معادله دیفرانسیل $2x\,dx = dy$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده جدایی پذیر است، پس

$$\int 2x\,dx = \int dy$$

$$\Rightarrow x^2 + c = y$$



دقت کنید که جواب معادله دیفرانسیل بالا دسته‌ای از منحنی هاست که به $y = x^2 + c$ هستند. اگر تابع یکی از این منحنی ها نیاز باشد، بایستی یک شرط اولیه در صورت مساله داده شده باشد تا به کمک آن بتوان مقدار c خاص را بدست آورد.

به این گونه مسائل، مساله مقدار اولیه یا معادله دیفرانسیل با شرط اولیه گفته می شود.

مثال: مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx} = x e^{-y} \;;\; y(0) = 0$$

همان شرط اولیه

حل: می نویسیم

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{dy}{e^{-y}} \longrightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}_{M(x)}\,dx = \underbrace{e^{y}}_{N(y)}\,dy$$

(جدایی پذیر)

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int e^y\,dy \Rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=e^y$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}+c=e^y \xrightarrow{y(0)=0} \sqrt{1+0^2}+c=e^0$$

$$\Rightarrow 1+c=1 \Rightarrow c=0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2}=e^y$$

$\Rightarrow \ln\sqrt{1+x^2}=y$ (جواب خاص)

تعریف: تابع $f=f(x,y)$ را همگن از درجه α گوییم هرگاه

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha} f(x,y).$$

مثلاً تابع $f(x,y)=x^2\sin(\frac{y}{x})$ همگن از درجه 2 است. زیرا

$$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2\sin\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right)$$

$$=\lambda^2 x^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$=\lambda^2 f(x,y).$$

2 معادله دیفرانسیل همگن

روش شناسایی آن: فرض کنید $M=M(x,y)$ و $N=N(x,y)$ دو تابع همگن از درجه α باشند. در این صورت معادله دیفرانسیل $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$

Scanned with CamScanner

ص A5

را یک معادله دیفرانسیل همگن گوییم. برای حل این معادله از تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ استفاده می کنیم و می نویسیم

$$y = xv \longrightarrow y' = v + xv' \longrightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \longrightarrow$$

$$dy = v\,dx + x\,dv.$$

حفظ کنید

و در آخر به یک معادله جدای پذیر می رسیم.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید با شرط داده

$$(xy)\,dx - (x^2 - y^2)\,dy = 0 \quad ; \quad x > 0 \; , \; y(1) = 1$$

حل: می نویسیم

$$\underbrace{xy}_{M(x,y)}\,dx + (\underbrace{y^2 - x^2}_{N(x,y)})\,dy = 0$$

M ، N هر دو تابع همگن از درجه 2 هستند زیرا

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (xy) = \lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^2 y^2 - \lambda^2 x^2) = \lambda^2 (y^2 - x^2) = \lambda^2 N(x,y)$$

پس معادله بالا یک معادله دیفرانسیل همگن است و با توجه به تغییر متغیرهای بالا می نویسیم

$$x(xv)\,dx + (x^2 v^2 - x^2)(v\,dx + x\,dv) = 0 \Longrightarrow$$

$$\cancel{x^2}\,v\,dx + \cancel{x^2}(v^2 - 1)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$v\,dx + (v^2-1)(x\,dv + v\,dx) = 0 \Rightarrow$$

$$(v + v^3 - v)\,dx + (v^2-1)\,x\,dv = 0 \Rightarrow v^3\,dx = (1-v^2)\,x\,dv$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1-v^2}{v^3}\,dv$$ (جدایی پذیر) $$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{1-v^2}{v^3}\,dv$$

$$\Rightarrow \ln x = \int v^{-3}\,dv - \int\frac{dv}{v} \Rightarrow \ln x = \frac{v^{-2}}{-2} - \ln|v| + c$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{-y^{-2}}{2x^{-2}} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| + c \Rightarrow \ln x + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{-y^{-2}}{2x^{-2}} + c$$

$$\Rightarrow \ln\left|\cancel{x}\,\frac{y}{\cancel{x}}\right| = \frac{-y^{-2}}{2x^{-2}} + c \xrightarrow{y(1)=1} \ln 1 = \frac{-1}{2\times 1} + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln|y| = \frac{-y^{-2}}{2x^{-2}} + 1/2 \Rightarrow |y| = e^{-\frac{y^{-2}}{2x^{-2}} + \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{\frac{-x^2}{2y^2} + 1/2}$$

ب) روش دیگری برای شناسایی معادله همگن

در یک معادله دیفرانسیل همگن می توان آن را به صورت

$$y' = F(y/x)$$ (y' برابر تابعی برحسب $\frac{y}{x}$ است)

نوشت و برای حل مانند قبل عمل می کنیم یعنی قرار می دهیم

$$v = \frac{y}{x} \to y = xv \to y' = v + xv'$$ یا $$dy = x\,dv + v\,dx$$

و به یک معادله جدایی پذیر می رسیم.

Scanned with CamScanner

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2} \quad (x>0)$$

حل:

$$y' = \frac{y}{x} \quad \frac{1}{x}\sqrt{x^2-y^2} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

(y' برابر با تابعی برحسب $\frac{y}{x}$ است، این معادله همگن است.)

$$\xrightarrow{v=\frac{y}{x},\ y' = xv'+v} xv' + \cancel{v} = \cancel{v} + \sqrt{1-v^2}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1-v^2} \Rightarrow \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1} v = \ln x + c \xrightarrow{v=y/x} \sin^{-1}\frac{y}{x} = \ln x + c$$

نکته: برای شناسایی معادلات همگن می‌توان از هر دو روش الف و ب استفاده کرد. برخی مواقع یک روش بر روش دیگر ارجحیت دارد.

تمرین شما: معادلات زیر را حل کنید

1) $(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$

2) $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y' = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$.

Scanned with CamScanner

ص 48

مثال: مسأله مقدار اولیه زیر را حل نمایید

$$y' = -\frac{x+2y}{y} \quad ; \quad y(1)=1$$

حل: معادله دیفرانسیل فوق یک معادله همگن است زیرا داریم

$$y' = -\frac{x(1+2y/x)}{y} \Longrightarrow y' = -\frac{1+2y/x}{y/x}$$ (از روش تشابهی)

$$\xrightarrow[y'=v+xv']{v=y/x\,,} v + xv' = -\frac{1+2v}{v} \Longrightarrow xv' = -\frac{1+2v}{v} - v$$

$$\Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = -\frac{\overbrace{+1+2v+v^2}^{(v+1)^2}}{v} \Longrightarrow \frac{v\,dv}{(v+1)^2} = -\frac{dx}{x}$$ (جدایی پذیر)

$$\Longrightarrow \int \frac{v}{(1+v)^2}\,dv = -\overbrace{\int \frac{dx}{x}}^{Ln|x|} + C$$

$$\xrightarrow[dv=dt]{1+v=t \Rightarrow v=t-1} \int \frac{t-1}{t^2}\,dt = -Ln|x| + C$$

$$\Longrightarrow \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt = -Ln|x| + C \Longrightarrow Ln|t| + \frac{1}{t} = -Ln|x| + C$$

$$\Longrightarrow Ln|1+v| + \frac{1}{1+v} = -Ln|x| + C \longrightarrow Ln|1+\tfrac{y}{x}| + \frac{1}{1+y/x} = -Ln|x| + C$$

$$\xrightarrow{y(1)=1} Ln2 + \frac{1}{2} = -\cancelto{0}{Ln|1|} + C \Longrightarrow C = Ln2 + \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow Ln|1+\tfrac{y}{x}| + \frac{1}{1+y/x} = -Ln|x| + Ln2 + \frac{1}{2}$$

Scanned with CamScanner

③ معادله شبه همگن

معادله $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ با شرط $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ $(a,b,c,a',b',c' \in \mathbb{R})$

همگن نیست، اما با روش زیر می‌توان آن را همگن نمود.

الف. ابتدا محل تلاقی دو خط $ax+by+c=0$ ، $a'x+b'y+c'=0$

را بدست می‌آوریم. فرض کنیم (α,β) جواب دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

باشد.

پس داریم

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

← روش کرامر برای حل دستگاه بالا معروف است.

ب - با تغییر متغیر $\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$ معادله بالا به صورت

$Y' = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$ در می‌آید که یک معادله همگن است.

Scanned with CamScanner