

بیچ آغاز و پامانی وجود ندارد... دیروز به تاریخ پیوسته
فردا رازی است ناکشوده و اما امروز یک بده است.

آمار و احتمالات

رشته های مدیریت، مسابرداری و علوم اقتصادی

آموزش براساس مدل *MIA (Motivation Information Action)*



تهیه و تنظیم:

محمد رضائی قلعه

مدرس دانشگاه پیام نور

www.MathLearning.ir

info@MathLearning.ir

[@MathLearning](#)

نظر اول - مردی بر نفهم اصیل و
اهم کاربرد آمار

- تعریف آمار: مجموعه از روش‌های برای جمع‌آوری و خلاصه کردن داده‌ها، طبقه‌بندی آن‌ها و
روش‌های کلی برای پیش‌بینی، برآورد و تصمیم‌گیری در شرایط مختلف و ارزیابی ریسک.

- داده‌ها: واقعیت‌ها یا ارقامی هستند که می‌توان از آن‌ها نتایج را استخراج کرد. (روایع
داده‌ها موارد خام آماري اند).

- مجموعه داده‌ها: داده‌هایی که برای مطالعه‌ای خاص گردآوری شده‌اند.

- عنصر: مجموعه داده‌ها، داده‌ای درباره گردآوری از عناصر فراهم می‌باشد. (هر روش یک عنصر)

- تغییر: شخصی مربوط به یک عنصر، که می‌تواند برآمد های مختلف را قبول کند.

- انواع تغییر: کمی: برآمدی مستقیماً به صورت عدد بیان می‌شوند مانند قد، وزن، درجه دما و ...

- کلیفی: برآمدی بصورت غیر عددی بیان می‌شوند: مانند جنس، گروه خونی و ...

- مورد: اصله‌ای مربوط به تمام تغییرات برای یک عنصر از مجموعه داده‌ها. (سطر داده‌ها)

- مشاهده: داده مربوط به یک عنصر از مجموعه داده‌ها درباره یک متغیر
(برآمد)

- انواع داده‌ها: اندازه‌گیری شده: به وسیله اندازه‌گیری حاصل می‌شوند: مانند قد و وزن
شمارشی: با شمردن حاصل می‌شوند: مانند تعداد افراد

رتبه‌ای: با رتبه‌بندی و تخصیص رتبه: مانند رتبه‌بندی کلاس

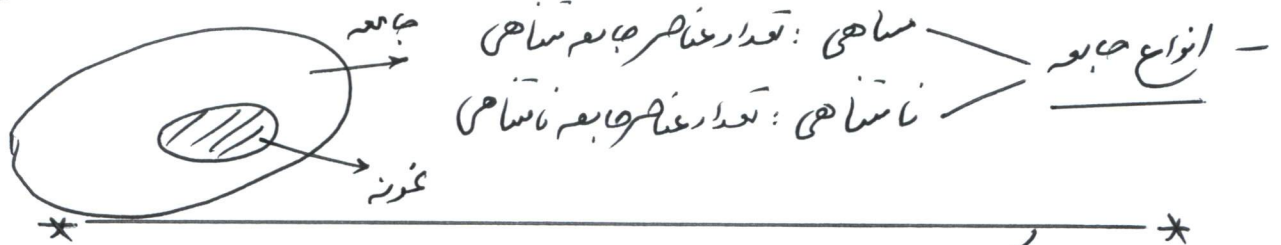
رده‌بندی شده: بر حسب رتبه در رده حاصل می‌شوند: مانند رتبه‌بندی یا پرسش

فصل اول

- جامعه: مجموعه عناصر مورد نظر را شامل می‌شود

- نمونه: بخشی از جامعه تحت بررسی به‌قسمی که بتوان از آن نتایجی در مورد جامعه استخراج نمود.

- اندازه جامعه و نمونه: تعداد عناصر جامعه را اندازه جامعه و تعداد عناصر نمونه را اندازه نمونه گویند.



- انواع روش‌های آماری:

۱- آمار توصیفی: آن قسمت از علم آمار که در مورد توصیف یک مجموعه از مشخصات می‌کند بدون آن‌که استنباط آماری از آن بشود.

۲- آمار استنباطی: آن قسمت از علم آمار که شمول روش‌های است که با استفاده از آن‌ها اطلاعات موجود در نمونه بر کل جامعه تعمیم داده می‌شود.

- مراحل استنباط آماری

- شناسایی دقیق دنیای مسئله و جامعه مربوط به آن
- جمع‌آوری داده‌ها و اطلاعات نمونه
- تجزیه و تحلیل اطلاعات نمونه و قالب نموداری و شکل‌ها
- تعمیم نتایج نمونه به جامعه

انواع روش‌های آماری در این کتاب به شرح زیر است:

فصل دوم

فصل دوم - آمار توصیفی

- تعیین جدول توزیع فراوانی :

$$\left. \begin{array}{l} 1- \text{تعیین دامنه معیار (R)} \\ R = x_{\max} - x_{\min} \\ 2- \text{تعیین تعداد طبقات (K)} \\ K = 1 + 3.3 \log n \quad (n: \text{مجموعه صفتها}) \\ 3- \text{تعیین تعداد رده ها (C)} \\ C = \frac{R}{K} \end{array} \right\}$$

مثال : مشاهدات : ۱, ۲, ۵, ۴, ۷, ۳

فراوانی f_i	صورت طبقات
۲	۱-۳
۲	۳-۵
۱	۵-۷
۱	۷-۹
۶	$n = \sum_{i=1}^K f_i$

- فراوانی تجمعی (انباشته) : از جمع فراوانی هر رده بارده ما قبل از بدست می آید.

$$F_1 = f_1, \quad F_2 = f_1 + f_2, \quad \dots, \quad F_K = \sum_{i=1}^K f_i = n$$

- فراوانی نسبی : از تقسیم فراوانی هر رده به کل رده ها حاصل می شود.

$$\text{فراوانی نسبی رده نام} = \frac{f_i}{n} \quad \text{مجموع} \quad \sum_{i=1}^K \frac{f_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^K f_i = \frac{n}{n} = 1$$

$$\text{درصد فراوانی نسبی} = \frac{f_i}{n} \times 100$$

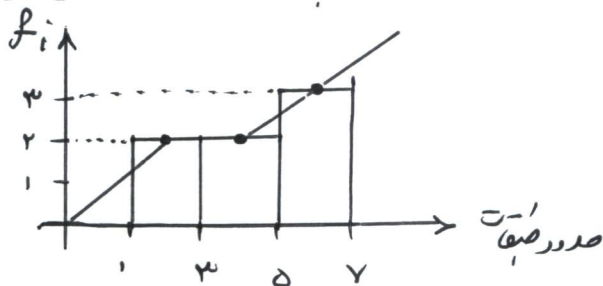
* ————— *

— نموداری که دارای —
 هیسوگرام (بافت نگی)

— چند بر فراز (چند ضلعی)

— دایره ای (کوره ای)

— هیسوگرام: نموداری که عرض آنرا حدود طبقات و طول آن را فراز یکسانی دارد.



— چند بر فراز: ابتدا وسط هر صله را تعیین میکنیم به هم وصل میکنیم.

— دایره ای:

$$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$$

f_i	α_i
n	360

$n = 6$
 $f_i = 2$

$\alpha_i = \frac{2 \times 360}{6} = 120^\circ$

مثال:

* ————— *

— اندازه که نمایش به مرکز —
 میانگین

— میان

— مقدار (نم)

— دایره ای گسترده: مقدار هر محزرا

— پیوسته: با فاصله نبندی بیان می شود.

نقد و بررسی

- نحوه محاسبه میانگین برای داده‌های گسسته:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

- نحوه محاسبه میانگین برای داده‌های پیوسته: در این صورت چون خود x_i که را نداریم از نمونه هر رده $(m_i = \text{میانگین صد رصقات})$ برای محاسبه میانگین استفاده می‌شود.

صد رصقات	f_i	m_i
0-5	2	2,5
5-10	3	7,5
10-15	4	12,5
15-20	1	17,5
	$n=10$	

$$m_i = \frac{\text{صد بالارده} + \text{صد پائین‌تره}}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i m_i = \frac{1}{10} [(2 \times 2,5) + (3 \times 7,5) + (4 \times 12,5) + (1 \times 17,5)]$$

* ————— *

- میانگین: عددی که صد رده 50 از آن کمتر و 50 از آن بیشتر است.

- نحوه محاسبه میانگین برای داده‌های گسسته: ابتدا اشیاء را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases} M_d = x_{(i)} & : i = \frac{n+1}{2} \text{ فرد } n \\ M_d = \frac{x_{(i)} + x_{(i+1)}}{2} & : i = \frac{n}{2} \text{ زوج } n \end{cases}$$

مثال: 1, 1, 0, 4, 3, 2, 7

1, 1, 2, 3, 4, 5, 7
 $x_{(1)} \quad x_{(2)} \quad x_{(3)} \quad x_{(4)} \quad x_{(5)} \quad x_{(6)} \quad x_{(7)}$

↓
 M_d

$$n=7 \rightarrow i = \frac{7+1}{2} = 4 \rightarrow M_d = x_{(4)} = 3$$

نمودار

۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

شکل:

$$n = 6, i = \frac{n}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow M_d = \frac{x_{(3)} + x_{(4)}}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5$$

نکته محاسبه میانبر داده گسسته:

$$M_d = L_m + \frac{n \times h - F_c}{f_m} \times L_m$$

L_m = صدیفین رده میانه

F_c = فراوانی جمع رده تا قبل رده میانه

f_m = فراوانی رده میانه

L_m = طول رده

n = کل داده

رده میانه = رده ای که فراوانی آن

از $n \times 0,5$ بیشتر یا برابر باشد.

$$10 \times 0,5 = 5$$

صورت ضوابط	f_i	F_i
۰ - ۵	۲	۲
۵ - ۱۰	۳	۵
۱۰ - ۱۵	۴	۹
۱۵ - ۲۰	۱	۱۰
	$n = 10$	

$$M_d = 5 + \frac{10 \times 0,5 - 2}{3} \times 5$$

مُد (رنگ): عددی است که دارد بیشترین فراوانی است.

نکته محاسبه مُد در داده گسسته:

شکل

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5 \rightarrow Mode = 1 \\ 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5 \rightarrow Mode = \frac{1+2}{2} = 1,5 \\ 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6 \rightarrow Mode = 1, 3 \\ 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 \rightarrow Mode = \text{وجود ندارد} \end{array} \right.$$

نکته میانه مُد در داده گسسته: رده مُد، رده ای است که بیشترین فراوانی

دارد. لذا مُد برابر نماینده رده مُد است. (صدیفین رده)

$$Mode = \frac{1+10}{2} = 12,5$$

۶

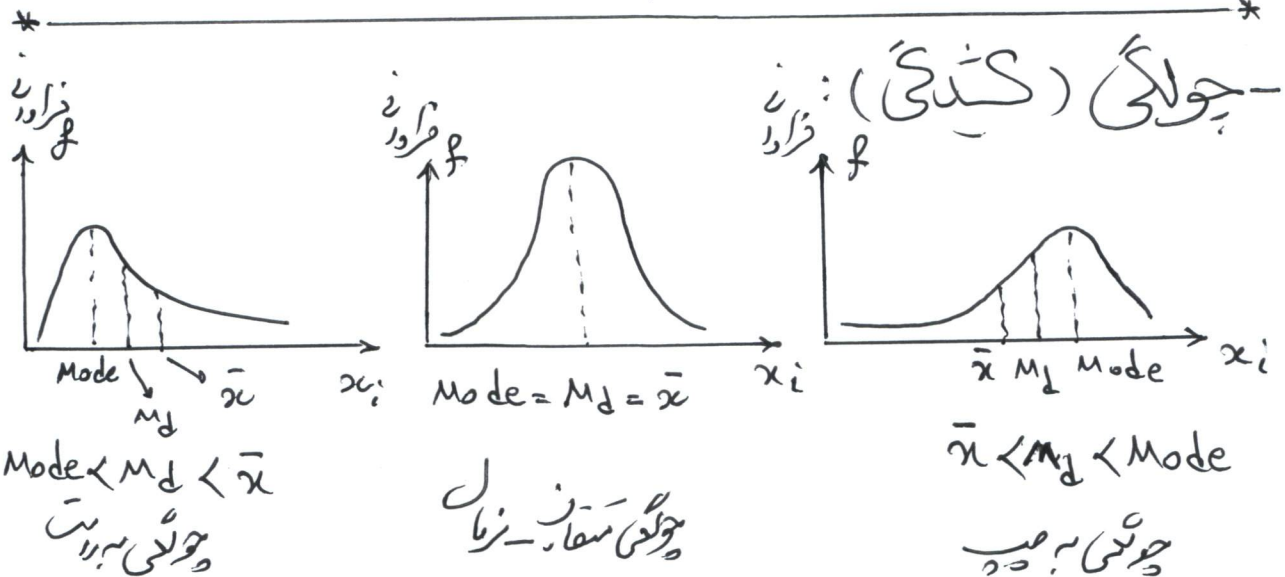
نصرت دوع

نکته مهم: اگر داده a برابر شده و با b جمع شوند آنگاه:

$$\bar{x} \rightarrow a\bar{x} + b \leftarrow ax_i + b$$

$$M_d \rightarrow aM_d + b$$

$$Mode \rightarrow aMode + b$$



اندازه پراکندگی

- دامنه تغییرات (R)
- واریانس (مغز) S^2 یا σ^2 (جعبه)
- انحراف معیار (مغز) S یا σ (جعبه)
- ضرب و جار

مثال: درجه کجی به S, S^2, R : ۲, ۵, ۱, ۷, ۲

$$\sqrt{R} = 7 - 1 = 6$$

$$\sqrt{S^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \leftarrow \bar{x} = \frac{2+0+1+7+2}{5} = \frac{12}{5}$$

$$= \frac{1}{5-1} \left[(2 - \frac{12}{5})^2 + (0 - \frac{12}{5})^2 + \dots + (2 - \frac{12}{5})^2 \right]$$

$$\sqrt{S} = \sqrt{S^2} \text{ (ضرب و جار)}$$

- نحوه محاسبه واریانس برای درجه‌های سوتیده :

صورتیقات	f_i	m_i
۰-۵	۲	۲,۵
۵-۱۰	۳	۷,۵
۱۰-۱۵	۴	۱۲,۵
۱۵-۲۰	۱	۱۷,۵
	$n=۱۰$	

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum f_i m_i}{n} = 9 \\ S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n f_i \cdot (m_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{9} [2(2,5-9)^2 + \dots + 1(17,5-9)^2] \\ S &= \sqrt{S^2} \end{aligned} \right.$$

- حدک P ام : اگر P بین ۰ و ۱ باشد حدک P ام، $x_{(i)}$ است که P درصد داده‌ها از آن کمتر، $(1-P)$ درصد داده‌ها از آن بیشتر باشند حدک P ام را با H_P نشان می‌دهند

- نحوه محاسبه H_P :

$$\left\{ \begin{aligned} ۱- \text{درجه‌ها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم: } x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)} \\ ۲- \text{مقدار } i = \frac{P}{100} (n+1) \text{ را بدست می‌آوریم:} \end{aligned} \right.$$

$$H_P = x_{(i)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{اگر } i \text{ عدد صحیح} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{اگر } i \text{ غیر صحیح و } (i-1) < i < (i+1) \text{ (جزیج } r \text{، جزء اعشاری } w) \end{array} \right.$$

$$H_P = (1-w)x_{(r)} + w x_{(r+1)}$$

$$\left\{ \begin{aligned} Q_1 &= H_{25} \\ Q_3 &= H_{75} \\ Q_5 &= H_{50} = M_d \end{aligned} \right.$$

- چارک‌ها
چهارک اول
چهارک دوم
چهارک سوم

۲, ۵, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰

$$i = \frac{p}{1..} (n+1) \quad : Q_1 = H_{25} \text{ کلاس (۱)}$$

$$= \frac{20}{1..} (8+1) = 2,25 \rightarrow r=2, w=,25$$

$$Q_1 = ,75 x_{(r)} + ,25 x_{(r+w)} = ,75 \times 0 + ,25 \times 8 = 0,75$$

$$i = \frac{20}{1..} (8+1) = \dots \quad : Q_2 = H_{50} \text{ کلاس (۲)}$$

$$Q_2 = 10,5$$

$$i = \frac{70}{1..} (8+1) = 6,75 \quad : Q_3 = H_{75} \text{ کلاس (۳)}$$

$$\rightarrow r=6, w=,75$$

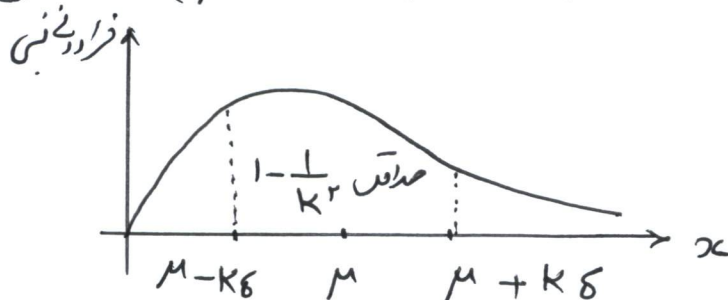
$$Q_3 = ,25 x_{(r)} + ,75 x_{(r+w)} = ,25 \times 14 + ,75 \times 17 = 16,25$$

* ————— *

فصل جلدیف:

اگر جامعه‌ای با میانگین μ و واریانس σ^2 داشته باشیم آنکاه صدق $(1 - \frac{1}{K^2})$

تعداد از مشاهدات در فاصله $(\mu - K\sigma, \mu + K\sigma)$ قرار می‌گیرد.



K	$1 - \frac{1}{K^2}$
۱	۰
۲	$\frac{3}{4}$
۲,۵	$,۸۴$
۳	$\frac{8}{9}$

$$\begin{cases} \mu = 70 \\ \sigma = 10 \rightarrow \sigma^2 = 100 \\ K = 2 \rightarrow (1 - \frac{1}{K^2}) = \frac{3}{4} = ,75 \end{cases}$$

مثال:

$$(70 - 2(10), 70 + 2(10)) = (50, 90)$$

صدق $\frac{3}{4}$ داده‌ها در بازه $(50, 90)$ قرار می‌گیرد.

فصل سوم - احتمال

- از توانش مختلف برآید آورد تعداد حالات و شانس حالت که مختلف یک
حادثه ممکن می شود.

- آزمایش تصادفی: هرگاه نتیجه یک آزمایش از قبل به صورتی قطعی نتوان باشد آنرا
آزمایش تصادفی گوئیم. به طور مثال در پرتاب سکه قبل از پرتاب نتوانستیم که شیر
یا آید یا خط.

- فضای نمونه: مجموعه حالات یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه می نامیم و آنرا با S
نمایش می دهیم.

مثال ۱: یک سکه را ۲ بار پرتاب کنیم: $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

مثال ۲: یک تاس را یک بار پرتاب کنیم: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه را یک پیشامد می نامیم.

مثال: سکه را ۲ بار پرتاب کنیم پیشامد آنکه حداقل یک بار خط بیاید:

$$A = \{HT, TH, TT\}$$

* ————— *

- توانش شمارش:

۱- قانون جمع: اگر پیشامد A به n طریق و پیشامد B به m طریق اتفاق بیفتد

و C بیامدی باشد که A یا B اتفاق افتد آنگاه تعداد حالات C برابر

$$\text{است با: } m + n$$

مثال: در یک ماه ۴ ماه سفید و ۵ ماه قرمز داریم. اگر بخواهیم یک ماه انتخاب کنیم

$$\text{تعداد حالات ممکن برابر است با: } 4 + 5 = 9$$

* ————— *

نفسه

۲- قانون ضرب: اگر A به n طریق و B به m طریق مستقل از هم اتفاق افتند و C باشد می باشد که A, B با هم رخ دهند آنگاه تعداد حالات C برابر است با: $m \times n$

مثال: فرض کنید شخصی می خواهد با اتوبوس یا قمار یا هر ایلی به ۵ شهر مسافرت نماید. تعداد راه های مختلف که می تواند این مسافرت را انجام دهد برابر است با: $5 \times 3 = 15$

۳- جایگشت: تعداد حالاتی که بتوان K شیء را از یکدیگر جدا کرد برابر است با:

$$K! = K(K-1)(K-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

* نکته: $1! = 1$ و $0! = 1$

مثال: تعداد حالاتی که بتوان با حروف a, b, c کلمات ۳ حرفی ساخت:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

۴- ترتیب: تعداد حالاتی که بتوان r شیء را از بین n شیء عضو A انتخاب نمود به نحوی که ترتیب را از نقش اول تا r هم باشد برابر است با:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: از میان ۲۴ عضو یک باشگاه ورزشی برای انتخاب رئیس، نائب رئیس و ۳ نفر از اسامی که می بایست به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

$$P_3^{24} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times \cancel{21!}}{\cancel{21!}} = 24 \times 23 \times 22$$

۵- ترکیب: تعداد حالتی که بدون r شیء کم از n شیء را از بین n عضویت A انتخاب کرد به نحوی که ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم نباشد برابر است با:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۱: به چند طریق می توان دو کتاب ریاضی و سه کتاب کهار را از بین هشت کتاب ریاضی و شش کتاب کهار انتخاب نمود؟

$$\binom{8}{2} \binom{6}{3} = \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{3!3!}$$

مثال ۲: یک مجموعه شامل ۵ حرف است. چند زوج از حرف های تکراری انتخاب کرد به نحوی که ترتیب حرف مهم نباشد؟ (ب) ترتیب حرف مهم باشد؟

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} \quad \text{ب) } P_2^5 = \frac{5!}{3!}$$

مثال ۳: اگر یک کلمه از ۵ حرف (فارسی) داشته باشد به شکل شده باشد چند کلمه دیگر می توان درست کرد اگر:
(الف) تکرار اعداد و حروف مجاز باشد؟
(ب) تکرار اعداد و حروف مجاز نباشد؟

$$\underbrace{32 \times 32 \times 32}_{\text{حروف}} \times \underbrace{9 \times 10 \times 10}_{\text{اعداد}} \quad \text{الف)}$$

$$\text{ب) } 32 \times 31 \times 30 \times 9 \times 9 \times 8$$

مثال ۴: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد ۲ رقمی می توان ساخت اگر:
(الف) تکرار مجاز نباشد. (ب) تکرار مجاز نباشد.

$$\text{الف) } 3 \times 4$$

$$\text{ب) } 3 \times 3$$

- احتمال یک پیشامد: تعداد حالات مطلوب پیشامد A، تقسیم بر تعداد حالات فضای نمونه

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

* - ویژگی‌های احتمال:

$$\begin{cases} 1) P(A) \geq 0 \\ 2) 0 \leq P(A) \leq 1 \end{cases}$$

مثال ۱: ۵ تومبلیکته، یک سبز، ۴ قرمز، ۱ آبی و ۱ سفید هستند. اگر ۳ تومبلیکته را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که بهترین تومبلیکته بین آنها باشد؟

$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\rightarrow P(A) = \frac{6}{10} = 0.6$$

مثال ۲: از بین ۱۰ نفر معافان کدام ۳ نفر را در مسابقات انتخاب می‌کنند به چه طریقی؟

۳ نفر را انتخاب می‌کنیم؟ (احتمال اینکه جوانترین فرد بین آن‌ها باشد باید)

۴. احتمال اینکه جوانترین و پیرترین فرد در بین آن‌ها باشد باید

$$a) C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 120$$

$$b) C_2^9 = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{2 \times 1 \times 7!} = 36$$

$$c) C_1^8 = \frac{8!}{1!7!} = \frac{8 \times 7!}{1 \times 7!} = 8$$

* - احتمال متمم یک پیشامد:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- احتمال شرطی:

در محاسبه احتمال برای اتفاقی پیش می آید که شخص از بعضی خصوصیات حادثه از قبیل مطلع است، می خواهیم احتمال را در صورت دانستن آن خصوصیات بدست آوریم، این نوع احتمال را احتمال شرطی می نامند و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال ۱: احتمال آن را می گیریم که در یک بازی، عدد ۴ بیاید در صورتی که بدین عدد بدست آمده نوع است؟

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{4\}, B = \{2, 4, 6\} \Rightarrow A \cap B = \{4\}$$

$$P(B) = \frac{3}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

مثال ۲: تاسی را دوبار پرتاب می کنیم، اگر بدینم مجموع اعداد روی تاس کمتر از ۶ است، احتمال اینکه اعداد روی تاس مساوی باشد بیابید.

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,6)\} / n(S) = 36$$

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (4,1)\} / n(A) = 10$$

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\} / n(B) = 6$$

$$A \cap B = \{(1,1), (2,2)\} \Rightarrow P(A|B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{1}{5}$$

- پیشامدها مستقل: دو پیشامد A و B مستقل گویند هرگاه وقوع یا عدم وقوع یکی تأثیری بر وقوع یا عدم وقوع دیگری نداشته باشد و آن دو پیشامد را دسته گویند در

مورد پیشامد مستقل داریم: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

* ————— *

- پیشامدها ناسازگار: اگر دو پیشامد A و B نتوانند با هم رخ دهند ناسازگار هستند و داریم:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

* ————— *

- جدول احتمال: گاهی اوقات ممکن است احتمال اشتراک پیشامد را در

یک جدول درج شده باشد.

	A	B	
C	$P(AC)$ ۰٫۰۶	$P(BC)$ ۰٫۳۱	$P(C)$ ۰٫۳۷
D	$P(AD)$ ۰٫۰۵	$P(BD)$ ۰٫۰۸	$P(D)$ ۰٫۶۳
	$P(A)$ ۰٫۶۱	$P(B)$ ۰٫۳۹	

مثال:
$$\begin{cases} P(AB) = 0 \\ P(CD) = 0 \end{cases}$$

* ————— *

- دو قانون مهم احتمال:

۱- قانون ضرب احتمالات: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ داریم

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$یا \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

۲- قانون جمع احتمالات: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- قانون بیز:

می‌دانیم $P(A|B)$ و $P(A|\bar{B})$ متغیرات است و از طرف دیگری می‌دانیم که

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) \quad \text{لذا می‌توان گفت اعضای مجموعه A می‌توانند عضویت بیش از یک B$$

را داشته باشند یا نداشته باشند یعنی:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \quad (1)$$

$\downarrow$ عضویت B را ندارد $\downarrow$ A عضویت B را دارد $\downarrow$ اعضای مجموعه A
 و عضویت $\bar{B}$ را دارد

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2) \quad \text{و} \quad P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \quad (3)$$

بنابراین (1)، (2)، (3)

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})}$$

قانون بیز

* * *
 مثال: ۵۲٪ جمعیت شهری از زنان تشکیل می‌دهند. ۰.۰۰۴ از زنان و ۰.۰۰۳ مردان

مردان به آسم سبک هستند (انف) چه نسبتی از افراد سبک به آسم هستند؟
 ب. اگر شخصی انتخاب شود به آسم رفته باشد، احتمال اینکه زن باشد چقدر است؟

نسبت $P(B) = ۰.۵۲$

نسبت $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = ۰.۴۸$

به آسم $P(A|B) = ۰.۰۰۴$

$P(A|\bar{B}) = ۰.۰۰۳$

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

$$= ۰.۵۲ \times ۰.۰۰۴ + ۰.۴۸ \times ۰.۰۰۳ = ۰.۰۰۳۵$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{۰.۵۲ \times ۰.۰۰۴}{۰.۰۰۳۵}$$

نسبت $P(A) = ?$
 به آسم

ب. $P(B|A) = ?$

نفسه سوم

مثال: یک فروشگاه شامل ۲ قیمت عمده فروش و خرده فروش است. ۷۰٪ از فروش های فروشگاه در قیمت خرده فروش است. ۱۰٪ از خرده فروش ها در یک فروشگاه دیگر ۵٪ از فروش های آن خرده فروش و ۲٪ از فروش های آن عمده فروش است. اگر او به یک مورد استیفاء برخط نماید، چقدر احتمال دارد که این استیفاء ناشی از قیمت عمده باشد؟
 مربوط به بخش خرده فروش باشد؟

خرده فروش

$$P(B) = 0.7$$

$$P(\bar{B}) = 1 - 0.7 = 0.3$$

عمده فروش

$$P(A|B) = 0.05$$

$$P(A|\bar{B}) = 0.2$$

$$P(A) = ?$$

$$P(B|A) = ?$$

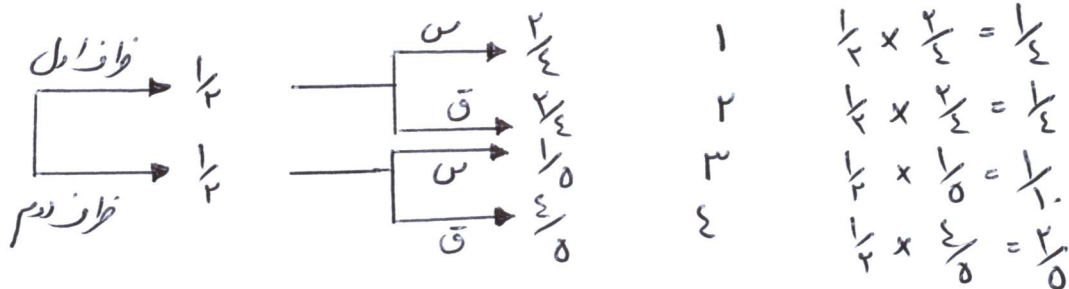
$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

$$= 0.05 \times 0.7 + 0.2 \times 0.3 = 0.085$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0.05 \times 0.7}{0.085} = \frac{35}{85}$$

مثال: در یک ظرف ۱ مهر سفید و ۲ مهر قرمز و ۲ مهر زرد و ۴ مهر سبز وجود دارد. یک طرف به تصادف انتخاب و از درون آن یک مهر بیرون می آوریم:

الف) احتمال اینکه مهر سفید باشد چقدر است؟
 ب) اگر مهر انتخابی سفید باشد احتمال اینکه از ظرف اول باشد چقدر است؟



$$P(\text{مهر سفید}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{سفید} | \text{ظرف اول}) = \frac{P(\text{ظرف اول} | \text{سفید}) \cdot P(\text{ظرف اول})}{P(\text{سفید})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$$

نفسه سوم

فصل چهارم - متغیرهای تصادفی و توزیع های احتمال

- متغیر تصادفی: متغیری که مقدار مختلف را با احتمال یکسان یا مختلف اختیار می کند و به آنش گستره و سوبته تقسیم می شود.

- متغیر تصادفی گستره: متغیری است که بین ۲ مقدار آن نمی توان مقدار دیگری اختیار کرد.

- متغیر تصادفی سوبته: متغیری است که بین ۲ مقدار آن بی نهایت عدد وجود دارد.

(سوبته) $2 < x < 4$ / (گستره) $x = 0, 1, 2$ تصادفی

* مثال: سکه ای را ۲ بار پرتاب می کنیم متغیر تصادفی x ، تعداد سرها باشد.

$$S = \{HH, HT, TH, TT\} \quad x = \{0, 1, 2\}$$

جدول
(توزیع)
 $P(X=x)$ تابع چگالی احتمال

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
$P(X=0)$	$\frac{1}{4}$		
$P(X=1)$		$\frac{2}{4}$	
$P(X=2)$			$\frac{1}{4}$

(جدول توزیع احتمال X)

$$P(X=0) = \frac{1}{4}, \quad P(X>2) = 0, \quad P(0 < X < 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \leq 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}, \quad P(0 < X < 1) = 0$$

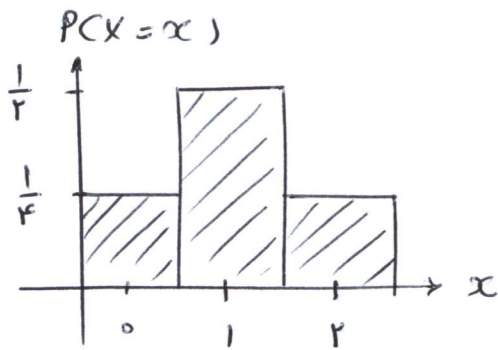
* ویژگی های تابع چگالی احتمال (گستره):

$$1) P(X=x) \geq 0$$

$$2) \sum_x P(X=x) = 1$$

در مثال بالا:

$$\sum_{x=0}^2 P(X=x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1$$



- نمودار توزیع احتمال X (در شکل مبین)

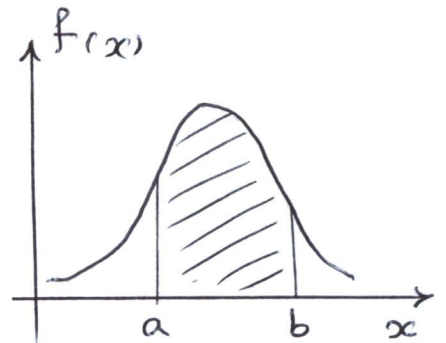
- تابع چگالی احتمال (پیوسته):

تابع چگالی احتمال پیوسته دارای شرایط زیر است:

۱) $f(x) \geq 0$

۲) $\int_x f(x) dx = 1$

۳) $P(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$



۱) $\int_a^a f(x) dx = P(X=a) = 0$

- نکته:

۲) $P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b)$

۳) $P(X \leq b) = P(X < b)$

۴) $P(X \geq a) = P(X > a)$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{r} \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

مثال:

$$P(0 < X < \frac{1}{r}) = \int_0^{\frac{1}{r}} x dx = \frac{1}{r} x^r \Big|_0^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r}\right)^r = \frac{1}{r}$$

$$P(X > \frac{1}{r}) = 0, \quad P(X=0) = 0$$

- امید ریاضی X (متغیر تصادفی با مقدار عددی X):

$$\mu_x = E(X) = \sum_x x P(X=x)$$

$$\mu_x = E(X) = \int_x x f(x) dx$$

* مثال: سکه را ۳ بار پرتاب کنیم. اگر X تعداد شیرها باشد امید ریاضی را محاسبه کنید.

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\mu_x = E(X) = \sum_{x=0}^3 x P(X=x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

* مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$ فرض است. امید ریاضی را بیابید.

$$\mu_x = E(X) = \int_1^3 \frac{1}{x} x dx = \frac{1}{x} x^2 \Big|_1^3 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

- ویژگیهای امید ریاضی:

۱) $E(b) = b$

۲) $E(aX) = a E(X)$

۳) $E(aX + b) = a E(X) + b$

۴) $E(aX^2 + bX + c) = a E(X^2) + b E(X) + c$

۵) $E(E(X)) = E(X)$

- واریانس و انحراف معیار تصادفی:

$$\text{Var}(X) = \sigma_x^2 = E[(X - \mu_x)^2] = \sum_x (x - \mu_x)^2 P(X=x)$$

نصفه چهارم

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_x x^2 p(x=x) - \left(\sum_x x p(x=x) \right)^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

* مثال: در مثال صفحه قبل، واریانس متغیر تصادفی را با این معیار را بیابید.

$$E(X) = \frac{3}{2} \quad / \quad E(X^2) = \sum_{x=0}^3 x^2 p(x=x) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad / \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

* - ویژگی‌های واریانس متغیر تصادفی:

۱) $\text{Var}(b) = 0$

۲) $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X) \quad / \quad \sigma_{aX} = a \sigma_X$

۳) $\text{Var}(aX+b) = a^2 \text{Var}(X) \quad / \quad \sigma_{aX+b} = a \sigma_X$

نصفه چهارم

فصل پنجم - چند توزیع احتمال گسسته

۱- توزیع برنولی: آزمایشی تصادفی است که تنها ۲ نتیجه ممکن دارد و این ۲ نتیجه با هم یکنواخت نمی‌رهند.

متغیر تصادفی X تعداد سیریزها در این آزمایش است.

$$X \sim \text{Ber}(p)$$

x	0	1
$P(x)$	$q=1-p$	p

$$P(X=x) = \begin{cases} p & x=1 \\ q & x=0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad P(X=x) = p^x q^{1-x} \quad (x=0, 1)$$

$$E(X) = p$$

$$\text{Var}(X) = pq = p(1-p) \rightarrow \delta x = \sqrt{pq}$$

* ————— *

مثال: سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم. اگر x نشان دهنده تعداد سیریزها باشد،

$$X \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$$

امید ریاضی، واریانس و انحراف معیار را بیابید.

$$E(X) = p = \frac{1}{2} \quad / \quad \text{Var}(X) = pq = p(1-p) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad / \quad \delta x = \frac{1}{2}$$

* ————— *

۲- توزیع دو جمله‌ای:

هرگاه n آزمایش برنولی را با احتمال سیریز p ، به مستقل تکرار کنیم، این آزمایش را

آزمایش دو جمله‌ای می‌نامیم. (متغیر تصادفی X تعداد سیریزها است)

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

n = تعداد تکرار p = احتمال سیریز

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

$$E(X) = np$$

$$\text{Var}(X) = npq \rightarrow \delta x = \sqrt{npq}$$

* ————— *

فصل ۴

مثال: سکه‌ای را ۵ بار به طور مستقل پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ۲ بار شیر بیاید:

ب) امید ریاضی و واریانس تعداد شیرها را محاسبه کنید.

$$X \sim \text{Bin}(5, \frac{1}{4}) \quad n=5, \quad p=\frac{1}{4}, \quad q=\frac{3}{4}$$

الف) $P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3$

ب) $E(X) = np = 5 \times \frac{1}{4} = 1,25$

$$\text{Var}(X) = npq = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 0,9375$$

* مثال: یک زنون در فمیش هر ۱۵ سوال ۴ گزینه‌ای است که تنها یکی از ۴ گزینه درست است. احتمال اینکه شخصی صدق ب ۲ سوال پاسخ درست دهد بیاید.

ب) احتمال اینکه هیچکدام از پاسخ‌ها صحیح نباشد بیاید.

$$X \sim \text{Bin}(15, \frac{1}{4}) \quad n=15, \quad p=\frac{1}{4}, \quad q=\frac{3}{4}$$

الف) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$$= 1 - (P(X=0) + P(X=1))$$

$$= 1 - \left[\binom{15}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{15} - \binom{15}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \right]$$

ب) $P(X=0) = \binom{15}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$

* ————— *

نکته:

۱) $P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$

$$= 1 - P(X \leq a-1)$$

۲) $P(X=a) = P(X \leq a) - P(X \leq a-1)$

(نوشتن استفاده از جدول ۲ محله‌ای)

۳- توزیع پواسون:

این توزیع صرف تعداد وقوع پدیده‌ی مشخصی در یک فاصله زمانی یا مکانی مشخص است.

$$X \sim \text{Pos}(\mu)$$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \mu$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

$$e = \text{عدد نپر}$$

$$\mu = \text{متوسط تعداد موفقیّت در یک فاصله زمانی یا مکانی مشخص}$$

- نکته: توزیع پواسون دارای یک پارامتر است و در این توزیع امید ریاضی با در میان برابر است.

★ ————— ★

مثال: به طور متوسط در هر دقیقه، ۲ اتوبوس برای کنترل ترافیک وارد خیابان می‌شود. احتمال این که ۲ اتوبوس در ۵ دقیقه وارد خیابان می‌شوند، چقدر است؟

$$P(X=2) = \frac{e^{-10} \times 10^2}{2!} = 50 \cdot e^{-10}$$

$\begin{matrix} \text{اتوبوس (متوسط)} & & \\ 1 & 2 & \\ 5 & \mu=10 & \end{matrix}$

مثال: اگر تغییر تعدادی X را در توزیع پواسون با میانگین معیار ۱,۵ باشد، $P(X \geq 1)$ را محاسبه کنید.

$$\sigma_X = 1,5 \rightarrow \text{Var}(X) = (1,5)^2 = 2,25 = \mu$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-2,25} \times 2,25^0}{0!} = 0,894$$

نکته دوم: تقریب توزیع دو جمله‌ای با پواسون

اگر در توزیع دو جمله‌ای n بزرگ و p خیلی کوچک باشد می‌توان از توزیع پواسون استفاده کرد. به طور کلی وقتی $n \geq 20$ و $np \leq 5$ باشد از توزیع پواسون با $\mu = np$ استفاده نماییم.

مثال: در یک کارخانه ۲۰ ماشین برای تولید کفش کار می‌کنند. احتمال اینکه در یک روز یکی از ماشین‌ها از کار بیفتد ۰.۰۵ است. اگر ماشین‌ها به طور مستقل از هم کار کنند. (الف) احتمال اینکه در یک روز هیچ‌کدام از ماشین‌ها از کار بیفتد چیست؟ (توزیع دو جمله‌ای) (ب) احتمال کمتر از ۵ ماشین از کار بیفتد چقدر است؟ (توزیع پواسون)

(الف) $X \sim \text{Bin}(20, 0.05)$ $n=20, p=0.05, q=0.95$

$$P(X=2) = \binom{20}{2} (0.05)^2 (0.95)^{18} = 0.189$$

(ب) $\mu = np = 20 \times 0.05 = 1 \leq 5$

$$X \sim \text{Pos}(1)$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-1} \times 1^2}{2!} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0.184$$

مثال: یک تلفنچی ۴ خط از ۱۰۰ خط را اشتباه وصل می‌کند. اگر روزی ۱۰۰ تلفن وصل کرده باشد در این ۱۰۰ تلفن چقدر اشتباه وصل شده است؟

$$n=100, p=0.04 \Rightarrow np = 100 \times 0.04 = 4 \leq 5$$

$$\mu = np = 4 \rightarrow \text{Var}(X) = \mu = 4$$

۴- توزیع فوق هندسی :

اگر اندازه نمونه نسبت به اندازه جامعه کوچک باشد یعنی $\frac{n}{N} = 0.05$ از توزیع درجه اول استفاده می شود ولی اگر $\frac{n}{N} > 0.05$ باشد از توزیع فوق هندسی استفاده می کنند.

در این توزیع یک نمونه n تایی از جامعه انتخاب و تعداد اعضای جامعه دارای مشخصه K هستند. در هر شش یک عضو نمونه موفقیت و عدم وجود شش شکست تلقی می گردد. در این صورت داریم :

$$X \sim HG(n, N, K)$$

$$P(X=x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (x=1, 2, 3, \dots, n)$$

$$p = \frac{K}{N}$$

$$E(X) = np = n \times \frac{K}{N}$$

$$Var(X) = n \times \frac{K}{N} \times \frac{N-K}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$$

$\underbrace{\quad}_p \quad \underbrace{\quad}_q \quad \quad$

n = تعداد اعضای نمونه

N = تعداد اعضای جامعه

K = تعداد اعضای دارای مشخصه مورد نظر

x = تعداد موفقیت در نمونه

مثال: اگر x تعداد موفقیت در شش شده در یک نمونه n تایی انتخاب شده از یک جامعه N تایی باشد در این جامعه K عضو دارای مشخصه موفقیت باشد.

الف) احتمال اینکه هیچ موفقیتی مشاهده نشود را بیابید.

ب) احتمال مشاهده حداقل ۲ موفقیت را بیابید.

$$X \sim HG(5, 10, 6)$$

$$p(X=x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{10-6}{5-x}}{\binom{10}{5}} \rightarrow P(X=0) = 0$$

$\underbrace{\quad}_p \quad \underbrace{\quad}_q \quad \quad (x=1, 2, 3, \dots, n)$

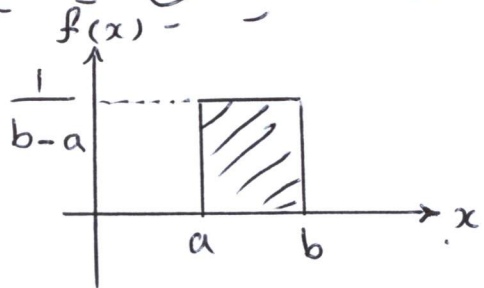
$$\therefore P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{\binom{6}{1} \binom{4}{4}}{\binom{10}{5}}$$

فصل ششم - چند توزیع احتمال پیوسته

۱- توزیع یکنواخت :

این توزیع مدل خوبی برای توزیع احتمال متغیری است که به طور یکنواختی بین a و b قرار می گیرد. نمودار این توزیع یک مستطیل است که روی بازه (a, b) $\frac{1}{b-a}$ رسم می شود.

$$X \sim U(a, b)$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_c^d = \frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$P(X < c) = \int_a^c \frac{1}{b-a} dx = \frac{c-a}{b-a}$$

$$P(X > d) = \int_d^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{b-d}{b-a}$$

نکته :
(d, c, b, a عددند)

مثال : اگر داشته باشیم : $a=0, b=5$ $X \sim U(0, 5)$ مطلوب :

$$1) P(X=0) = 0$$

$$2) P(X > 3) = \int_3^5 \frac{1}{5-0} dx = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$3) P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{1}{5-0} dx = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$$

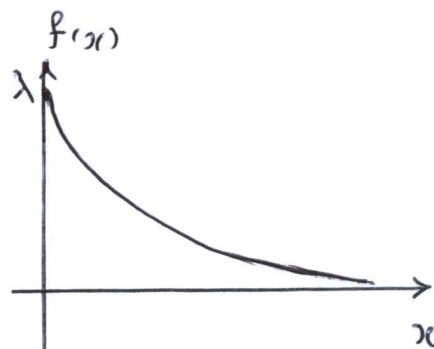
$$4) P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{5-0} dx = \frac{3-0}{5} = \frac{3}{5}$$

۲- توزیع نمایی :

زمان وقوع بین ۲ حادثه متوالی دارد توزیع نمایی با پارامتر λ به شکل زیر است :

$$X \sim e(\lambda)$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$



$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

* * *

نکته :

$$1) P(X > a) = e^{-\lambda a} \quad a \geq 0$$

$$2) P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$3) P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

* * *

مثال : طول زمان مورد نیاز برای تعمیر یک ماشین از قانون نمایی با پارامتر $\lambda = 0.15$ (ع) تبعیت می کند. احتمال این که طول زمان آن ماشین از ۳ ساعت تجاوز نکند چقدر است؟

$$f(x) = 0.15 e^{-0.15 x} \quad x \geq 0$$

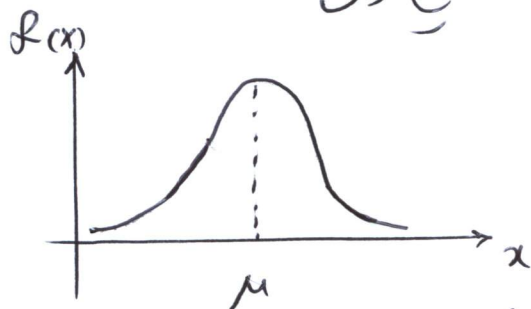
$$P(X > 3) = e^{-0.15 \times 3} = e^{-0.45}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.15}$$

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0.15)^2}$$

۳- توزیع نرمال :

مهمترین توزیع احتمال پیوسته در سراسر علم آمار «توزیع نرمال» است. نمودار آن به نام «منحنی نرمال» و هم شکل زنگوله است.



$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$E(X) = \mu$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

کوه محاسبه احتمال یا توزیع نرمال :

چون می‌توان به راحتی در توزیع نرمال از طریق تابع چگالی آن شکل است لذا ابتدا تغییر مقادیر را ابتدا در آورده و سپس از طریق جدول توزیع نرمال، احتمالات مربوطه را می‌توانیم:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \text{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

توزیع نرمال استاندارد $Z \sim N(0, 1)$

مثال: متغیر تصادفی $X \sim N(10, 4)$ (احتمال) زیر را بیابید:

$$\mu = 10, \sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2$$

$$\text{الف)} P(10 < X < 11) = P\left(\frac{10-10}{2} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{11-10}{2}\right)$$

$$\stackrel{\text{مبدل}}{=} P(0 < Z < 0.5) = 0.1915$$

$$\text{ب)} P(11 < X < 13.6) = P\left(\frac{11-10}{2} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{13.6-10}{2}\right)$$

$$= P(0.5 < Z < 1.8)$$

$$\stackrel{\text{مبدل}}{=} \underbrace{P(0 < Z < 1.8)}_{0.4641} - \underbrace{P(0 < Z < 0.5)}_{0.1915} = 0.2726$$

$$\text{ج)} P(X > 13.6) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{13.6-10}{2}\right) = P(Z > 1.8)$$

$$= P(Z > 0) - P(0 < Z < 1.8)$$

$$\stackrel{\text{مبدل}}{=} 0.5 - 0.4641$$

$$\text{د)} P(X < 10) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{10-10}{2}\right) = P(Z < 0) = 0.5$$

$$\text{ه)} P(Z < 1.1) = P(Z < 0) + P(0 < Z < 1.1) \stackrel{\text{مبدل}}{=} 0.5 + 0.3643$$

مثال: اگر $P(Z > Z_0) = 0.25$ مقدار Z_0 را بیابید.

$$P(Z > Z_0) = P(Z > 0) - P(0 < Z < Z_0)$$

$$\Rightarrow 0.25 = 0.5 - P(0 < Z < Z_0) \Rightarrow P(0 < Z < Z_0) = 0.25$$

$$\stackrel{\text{مبدل}}{\Rightarrow} Z_0 = 0.67$$

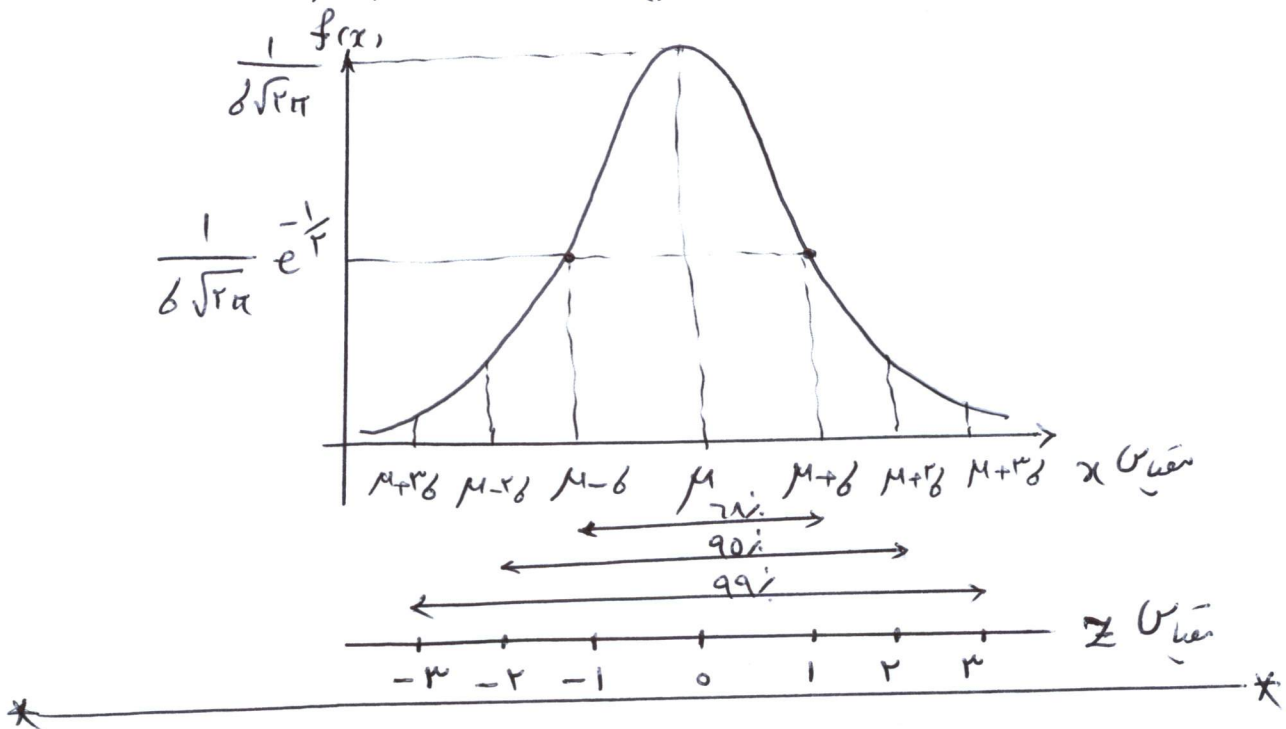
* ————— *

- ۱- توزیع نرمال یک خط به خط $\mu = x$ متقارن است.
- ۲- در توزیع نرمال پارامتر مرکزی یعنی میانگین، میان و مد برابرند.
- ۳- در توزیع نرمال در نقطه $\mu = x$ کانترنشی برابر $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ داریم.
- ۴- در توزیع نرمال نقطه عطف باز در $x = \mu \pm \sigma$ با عرض $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}$ داریم.
- ۵- تحت زیر منحنی نرمال دگر x برابر ۱ است.
- ۶- داریم:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.99$$



- تقریب توزیع دو جمله‌ای توسط توزیع نرمال:

اگر مقدار n بزرگ باشد و $np > 5$ باشد از تقریب فوق به شکل زیر

استفاده می‌شود: $X \sim \text{Bin}(n, p)$, $\mu = np$
 $\sigma^2 = npq$

$$* P(X = a) = P(a - 0.5 < X < a + 0.5)$$

$$= P\left(\frac{a - 0.5 - np}{\sqrt{npq}} < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{a + 0.5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

* مثال: X دارای توزیع ۲ جمله‌ای با پارامتر $n = 100$, $p = 0.5$ است ،
 احتمال $P(X = 45)$ را محاسبه کنید.

$$np = 100 \times 0.5 = 50 > 5 \rightarrow \text{تقریب نرمال}$$

$$\mu = np = 50 , \sigma = \sqrt{100 \times 0.5 \times 0.5} = 5$$

$$P(X = 45) = P(44.5 < X < 45.5)$$

$$= P(-1.1 < Z < -1.9)$$

$$= P(0.9 < Z < 1.1) = P(0 < Z < 1.1) - P(0 < Z < 0.9)$$

$$\stackrel{\text{جدول}}{=} 0.3643 - 0.3409 = 0.0234$$

میانگین

فصل هفتم - نمونه‌گیری و آمارها

- آماره: تغییر تصادفی که تعدادی از افراد جامعه را از جامعه دور می‌دارد و در نمونه‌گیری می‌شود.
 میانگین نمونه و طریقت نمونه‌ای (در آماره محکم هستند).

- توزیع نمونه‌ای: توزیع احتمال آماره‌ای که با استفاده از داده‌های یک نمونه تصادفی با اندازه n از جامعه می‌سازیم می‌شود. توزیع نمونه‌ای آن آماره نامیده می‌شود.

- توزیع میانگین نمونه‌ای:

(الف) جامعه متناهی: جامعه‌ای متناهی با N عضو و میانگین μ و واریانس σ^2 ،
 نمونه‌ای به اندازه n بطور تصادفی از جامعه استخراج شده است و داریم:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \mu$$

$$d_{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad / \quad \frac{n}{N} > 0.05$$

(جامعه متناهی)

$$\text{ضریب تصحیح جامعه متناهی} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

(ب) جامعه نامتناهی:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \mu$$

$$d_{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \approx 1 \right) / \quad \frac{n}{N} \leq 0.05$$

- قضیه حد مرکزی :

اگر نمونه‌ای تصادفی به اندازه n از جامعه‌ای غیر نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ استخراج شده باشد و n بزرگ باشد توزیع نمونه‌ای $\bar{x}$ تقریباً نرمال است و هر چه n بزرگتر باشد تقریب بهتر خواهد بود.

* مثال : یک نمونه به اندازه $n = 200$ بکشد تصادفی از جامعه‌ای مثل ۱۲ میلیون نفر با میانگین $\mu = 6$ و انحراف معیار $\sigma = 9$ استخراج شده است.

اندازه احتمال این که میانگین نمونه بزرگتر یا مساوی ۷ باشد چقدر است ؟

ب) اگر اندازه جامعه برابر ۱۲ میلیون باشد چقدر احتمال دارد میانگین نمونه بزرگتر یا مساوی ۷ باشد ؟

ج) اگر اندازه جامعه ۱۲ میلیون و اندازه نمونه $n = 600$ باشد چقدر احتمال دارد میانگین نمونه بزرگتر یا مساوی ۷ باشد ؟

$$0.05 < \frac{n}{N} = \frac{200}{12,000,000} \quad n = 200, N = 12,000,000 \quad (\text{این جامعه نامتناهی})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{200}} = 0.636 \quad \mu_{\bar{x}} = \mu = 6$$

$$P(\bar{x} \geq 7) = P(Z \geq \frac{7-6}{0.636}) = P(Z \geq 1.57)$$

$$= 0.05 - P(0 < Z < 1.57)$$

$$\stackrel{\text{جدول}}{=} 0.05 - 0.4418 = 0.0082$$

$$\text{ب) } n = 200, N = 12,000,000 \quad \frac{n}{N} = \frac{200}{12,000,000} = 0.0000167 < 0.05 \quad (\text{جامعه نامتناهی})$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{9}{\sqrt{200}} \sqrt{\frac{12,000,000-200}{12,000,000-1}} \approx 0.0081$$

منظم

$$P(\bar{X} > 7) = P\left(Z \geq \frac{7-7}{\sqrt{0.81}}\right) = P(Z \geq 1.72)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 1.72) \stackrel{د. ۱۰}{=} 0.5 - 0.4573 = 0.0427$$

ع.) $n = 200$, $N = 120000$ $\frac{n}{N} = \frac{200}{120000} = 0.001666 < 0.05$
جامعه نامتناهی

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{200}} = 0.6367$$

$$P(\bar{X} > 7) = P\left(Z \geq \frac{7-7}{0.6367}\right) = P(Z \geq 2.172)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 2.172) \stackrel{د. ۱۰}{=} 0.5 - 0.4967 = 0.0033$$

* توزیع میانگین نمونه در جامعه نرمال:

جامعه نرمال توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. نمونه تصادفی با اندازه n از جامعه استخراج می شود. این صورت میانگین نمونه را توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است.

$$\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}}, \sigma_{\bar{X}}^2) = N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

* مثال: نمرات دانش آموزان در یک آزمون هوش (X) دارای میانگین $\mu = 200$

و انحراف معیار $\sigma = 36$ است. صورت نرمال توزیع شده است.

الف) برای نمونه تصادفی $n = 9$ ، میانگین، انحراف معیار و توزیع $\bar{X}$ را بیابید.

ب) احتمال آنکه $\bar{X}$ کمتر از ۲۵۰ از ۱۰۰۰ برابر چقدر است؟

نقص

انف) $\mu_{\bar{x}} = \mu = 200$, $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{36}{\sqrt{9}} = 12$

$\bar{x} \sim N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}^2) = N(200, 144)$

ب) $P(\mu - 0.20 \leq \bar{x} \leq \mu + 0.20)$

$= P\left(\frac{\mu - 0.20 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} \leq z \leq \frac{\mu + 0.20 - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$

$= P\left(\frac{-0.20}{12} \leq z \leq \frac{0.20}{12}\right) = P(-0.016 \leq z \leq 0.016)$

$= 2 P(0 \leq z \leq 0.016) = 2 \times 0.008 = 0.016$

* ————— *

- توزیع لب نمونه ای :

لب افراد یک جامعه که دارای صفت مشخصی هستند با P نشان می دهیم و مقدار P معلوم نباشد. در این صورت برای تخمین نرمی از باره مقدار واقعی P ، نمونه ای به اندازه n از جامعه انتخاب و لب افرادی که دارای شصه مورد نظرند بدست می آوریم :

$\bar{p} = \frac{x}{n}$

$x =$ مقدار موفقیت مشاهده نموده یا تعداد افراد دارای شصه مورد نظر

- توزیع $\bar{p}$: اگر $\bar{p} = \frac{x}{n}$ به عنوان تبدیل متغیر از x و n بزرگ باشد، $\bar{p}$ دارای

توزیع تقریبی نرمال با $\mu = P$ و انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\frac{Pq}{n}}$ است.

* ————— *

مثال: الف) اگر نسبت واقعی موفقیت در جامعه $P = 0.45$ باشد و از این جامعه یک نمونه ۱۰۰ نفره انتخاب کنیم احتمال این که نسبت موفقیت در نمونه از ۰.۳۸ کمتر باشد چقدر است؟

ب) اگر $P = q = 0.5$ احتمال $(\bar{p} \leq 0.38)$ را بیابید؟

نصف صفحه ۱
 $n = 100$, $\mu = p = 0.5$, $\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.05$

$$P(\bar{p} < 0.38) = P\left(Z < \frac{0.38 - 0.5}{0.05}\right) = P(Z < -1.4) = P(Z > 1.4)$$

$$= P(Z > 0) - P(0 < Z \leq 1.4) \stackrel{\text{جدول}}{=} 0.5 - 0.4192 = 0.0808$$

ب) $p = q = 0.5 \rightarrow \mu = 0.5$, $\sigma = \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.05$

$$P(\bar{p} \leq 0.38) = P\left(Z \leq \frac{0.38 - 0.5}{0.05}\right) = P(Z \leq -2.4) = P(Z \geq 2.4)$$

$$= P(Z > 0) - P(0 < Z \leq 2.4) \stackrel{\text{جدول}}{=} 0.5 - 0.4918 = 0.0082$$

* ————— *

- توزیع نرمال اختلاف بین میانگین‌های ۲ نمونه :

الف) حالتی که توزیع نرمال :

حالتی که توزیع نرمال و میانگین μ_1 و μ_2 و انحراف معیار σ_1 و σ_2 و σ_1 و σ_2 به نسبت با اندازه نمونه n_1 و n_2 ، میانگین نمونه $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ باشد. آنکه $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ دارای توزیع نرمال با میانگین و انحراف معیار زیر داریم :

$$\left| \begin{aligned} \mu_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} &= \mu_1 - \mu_2 \\ \sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \end{aligned} \right.$$

ب) حالتی غیر نرمال و نمونه‌ای بزرگ :

تو حالتی غیر نرمال ولی با نمونه‌ای بزرگ (بزرگتر از ۳۰) دارای توزیع نرمال با میانگین و انحراف

معیار زیر هستند :

$$\left| \begin{aligned} \mu_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} &= \mu_1 - \mu_2 \\ \sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} &= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \end{aligned} \right.$$

عضو هیئت

مثال: جامعه‌ای شامل ۳۵، $\mu_1 = 35$ و $\sigma_1 = 10$ و $\mu_2 = 10$ و $\sigma_2 = 10$ داریم.
 می‌خواهیم از ۲ جامعه نمونه تصادفی مستقل به اندازه $n_1 = 100$ و $n_2 = 100$ انتخاب کنیم.
 احتمال باشد $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 20,43$ چیست؟

$$\mu_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \mu_1 - \mu_2 = 35 - 10 = 25$$

$$\sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{10^2}{100} + \frac{10^2}{100}} = 2,12$$

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 20,43) = P(Z \geq \frac{20,43 - 25}{2,12}) = P(Z \geq -2,09)$$

$$= P(Z > 0) - P(0 < Z \leq 2,09) = 0,5 - 0,0198 = 0,4802$$

* ————— *

- روش‌های نمونه‌گیری:

- ۱- نمونه‌گیری تصادفی ساده: زیر یکمجموعه از اعضای کلیه از جامعه دارای شانس برابر انتخاب می‌شوند.
- ۲- جدول اعداد تصادفی
- ۳- نمونه‌گیری تصادفی طبقه‌بندی شده: جامعه به گروه‌های گوناگون طبقه‌بندی می‌شود و از هر طبقه نمونه‌گیری می‌شود.

محمد رضایی قلعه

مدیر دانشگاه ساسان