



خرداد ۱۴۰۱

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

نام و نام خانوادگی:

وقت: ۱۲۰ دقیقه

پایان نوبت مشترک ریاضی عمومی ۱

شماره دانشجویی:

ردیف	به نام او که یادش آرامبخش دلهاست.	بارم
۱	انتگرال های زیر را محاسبه کنید:	
	الف) $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$	ب) $\int \frac{(x+3)}{x^2+3x^2+2x} dx$
	ج) $\int_1^2 \sqrt{2x-x^2} dx$	د) $\int \sin^{-1}(x) dx$
۲	مساحت ناحیه محدود به منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ و قسمت مثبت محورهای مختصات را در بازه $[0, 1]$ بیابید.	
۳	حجم حاصل از دوران ناحیه ی محدود به منحنی $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ حول محور x ها را بیابید.	
۴	همگرایی یا واگرایی سری های زیر را مشخص کنید.	
	الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1}$	
	ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - 2}{2^n}$	
۵	شعاع و بازه همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2 + 1} (x+1)^n$ را بیابید.	
۶	به کمک بسط تیلور، حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2}$ را بیابید.	
	موفق باشید گروه ریاضی	

هل سوالاه قسمت الف ۛ

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad \text{تکنیک ۷ (مثلثاتی)} = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx \quad \text{تکنیک ۱ (تغییر متغیر)} \quad \begin{cases} \cos x = u \\ -\sin x dx = du \end{cases}$$

$$= -\int (1 - u^2) u^2 du$$

$$= \int (u^4 - u^2) du$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c$$

$$\xrightarrow{\cos x = u} = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

حل سوال ۱، قسمت ب :

$$\int \frac{(x+3)dx}{x^3+3x^2+2x} \quad \text{تکنیک ۴ (تجزیه کسری)}$$

$$\rightarrow \frac{(x+3)}{x^3+3x^2+2x} = \frac{(x+3)}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\times x} \frac{(x+3)}{(x+2)(x+1)} = A + \frac{Bx}{x+1} + \frac{Cx}{x+2} \quad \xrightarrow{x=0} A = \frac{3}{2} \\ \xrightarrow{\times(x+1)} \frac{(x+3)}{x(x+2)} = \frac{A(x+1)}{x} + B + \frac{C(x+1)}{x+2} \quad \xrightarrow{x=-1} B = -2 \\ \xrightarrow{\times(x+2)} \frac{(x+3)}{x(x+1)} = \frac{A(x+2)}{x} + \frac{B(x+2)}{x+1} + C \quad \xrightarrow{x=-2} C = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \int \frac{(x+3)dx}{x^3+3x^2+2x} = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+2} = \frac{3}{2} \ln|x| - 2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + c$$

حل سوال اه قسمت ج :

$$= \int_1^2 \sqrt{-(x^2 - 2x)} dx = \int_1^2 \sqrt{-((x-1)^2 - 1)} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 - (x-1)^2} dx \quad \text{تکنیک ۱ (تغییر متغیر)}$$

$$\begin{cases} x-1=u \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow u=1 \\ x=1 \rightarrow u=0 \end{cases} \\ dx=du \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du \quad \text{تکنیک ۵ (تغییر متغیر مثلثاتی)}$$

$$\begin{cases} u = \sin \theta \rightarrow \begin{cases} u=1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \\ u=0 \rightarrow \theta = 0 \end{cases} \\ du = \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta d\theta \right) = \frac{1}{2} \left(\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

حل سوال اه قسمت د :

$$\int \sin^{-1} x \, dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{تکنیک ۶ (بجزبه جز)} \\ \sin^{-1} x = u \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = du \\ dx = dv \rightarrow x = v \end{array} \right.$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du \rightarrow = x \sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تکنیک ۲ (تغییر متغیر ادیکالی)} \\ 1-x^2 = t^2 \\ -2x dx = 2t dt \end{array} \right.$$

$$= -\int \frac{t \, dt}{t} = -\int dt = -t \\ = -\sqrt{1-x^2}$$

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{مساحت}$$

حل سوال ۲:

$$\rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \quad \rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

$$\rightarrow A = \int_0^1 |1 - 2\sqrt{x} + x| dx = \left| x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

حل سوال ۳:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

مهم دوران

$$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$$

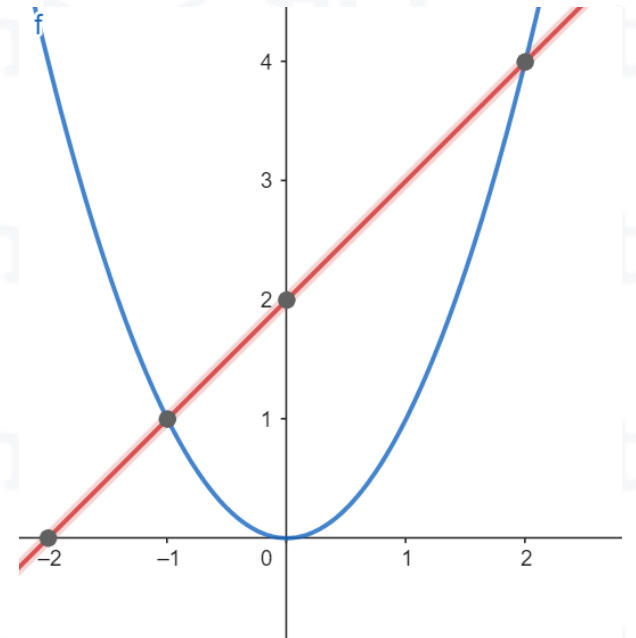
$$\rightarrow x^2 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$V = \pi \int_{x=-1}^2 ((x+2)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_{x=-1}^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^2$$

$$= \frac{72\pi}{5}$$



حل سوال ۳، قسمت الف : **آزمون مقایسه:**

اگر داشته باشیم $a_n \leq b_n$ آنگاه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ نیز همگراست.
(بزرگه همگرا باشه کوچکه هم همگراست.)

صورت را بزرگ و مخرج را کوچک می کنیم

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1} \longrightarrow B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \longrightarrow a_n = \frac{2^n - 1}{3^n + 1} < b_n = \frac{2^n}{3^n}$$

برای تعیین همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ از آزمون **ریشه** استفاده می کنیم: **همگراست** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n}} = \frac{2}{3} < 1$ **آزمون ریشه**

بنابراین طبق آزمون **مقایسه** چون $\frac{2^n - 1}{3^n + 1} < \frac{2^n}{3^n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1}$ نیز همگراست.

حل سوال ۴، قسمت ب: **آزمون مقایسه:**

اگر داشته باشیم $a_n \leq b_n$ آنگاه اگر $\sum b_n$ همگرا باشد $\sum a_n$ نیز همگراست.
(بزرگه همگرا باشه کوچیکه هم همگراست.)

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - 2}{2^n} \xrightarrow{\text{صورت را بزرگ می کنیم}} B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n} \longrightarrow a_n = \frac{n^5 - 2}{2^n} < b_n = \frac{n^5}{2^n}$$

برای تعیین همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ از **آزمون ریشه** استفاده می کنیم: **همگراست** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$ **آزمون ریشه**

بنابراین طبق **آزمون مقایسه** چون $\frac{n^5 - 2}{2^n} < \frac{n^5}{2^n}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$ همگراست پس سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 - 2}{2^n}$ نیز همگراست.

حل سوال ۵:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{\frac{n(-1)^n}{n^2 + 1} (x+1)^n} \rightarrow \text{آزمون ریشه}$$

$$= |x+1| \xrightarrow{\text{شرط همگرایی}} |x+1| < 1 \rightarrow -1 < x+1 < 1 \rightarrow -2 < x < 0$$

$$\xrightarrow{x=-2 \text{ بررسی}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1} (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^{\infty} = \infty \text{ واگرا}$$

$$\xrightarrow{x=0 \text{ بررسی}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1} \xrightarrow{\text{آزمون سری متناوب}} a_n = \frac{n}{n^2+1} \begin{cases} 1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \\ 2) \text{ دنباله } a_n \text{ نزولی است.} \end{cases} \text{ همگرا}$$

بنابراین بازه همگرایی $\boxed{-2 < x \leq 0}$ و شعاع همگرایی $R = 1$ است.

حل سوال ۶:

$$\text{بسط} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \xrightarrow{x \rightarrow -x}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \int$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (x - \frac{x^2}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

معادلات

دیفرانسیل

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: معادلات مرتبه اول

فصل ۲: معادلات مرتبه دوم و بالاتر

فصل ۳: حل معادلات دیفرانسیل با سری

فصل ۴: تبدیل لاپلاس

فصل ۵: حل دستگاه معادلات دیفرانسیل



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲

ریاضیات عمومی

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: توابع برداری

فصل ۲: توابع چند متغیره

فصل ۳: انتگرال ۲ گانه

فصل ۴: انتگرال ۳ گانه

فصل ۵: انتگرال روی خم

فصل ۶: انتگرال روی سطح



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۱

ریاضیات عمومی

تالیف: ابراهیم شاه ابراهیمی

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

فصل ۱: اعداد مختلط

فصل ۲: حد و پیوستگی

فصل ۳: مشتق

فصل ۴: انتگرال

فصل ۵: کاربرد انتگرال

فصل ۶: سری

فصل ۷: پیوست

برای دریافت جزوات و ویدئوهای اصلی کلاس و همچنین نمونه سوالات امتحانی به سایت EbiMath.com

و یا کانال تلگرامی [@EbiMath](https://t.me/EbiMath) مراجعه کنید.