سرشناسه	:	صفرپور، فرزاد، ۱۳۴۰ -
عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضی (۳) تجربی دوازدهم متوسطه شامل درسنامه.../ تشریح از فرزاد صفرپور
مشخصات نشر	:	تهران : انتشارات بنی هاشمی خامنه، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری	:	۵۶ ص.: ۲۲ × ۲۹ س م.
شابک	:	978-600-487-105-1
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپای مختصر
یادداشت	:	فهرست‌نویسی کامل این اثر در نشانی: http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
شماره کتابشناسی ملی	:	۵۵۲۷۴۸۹

کد ۱۲۰۵

نام اثر	:	مجموعه کمک آموزشی و درسی **ریاضی (۳) تجربی** دوازدهم متوسطه شامل درسنامه، کارآزمون و نمونه سؤالات امتحانات با پاسخ تشریحی
ناشر	:	انتشارات بنی‌هاشمی خامنه
تشریح	:	فرزاد صفرپور
تنظیم و نظارت	:	گروه‌های آموزشی انتشارات بنی‌هاشمی خامنه
حروف‌چینی	:	واحد کامپیوتر انتشارات بنی‌هاشمی خامنه
نوبت چاپ	:	اوّل - سال تحصیلی (۹۸ - ۹۷)
تعداد	:	۱۰۰۰۰ جلد
ناظر چاپ	:	مهدی رحمانی
شابک	:	۱ - ۱۰۵ - ۴۸۷ - ۶۰۰ - ۹۷۸ 978-600-487-105-1

دفتر مرکزی: تهران - م انقلاب - خ کارگر شمالی - خ فرصت شیرازی - شماره ۴۲ تلفن ۶۶۹۰۴۹۴۰ نمابر ۶۶۵۹۲۵۴۳

باسمه تعالی

کد ۱۲۰۵

ریاضی (۳) تجربی

« دوازدهم متوسطه »

فهرست

عنوان	صفحه
درسنامه (خلاصه درس‌های اول تا هفتم)	۲۵ - ۴
آزمون ۱- سؤالات امتحان دبیرستان نمونه دولتی شهید صفوی (دی ماه ۹۷)	۲۷ - ۲۶
آزمون ۲- سؤالات امتحان هماهنگ کشوری (دی ماه ۹۷)	۲۹ - ۲۸
آزمون ۳- سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	۳۰
آزمون ۴- سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	۳۱
آزمون ۵- سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	۳۲
آزمون ۶- سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	۳۳
آزمون ۷- سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	۳۴
آزمون ۸- سؤالات امتحان پیشنهادی پایان سال	۳۵
آزمون ۹- کارآزمون (پاسخ در سایت انتشارات بنی‌هاشمی خامنه)	۳۶
پاسخ آزمون شماره ۱	۳۹ - ۳۸ - ۳۷
پاسخ آزمون شماره ۲	۴۲ - ۴۱ - ۴۰
پاسخ آزمون شماره ۳	۴۵ - ۴۴ - ۴۳
پاسخ آزمون شماره ۴	۴۷ - ۴۶
پاسخ آزمون شماره ۵	۴۹ - ۴۸
پاسخ آزمون شماره ۶	۵۱ - ۵۰
پاسخ آزمون شماره ۷	۵۳ - ۵۲
پاسخ آزمون شماره ۸	۵۵ - ۵۴
یادداشت (دو آزمون برای نیمسال اول)	۵۶

هدیه شگفت‌انگیز این کتاب به شما

بانی کدهای این کتاب شامل ۲ آزمون نیمسال اول می‌باشد.

بدون عنوان

بچه ها پشت جلد نوشته کسی حق چاپ و تکثیرش نداره
اگر هرکی خواست مقداری (قیمت پشت جلد ۸۰۰۰ تومنه) به خیریه بده بابت استفاده از این جزوه

فصل اول ترکیب توابع

ترکیب دو تابع

دو تابع f و g را با دامنه‌های D_f و D_g در نظر می‌گیریم. اگر x متغیر g و $g(x)$ متغیر f باشد ترکیب آن‌ها به صورت $(fog)(x) = f(g(x))$

و اگر x متغیر f و $f(x)$ متغیر g باشد ترکیب آن‌ها را به صورت $(gof)(x)$ نشان می‌دهیم.

نکته ۱: برای این‌که ترکیب fog وجود داشته باشد باید اشتراک برد تابع $g(x)$ با دامنه $f(x)$ مخالف تهی باشد یعنی $R_g \cap D_f \neq \varnothing$.

نکته ۲: در حالت کلی $(fog)(x) \neq (gof)(x)$.

مثال: اگر $\{(۱,۲)(۲,۳)(۳,۷)(۴,۷)\} = g$ و $f:\{(۱,۲)(۲,۴)(۳,۴)\}$ باشد آن‌گاه ترکیب gof را به دست آورید:

$R_f = \{۲,۴\}$ $\qquad$ $R_f \cap D_g = \{۲,۴\}$

$D_g = \{۱,۲,۳,۴\}$

حال برای تشکیل gof دامنه f را در نظر گرفته یعنی $D_f = \{۱,۲,۳\}$.

$(gof)(۱) = g(f(۱)) = g(۲) = ۳ \to (۱,۳)$

$(gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۴) = ۷ \to (۲,۷)$

$(gof)(۳) = g(f(۳)) = g(۴) = ۷ \to (۳,۷)$

$gof = \{(۱,۳)(۲,۷)(۳,۷)\}$ $\qquad$ $D_{gof} = \{۱,۲,۳\}$

مثال: دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = -|x|$ را در نظر گرفته، توابع زیر را به دست آورید:

الف) gof $\qquad$ ب) fog

حل: الف) $D_g = R$ $\qquad$ $D_f = [۰, +\infty)$

$R_g = (-\infty, ۰]$ $\qquad$ $R_f = [۰, +\infty)$ $\qquad$ $R_f \cap D_g = [۰, +\infty)$

پس: $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = -|\sqrt{x}| = -\sqrt{x}$

$R_g \cap D_f = \{۰\}$

ب) $(fog)(x) = f(-|x|) = \sqrt{-|x|} = ۰ \Rightarrow fog = \{(۰,۰)\}$

دامنه تابع مرکب

دامنه تابع gof مجموعه xهای است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کند.

۱) x در دامنه f قرار داشته باشد. $\qquad$ ۲) $f(x)$ در دامنه g قرار داشته باشد.

پس: $D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

و دامنه fog به صورت $D_{fog} = \{x \in Dg \mid g(x) \in D_f\}$ است.

مثال: اگر $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ باشند آن‌گاه دامنه‌ها و ضابطه‌های (الف) gof، (ب) fog را به دست آورید.

حل: الف) $D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=[-۱,+\infty)$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \to \{x\in\mathbb{R} \mid x-۲\in[-۱,+\infty)\}$$

$$x-۲\ge -۱ \to x\ge ۱ \to D_{gof}=[۱,+\infty)$$

ضابطه gof به صورت روبه‌رو است: $(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{x-۲+۱}=\sqrt{x-۱}$

ب) $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} \to \{x\in[-۱,\infty) \mid \sqrt{x+۱}\in R\}$

$\sqrt{x+۱}\in R$ همواره برقرار است. بنابراین: $D_{fog}=[-۱,+\infty)$

ضابطه fog به صورت روبه‌رو است: $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{x+۱}-۲$

مثال: اگر $(fog)(x)=۳x+۵$ و $g(x)=x-۳$ باشند آن‌گاه $f(x)$ را حساب کنید.

$$(fog)(x)=۳x+۵ \to f(g(x))=۳x+۵ \to f(x-۳)=۳x+۵$$

$$x-۳=t \to x=t+۳$$

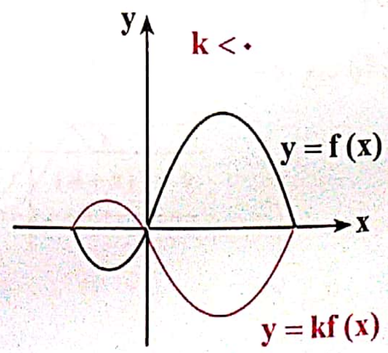
$$f(t)=۳(t+۳)+۵=۳t+۹+۵=۳t+۱۴ \to f(x)=۳x+۱۴$$

مثال: تابع $h(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱}}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید: $g(x)=\sqrt[۳]{x}\ ,\ f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱}$

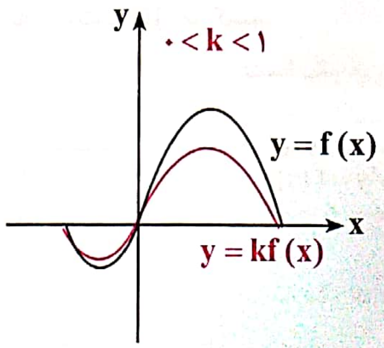
رسم نمودار $kf(x)$ با استفاده از نمودار $f(x)$

برای رسم نمودار تابع با ضابطه $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطه $x=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

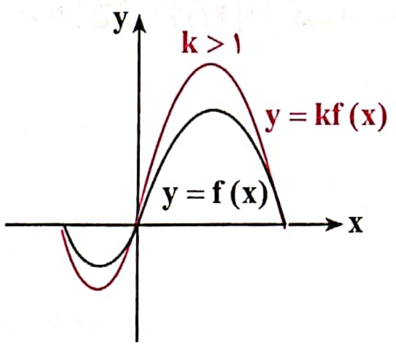
از آن‌جایی که ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ و $kf(x)=۰$ یکسان است. بنابراین محل تلاقی نمودار تابع f و kf با محور xها یکسان است.



ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

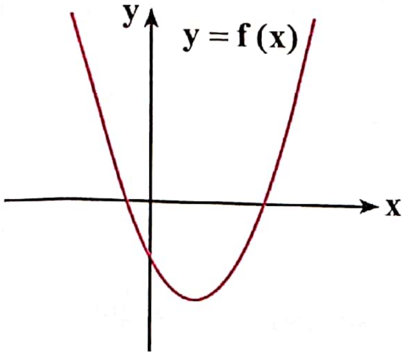


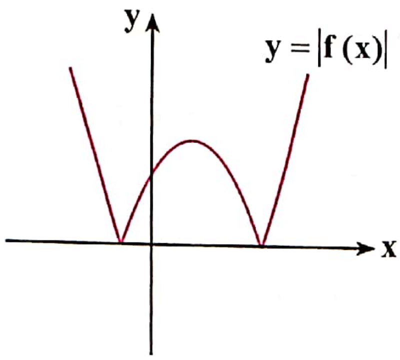
نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

دامنه تابع با ضابطه تابع $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است، اما برد آن‌ها لزوماً یکسان نیست.

رسم نمودار $|f|$

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنید و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینه نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

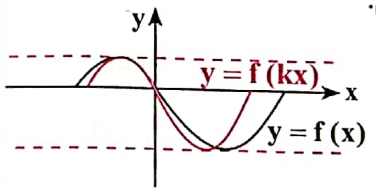




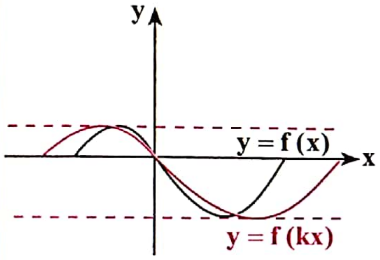
رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

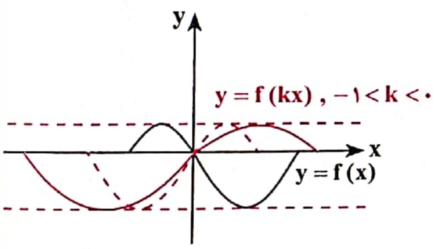
اگر $k>1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.



اگر $0<k<1$ ، نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.



اگر $k<0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|\frac{1}{k}|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

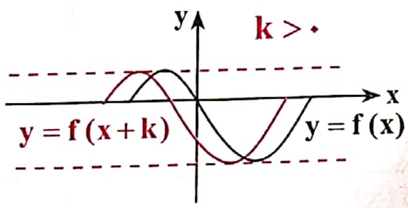


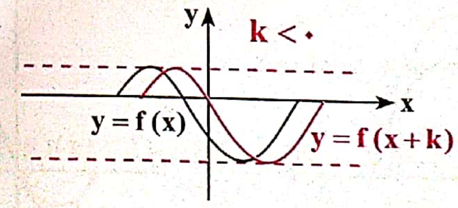
دامنه تابع $y=f(kx)$ با دامنه تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

رسم نمودار $f(x+k)$ با استفاده از نمودار $f(x)$

اگر $k>0$ ، نمودار $f(x)$ را در امتداد محور x ها به اندازه k به چپ منتقل می‌کنیم.

اگر $k<0$ ، نمودار $f(x)$ را در امتداد محور x ها به راست منتقل می‌کنیم.





توابع چندجمله‌ای

هر تابع به صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ را که در آن a_n ، a_{n-1} ، ... ، a_0 اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامیم.

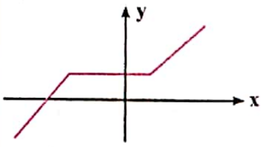
نکته ۱: هر تابع با ضابطه $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم.

نکته ۲: $a=0$ و $f(x)=b$ یک تابع ثابت است.

باسمه تعالی

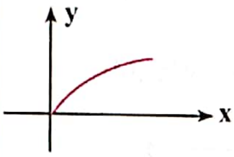
خلاصه فصل اول ریاضی (۳) تجربی دوازدهم

توابع صعودی و توابع نزولی



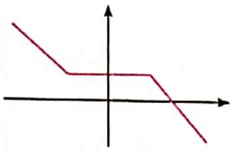
الف) تابع $y=f(x)$ را صعودی گویند با افزایش مقدار x در دامنه تابع مقدار y یا افزایش یابد یا ثابت باشد.

$$x_1 , x_2 \in D_f \;\rightarrow\; x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2)$$



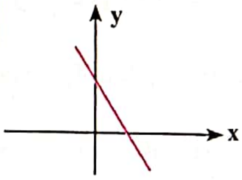
ب) تابع $y=f(x)$ را اکیداً صعودی گویند مقدار x در دامنه تابع افزایش یابد مقدار y هم نیز افزایش یابد.

$$x_1 , x_2 \in D_f \;\rightarrow\; x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$$



ج) تابع $y=f(x)$ را نزولی گویند با افزایش مقدار x در دامنه تابع مقدار y یا کاهش یابد یا ثابت باشد.

$$x_1 , x_2 \in D_f \;\rightarrow\; x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2)$$



د) تابع $y=f(x)$ را اکیداً نزولی گویند با افزایش مقدار x در دامنه تابع مقدار y کاهش یابد.

$$x_1 , x_2 \in D_f \;\rightarrow\; x_1 < x_2 \;\rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$$

نکته :

۱) ممکن است تابعی نه صعودی باشد و نه نزولی

۲) ممکن است تابعی در بازه‌ای صعودی اکید و در بازه دیگر نزولی اکید باشد.

۳) اگر تابع در $[a , b]$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد می‌گوییم تابع اکیداً یکنواست.

تابع یک به یک

تابع $y=f(x)$ را یک به یک گویند اگر برای هر y متعلق به برد اگر و فقط اگر یک x از دامنه وجود داشته باشد.

مثال : توابع زیر یک به یک هستند :

$f_2 : \{(1 , 3)(4 , 1)(5 , 9)\}$

$f_1 : \{(2 , 7)(3 , 11)(4 , -7)\}$

تعریف ریاضی :

$$\forall x_1 , x_2 \in D_f : y_1 = y_2 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

مثال : آیا تابع $y = 2x^3 - 5$ از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک به یک است.

$$x_1 , x_2 \in D_f \qquad y_1 = y_2 \;\rightarrow\; x_1 = x_2$$

$$\begin{matrix} y_1 = 2x_1^3 - 5 \\ y_2 = 2x_2^3 - 5 \end{matrix} \;\rightarrow\; y_1 = y_2 \;\Rightarrow\; 2x_1^3 - 5 = 2x_2^3 - 5 \;\Rightarrow\; x_1^3 - 5 = x_2^3 - 5 \;\rightarrow\; x_1 = x_2$$

مثال : آیا تابع $y = x^2 - 2x$ از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک به یک است؟ دامنه تابع را محدود کنید تا یک به یک شود.

$$\begin{matrix} y_1 = x_1^2 - 2x_1 \\ y_2 = x_2^2 - 2x_2 \end{matrix} \;\rightarrow\; y_1 = y_2 \;\Rightarrow\; x_1^2 - 2x_1 = x_2^2 - 2x_2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = -2x_2 + 2x_1 \;\rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = +2(x_1 - x_2)$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 2(x_1 - x_2) = 0 \;\rightarrow\; (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0$$

$x_1 - x_2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = x_2 \;,\; x_1 + x_2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 + x_2 = 2$ یک به یک نیست

اگر دامنه آن $x \ge 1$ باشد آن‌گاه یک به یک است. (یا $x \le 1$)

مثال : آیا تابع $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۲$ از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک به یک است.

$$y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۲ \to y = (x-۱)^۳ - ۱$$

$$\begin{matrix} y_۱ = (x_۱ - ۱)^۳ - ۱ \\ y_۲ = (x_۲ - ۱)^۳ - ۱ \end{matrix} \to (x_۱ - ۱)^۳ = (x_۲ - ۱)^۳ \to x_۱ - ۱ = x_۲ - ۱ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$ یک به یک است

نکته : در توابع چندجمله‌ای از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

۱) اگر n زوج باشد تابع یک به یک نیست.

۲) اگر x داخل قدرمطلق یا [ ] باشد یک به یک نیست.

وارون تابع و تابع وارون : $f^{-۱}$

وارون تابع، با جابه‌جا کردن مولفه‌های زوج مرتب به دست می‌آید و ممکن است تابع هم نباشد.

مثال : وارون تابع $f = \{(۱ , ۳)(۲ , ۷)(۴ , ۳)\}$ را بنویسید.

$f^{-۱} = \{(۳ , ۱)(۷ , ۲)(۳ , ۴)\}$ ، که تابع نیست.

تابع وارون : اگر تابع یک به یک باشد با جابه‌جا کردن مولفه‌ها، تابع جدیدی به دست می‌آید که آن را تابع وارون گویند.

قضیه : شرط لازم و کافی برای این‌که تابع وارون‌پذیر باشد آن است که f یک به یک باشد.

نکته : اگر خطی موازی محور طول‌ها رسم کنیم و نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند تابع یک به یک است و وارون دارد.

نکته : اگر f تابعی وارون‌پذیر و $f^{-۱}$ وارون آن باشد در این صورت :

الف) برای هر x متعلق $D_{f^{-۱}}$ داریم : $(fof^{-۱})(x) = x$

ب) برای هر x متعلق به D_f داریم : $(f^{-۱}of)(x) = x$

یا شرط این‌که f و $f^{-۱}$ وارون هم باشند باید $(fof^{-۱})(x) = x$ و $(f^{-۱}of)(x) = x$ برقرار باشد.

مثال : نشان دهید تابع $f(x)$ و $g(x)$ وارون یکدیگرند.

$f(x) = (x+۱)^۳ - ۱ \qquad g(x) = \sqrt[۳]{x+۱} - ۱$

حل :

$$۱)\ (fog)(x) = f(g(x)) = (\sqrt[۳]{x+۱} - ۱ + ۱)^۳ - ۱ \Rightarrow (\sqrt[۳]{x+۱})^۳ - ۱ = x + ۱ - ۱ = x$$

$$۲)\ (gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt[۳]{(x+۱)^۳ - ۱ + ۱} - ۱ = x + ۱ - ۱ = x$$

پس وارون هم هستند.

نکته ۱ : نمودار تابع f و نمودار تابع $f^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.

نکته ۲ : اگر نمودار تابع و وارون آن متقاطع باشند نقطه تقاطع روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد.

باسمه تعالی

خلاصه فصل اول ریاضی (۳) تجربی دوازدهم

نکته : با محدود کردن دامنه تابعی که یک به یک نیست، می‌توان تابعی یک به یک به دست آورد.

مثال : اگر $h(x)=x^{۲}-۲x+۲$ و از $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ باشد با محدود کردن دامنه آن وارون آن را بنویسید.

حل :

$h(x)=x^{۲}-۲x+۲$

$y=(x-۱)^{۲}+۱$

$(x-۱)^{۲}=y-۱ \to |x-۱|=\sqrt{y-۱}$

اگر $x\geq ۱$ یا $x\leq ۱$ ، آن‌گاه تابع $h(x)$ یک به یک است.

فرض می‌کنیم $x\geq ۱$:

$x-۱=\sqrt{y-۱} \to x=\sqrt{y-۱}+۱ \to f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}+۱$

نکته : اگر f و g دو تابع وارون‌پذیر باشند آن‌گاه :

$(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$

مثال : اگر $f(x)=x+۱$ و $g(x)=۲x-۴$ باشند، آن‌گاه نشان دهید : $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$

$(fog)(x)=f(g(x))=۲x-۴+۱=۲x-۳ \xrightarrow{fog=h} h(x)=۲x-۳$

حال معکوس آن :

$h=۲x-۳ \to h+۳=۲x \to x=\frac{h+۳}{۲} \to (fog)^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۲}$

$f(x)=x+۱ \to y=x+۱ \to x=y-۱ \to f^{-۱}(x)=x-۱$

$g(x)=۲x-۴ \to y=۲x-۴ \to x=\frac{y+۴}{۲} \to g^{-۱}(x)=\frac{x+۴}{۲}$

$(g^{-۱}of^{-۱})(x)=g^{-۱}(f^{-۱}(x))=g^{-۱}(x-۱)=\frac{x-۱+۴}{۲}=\frac{x+۳}{۲}$

$(fog)^{-۱}(x)=(g^{-۱}of^{-۱})(x)$

۱۴۰۵

فصل دوم — مثلثات

مثلثات

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد، به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم.

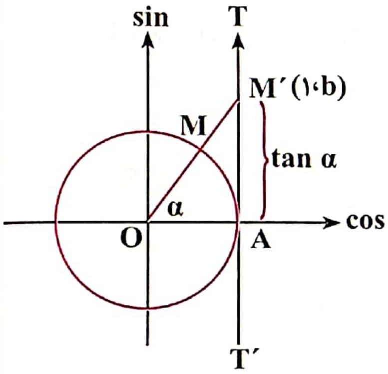
$$f(x \pm T) = f(x)\ ,\ x \pm T \in D_f$$

کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

به طور کلی توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ متناوب هستند.

مقدار ماکزیمم آن‌ها $|a| + c$ ، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

تانژانت

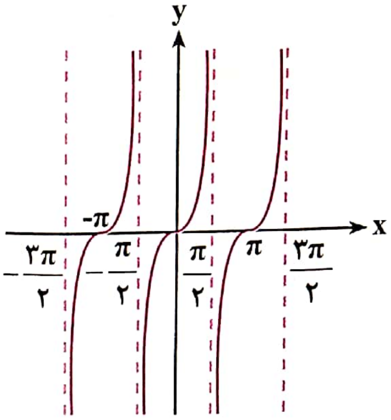


در دایره مثلثاتی زیر خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس، عمود است.

شعاع دایره مثلثاتی برابر با یک است.

این خط را محور تانژانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور از پایین به بالا است. $\tan\alpha = AM' = b$

با توجه به شکل بالا وقتی $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ، امتداد OM محور تانژانت را قطع نمی‌کند. بنابراین دامنه تابع $y = \tan\alpha$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ k \in z\}$ و نمودار آن به صورت زیر است.



نکته :

۱) دوره تناوب $y = \tan x$ برابر π است.

۲) دوره تناوب $y = \tan ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

معادله مثلثاتی

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin\alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in z$.

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos\alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشد که $k \in z$.

یادآوری و تکمیل :

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ ,\quad \tan\alpha \times \cot\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\ ,\quad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\ ,\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ ,\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\ ,\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

باسمه تعالی

فصل سوم — حد بی‌نهایت

بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $(x-a)$

قضیه : در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $(x-a)$ ، باقی‌مانده تقسیم برابر $f(x)$ است.

نتیجه : اگر $f(a)$ برابر صفر باشد آن‌گاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

حد توابع کسری

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای به طول a حد داشته باشند و حد آن‌ها در این نقطه به ترتیب l و m باشد به طوری که $m \neq ۰$ ، آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و این حد برابر $\frac{l}{m}$ است.

تذکر : گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = ۰$. در این حالت برای محاسبه حد $\frac{f}{g}$ در نقطه a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به دست آوریم.

مثال : حد تابع $f(x) = \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{۲x^۳-۵x-۶}$ را در نقطه $x=۲$ به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲} (x-\sqrt{۳x-۲}) = \lim_{x\to ۲} (۲x^۳-۵x-۶) = ۰$$

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳ \quad -۵x \quad -۶ & x-۲ \\ \hline -(۲x^۳ - ۴x^۲) & ۲x^۲+۴x+۳ \\ \hline ۴x^۲ \quad -۵x \quad -۶ & \\ -(۴x^۲ - ۸x) & \\ \hline ۳x - ۶ & \\ -(۳x - ۶) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x-\sqrt{۳x-۲}}{(x-۲)(۲x^۲+۴x+۳)} \times \frac{x+\sqrt{۳x-۲}}{x+\sqrt{۳x-۲}}$$

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲-۳x+۲}{(x-۲)\times ۱۹ \times ۴} = \lim_{x\to ۲} \frac{(x-۲)(x-۱)}{(x-۲)\times ۷۶} = \frac{۱}{۷۶}$$

همسایگی

هر بازه باز شامل عدد حقیقی $x_۰$ را یک همسایگی $x_۰$ می‌نامیم.

به عبارت دیگر اگر $x_۰ \in (a\,,\,b)$ ، آن‌گاه بازه $(a\,,\,b)$ یک همسایگی $x_۰$ می‌باشد. برای مثال بازه $(-۳\,,\,۵)$ یک همسایگی ۲ است.

همسایگی محذوف : اگر بازه $(a\,,\,b)$ یک همسایگی عدد حقیقی $x_۰$ باشد، آن‌گاه مجموعه $(a\,,\,b)-\{x_۰\}$ یک همسایگی محذوف $x_۰$ نامیده می‌شود.

خلاصه فصل سوم ریاضی (۳) تجربی دوازدهم

همسایگی چپ و راست : اگر r عددی مثبت باشد آن‌گاه (x_0 , x_0+r) یک همسایگی راست x_0 نامیده می‌شود. هم‌چنین (x_0-r , x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

حد نامتناهی یا حد بی‌نهایت

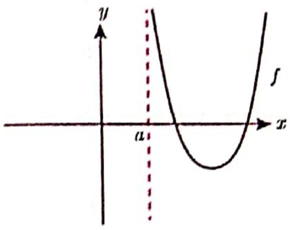
هرگاه x را خیلی به صفر نزدیک کنیم مقادیر $\frac{1}{x^2}$ خیلی بزرگ می‌شود و به هیچ عدد خاصی میل نمی‌کند. در نتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ موجود نیست. با این حال در چنین مواقعی برای توصیف بهتر رفتار تابع در همسایگی محذوف صفر می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

می‌دانیم که $+\infty$ یک عدد حقیقی نیست.

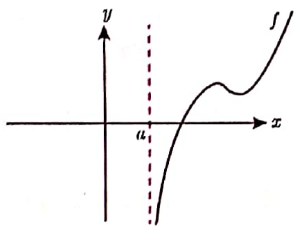
$x\to a^+$ یعنی x با مقادیر بزرگ‌تر از a (از سمت راست) به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

$x\to a^-$ یعنی x با مقادیر کوچک‌تر از a (از سمت چپ) به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

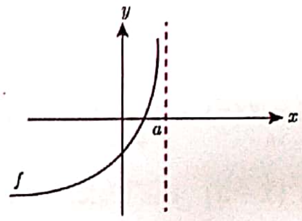
به نمودارهای زیر و حدود نامتناهی دقت فرمایید :



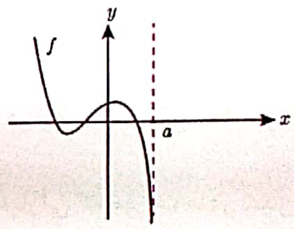
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



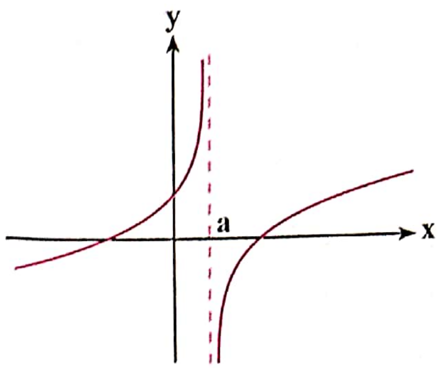
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



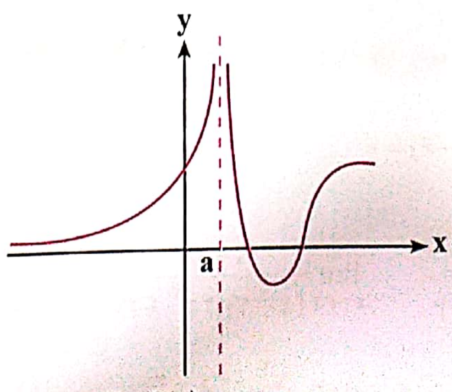
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$



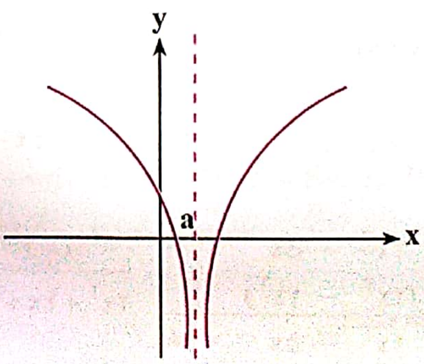
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$

مثال : a و b را چنان به دست آورید که $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x+1}{3x^2+ax+b}=-\infty$.

حل : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x+1}{3x^2+ax+b}=-\infty$ یعنی وقتی x از سمت راست یا چپ به ۲ نزدیک شود، حاصل از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر می‌شود. بنابراین $x=2$ ریشه مضاعف مخرج است.

$$f(x)=\frac{-x+1}{3(x-2)^2}\rightarrow 3x^2+ax+b=3(x-2)^2$$

$$3x^2+ax+b=3x^2-12x+12\rightarrow a=-12\ ,\ b=12$$

حد در بی‌نهایت

$x \to +\infty$ یعنی x از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر است.

$x \to -\infty$ یعنی x از هر عدد منفی دلخواهی کوچک‌تر است.

قضیه : فرض کنیم n عددی طبیعی باشد، در این صورت : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

به عبارت دیگر برای محاسبه حد توابع گویا زمانی که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، فقط جمله‌ای را در نظر می‌گیریم که بیشترین توان را دارد.

مثال : حدهای روبه‌رو را به دست آورید : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+5x} \ , \ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-15x+3}{7x^2-6x-1}$

حل :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-15x+3}{7x^2-6x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{7x^2}=\frac{2}{7}$$

حد نامتناهی در بی‌نهایت

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ به این معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ نیز به روش مشابه تعریف می‌شوند.

برای مثال : $\lim\limits_{x\to-\infty}-5x^3=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}-5x^4=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$

فصل چهارم
آهنگ تغییر

مشتق

تعریف حدی مشتق : تابع f را در بازه باز $(a\,,b)$ در نظر گرفته که حول نقطه $x_\circ$ و $x_\circ \in (a\,,b)$ تعریف شده باشد حد نسبت $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ موجود باشد، آن را مشتق تابع در نقطه $x_\circ$ گویند و به صورت $f'(x_\circ)=\lim\limits_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ نشان می‌دهیم.

مثال : مشتق تابع $f(x)=۳x^۲+۲x+۱$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{(۳x^۲+۲x+۱)-(۳x_\circ^۲+۲x_\circ+۱)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\frac{۳(x^۲-x_\circ^۲)+۲(x-x_\circ)}{x-x_\circ}$$

$$f'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{(x-x_\circ)[۳(x+x_\circ)+۲]}{(x-x_\circ)}\Rightarrow\lim_{x\to x_\circ}=۳x+۳x_\circ+۲=۶x_\circ+۲$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ را در $x=۹$ با استفاده از تعریف به دست آورید.

یادآوری :

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$

$$f'(۹)=\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt[۳]{x-۱}-\sqrt[۳]{۹-۱}}{x-۹}=\lim_{x\to ۹}\frac{(\sqrt[۳]{x-۱}-\sqrt[۳]{۸})(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{(x-۱)}+۲^۲)}{(x-۹)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{(x-۱)}+۲^۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۹}\frac{(x-۱)-۸}{(x-۹)(\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{(x-۱)}+۴)}$$

$$\lim_{x\to ۹}\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}+۲\sqrt[۳]{(x-۱)}+۴}=\frac{۱}{۴+۴+۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

نکته : مشتق تابع را می‌توان با توجه به رابطه $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\lim\limits_{h\to ۰}$ نیز به دست آورد.

قضایای مشتق

نکته : مشتق تابع را با استفاده قضایای مشتق می‌توان به دست آورد.

۱) $y=c \to y'=۰$

۲) $y=ax^n \to y'=nax^{n-۱}$

۳) $y=u+v \to y'=u'+v'$

۴) $y=uv \to y'=u'v+v'u$

۵) $y=ku \to y'=ku'$

۶) $y=ku^n \to y'=nku'u^{n-۱}$

۷) $y=\frac{u}{v} \to y'=\frac{u'v-v'u}{v^۲}$

۸) $y=\sqrt{f(x)} \to y'=\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}}$

۹) $y=\sqrt[۳]{f(x)} \to y'=\frac{f'(x)}{۳\sqrt[۳]{f(x)^۲}}$

۱۰) $y=\sqrt[m]{u^n} \to y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ به طور کلی

۱۱) $y=f(u) \to y'=u'f'(u)$

نکته: مشتق‌پذیری تابع را با توجه به تعریف مشتق بررسی می‌کنیم.

مشتق راست:

تابع $y=f(x)$ در $x=x_0$ مشتق راست دارد اگر حد کسر $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود باشد.

مشتق چپ:

تابع $y=f(x)$ در $x=x_0$ مشتق چپ دارد اگر حد کسر $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ موجود باشد.

نکته: اگر مشتق چپ و راست موجود و با هم برابر باشند تابع در $x=x_0$ مشتق دارد.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}}=\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

مشتق‌پذیر نیست چون حاصل عدد حقیقی نشده است.

مثال: الف) نشان دهید تابع $f(x)=\left|x^2-2x\right|$ در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست.

ب) معادله هر یک از نیم مماس‌ها را در این نقطه بنویسید.

الف) $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2}\frac{|x^2-2x|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x(x-2)}{x-2}=2\\[2mm] \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)x}{x-2}=-2\end{cases}$$

مشتق راست با مشتق چپ برابر نیستند پس تابع در $x=2$ مشتق ندارد.

ب) شیب نیم مماس راست $=f'_+(2)=2$, $f(2)=0 \rightarrow y-0=2(x-2) \rightarrow y=2x-4;x\ge 2$

شیب نیم مماس چپ $=f'_-(2)=-2 \rightarrow y-0=-2(x-2) \rightarrow y=-2x+4;x<2$

مشتق‌پذیری و پیوستگی

قضیه: اگر تابع f در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه در آن نقطه پیوسته است. عکس قضیه ممکن است برقرار نباشد.

مثال: تابع $f(x)=|x|$ را در نظر گرفته و پیوستگی و مشتق‌پذیری آن را در $x=0$ بررسی کنید.

مقدار تابع $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$

پیوسته است $\leftarrow$ مقدار تابع = حد تابع

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1 & ; \quad x>0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1 & ; \quad x<0\end{cases}$$

مشتق چپ $\neq$ مشتق راست، پس تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال : مقدار b و a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax+b & x\ge ۱ \\ x^{۳}+۲ax & x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ مشتق‌پذیر باشد.

حل : چون مشتق‌پذیر است پس پیوسته نیز است : $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱)$

$$۱+a+b=۱+۲a \to ۲a-a-b=۰ \to a-b=۰$$

$$f'(x)=\begin{cases} ۲x+a & x>۱ \\ ۳x^{۲}+۲a & x<۱ \end{cases} \xrightarrow{x=۱} \text{مشتق راست = مشتق چپ}$$

$$۲+a=۳+۲a \to a=-۱$$

$$a=-۱ \to a-b=۰ \to b=-۱$$

آهنگ تغییر

نقاط $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_۲ , y_۲)$ را روی تابع $y=f(x)$ در نظر گرفته $x_۲-x_۱=\Delta x$ را نمو متغیر و $y_۲-y_۱=\Delta y$ را نمو تابع گویند.

نسبت نمو تابع به نمو متغیر را آهنگ متوسط گویند. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\dfrac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}$

حد نسبت نمو تابع و نمو متغیر را آهنگ لحظه‌ای یا مشتق گویند. $\lim\limits_{x\to x_۰}\dfrac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}$

مثال : جسمی روی یک خط راست به گونه‌ای حرکت می‌کند که مکان آن در لحظه t به صورت $s(t)=۲t^{۲}+۲$ است.

الف) سرعت متوسط متحرک در فاصله زمانی $۲\le t\le ۳$

ب) سرعت متوسط در فاصله زمانی $۲\le t\le ۲/۱$

پ) سرعت لحظه‌ای متحرک در $t=۲$ را حساب کنید.

حل : الف)

$$\bar{v}=\frac{s(۳)-s(۲)}{t_۲-t_۱}=\frac{۲۰-۱۰}{۳-۲}=۱۰ \ m/s$$

ب)

$$\bar{v}=\frac{s(۲/۱)-s(۲)}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۰/۸۲-۱۰}{۲/۱-۲}=\frac{۰/۸۲}{۰/۱}=۸/۲ \ m/s$$

پ)

$$v=\lim_{t\to ۲}\frac{s(t)-s(۲)}{t-۲}=\lim_{t\to ۲}\frac{۲t^{۲}+۲-۱۰}{t-۲}=\lim_{t\to ۲}\frac{۲(t^{۲}-۴)}{t-۲}=\lim_{t\to ۲}\frac{۲\cancel{(t-۲)}(t+۲)}{\cancel{t-۲}}=\lim_{t\to ۲}۲(t+۲)=۸ \ m/s$$

فصل پنجم
کاربرد مشتق

آزمون یکنوایی تابع

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

مثال: تابع $f(x) = -x^۳ + ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است.

حل: f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$f'(x) = -۳x^۲ + ۳$, $f'(x) = ۰ \to -۳x^۲ + ۳ = ۰$ ، $x = -۱$ و ۱

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
علامت f'		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
یکنوایی f	$+\infty$	اکیداً نزولی ↘	۲−	اکیداً صعودی ↗	۲	اکیداً نزولی ↘	$-\infty$

اکسترمم‌های نسبی تابع

تابع f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$.

در این حالت $f(c)$ مقدار ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه یک همسایگی از c مانند I باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. در این حالت $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

نکته: نقاط ماکزیمم و مینیمم یک تابع را نقاط اکسترمم آن تابع هم می‌گوییم.

نقطه بحرانی: نقطه $c \in D_f$ را نقطه بحرانی گویند هرگاه $f'(c) = ۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

نکته: هر نقطه max و min نسبی بحرانی است چون مشتق در آن صفر است، ولی عکس آن همیشه برقرار نیست.

مثال: نقاط بحرانی تابع روبه‌رو را حساب کنید.

$D_f = R - \{۰\}$

$f(x) = \dfrac{x+۳}{x^۲}$

$$f'(x) = \frac{-x^۲ - ۶x}{x^۴} = \frac{-x-۶}{x^۳} \to -x-۶ = ۰$$

$f'(x) = ۰ \to x = -۶$ نقطه بحرانی است

مثال: تابع $y = x^۳ - ۳x + ۲$ را در فاصله $[۰ , ۲]$ در نظر گرفته و max و min مطلق را به دست آورید.

$y' = ۳x^۲ - ۳ \Rightarrow y' = ۰ \to ۳x^۲ - ۳ = ۰ \to x = \pm ۱$

$x=-1$ در دامنه نیست.

$y(0)=2$ مینیمم مطلق

$y(1)=0$

$y(2)=4$ ماکزیمم مطلق

مثال : معادله مماس بر منحنی $y=x^2-7x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی را به دست آورید.

$$x=2 \rightarrow y=2^2-7\times 2 \rightarrow y=-10 \rightarrow \begin{vmatrix} 2 \\ -10 \end{vmatrix}$$

$$y'=2x-7 \xrightarrow{x=2} m=y'(2)=2\times 2-7 \rightarrow m=-3$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \rightarrow y+10=-3(x-2) \rightarrow y=-3x-4$$ معادله خط مماس

بهینه‌سازی

هرگاه بخواهیم بیشترین یا کمترین مقدار یک کمیت را حساب کنیم، ابتدا آن را برحسب یک مجهول می‌نویسیم سپس مشتق آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

مثال : نقطه‌ای روی منحنی $f(x)=\sqrt{x}$ پیدا کنید که از نقطه $\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$ کمترین فاصله را داشته باشد.

حل : نقطه مورد نظر را B می‌نامیم :

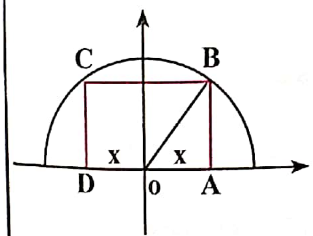
$$A\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix} x \\ \sqrt{x} \end{vmatrix}$$

یادآوری : $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

$$d=\sqrt{(x-4)^2+(\sqrt{x}-0)^2}=\sqrt{x^2-7x+16}$$

$$d'=0 \rightarrow \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}}=0 \rightarrow 2x-7=0 \rightarrow x=\frac{7}{2} \rightarrow B(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}})$$

مثال : مستطیلی داخل نیم‌دایره به شعاع ۱ محاط شده است حداکثر مساحت ممکن برای این مستطیل چقدر است؟



$DA=2x$, $OB=$ شعاع $=1$

$$\overset{\Delta}{OAB} \Rightarrow OB^2=OA^2+AB^2 \Rightarrow 1=x^2+AB^2 \rightarrow AB=\sqrt{1-x^2}$$

مساحت مستطیل $=DA\times AB \rightarrow S=2x\times\sqrt{1-x^2} \rightarrow S'=2\sqrt{1-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\times 2x$

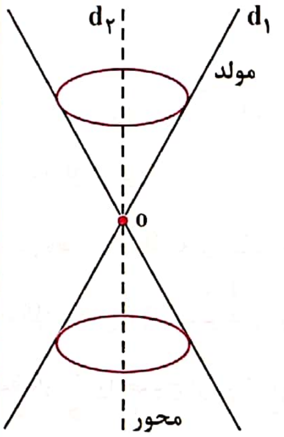
$$S'=\frac{2(1-x^2)-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow S'=0 \rightarrow 2-2x^2-2x^2=0 \rightarrow 2-4x^2=0$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1$$

فصل ششم

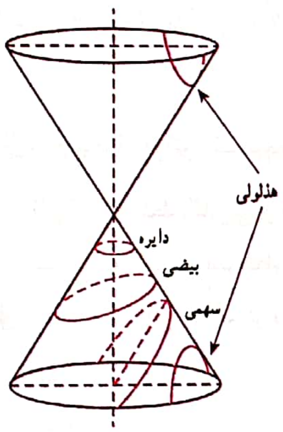
هندسه



سطح مقطع : شکلی است که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود.

سطح مخروطی : دو خط d_1 , d_2 در نقطه o متقاطع‌اند. اگر خط d_1 را حول خط d_2 دوران کامل دهیم سطح ایجاد شده سطح مخروطی نامیده می‌شود. خط d_1 مولد، خط d_2 محور و نقطه تلاقی o رأس سطح مخروطی است.

مقاطع مخروطی : اگر سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده شود مقطع حاصل یک منحنی است از آن‌جایی که این منحنی‌ها حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند مقاطع مخروطی گویند و چهار حالت دارد :



۱) اگر صفحه عمود بر محور سطح مخروطی باشد و از رأس آن عبور نکند مقطع دایره است.

۲) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد موازی هم نباشد و از رأس نگذرد، شکل حاصل بیضی است.

۳) اگر صفحه با مولد موازی باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل یک سهمی است.

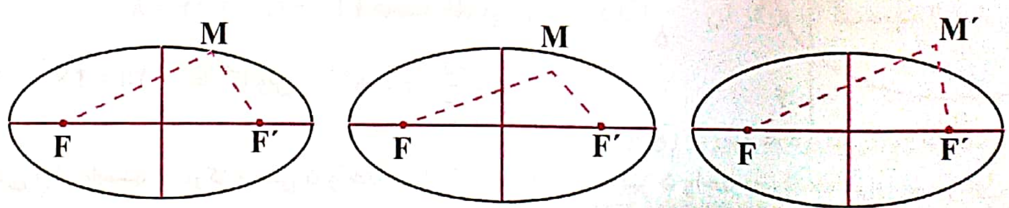
۴) اگر صفحه سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل را هذلولی می‌نامیم.

بیضی

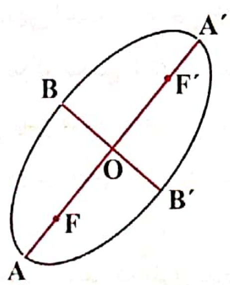
بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.

این دو نقطه ثابت را کانون‌های بیضی می‌نامیم و با F , F' نشان می‌دهیم.

اگر مقدار ثابت را L بنامیم، با توجه به این که نقطه دلخواه M روی بیضی، داخل و یا بیرون بیضی باشد، خواهیم داشت :



$MF + MF' = L$ $MF + MF' < L$ $MF + MF' > L$



بیضی روبه‌رو را در نظر بگیرید.

در هر بیضی اندازه FF' ، **فاصله کانونی** بیضی نامیده می‌شود.

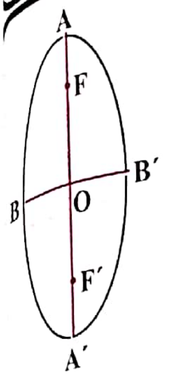
نقطه میانی پاره‌خط FF' ، **مرکز بیضی** است که آن را نقطه O نامیده‌ایم.

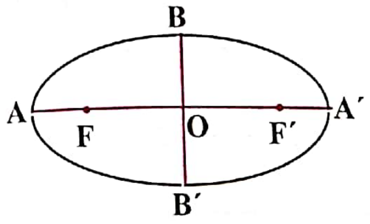
پاره‌خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA' ، **قطر بزرگ** یا **قطر کانونی** بیضی است.

پاره‌خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ عمود است، یعنی BB' ، **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود.

اگر قطر بزرگ افقی باشد بیضی را **بیضی افقی** و اگر عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** می‌نامیم.

یک بیضی چه افقی باشد و چه قائم، قراردادها و روابط زیر همواره برقرارند :





$OA = OA' = a \ , \ AA' = ۲a$

$OB = OB' = b \ , \ BB' = ۲b$

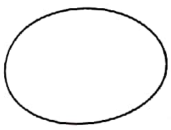
$OF = OF' = c \ , \ FF' = ۲c$

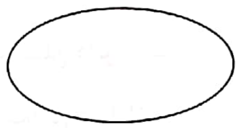
$a^۲ = b^۲ + c^۲$

خروج از مرکز

اندازه‌های c, b, a بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $۱ > \frac{c}{a} > ۰$ ، زیرا $c < a$. هر چه نسبت $\frac{c}{a}$ ، بزرگ‌تر و به یک نزدیک‌تر باشد.
شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک خواهد شد.
مقدار $\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

$e = \frac{c}{a}$

$e = ۰/۴$ 

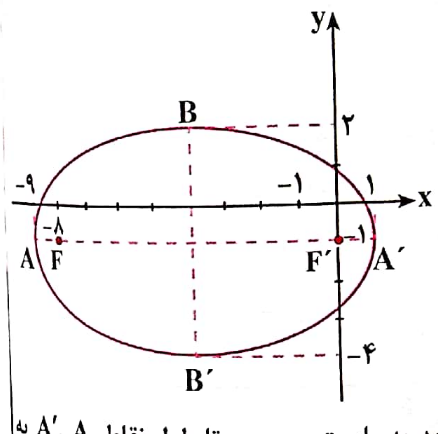
$e = ۰/۸$ 

مثال : خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ ، مرکز آن $(-۴ , -۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

حل : با توجه به این‌که مرکز بیضی، وسط AA' ، BB' و FF' است، شکل می‌کشیم و به سادگی مسئله را حل می‌کنیم.



الف)

$۲b = ۶ \rightarrow b = ۳$

$e = \frac{c}{a} \rightarrow \frac{۴}{۵} = \frac{c}{a} \rightarrow a = \frac{۵}{۴}c$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \rightarrow (\frac{۵}{۴}c)^۲ = ۳^۲ + c^۲ \rightarrow c = ۴$

فاصله کانونی $FF' = ۲c = ۲ \times ۴ = ۸$

$a = \frac{۵}{۴} \times ۴ = ۵$ قطر کانونی $= ۲a = ۲ \times ۵ = ۱۰$

ب) چون بیضی افقی است، از مرکز بیضی ۵ واحد (به اندازه a) به چپ و نیز ۵ واحد به راست می‌رویم تا طول نقاط A, A' به دست آید.

$x_A = -۴ - ۵ = -۹ \ , \ x_{A'} = -۴ + ۵ = ۱$

بدیهی است که عرض نقاط A و A' ، ۱- می‌باشد. بنابراین :

$A(-۹ , -۱) \ , \ A'(۱ , -۱)$

از مرکز بیضی ۴ واحد (به اندازه c) به چپ و نیز ۴ واحد به راست می‌رویم تا طول نقاط F و F' به دست آید.

بدیهی است که عرض نقاط F و F' ، ۱- است.

$x_F = -۴ - ۴ = -۸ \ , \ x_{F'} = -۴ + ۴ = ۰ \rightarrow F(-۸ , -۱) \ , \ F'(۰ , -۱)$

از مرکز بیضی ۳ واحد (به اندزاه b) به بالا و نیز ۳ واحد به پایین می‌رویم تا عرض نقاط B', B به دست آید.

$y_B = -۱ + ۳ = ۲ \ , \ y_{B'} = -۱ - ۳ = -۴$

بدیهی است که طول نقاط B و B' ، ۴- می‌باشد. بنابراین : $B(-۴ , ۲) \ , \ B'(-۴ , -۴)$

دایره

دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت در همان صفحه مقداری ثابت و مثبت باشد. نقطه ثابت را مرکز و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌نامند.

اگر $C(\alpha , \beta)$ مرکز، r شعاع و $M(x , y)$ نقطه‌ای روی دایره باشد، در این صورت : $|CM| = r$

معادله دایره است $CM = \sqrt{(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲} \rightarrow r^۲ = (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲$

مثال : معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۳ , -۵)$ و $B(-۵ , ۱)$ دو سر قطر آن باشد.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۳+(-۵)}{۲} = -۱ \\ \frac{-۵+۱}{۲} = -۲\end{array}\right. \rightarrow C\left|\begin{array}{l}-۱ \\ -۲\end{array}\right. \text{مرکز} \qquad CA = r = \sqrt{(-۱-۳)^۲ + (-۲+۵)^۲} = ۵$$

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲ \rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۲۵$$

مثال : مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P(x , y)$ را پیدا کنید که فاصله آن از نقطه $A(۲ , ۴)$ ، $\sqrt{۲}$ برابر فاصله آن‌ها از نقطه $B(۱ , ۲)$ باشد.

$$|AP| = \sqrt{۲}|BP| \rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲} = \sqrt{۲}(\sqrt{(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲})$$

$$(x-۲)^۲ + (y-۴)^۲ = ۲[(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲]$$

$$x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ - ۸y + ۱۶ - ۲x^۲ + ۴x - ۲ - ۲y^۲ + ۸y - ۸ = ۰$$

$x^۲ + y^۲ = ۱۰$ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt{۱۰}$

نکته :

۱) اگر دایره بر دو محور مختصات مماس باشد : $|\alpha| = |\beta| = r$

۲) اگر دایره بر محور عرض‌ها مماس باشد. $|\alpha| = r$

۳) اگر دایره بر محور طول‌ها مماس باشد. $|\beta| = r$

مثال : معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $C\left|\begin{array}{l}-۲ \\ ۵\end{array}\right.$ و بر محور y مماس باشد.

$$|\alpha| = r \rightarrow r = |-۲| = ۲ \qquad (x+۲)^۲ + (y-۵)^۲ = ۴$$

معادله گسترده یا معادله ضمنی دایره به صورت روبه‌رو است : $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$

مثال : شعاع و مرکز را در معادله داده شده مشخص کنید. $۴x^۲ + ۴y^۲ - ۴x + ۸y - ۱۱ = ۰$

بر ۴ تقسیم می‌کنیم تا ضریب $x^۲$, $y^۲$ برابر یک شود. $x^۲ + y^۲ - x + ۲y - \frac{۱۱}{۴} = ۰ \rightarrow x^۲ - x + y^۲ + ۲y - \frac{۱۱}{۴} = ۰$

روش اول :

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} + (y+۱)^۲ - ۱ - \frac{۱۱}{۴} = ۰ \rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲ + (y+۱)^۲ - \frac{۵}{۴} - \frac{۱۱}{۴} = ۰$$

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲ + (y+۱)^۲ = ۴ \rightarrow \text{شعاع} = ۲ \text{ ، } (\frac{۱}{۲} , -۱) : \text{مرکز}$$

روش دوم :

$$\text{مرکز } (-\frac{a}{۲} , -\frac{b}{۲}) \rightarrow \text{مرکز } (\frac{۱}{۲} , -۱) , r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۴ - ۴(-\frac{۱۱}{۴})} = ۲$$

مثال : اگر شعاع دایره $x^۲+y^۲+۲x-۲y-m=۰$ برابر ۵ باشد، m را حساب کنید.

$$r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}\rightarrow ۵=\frac{\sqrt{۴+۴+۴m}}{۲}\rightarrow ۱۰=\sqrt{۴m+۸}\rightarrow ۱۰۰=۴m+۸\rightarrow m=۲۳$$

$a=۲$

$b=-۲$

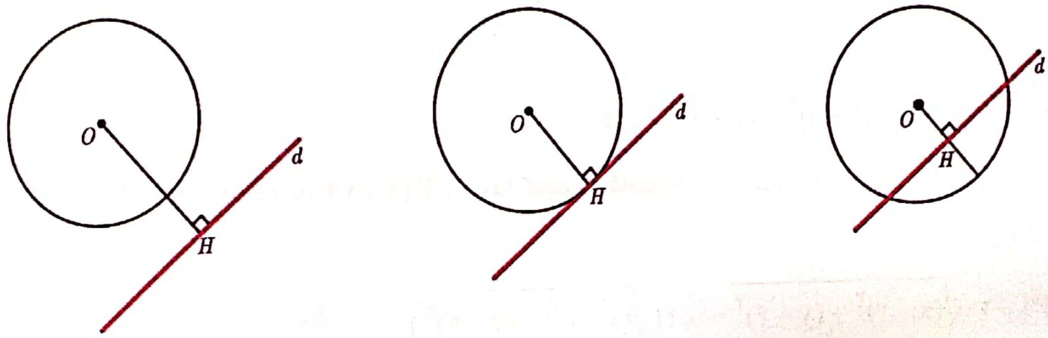
$c=-m$

اوضاع نسبی خط و دایره

اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH<r$ است.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH=r$ است.

اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH>r$ است.



یادآوری :

۱) خط مماس در نقطه تماس با دایره بر شعاع دایره عمود است.

۲) فاصله نقطه $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته :

۱) فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر است با شعاع دایره

۲) اندازه شعاع دایره‌ای که بر دو خط موازی مماس باشد برابر است با :

$$r=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثال: معادله دایره‌ای که مرکزش محل تلاقی دو خط $۲x+y=۵$ و $۳x-y=۱۰$ بوده و بر خط $۶x+۸y+۵=۰$ مماس باشد را بنویسید.

$$\left|\begin{array}{l}۲x+y=۵\\ ۳x-y=۱۰\end{array}\right.\rightarrow \begin{array}{l}x=۳\\ y=-۱\end{array}\rightarrow C\left|\begin{array}{l}۳\\ -۱\end{array}\right.$$

$$r=d=\frac{|۶\times۳+۸\times-۱+۵|}{\sqrt{۳۶+۶۴}}=\frac{۱۵}{۱۰}=\frac{۳}{۲}$$

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲\rightarrow (x-۳)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۹}{۴}$$

مثال : الف) ثابت کنید خط $x+y=۳$ با دایره $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ متقاطع است.

ب) مختصات نقاط تلاقی را به دست آورید.

مرکز $(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲})=(۱,۰)$

شعاع $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=۲$

فاصله مرکز از خط داده شده را حساب می‌کنیم.
$$d=\frac{|1\times 1+1\times 0-3|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

خط با دایره متقاطع است $\sqrt{2}<2$ $\leftarrow$ $OH=\sqrt{2}\ ,\ r=2$

$$y=3-x\ ,\ x^2+y^2-2x-3=0$$

$$x^2+(3-x)^2-2x-3=0 \rightarrow x^2-4x+3=0 \rightarrow (x-1)(x-3)=0 \rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix}$$

بهتر است طول‌های به دست آمده را در معادله خط قرار دهیم تا عرض نقاط به دست آید.

$$y=3-1=2\ ,\ y=3-3=0 \rightarrow A\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}\ ,\ B\begin{vmatrix}3\\0\end{vmatrix}$$

اوضاع نسبی دو دایره

دو دایره $C_1(O_1\ ,\ r_1)$ و $C_2(O_2\ ,\ r_2)$ نسبت به هم شش حالت دارند.

نکته : فاصله بین دو مرکز دایره‌ها را خط‌المرکزین می‌نامیم و با حرف d نشان می‌دهیم.

۱) متخارج $d>r_1+r_2$

۲) مماس خارج $d=r_1+r_2$

۳) متقاطع $|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$

۴) مماس داخل $d=|r_1-r_2|$

۵) متداخل $d<|r_1-r_2|$

۶) هم‌مرکز $d=0$

مثال : دو دایره $x^2+y^2=64$ و $x^2+y^2-6x+8y+16=0$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

حل :

$$(x-3)^2+(y+4)^2=9 \qquad x^2+y^2=64$$

$$O_2\begin{vmatrix}3\\-4\end{vmatrix} \text{ و } r_2=3 \qquad O_1\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \text{ و } r_1=8$$

$$d=O_1O_2=\sqrt{9+16}=5$$

پس دو دایره مماس داخل‌اند $d=|r_1-r_2| \rightarrow 5=|8-3|$

مثال : دو دایره $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ و $(x-2)^2+(y+2)^2=m+1$ مماس خارج هستند مقدار m را حساب کنید.

$$O_1O_2=d=\sqrt{9+16}=5 \qquad O_2\begin{vmatrix}2\\-2\end{vmatrix} \qquad O_1\begin{vmatrix}-1\\2\end{vmatrix}$$

$$r_2=\sqrt{m+1} \qquad r_1=3$$

مماس خارج $d=r_1+r_2$

$$5=3+\sqrt{m+1} \rightarrow 2=\sqrt{m+1}$$

$$4=m+1 \rightarrow m=3$$

فصل هفتم

احتمال

پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم هرگاه A و B با هم رخ ندهند. $A\cap B=\varnothing$ در این صور

خواهیم داشت : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

تعمیم پیشامدهای ناسازگار

پیشامدهای A_1 , A_2 , ... و A_n را دو به دو ناسازگار گوییم هرگاه هیچ دو تایی از آن‌ها نتوانند با هم رخ دهند در این صورت :

$p(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\cdots+p(A_n)$

دو پیشامد A و B را مستقل گویند، هرگاه احتمال وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشام

B و A معادل است با این‌که : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

مثال :اگر $P(A)=0/2$ و $P(B)=0/3$ و A و B مستقل باشند آن‌گاه $P(B-A)$ را حساب کنید.

$P(A\cap B)=P(A).P(B)=0/2\times0/3=0/06$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0/3-0/06=0/24$

احتمال شرطی :اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و B و A دو پیشامد از S و $A\cap B\neq\varnothing$ (سازگار) باشند به طوری ک

$P(B)>0$ احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن‌که پیشامد B رخ داده باشد از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad P(B)\neq 0$$

$$P(A\cap B)=P(A|B).P(B)$$

مثال :دو تاس را پرتاب می‌کنیم اگر مجموع ۷ آمده باشد احتمال آن را پیدا کنید که یکی از اعداد تاس ۵ باشد.

$S=\{(1,1)(1,2),\dots,(6,6)\}$, $n(S)=6\times6=36$

A : پیشامد آنکه مجموع ۷ باشد :

$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

B : پیشامد آنکه یکی از اعداد ۵ باشد :

$B=\{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6)\}$

$A\cap B=\{(2,5),(5,2)\}$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{36},\ P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{36}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

آنجا که دلی بود به میخانه
نشستیم / آن توبه صد ساله به
پیمانه شکستیم
از آتش دوزخ نهراسیم که آن
شب / ما توبه شکستیم ولی دل
نشکستیم

باسمه تعالی

خلاصه فصل هفتم ریاضی (۳) تجربی دوازدهم

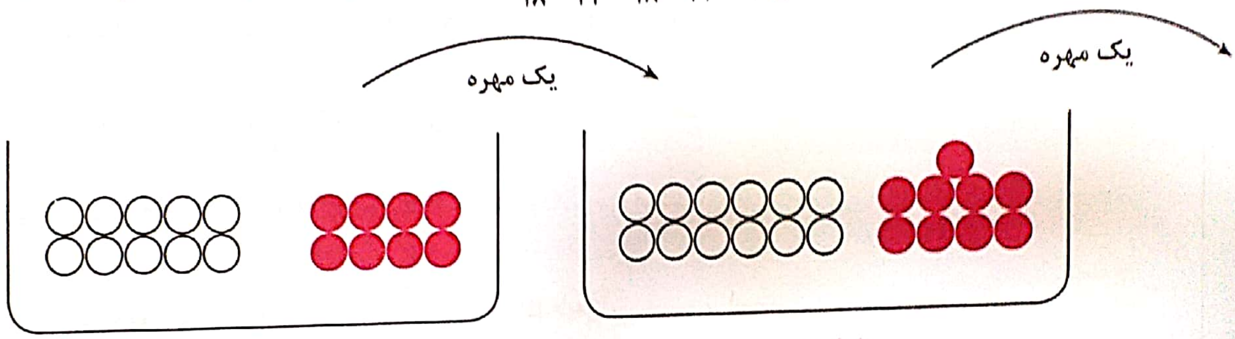
قانون احتمال کلی

اگر فرض کنیم در حالت کلی $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطه زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم.

$$P(B)=\sum_{i=۱}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=۱}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

مثال: دو ظرف داریم اولی شامل ۱۰ مهره سفید و ۸ مهره قرمز و دومی شامل ۱۲ مهره سفید و ۹ مهره قرمز است از ظرف اولی به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم آن‌گاه از ظرف دوم به تصادف مهره‌ای درمی‌آوریم احتمال این‌که این مهره سفید باشد چقدر است:

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(A_۲)P(A|B_۲)=\frac{۱۰}{۱۸}\times\frac{۱۳}{۲۲}+\frac{۸}{۱۸}\times\frac{۱۲}{۲۲}=\frac{۱۱۳}{۱۹۸}$$



ظرف اول — ظرف دوم

مهره $۱۰+۸=۱۸$ — مهره $۱۲+۹+۱=۲۲$

مثال: احتمال به دنیا آمدن یک نوزاد پسر مبتلا به نوعی بیماری خاص برابر ۰/۰۸ و برای یک نوزاد دختر برابر ۰/۰۳ است. خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن را دارند. با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟

حل: نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{۸}{۱۰۰}$

نسبت نوزادان دختر بیمار به کل نوزادان دختر برابر $\frac{۳}{۱۰۰}$

احتمال پسر یا دختر بودن نوزاد برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

P (بیمار بودن) = P (پسر بودن) P (بیمار بودن | پسر بودن) + P (دختر بودن) P (بیمار بودن | دختر بودن)

$$P(R)=P(B)P(R|B)+P(G)P(R|G)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۰۰}$$

۱ ۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید :

الف) تابع $y=-x^{3}-1$ تابعی نزولی است.

ب) اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ آنگاه تابع f اکیداً صعودی است.

پ) اگر $k>0$ نمودار $y=f(kx)$ با انبساط و انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست می‌آید.

ت) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

۱ ۲- جاهای خالی را با عبارتی مناسب پر کنید :

الف) باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=2x^{3}+5x^{2}-3x-10$ بر $x+2$ برابر .... است.

ب) مجموعه $(\frac{5}{2}, 4)-\{3\}$ یک همسایگی محذوف .... است.

پ) حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^{3}+4x^{2}-5x-9)$ برابر .... است.

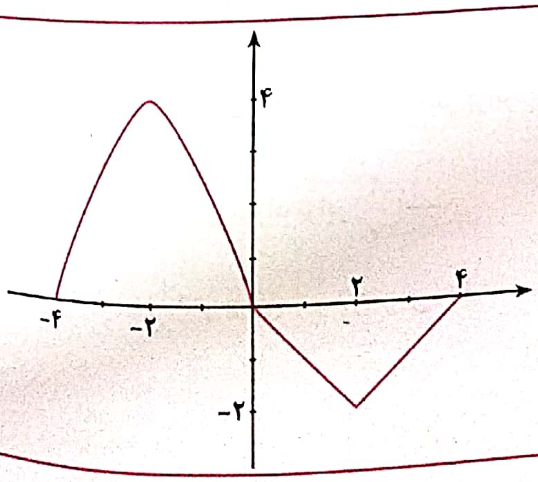
ت) ترکیب دو تابع $f(x)=3x-4$, $g(x)=\dfrac{x+4}{3}$ تابعی .... است.

/۵ ۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید :

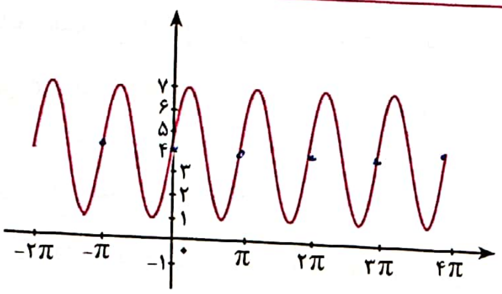
$$f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ 3 & -4\leq x<2\\ 3x-2 & x\geq 2\end{cases}$$

/۵ ۴- اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=2x^{2}-1$ دامنه و ضابطه تابع gof و fog را بیابید.

۱ ۵- با توجه به نمودار f نمودار توابع $y=f(2x)$ ، $y=1-f(x)$ را رسم کنید.



/۵ ۶- ضابطه تابع وارون تابع $f(x)=1+\sqrt{x-2}$ را بیابید. دامنه و برد تابع f و تابع f^{-1} را بنویسید. نمودار f و f^{-1} را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ردیف سؤال	بارم
۷- اگر $f(x)=x^{3}+3x$ و بدانیم تابع f یک به یک است. حاصل $f^{-1}(0)+f^{-1}(4)$ را بیابید.	۰/۵
۸- اگر نمودار زیر، نمودار تابع $y=a\sin bx+c$ باشد. مقادیر a و b و c را بیابید. 	۱
۹- مقدار $\cos 15^\circ$ را به دست آورید.	۱
۱۰- معادله مثلثاتی $\cos x(2\cos x-9)=5$ را حل کنید.	۱/۵
۱۱- حدود زیر را محاسبه کنید: الف) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^{2}-5x+6}{2x^{3}-13x^{2}+24x-9}$ پ) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{[x]-3}{\lvert 2x-1\rvert}$ ت) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{-}}\tan x$ ث) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-\sqrt{4x^{2}+1}}{2x+\sqrt{9x^{2}+8}}$ ج) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x^{2}\sqrt{x}+3)^{2}}{(x^{2}-1)(x-2)(x^{2}-3)}$	۴/۵
۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{+}}\frac{5}{3+2^{\tan x}}$ را بیابید.	۱
۱۳- رابطه $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-1$ به چه معناست؟ توضیح دهید.	۰/۵
۱۴- تابع $f(x)=2x^{2}-3x$ مفروض است: الف) مقدار $f'(2)$ را به کمک تعریف مشتق بیابید. ب) معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه به طول ۲ واقع بر آن را بنویسید.	۱/۵
۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{2x^{2}+x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ باشد. مقدار $f'(0)$ را بیابید.	۱
	۲۰

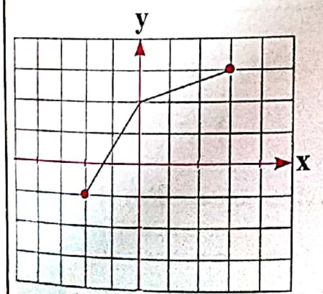
باسمه تعالی

سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم
امتحان هماهنگ کشوری (دی ماه ۹۷)

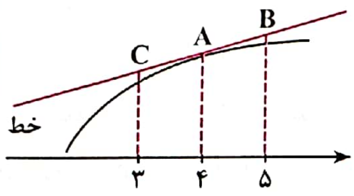
درس: ریاضی (۳) تجربی

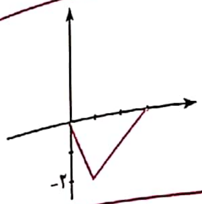
تاریخ امتحان: ۹۷/۱۰/۸
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون شماره ۲

۱	۱- درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود. ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر است.	۰/۵
۲	۲- در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید: الف) تابع $h(x)=(2x^2-5x+1)^3$ به صورت ترکیب دو تابع $f(x)=2x^2-5x+1$ و $g(x)=\cdots$ است. ب) حد تابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x>0\\ \dfrac{5x^2-3x}{-x^2+1} & x\le 0\end{cases}$ وقتی $x\to-\infty$ برابر .... است. پ) اگر $f'(2)=3$ و $g'(2)=5$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $(2g-f)'(2)$ برابر .... است. ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن .... است.	۱
۳	۳- الف) توابع $f(x)=\dfrac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید. دامنه fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) اگر $f(x)=\dfrac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ باشد. مقدار $(g^{-1}of^{-1})(5)$ را به دست آورید.	۱/۷۵
۴	۴- با استفاده از نمودار تابع f نمودار تابع $y=f(\dfrac{x}{2})-2$ را رسم کنید. 	۰/۷۵
۵	۵- الف) دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=2-3\sin 4x$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $f(x)=\tan(2x)$ را به دست آورید.	۱ ۰/۵
۶	۶- معادله مثلثاتی $\sin x-\cos 2x=0$ را حل کنید.	۱/۵
۷	۷- حد توابع زیر را به دست آورید: الف) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{[x]-3}{x-3}$ ب) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$	۱/۷۵

باسمه تعالی	سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم امتحان هماهنگ کشوری (دی ماه ۹۷)	درس: ریاضی (۳) تجربی	تاریخ امتحان : ۹۷/۱۰/۸ مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه	آزمون شماره ۲

۸- برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(4)=1/5$ و $f(4)=24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A و B و C را بیابید.  	۰/۷۵
۹- اگر $f(x)=1-2x^2$ باشد. $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.	۰/۷۵
۱۰- مشتق توابع زیر را به دست آورید : (ساده کردن مشتق الزامی نیست) الف) $f(x)=(\frac{x}{2x-1})^5$ ب) $g(x)=x^2(\sqrt{x}+1)$	۲
۱۱- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $x(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است. آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[3, 4]$ چقدر است؟	۱
۱۲- الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید. ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه $[-1, 3]$ مشخص کنید.	۲
۱۳- اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد. طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.	۱
۱۴- در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟	۱
۱۵- معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.	۱/۲۵
۱۶- یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟	۱/۵
	۲۰

بارم	سؤال
۱	۱- تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x\geq 0\\ -x+2 & x<0\end{cases}$ داده شده: الف) نمودار تابع را رسم کنید. ب) مقدار $f(f(-2))$ را محاسبه کنید.
۱	۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=f(x)$ است با استفاده از انتقال ابتدا نمودار تابع $y=f(x-3)$ و سپس نمودار تابع $y=-2f(x-3)$ را رسم کنید. 
۱	۳- نمودار تابع $y=\|\cos x\|$ را در بازه $[0\ ,\ \pi]$ با استفاده از نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید.
۱	۴- یک به یک بودن تابع $y=\frac{1}{x^3}$ با دامنه $R-\{0\}$ را بررسی کنید سپس وارون تابع را به دست آورید.
۱	۵- اگر $f(x)=x^2+2x+2$ ، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای به دست آورید که $(fog)(x)=x^2-4x+5$ باشد.
۱/۵	۶- دو تابع $f(x)=x-2$ و $g(x)=\sqrt{x+1}$ داده شده است: الف) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطه تابع $(fof)(x)$ را بنویسید.
۱/۵	۷- معادله مثلثاتی $2\sin^2 5x-\sin 5x-1=0$ را حل کنید و جواب‌های کلی را به دست آورید.
۱	۸- مقدار $\sin 75^\circ$ را حساب کنید.
۱/۵	۹- مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشد، آن‌گاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟
۱	۱۰- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leq 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ را رسم کنید. سپس حد چپ و حد راست آن را در $x=0$ بررسی کنید.
۴	۱۱- حدهای زیر را حساب کنید: الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-3}{\sqrt{x}}$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x^2+5x-7}{2-3x^2}$ ت) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x]-1}{x-2}$
۱	۱۲- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x\leq 3\\ 3x+2 & x>3\end{cases}$ را بررسی کنید.
۱	۱۳- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}-1$ را در نقطه $x=1$ به دست آورید.
۱/۵	۱۴- مشتق توابع را حساب کنید: الف) $f(x)=x^3(2x-5)$ ب) $h(x)=\frac{x-2}{3x+1}$
۱	۱۵- معادله خط مماس بر نمودار $y=x^2+3x-1$ را در نقطه‌ای $x=2$ واقع بر منحنی تابع را بنویسید.
۲۰	جمع

۱- اگر $f(x) = ۲x^۲ - ۲$ و تابع $f(g(x)) = ۲x^۲ + ۴x$ باشند تابع $g(x)$ را محاسبه کنید.	۱
۲- معادله $۲\sin^۲ x + ۹\cos x + ۳ = ۰$ را حل کنید و جواب کلی را پیدا کنید.	۱/۵
۳- مقدار $\cos ۷۵^\circ$ را به دست آورید.	۱
۴- حد توابع را حساب کنید: الف) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{\sqrt{x} - ۱}{۲x - ۲}$ ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۲x^۲ - \sqrt{x^۲ + ۴x}}{۱ - x}$	۱/۵
۵- تابع با ضابطه $y = x^۲ + ۳$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را به ازاء $x_۱ = ۲$ و $\Delta x = ۰/۳$ به دست آورید.	۰/۵
۶- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا $f(x) = \begin{cases} ax^۲ + bx + ۲ & x < ۱ \\ x^۳ & x \geq ۱ \end{cases}$ در $x = ۱$ مشتق‌پذیر باشد.	۱
۷- در تابع $y = x^۳ + ax^۲ + b$ ضرایب ثابت a و b را طوری پیدا کنید که تابع در $x = ۲$ دارای min یا max نسبی باشد و نمودار تابع از نقطه $(۱ , -۱)$ بگذرد.	۱/۵
۸- مقدار max مطلق تابع $y = ۳x^۲ - x^۳$ را در بازه $[-۱ , ۲]$ در صورت وجود تعیین کنید.	۱/۵
۹- الف) نقطه بحرانی را تعریف کنید. ب) نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{۴ - x^۲}$ را در صورت وجود تعیین کنید.	۱/۵
۱۰- مجموع دو عدد مثبت برابر ۸ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل‌ضرب آن‌ها را پیدا کنید.	۱
۱۱- دو دایره $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$ و $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$ نسبت به هم چه وضعی دارند.	۱/۵
۱۲- کانون‌های یک بیضی نقاط $(۳ , ۱)$, $(-۵ , ۱)$ است. فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.	۱/۵
۱۳- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۲ , ۱)$ بوده و بر خطی به معادله $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ مماس باشد.	۱/۵
۱۴- ۶۵ درصد کارمندان اداره‌ای را زنان و بقیه را مردان تشکیل می‌دهند. اگر ۵۶ درصد زنان و ۴۴ درصد مردان دارای تحصیلات دانشگاهی باشند چند درصد افراد این اداره دارای تحصیلات دانشگاهی هستند.	۱/۵
۱۵- انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر ۰/۱۲ و به فرزند دختر ۰/۰۹ می‌باشد والدینی که حاصل این نوع بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند مطلوب است احتمال آن که این فرزند سالم باشد.	۲
جمع	۲۰

باسمه تعالی

سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم
سؤالات پیشنهادی پایان سال

درس: ریاضی (۳) تجربی

تاریخ امتحان: نوبت دوم
مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه

آزمون شماره ۵

۱- آیا دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$ و $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟ بررسی کنید. ۱

۲- جواب کلی معادله $\sin^2 x=\cos^2 x+1$ را به دست آورید. ۱

۳- دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1-\frac{3}{4}\cos 3x$ را به دست آورید. ۱/۵

۴- حد توابع را به دست آورید. ۱/۵

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-x^2}{x^2+6x+5}$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x+3}$

۵- آهنگ تغییرات تابع $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ را وقتی x از ۲ به ۲/۲ تغییر می‌کند، حساب کنید. ۱

۶- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & x\le 1 \\ x^2-2x & x>1 \end{cases}$ مفروض است b و a را چنان بیابید که f در $x=1$ مشتق‌پذیر باشد. ۱/۵

۷- مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۶ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل‌ضرب آن‌ها را پیدا کنید. ۱/۵

۸- مقدار max و min مطلق تابع $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}$ را در بازه $[-2, 1]$ در صورت وجود پیدا کنید. ۱/۵

۹- ضرایب b و a را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $f(x)=x^3+ax^2+b$ در (۲ و ۱) یک max یا min نسبی داشته باشد. ۱/۵

۱۰- معادله وتر مشترک دو دایره به معادله‌های زیر را به دست آورده و سپس با استفاده از معادله وتر مشترک مختصات نقاط تقاطع را به دست آورید. ۱/۵

$x^2+y^2+4x+2y-20=0$, $x^2+y^2+2x+2y-24=0$

۱۱- کانون‌های یک بیضی نقاط $(3, 1)$, $(-5, 1)$ است. اگر $a=6$ باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. ۱/۵

۱۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $(1, 0)$ باشد و بر خط $3x+4y+7=0$ مماس باشد. ۱/۵

۱۳- اگر A و B دو پیشامد باشند به طوری که $p(A)=\frac{2}{5}$ و $p(B)=\frac{3}{5}$ و $p(A\cup B)=\frac{2}{3}$ مطلوب است محاسبه: $p(B|A)$ ۱/۵

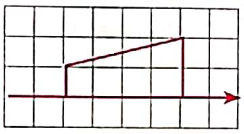
۱۴- سه ظرف همانند داریم در ظرف اول ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۴ مهره سبز. در ظرف دوم ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و در ظرف سوم تعدادی مهره سفید موجود است به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده مهره‌ای خارج می‌کنیم: ۲

الف) احتمال این‌که مهره خارج شده سفید باشد چقدر است؟

ب) اگر مهره انتخاب شده سفید باشد با چه احتمالی از جعبه اول انتخاب شده است؟

آزمون شماره ۶

سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم سؤالات پیشنهادی پایان سال	درس: ریاضی (۳) تجربی	تاریخ امتحان : نوبت دوم مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه

۱- اگر $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=2x^2+1$ باشند دامنه fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱
۲- اگر $(x-1\ ,\ 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد مجموع مقادیر x را به دست آورید.	۰/۵
۳- حد توابع را حساب کنید : الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+3x}$ پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{[2x]}$ ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-5x^4+3x^2-1}{x(x-2)}$	۲
۴- معادله حرکت متحرکی به صورت $x=t^2-5t+6$ می‌باشد اولاً سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی از لحظه $t_1=3$ تا $t_2=5$ به دست آورید. ثانیاً آهنگ آنی تغییرات x را در $t=2$ به دست آورید.	۱/۵
۵- نشان دهید نقطه $x=2$ یک گوشه برای تابع $f(x)=\lvert x^2-2x\rvert$ است و معادلات نیم‌مماس‌ها را در این نقطه بنویسید.	۱/۵
۶- در تابع $y=2x^3-3x^2-4$ مطلوب است : الف) نقاط بحرانی تابع ب) max و min مطلق تابع در فاصله $[-1\ ,\ 1]$	۱/۵
۷- ضرایب $a\ ,\ b$ را چنان تعیین کنید که نقطه $(2\ ,\ 1)$ ، نقطه اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $y=ax^3+bx^2$ باشد.	۱/۵
۸- در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه را حول محور دوران دهیم :  الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید. ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟	۱/۵
۹- مقدار k را طوری تعیین کنید که معادله $x^2+y^2-3x+4y+k=0$ دایره‌ای به شعاع ۲ باشد.	۱/۵
۱۰- معادله $\sin 2x+\sin x=0$ را حل کنید و جواب کلی را به دست آورید.	۱
۱۱- دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک یک بیضی نقاط $(4\ ,\ 1)$, $(-6\ ,\ 1)$ و $(1\ ,\ -3)$, $(1\ ,\ 5)$ هستند. خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.	۱/۵
۱۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات باشد و بر خط $3x-4y=-1$ مماس باشد.	۱/۵
۱۳- اگر $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$ آن‌گاه $P(A\mid B')$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۴- جعبه‌ای حاوی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. متوالیاً دو مهره به تصادف و بدون جایگذاری از جعبه بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره دوم همرنگ مهره اول باشد را حساب کنید.	۲
جمع	۲۰

Scanned by CamScanner

۱- اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$ باشند :

الف) دامنه تابع fog

ب) ضابطه fog را به دست آورید.

۲- معادله $2\sin^2 x-\sin x=0$ را حل کنید.

۳- با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید :

الف) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

ب) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

۴- حد توابع را به دست آورید :

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+3x+4}{2x^2-2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$

پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x+9}{2x+\sqrt{x^2-2}}$

۵- مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ را به کمک تعریف در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

۶- مقادیر max و min مطلق تابع $y=x^4-8x^2+16$ را در بازه $[-1\ ,\ 4]$ را محاسبه کنید.

۷- نقاط بحرانی تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ را در دامنه‌اش به دست آورید.

۸- مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۸ است بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل‌ضرب آن‌ها را پیدا کنید.

۹- معادله یک دایره به صورت $x^2+y^2-2x-6y+f=0$ است :

الف) مرکز دایره را به دست آورید.

ب) مقدار f را طوری تعیین کنید که شعاع دایره برابر ۲ باشد.

۱۰- اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۱۱- معادله دایره‌ای به قطر ۸ را بنویسید که در ناحیه چهارم بر محورهای مختصات مماس باشد.

۱۲- اگر $P(A-B)=\frac{1}{4}$ و $P(A)=\frac{3}{4}$ باشند مقدار $P(A\,|\,B)$ را حساب کنید.

۱۳- تعداد دانش‌آموزان سال چهارم در یک شهر ۱۲۰۰ نفر می‌باشد که از این تعداد ۴۰۰ نفر دخترند. اگر ۴۰ درصد پسران و ۳۰ درصد دختران در کنکور سراسری پذیرفته شده باشند و یک نفر را به تصادف انتخاب کنیم :

الف) احتمال این‌که دانش‌آموز انتخاب شده در کنکور قبول شده باشد چقدر است؟

ب) اگر دانش‌آموز انتخاب شده در کنکور قبول شده باشد با چه احتمال پسر است؟

جمع ۲۰

باسمه تعالی

سؤالات امتحان کلاس‌های دوازدهم
سؤالات پیشنهادی پایان سال

درس: ریاضی (۳) تجربی

تاریخ امتحان : نوبت دوم
مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه

آزمون شماره ۸

سؤال	بارم
۱- تابع $f(x)=(x-5)^2$ ، $x\geq 5$ یک به یک است ضابطه تابع وارون آن را به دست آورید.	۱
۲- معادله روبه‌رو را حل کنید و جواب کلی را به دست آورید : $\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0$	۱
۳- با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ ، یک تابع یک به یک به دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید.	۱
۴- حدهای زیر را حساب کنید : الف) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to \pi^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2\sin x}$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+\sqrt{x+3}}{x^2+2x-9}$	۱/۵
۵- به ازای چه مقادیری از a و b تابع زیر در نقطه $x=0$ مشتق‌پذیر است؟ $f(x)=\begin{cases}x^2+2x & x>0\\ ax+b & x\leq 0\end{cases}$	۱/۵
۶- ابتدا نقطه بحرانی را تعریف کنید سپس طول نقاط بحرانی تابع $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ را به دست آورید.	۱/۵
۷- مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ را در بازه $[-1,\frac{1}{2}]$ در صورت وجود تعیین کنید.	۱/۵
۸- ضرایب b و a را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطه $y=2ax^3-bx^2$ در نقطه $(-1,3)$ یک نقطه اکسترمم نسبی داشته باشد.	۱/۵
۹- می‌خواهیم محوطه‌ای مستطیل شکل برای کاشت نهال ایجاد کنیم که از یک طرف رو به دریاست. چگونه می‌توان با ۱۲۰ متر نرده محوطه را ایجاد کرد تا بیشترین مساحت را داشته باشیم؟	۱/۵
۱۰- مرکز و شعاع دایره روبه‌رو را پیدا کنید : $x^2+y^2+2x+2y-1=0$	۱/۵
۱۱- دو سر قطر کوچک یک بیضی نقاط $(4,-1)$ و $(-1,8)$ است. اگر خروج از مرکز بضی ۰/۸ باشد، مختصات دو سر قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را بنویسید.	۱/۵
۱۲- معادله دایره یا نقاطی از صفحه را پیدا کنید که مجموع مربعات فواصل هر کدام از آن‌ها از دو نقطه $(-1,0)$ و $(1,0)$ برابر ۴ باشد.	۱/۵
۱۳- اگر A و B دو پیشامد غیرتهی از فضای نمونه‌ای S باشند ثابت کنید : $P(A'\mid B)=1-P(A\mid B)$	۱/۵
۱۴- ۵۶ درصد از شرکت‌کنندگان کنکور را دختران تشکیل می‌دهند ۷۵ درصد دختران و ۶۵ درصد پسران در کنکور قبول می‌شوند اگر شرکت‌کننده‌ای را به تصادف انتخاب کنیم : الف) احتمال این‌که در کنکور قبول شود چقدر است؟ ب) اگر شرکت‌کننده انتخابی در کنکور قبول شده باشد احتمال این‌که دختر باشد چقدر است؟	۲
جمع	۲۰

باسمه تعالی	کارآزمون	درس: ریاضی (۳) تجربی	تاریخ امتحان : نوبت دوم مدت امتحان : ۱۰۰ دقیقه	آزمون شماره ۹

۱- اگر $f(x)=|x|+1$ و $g(x)=x\sqrt{x}$ باشند دامنه تابع $(gof)(x)$ را حساب کنید. — ۱

۲- معادله $\cos x+\sin^2 x+\cos 2x=2$ را حل و جواب کلی را به دست آورید. — ۱

۳- حد توابع را حساب کنید: — ۱/۵

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{x^2-9}$　　ب) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$　　پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2+1}{3x^2+\sqrt{x^4-1}}$

۴- اگر $f(t)=30+10t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری باشد آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از زمان $t_0=2$ را به دست آورید. — ۲

۵- تابع $f(x)=\begin{cases} a+x & x<1 \\ b\sqrt[3]{x} & x\geq 1\end{cases}$ مفروض است مقادیر a و b را چنان بیابید که $f(x)$ در $x_0=1$ مشتق‌پذیر باشد. — ۱/۵

۶- تابع $y=x^{\frac{8}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$ با دامنه $[-8\,,27]$ مفروض است. اولاً مقادیر max مطلق و min مطلق آن را در صورت وجود بیابید ثانیاً طول نقاط بحرانی را پیدا کنید. — ۱/۵

۷- ضرایب b و a را چنان تعیین کنید که تابع $y=ax^2+b+x^3$ نقطه در $(2\,,3)$ یک max یا min نسبی داشته باشد. — ۱/۵

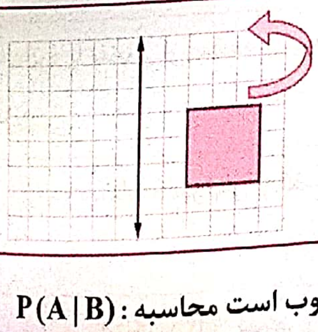
۸- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقطه $O(0\,,0)$ گذشته و $C(2\,,-1)$ مرکز آن باشد. — ۱

۹- معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(1\,,-1)$ و $B(3\,,3)$ دو سر یک قطر آن باشد. — ۱/۵

۱۰- خروج از مرکز یک بیضی قائم $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4\,,-1)$ و طول فاصله کانونی این بیضی ۸ واحد است. مطلوب است: مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های این بیضی. — ۱/۵

۱۱- وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ را مشخص کنید. — ۱

۱۲- مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصله ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد. شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید. — ۱/۵



۱۳- اگر A و B دو پیشامداند. اگر $P(A)=\frac{3}{7}$ ، $P(B)=\frac{4}{7}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ باشد مطلوب است محاسبه: $P(A|B)$ — ۱/۵

۱۴- دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است خارج می‌کنیم. مطلوب است: — ۲

الف) احتمال آن‌که مهره اول سفید و مهره دوم سیاه باشد.

ب) احتمال آن‌که مهره اول سیاه و مهره دوم هم سیاه باشد.

جمع نمره: ۲۰

۱- الف) درست　ب) درست　پ) درست　ت) نادرست $(\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})$

۲- الف) صفر

$x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow f(-2)=2(-2)^3+5(-2)^2-3(-2)-10=0$

ب) ۳

پ) $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^3=+\infty$

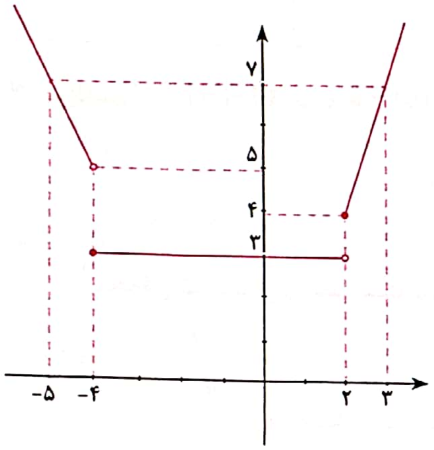
ت) همانی

$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{x+4}{3})=3(\frac{x+4}{3})-4=x$

۳- تابع f در بازه $(-\infty, -4)$ نزولی، در بازه $[-4, 2)$ ثابت و در بازه $[2, +\infty)$ تابعی صعودی است.

x	-۵	-۴
y	۷	۵

x	۲	۳
y	۴	۷



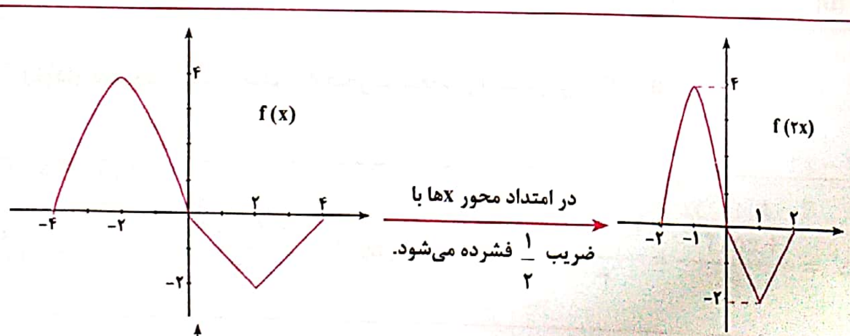
۴- $g(x)=2x^2-1 \; ; \; D_g=\mathbb{R}$

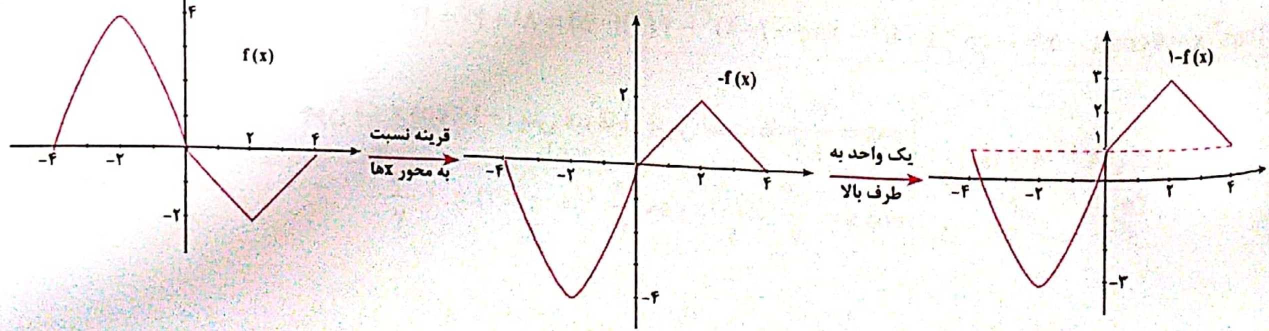
$f(x)=\sqrt{x-1} \Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow D_f=[1, +\infty)$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq 1 \mid \sqrt{x-1}\in\mathbb{R}\}=[1, +\infty)$

$(fog)(x)=f(g(x))=f(2x^2-1)=\sqrt{2x^2-1-1}=\sqrt{2x^2-2}$

۵-



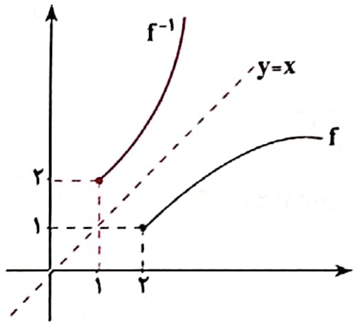


۶- برای یافتن ضابطه تابع وارون، ابتدا x را برحسب y می‌یابیم، سپس جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.

$$y=1+\sqrt{x-2} \Rightarrow y-1=\sqrt{x-2} \Rightarrow (y-1)^2=x-2 \Rightarrow x=2+(y-1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=2+(x-1)^2$$

$$y=1+\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow D_f=R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$$

$$\sqrt{x-2}\geq 0 \Rightarrow 1+\sqrt{x-2}\geq 1 \Rightarrow y\geq 1 \Rightarrow R_f=D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$$



۷- می‌دانیم اگر $f(a)=b$ آنگاه $f^{-1}(b)=a$.

$$f(x)=x^3+3x \xrightarrow{f^{-1}(0)} 0=x^3+3x \to 0=x(x^2+3) \Rightarrow x=0 \Rightarrow f^{-1}(0)=0$$

$\xrightarrow{f^{-1}(4)} 4=x^3+3x \Rightarrow x^3+3x-4=0 \Rightarrow$ مجموع ضرایب برابر صفر است پس یکی از ریشه‌ها برابر ۱ است.

$$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x+4=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(4)=1$$

۸- می‌دانیم برای تابع $y=a\sin bx+c$ داریم:

$$\min=-|a|+c \;;\; \max=|a|+c \;;\; T=\frac{2\pi}{|b|} \to |b|=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2 \xrightarrow{b>0} b=2$$

$f(0)=4 \to 4=a\sin 0^\circ+c \to c=4$

$7=|a|+4 \to |a|=3$ نمودار سینوس بعد از صفر، به صورت صعودی است. پس: $a=3$

$y=3\sin 2x+4$

۹-
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2} \xrightarrow{\alpha=15^\circ} \cos^2 15^\circ=\frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

۱۰-
$$2\cos^2 x-9\cos x-5=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac=(-9)^2-4(2)(-5)=81+40=121$$

$$\cos x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{9\pm 11}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos=\frac{20}{4}=5 \text{ ، چون } -1\leq\cos x\leq 1 \text{ پس غیرقابل قبول است.} \\ \cos x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۱۱- الف) $\lim\limits_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim\limits_{x\to ۵}\frac{۴-x+۱}{(x-۵)\times ۴}=\lim\limits_{x\to ۵}\frac{-\cancel{(x-۵)}}{\cancel{(x-۵)}\times ۴}=-\frac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۳-۱۳x^۲+۲۴x-۹}=\lim\limits_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x-۲)}{\cancel{(x-۳)}(۲x^۲-۷x+۳)}=\frac{۱}{۰}=\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}=\frac{[\frac{۱}{۲}]-۳}{\left|۲(\frac{۱}{۲})-۱\right|}=\frac{۰-۳}{۰^+}=\frac{-۳}{۰^+}=-\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x=\tan\frac{\pi^-}{۲}=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x-\sqrt{۴x^۲+۱}}{۲x+\sqrt{۹x^۲+۸}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x-۲|x|}{۲x+۳|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲x}{۲x-۳x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x}{-x}=-۵$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^۲\sqrt{x}+۳)^۲}{(x^۲-۱)(x-۲)(x^۲-۳)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^۲.\sqrt{x})^۲}{(x^۲)(x)(x^۲)}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^۵}{x^۵}=۱$

۱۲- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۵}{۳+۲^{\tan x}}=\frac{۵}{۳+۲^{\tan\frac{\pi^+}{۲}}}=\frac{۵}{۳+۲^{-\infty}}=\frac{۵}{۳+۰}=\frac{۵}{۳}$

۱۳- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-۱$: یعنی $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به ۱- نزدیک کرد، مشروط بر آن‌که x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

۱۴- الف)

$f(x)=۲x^۲-۳x$

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'(۲)=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{۲x^۲-۳x-۲}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(۲x+۱)}{\cancel{x-۲}}=۵$

ب) $(۲,۲)\,,\,m_{\text{مماس}}=f'(۲)=۵\Rightarrow y-y_۰=m(x-x_۰)$

$y-۲=۵(x-۲)$

$y=۵x-۸$

۱۵- $f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\frac{۲x^۲+x}{x}-۱}{x}=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۲x\cancel{+۱}\cancel{-۱}}{x}=۲$

۱- الف) درست

ب) نادرست

$D_f=[۰\,,+\infty)\,,\ f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}} \rightarrow D_{f'}=(۰\,,+\infty)$

۲- الف) با توجه با اینکه $h(x)=(f(x))^۳$ بنابراین: $g(x)=x^۳$

ب)

$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۲-۳x}{-x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۲}{-x^۲}=-۵$

پ)

$(۲g-f)'(۲)=۲g'(۲)-f'(۲)=۲\times۵-۳=۷$

ت) کره توخالی (شعاع کره = شعاع دایره)

۳- الف) ابتدا باید دامنه هر کدام از توابع را به دست آوریم:

$D_g=R\ ,\ D_f=R-\{۰\}$

$D_{fog}=\{a\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid ۳x-۱\neq۰\}$

$۳x-۱=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{۳} \rightarrow D_{fog}=R-\left\{\frac{۱}{۳}\right\}$

ب) ابتدا باید $f^{-۱}(۵)$ را به دست آوریم:

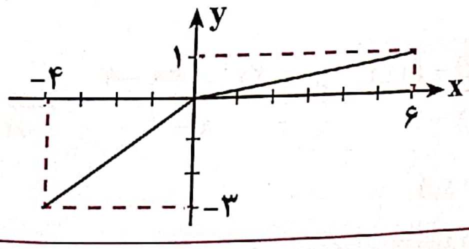
$۵=\frac{۱}{۸}x-۳ \rightarrow x=۶۴$

$(g^{-۱}of^{-۱})(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۶۴)\ ,\ ۶۴=x^۳ \rightarrow x=۴ \rightarrow (g^{-۱}of^{-۱})(۵)=۴$

۴- با توجه به شکل $D_f=[-۲\,,۳]$ ، دامنه $f(\frac{x}{۲})$ به صورت زیر مشخص می‌شود:

$-۲\leq\frac{x}{۲}\leq۳ \rightarrow -۴\leq x\leq۶$

x	-۴	۰	۶
y	-۳	۰	۱



۵- الف) دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin bx+c$ برابر است با:

$T=\frac{۲\pi}{|b|}\ ,\ \max=|a|+c\ ,\ \min=-|a|+c$

$T=\frac{۲\pi}{|۴|}=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \max y=|-۳|+۲=۵\ ,\ \min y=-|-۳|+۲=-۱$

ب) با توجه به این $\tan\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است:

$D_f=\{x \mid ۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\} \rightarrow D_f=\{x \mid x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\}$

۶- روش اول :

$$\sin x-(1-2\sin^2 x)=0 \rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

با تغییر متغیر $\sin x = t$ ، معادله فوق را به معادله درجه دوم $2t^2+t-1=0$ تبدیل می‌کنیم.

$$a=2\ ,\ b=1\ ,\ c=-1 \rightarrow \Delta=b^2-4ac=1^2-4(2)(-1)=9$$

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\times 2} \rightarrow t=-1\ ,\ t=\frac{1}{2}$$

$$\sin x=-1=\sin(-\frac{\pi}{2}) \rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}\ ,\ x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2} \qquad k\in z$$

$$\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\ ,\ x=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6} \qquad k\in z$$

روش دوم :

$$\cos 2x=\sin x \rightarrow \cos 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-x) \rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x \rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6} \qquad 2x=2k\pi-(\frac{\pi}{2}-x) \rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$$

۷- الف)

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]-3}{x-3}=\frac{2-3}{0^-}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

ب) صورت و مخرج کسر به ازای $x=3$ برابر صفرند. بنابراین صورت و مخرج را در عبارت $\sqrt{x+1}+2$ ضرب می‌کنیم تا مخرج کسر عبارتی گویا شود.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\cancel{x+1-4}}=6\times 4=24$$

۸- روش اول : ابتدا معادله خط مماس را می‌نویسیم. سپس طول نقاط B و C را در آن قرار داده و عرض آنها را به دست می‌آوریم.

$$m_{\text{مماس}}=f'(4)=1/5\ ,\ A(4\ ,\ 24) \rightarrow y-24=1/5(x-4)$$

$$x=5 \rightarrow y-24=1/5(5-4) \rightarrow y=25/5 \rightarrow B(5\ ,\ 25/5)$$

$$x=3 \rightarrow y-24=1/5(3-4) \rightarrow y=22/5 \rightarrow C(3\ ,\ 22/5)$$

روش دوم :

$$\text{شیب خط}=\frac{\text{تفریق عرض‌ها}}{\text{تفریق طول‌ها}} \xrightarrow{A(4\ ,\ 24)} 1/5=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$$

$$1/5=\frac{y_B-24}{5-4} \rightarrow y_B=25/5\ ,\ 1/5=\frac{y_C-24}{3-4} \rightarrow y_C=22/5$$

۹-

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \rightarrow f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{(1-2x^2)-(1-2(-1)^2)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2-2x^2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{x+1}}=2(1-(-1))=4$$

۱۰-

الف) $f'(x)=5(\frac{x}{2x-1})'(\frac{x}{2x-1})^{5-1}=5\times\frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2}(\frac{x}{2x-1})^4$

ب) $g'(x)=2x\sqrt{x+1}-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\times x^2$

-۱۱ $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(۴)-x(۳)}{۴-۳}=\frac{(\sqrt{۴}+۲\times ۴^{۳})-(\sqrt{۳}+۲\times ۳^{۳})}{۱}=۷۶-\sqrt{۳}$

-۱۲ الف) $f'(x)=۶x^{۲}+۶x-۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۶x^{۲}+۶x-۱۲=۰ \to x^{۲}+x-۲=۰ \to x=۱,-۲$

$f(۱)=-۷ , f(-۲)=۲۰$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	۲۰	$\searrow$	-۷	$\nearrow$	$+\infty$

ماکزیمم نسبی : $(-۲ , ۲۰)$

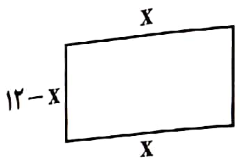
مینیمم نسبی : $(۱ , -۷)$

ب) $-۲\notin[-۱ , ۳] , ۱\in[-۱ , ۳] \to (۱ , -۷)$ نقطه بحرانی

$f(-۱)=-۲+۳+۱۲=۱۳ , f(۳)=۲\times ۳^{۳}+۳\times ۳^{۲}-۱۲\times ۳=۴۵$

ماکزیمم مطلق ۴۵ و مینیمم مطلق : ۷-

-۱۳ ابتدا باید مساحت مستطیل را با یک مجهول بنویسیم، سپس مشتق آن را برابر با صفر قرار دهیم.



محیط مستطیل = (طول + عرض) × ۲ $\to$ طول + عرض = ۱۲ $\xrightarrow{\text{طول}=x}$ عرض $=۱۲-x$

مساحت مستطیل : $s(x)=x(۱۲-x)=۱۲x-x^{۲} \to s'(x)=۱۲-۲x=۰ \to x=۶$

در واقع باید مربع باشد $\to$ عرض $=۱۲-۶=۶$

-۱۴

$۲a=۸ \to a=۴ , ۲b=۶ \to b=۳$

$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲} \to ۴^{۲}=۳^{۲}+c^{۲} \to c=\sqrt{۷}$

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

-۱۵

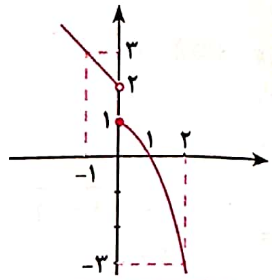
$x^{۲}+y^{۲}+ax+by+c=۰$
$x^{۲}+y^{۲}-۶x+۲y+۶=۰$ $\to a=-۶ , b=۲ , c=۶$

مرکز $(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$ ، شعاع $=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c} \to$ مرکز $(۳ , -۱)$ ، شعاع $=\frac{۱}{۲}\sqrt{(-۶)^{۲}+۲^{۲}-۴\times ۶}=۲$

-۱۶ در پرتاب سه سکه احتمال اینکه دقیقاً یک رو رخ دهد، $\frac{۳}{۸}=۳\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$ است.

احتمال اینکه دقیقاً یک رو ظاهر شود $= \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{سکه اول رو ظاهر شود}} + \underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{سکه اول پشت ظاهر شود}} \times \underbrace{\frac{۳}{۸}}_{\text{از سه سکه بعدی دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود}} = \frac{۱۱}{۱۶}$

۱-الف)

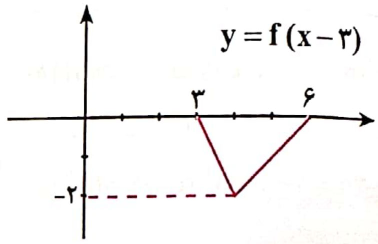


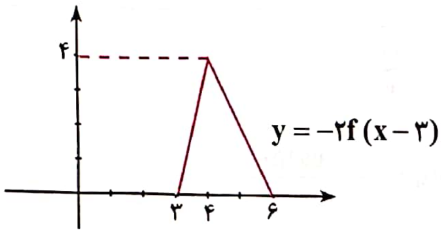
ب)

$-2<0 \rightarrow f(-2)=-(-2)+2=4$

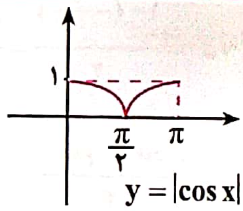
$f(f(-2))=f(4) \xrightarrow{4>0} 1-(4)^2=1-16=-15$

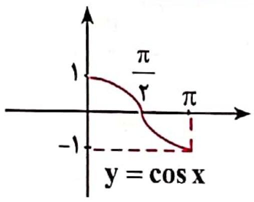
۲-الف) نمودار را سه واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم.   ب) عرض نقاط نمودار الف را در ۲- ضرب می‌کنیم.





۳-





x	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
y	۱	۰	-۱

۴-

$y_1=y_2 \rightarrow \frac{1}{x_1^3}=\frac{1}{x_2^3} \rightarrow x_1^3=x_2^3 \rightarrow x_1=x_2$ یک به یک است

$y=\frac{1}{x^3} \rightarrow x^3=\frac{1}{y} \rightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{y}} \rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

۵-

$(fog)(x)=f(g(x)) \rightarrow x^2-4x+5=(g(x))^2+2g(x)+2 \ , \ x^2-4x+5=(g(x))^2+2g(x)+1+1$

$x^2-4x+4=(g(x)+1)^2 \rightarrow (x-2)^2=(g(x)+1)^2 \rightarrow$

$|g(x)+1|=|x-2| \rightarrow g(x)+1=\pm|x-2| \rightarrow g(x)=-1\pm|x-2|$

۶-

الف) $D_f=R$

$x+1\geq 0 \rightarrow x\geq -1 \rightarrow D_g=[-1\ ,+\infty)$

$x-2\geq -1 \rightarrow x\geq 1 \rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in R \mid x-2\in[-1\ ,+\infty]\} \rightarrow D_{gof}=[1\ ,+\infty)$

ب) $(fof)(x)=f(f(x))=f(x-2)=(x-2)-2=x-4$

۷-
$$2\sin^2 5x-\sin 5x-1=0$$

$$\sin 5x=\frac{+1\pm\sqrt{1-4\times 2\times -1}}{2\times 2}=\frac{1\pm 3}{4}\begin{cases}\sin 5x=1 \to 5x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\to x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\\ \sin 5x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6})\to 5x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\to x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{30}\\ \qquad 5x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6}\to x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{7\pi}{30}\end{cases}$$

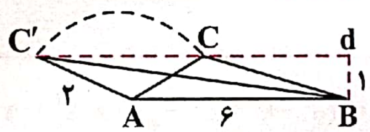
۸-
$$2\times 75=150\ ,\ \cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\ \to\ \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\ \to\ \sin^2 75^\circ=\frac{1-\cos 150^\circ}{2}$$

$$\sin^2 75^\circ=\frac{1-(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\ \to\ \sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

۹- روش اول :

$$\text{مساحت}=\frac{\text{قاعده}\times\text{ارتفاع}}{2}$$



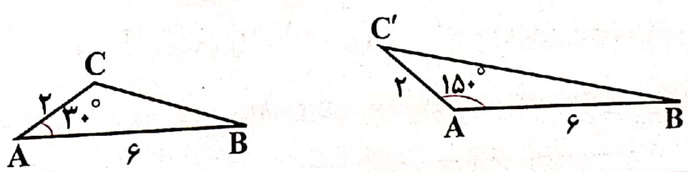
$$\text{قاعده}=6\ \to\ 3=\frac{6\times\text{ارتفاع}}{2}\ \to\ \text{ارتفاع}=1$$

به مرکز A و به شعاع ۲ کمان می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه C , C′ قطع کند دو مثلث ACB و AC′B جواب‌اند.

روش دوم :

$$s=\frac{1}{2}bc\sin A\ \to\ 3=\frac{1}{2}\times 2\times 6\sin A\ \to\ \sin A=\frac{1}{2}$$

$A=30^\circ$ یا 150°

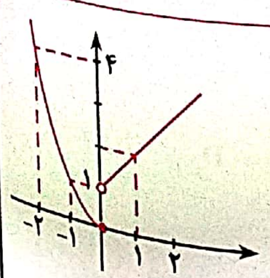


۱۰- تابع حد ندارد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=1\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

x	۰	۱
y	۱	۲

x	-۲	-۱	۰
y	۴	۱	۰



-۱۱

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x + 1 & x-1 \\ \hline -(x^4 - x^3) & x^3+x^2+x-1 \\ x^3 - 2x + 1 & \\ -(x^3 - x^2) & \\ x^2 - 2x + 1 & \\ -(x^2 - x) & \\ -x + 1 & \\ -(-x+1) & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

الف) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x-1)}{(x-1)(2x-1)} = \frac{2}{1} = 2$

ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-3}{\sqrt{x}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = \frac{-2}{3}$

ت) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{0}{x-2} = 0$

$[2^-] = 1$

-۱۲-روش اول : مشتق می‌گیریم $f'(x) = \begin{cases} 2 & x<3 \\ 3 & x>3 \end{cases}$ مشتق‌پذیر نیست $f'_-(3) \neq f'_+(3)$

روش دوم :

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 3^-} \frac{(2x+5)-11}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2x-6}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x+2-11}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3x-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{3(x-3)}{x-3} = 3$$

-۱۳

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1-0}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

-۱۴

الف) $f' = 3x^2(2x-5) + 2x^3$

ب) $h' = \frac{1(3x+1)-3(x-2)}{(3x+1)^2} = \frac{7}{(3x+1)^2}$

-۱۵

$x = 2 \rightarrow y = 2^2 + 3\times 2 - 1 = 9 \rightarrow (2, 9)$

$y' = 2x + 3 \xrightarrow{x=2} m_{\text{مماس}} = 7$

$y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 9 = 7(x-2) \rightarrow y = 7x - 5$

-۱
$f(g(x)) = ۲(g(x))^۲ - ۲$

$۲(g(x))^۲ - ۲ = ۲x^۲ + ۴x \to ۲(g(x))^۲ = ۲x^۲ + ۴x + ۲ \to (g(x))^۲ = x^۲ + ۲x + ۱$

$(g(x))^۲ = (x+۱)^۲ \to |g(x)| = |x+۱| \to g(x) = |x+۱| \;,\; g(x) = -|x+۱|$

-۲
$۲(۱-\cos^۲ x) + ۹\cos x + ۳ = ۰ \to ۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰$

$\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{b^۲ - ۴ac}}{۲a} \to \cos x = \frac{+۹ \pm \sqrt{۸۱ - ۴\times۲\times-۵}}{۲\times۲} = \frac{+۹\pm۱۱}{۴}$

$\cos x = ۵$ غ ق ق $\;,\; \cos x = -\frac{۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳} \to \begin{cases} x_۱ = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \\ x_۲ = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$

-۳
$۲\times۷۵ = ۱۵۰ \;,\; \cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ \to \cos^۲\alpha = \frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \to \cos^۲ ۷۵^\circ = \frac{۱+\cos ۱۵۰^\circ}{۲}$

$\cos^۲ ۷۵^\circ = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۳}}{۴} \to \cos ۷۵^\circ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$

-۴
الف) $\lim\limits_{x\to۱} \frac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \lim\limits_{x\to۱} \frac{\cancel{(x-۱)}}{۲\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)} = \frac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۲x^۲}{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-۲x) = -\infty$

-۵
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_۱ + \Delta x) - f(x_۱)}{\Delta x} = \frac{(۲/۳)^۲ + ۳ - (۲^۲ + ۳)}{۰/۳} = \frac{۸/۲۹ - ۷}{۰/۳} = ۴/۳$

-۶
تابع باید پیوسته باشد

$\lim\limits_{x\to۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^+} x^۳ = ۱ \;,\; f(۱) = ۱ \;,\; \lim\limits_{x\to۱^-} (ax^۲ + bx + ۲) = a + b + ۲$

$a + b + ۲ = ۱ \to a + b = -۱$

$f'(x) = \begin{cases} ۲ax + b & x < ۱ \\ ۳x^۲ & x > ۱ \end{cases}$

$f'_-(۱) = f'_+(۱) \to ۲a + b = ۳$

$-\begin{cases} a + b = -۱ \\ ۲a + b = ۳ \end{cases} \to ۲a - a = ۴$

$a = ۴ \;,\; b = -۵$

۷-

$$y' = ۳x^۲ + ۲ax \xrightarrow{x=۲} ۱۲+۴a=۰ \to a=-۳$$

$$(۱,-۱) \to y = x^۳+ax^۲+b \to -۱=۱+a+b \to a+b=-۲ \to -۳+b=-۲ \to b=۱$$

۸-

$$y'=۶x-۳x^۲ \xrightarrow{y'=۰} ۶x-۳x^۲=۰ \to ۳x(۲-x)=۰ \to x=۰\,,۲$$

$f(-۱)=۳(-۱)^۲-(-۱)^۳=۴\,,\ f(۰)=۰\,,\ f(۲)=۳\times ۲^۲-۲^۳=۴$ ماکزیمم مطلق تابع در این بازه ۴ می‌باشد.

۹- الف) فرض کنیم $c\in D_f$ و f در یک همسایگی از c تعریف شده باشد. نقطه به طول c را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ب) $D_f=[-۲\,,۲]\quad f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}} \xrightarrow[x=۰]{f'(x)=۰} f'(۲)\,,\ f'(۲)$ وجود ندارد

۱۰-

$$x+y=۸ \to y=۸-x$$

$$p=xy \to p=x(۸-x)=-x^۲+۸x \to p'=-۲x+۸ \to -۲x+۸=۰ \to x=۴$$

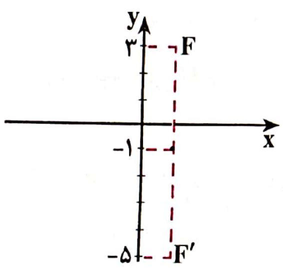
$$p_{max}=۴(۸-۴)=۱۶$$

۱۱-

$o_۱(۰\,,۱)\,,\ R_۱=۳ \qquad d=o_۱o_۲=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۱+۱)^۲}=۲\sqrt{۲}$

$o_۲(۲\,,-۱)\,,\ R_۲=۲ \qquad |R_۱-R_۲|<d<R_۱+R_۲$ دو دایره متقاطع هستند

۱۲-



فاصله کانونی $=FF'=\sqrt{(۱-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=۸$

مرکز بیضی $(\frac{۱+۱}{۲}\,,\ \frac{-۵+۳}{۲}) \to$ مرکز بیضی $(۱\,,-۱)$

با توجه به این‌که قطر بزرگ در امتداد $F'F$ و قطر کوچک در مرکز بیضی بر قطر بزرگ عمود است :

$y=-۱$: معادله قطر کوچک ، $x=۱$: معادله قطر بزرگ

۱۳- فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن برابر است با شعاع دایره

$$r=d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳\times۱+۴\times۲+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \to \begin{cases}\alpha=۱\\ \beta=۲\end{cases} \to (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۹$$

۱۴-

$$P(B)=P(A_۱)\times P(B|A_۱)+P(A_۲)\times P(B|A_۲)=\frac{۶۵}{۱۰۰}\times\frac{۵۶}{۱۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰}\times\frac{۴۴}{۱۰۰}=۰/۵۲$$

۱۵-

$$P(B)=P(A_۱)\times P(B|A_۱)+P(A_۲)\times P(B|A_۲)=\frac{۱}{۲}(۱-۰/۱۲)+\frac{۱}{۲}(۱-۰/۰۹)=۰/۸۹۵$$

-۱

$$(fog)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x-3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{x-3}}+3=x-3+3=x \to (fog)(x)=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+3\right)-3}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x \to (gof)(x)=x$$

این دو تابع وارون یکدیگرند.

-۲

$$1-\cos^2 x=\cos^2 x+1 \to 2\cos^2 x=0 \to \cos x=0 \to x=k\pi+\frac{\pi}{2}$$

-۳

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \to T=\frac{2\pi}{3}$$

ماکزیمم تابع $=\left|-\frac{3}{4}\right|+1=\frac{7}{4}$ ، مینیمم تابع $=-\left|-\frac{3}{4}\right|+1=\frac{1}{4}$

-۴

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(1-x)\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}(x+5)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x}{x+5}=\dfrac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|}{2x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

-۵

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2/2)-f(2)}{2/2-2}=\frac{\frac{1}{2}(2/2)^2-\frac{1}{2}(2)^2}{0/2}=\frac{0/42}{0/2}=2/1$$

-۶ شرط پیوستگی تابع :

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1) \to (-1)^2-2(-1)=a(-1)^2+b(-1) \to -1=a+b$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x<1\\ 2x-2 & x>1\end{cases} \to \begin{matrix}f'_-(1)=2a+b\\ f'_+(1)=0\end{matrix} \to 2a+b=0$$

$$-\begin{cases}a+b=-1\\ 2a+b=0\end{cases} \to 2a-a=1 \to a=1\,,\, b=-2$$

-۷ هرگاه بخواهیم بیشترین یا کمترین مقدار یک کمیت را حساب کنیم، ابتدا آن کمیت را برحسب یک مجهول می‌نویسیم سپس مشتق آن را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

$$x+y=16 \to y=16-x$$

$$p=xy \to p=x(16-x) \to p=16x-x^2 \to p'=16-2x \to 16-2x=0 \to x=8$$

$$p=8(16-8)=64$$

-۸

$$f(-2)=(-2+1)^{\frac{2}{3}}=1\ ,\ f(1)=(1+1)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{4}$$

$$y'=\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

$$y=(x+1)^{\frac{2}{3}} \to y=\sqrt[3]{(x+1)^2} \xrightarrow{(x+1)^2\geq 0} \min_y=0\ ,\ \max_y=\sqrt[3]{4}$$

-۹

$(۱,۲) \rightarrow y=x^۳+ax^۲+b \rightarrow ۲=۱^۳+a+b \rightarrow a+b=۱$

$y'=۳x^۲+۲ax \rightarrow y'=۰ \rightarrow ۳x^۲+۲ax=۰ \xrightarrow{x=۱} ۳+۲a=۰ \rightarrow a=\frac{-۳}{۲}$

$a+b=۱ \rightarrow -\frac{۳}{۲}+b=۱ \rightarrow b=\frac{۵}{۳}$

-۱۰

$x^۲+y^۲+۴x+۲y-۲۰-(x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲۴)=۰ \rightarrow ۲x+۴=۰ \rightarrow x=-۲$

$x=-۲ \rightarrow x^۲+y^۲+۲x+۲y-۲۴=۰ \rightarrow y^۲+۲y-۲۴=۰ \rightarrow (y-۴)(y+۶)=۰ \rightarrow y=۴\ ,\ y=-۶$

نقاط تقاطع $(-۲,۴)\ ,\ (-۲,-۶)$

-۱۱

فاصله کانونی $=FF'=\sqrt{(۱-۱)^۲+(-۵-۳)^۲}=۸ \rightarrow ۲c=۸ \rightarrow c=۴$

$e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\ ,\ a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۶^۲=b^۲+۴^۲ \rightarrow b=۲\sqrt{۵} \rightarrow ۴\sqrt{۵}$ قطر کوچک

-۱۲ فاصله مرکز دایره از خط مماس بر آن = شعاع دایره

$r=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳\times۱+(-۴)\times۰+۷|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$

$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲ \rightarrow (x-۱)^۲+y^۲=۴$

-۱۳

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \rightarrow \frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۵}-P(A\cap B) \rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۵}{۶}$

-۱۴ الف)

B: پیشامد آن که مهره خارج شده سفید باشد.

$A_۱$: پیشامد آن که ظرف اول انتخاب شود.

$A_۲$: پیشامد آن که ظرف دوم انتخاب شود.

$A_۳$: پیشامد آن که ظرف سوم انتخاب شود.

$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)$

$P(A)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۵}+\frac{۱}{۳}\times۱=\frac{۲۹}{۴۵}$

ب)

$P(B|A_۱)=\frac{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۹}}{\frac{۲۹}{۴۵}}=\frac{۵}{۲۹}$

۱- $x+2\geq 0 \rightarrow x\geq -2 \rightarrow D_f=[-2,+\infty)$ $\quad D_g=R$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in R \mid 2x^2+1\geq -2\} \xrightarrow{\text{همواره برقرار است } 2x^2+1\geq -2} D_{fog}=R$

۲- $x-1<2<2x+3 \rightarrow \begin{cases} x-1<2 \rightarrow x<3 \\ 2<2x+3 \rightarrow x>-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow (x<3)\cap(x>-\frac{1}{2}) \rightarrow -\frac{1}{2}<x<3$

۳- الف) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}\times\frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x^2-9)\times(\sqrt{3x-5}+2)}{3x-5-4}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3}=\frac{6\times 4}{3}=8$

ب) $\lim\limits_{x\to -1}=\frac{(x+1)(x-2)}{3x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x-2)}{3x}=\frac{-1-2}{3(-1)}=1$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2\times 1-1}{[2^+]}=\frac{1}{2}$

ت) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-5x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to -\infty}(-5x^2)=-\infty$

۴- اولاً $\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{6-0}{5-3}=3$ $\qquad x=t^2-5t+6$

ثانیاً $x'=2t-5 \xrightarrow{t=2} 2(2)-5=-1 \rightarrow x'=-1$ $\qquad t_1=3 \rightarrow x_1=9-15+6 \Rightarrow x_1=0$

$t_2=5 \rightarrow x_2=25-25+6=6$

۵-

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{|x^2-2x|-0}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-2x}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}=2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\frac{-(x^2-2x)}{x-2}=\frac{-x(x-2)}{x-2}=-2\end{cases}$

$f(2)=|2^2-2\times 2|=0$

چون مشتق چپ با مشتق راست برابر نشد پس: تابع در $x=2$ مشتق ندارد.

معادلات نیم‌مماس‌ها:

$y-0=2(x-2) \rightarrow y=2x-4$

$y-0=-2(x-2) \rightarrow y=-2x+4$

۶- ماکزیمم تابع ۴- و مینیمم آن ۹- است.

$y'=6x^2-6x \rightarrow y'=0 \rightarrow x=0\,,\,x=1$ نقاط بحرانی

$f(-1)=-9 \qquad f(1)=-5\,,\,f(0)=-4$

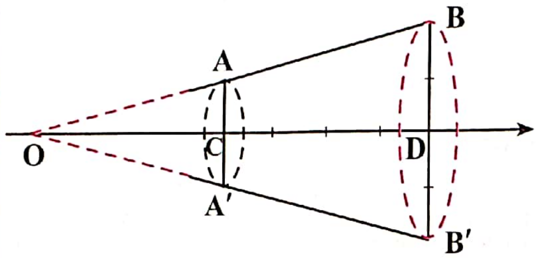
۷- $(1,2) \rightarrow y=ax^3+bx^2 \rightarrow 2=a(1)^3+b(1)^3 \rightarrow a+b=2$

$y'=3ax^2+2bx \xrightarrow{y'=0} 3a+1^2+2b\times 1=0 \rightarrow 3a+2b=0$

$-2\begin{cases}a+b=2\\3a+2b=0\end{cases} \rightarrow 3a-2a=-4 \rightarrow a=-4\,,\,b=6$

۸- الف) شکل حاصل یک مخروط ناقص است.

$h=$ ارتفاع، $r=$ شعاع قاعده، حجم مخروط $=\frac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$



$$\frac{OC}{OD}=\frac{AC}{BD}\rightarrow\frac{OC}{OC+۴}=\frac{۱}{۲}\rightarrow OC=۴$$

حجم مخروط کوچک $=\frac{۱}{۳}\pi\times۱^{۲}\times۴=\frac{۴\pi}{۳}$

حجم مخروط بزرگ $=\frac{۱}{۳}\pi\times۲^{۲}\times۸=\frac{۳۲\pi}{۳}$

حجم مخروط ناقص $=\frac{۳۲\pi}{۳}-\frac{۴\pi}{۳}=\frac{۲۸\pi}{۳}$

ب) ذوزنقه $ABB'A'$ ارتفاع × مجموع دو قاعده $\frac{۱}{۲}=$ مساحت ذوزنقه

$$=\frac{۱}{۲}(۲+۴)\times۴=۱۲$$

۹- $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}\rightarrow ۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۱۶-۴k}\rightarrow k=\frac{۹}{۴}$

۱۰-

$$\sin ۲x=-\sin x=\sin(-x)$$

$$۲x=۲k\pi+(-x)\rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-(-x)\rightarrow x=۲k\pi+\pi$$

۱۱-

قطر بزرگ $=AA'=\sqrt{(۱-۱)^{۲}+(-۶-۴)^{۲}}=۱۰\rightarrow ۲a=۱۰\rightarrow a=۵$

قطر کوچک $=BB'=\sqrt{(-۳-۵)^{۲}+(۱-۱)^{۲}}=۸\rightarrow ۲b=۸\rightarrow b=۴$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow ۵^{۲}=۴^{۲}+c^{۲}\rightarrow c=۳\rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$$

۱۲- $(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=r^{۲}\rightarrow x^{۲}+y^{۲}=\frac{۱}{۲۵}$

$$r=d=\frac{|ax_{۰}+by_{۰}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}\rightarrow\frac{|۳\times۰-۴\times۰+۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱}{۵}$$

۱۳- $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱}{۶}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۴- B: همرنگ بودن

$A_{۱}$: سفید بودن مهره اول

$A_{۲}$: سیاه بودن مهره دوم

$$P(B)=P(A_{۱})P(B|A_{۱})+P(A_{۲})P(B|A_{۲})$$

$$=\frac{۴}{۷}\times\frac{۳}{۶}+\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}=\frac{۳}{۷}$$

۱- الف) $D_f = R-\{0\}$

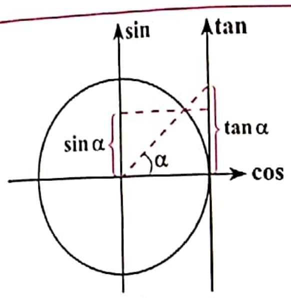
$D_g = R-\{1\}$

ب) $D_{fog}=\left\{x\in R-\{1\} \,\middle|\, \frac{x+2}{x-1}\neq 0\right\} \to x+2=0 \to x=-2 \to D_{fog}=R-\{1,-2\}$

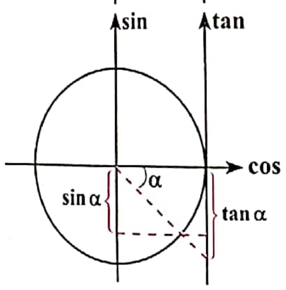
$fog=\dfrac{1}{\frac{x+2}{x-1}}=\dfrac{x-1}{x+2}$

۲-
$$\sin x(2\sin x-1)=0 \to \begin{cases} \sin x=0 \to x=k\pi \\ 2\sin x-1=0 \to \sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6} \to \begin{cases} x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\end{cases}$$

۳- الف) $\sin\alpha < \tan\alpha$



ب) هر دو منفی‌اند. $\tan\alpha < \sin\alpha$



۴-
$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x + 4 & x+1 \\ \hline -(x^3+x^2) & x^2-x+4 \\ -x^2+3x & \\ -(-x^2-x) & \\ 4x+4 & \\ -(4x+4) & \\ 0 & \end{array}$$

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2-x+4)\cancel{(x+1)}}{2\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{-3}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{2\sin^2(\frac{x}{2})}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin x\cos x)^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos^2 x(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos^2 x\times 4\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}\times\cos^2\frac{x}{2}}{\cancel{\sin^2\frac{x}{2}}}=8$$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x}{2x+|x|}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x}{3x}=1$

۵- مشتق‌پذیر نیست

$D_f:[1,+\infty)$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty$$

۶-
$y=x^{۴}-۸x^{۲}+۱۶$ $\qquad y'=۴x^{۳}-۱۶x \to y'=۰ \to ۴x(x^{۲}-۴)=۰ \to x=۰\,,\,۲\,,\,-۲$

$f(-۱)=۹\,,\,f(۴)=۱۴۴\,,\,f(۰)=۱۶\,,\,f(۲)=۰\,,\,-۲\notin[-۱\,,\,۴]$

$x=-۱ \to y=۹$

$x=۴ \to y=۱۴۴$

بیشترین مقدار تابع ۱۴۴ و کمترین آن ۹ است.

۷-
نقاط بحرانی $\sqrt{۴-x^{۲}}=۰ \to x=\pm ۲$ $\qquad ۴-x^{۲}\geq ۰ \to x^{۲}\leq ۴ \to -۲\leq x\leq ۲ \to D_f=[-۲\,,\,۲]$

نقاط بحرانی $y'=۱\times\sqrt{۴-x^{۲}}+x\times\dfrac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^{۲}}}=\dfrac{۴-۲x^{۲}}{\sqrt{۴-x^{۲}}} \to y'=۰ \to ۴-۲x^{۲}=۰ \to x^{۲}=۲ \to x=\pm\sqrt{۲}$

۸-
$x+y=۱۸ \to y=۱۸-x$ $\qquad P'=-۲x+۱۸ \to P'=۰ \to x=۹ \to p=۹(۱۸-۹)=۸۱$

$P=x.y \to p=x(۱۸-x)=-x^{۲}+۱۸x$

۹-
$O(\dfrac{-a}{۲}\,,\,\dfrac{-b}{۲}) \to (\dfrac{۲}{۲}\,,\,\dfrac{۶}{۲})=(۱\,,\,۳)$

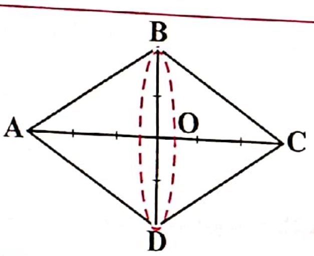
$r=\dfrac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c} \to ۲=\dfrac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^{۲}+(-۶)^{۲}-۴f}$

$۴=\sqrt{۴۰-۴f} \to ۱۶=۴۰-۴f \to f=۶$

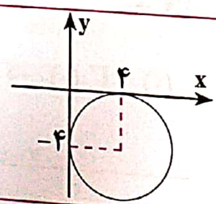
۱۰- شکل حاصل دو مخروط است که در قاعده به هم چسبیده‌اند.

$h=\dfrac{۶}{۲}=۳$ = ارتفاع، $r=\dfrac{۴}{۲}=۲$ = شعاع قاعده، $\dfrac{۱}{۳}\pi r^{۲}h$ = حجم مخروط

$۲\times\dfrac{۱}{۳}\pi\times ۲^{۲}\times ۳=۸\pi$ = حجم شکل



۱۱- با توجه به شکل:



$r=\dfrac{۸}{۲}=۴$ $\quad$ مرکز $(۴\,,\,-۴)$

$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=r^{۲} \to (x-۴)^{۲}+(y+۴)^{۲}=۱۶$

۱۲-
$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \to \dfrac{۱}{۴}=\dfrac{۳}{۴}-p(A\cap B) \to P(A\cap B)=\dfrac{۳}{۴}-\dfrac{۱}{۴}=\dfrac{۱}{۲}$

$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\dfrac{۲}{۳}$

۱۳- الف)
$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)=\dfrac{۸۰۰}{۱۲۰۰}\times\dfrac{۴۰}{۱۰۰}+\dfrac{۴۰۰}{۱۲۰۰}\times\dfrac{۳۰}{۱۰۰}=\dfrac{۱۱}{۳۰}$

B: پیشامد آن که دانش‌آموز انتخاب شده در کنکور قبول شود.

$A_۱$: پیشامد آن که دانش‌آموز پسر انتخاب شود.

$A_۲$: پیشامد آن که دانش‌آموز دختر انتخاب شود.

ب)
$P(B|A_۱)=\dfrac{\frac{۸۰۰}{۱۲۰۰}\times\frac{۴۰}{۱۰۰}}{\frac{۱۱}{۳۰}}=\dfrac{۸}{۱۱}$

۱- $y=(x-۵)^۲ \to \sqrt{y}=|x-۵| \xrightarrow{x\ge ۵} \sqrt{y}=x-۵ \to x=\sqrt{y}+۵ \to f^{-۱}(x)=\sqrt{x}+۵$

۲- $۲\sin x\cos x-\sqrt{۳}\cos x=۰ \to \cos x(۲\sin x-\sqrt{۳})=۰ \to \cos x=۰ \to x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$

$۲\sin x-\sqrt{۳}=۰ \qquad \sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳} \to x_۱=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\ ,\ x_۲=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$

۳- $y=x^۲-۴x+۵ \to y=(x-۲)^۲-۴+۵=(x-۲)^۲+۱ \xrightarrow{(x-۲)^۲\ge ۰} R_f=[۱\ ,+\infty)$

$y-۱=(x-۲)^۲ \to \sqrt{y-۱}=|x-۲|$

$x-۲\ge ۰ \to x\ge ۲ \to D_f=[۲\ ,+\infty)$ (می‌توانستیم $x\le ۲$ را نیز انتخاب کنیم.)

$\sqrt{y-۱}=x-۲ \to x=۲+\sqrt{y-۱} \to f^{-۱}(x)=۲+\sqrt{x-۱}$

۴- الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۱)}{\sqrt{x}-۲}\times\frac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+۱)(\sqrt{x}+۲)}{x-۴}=۲۰$

ب) $\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\sqrt{۲\sin^۲ x}}{۲\sin x}=\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\sqrt{۲}|\sin x|}{-۲\sin x}\xrightarrow{\text{سینوس در ناحیه دوم مثبت است}}\lim\limits_{x\to \pi^-}\frac{\sqrt{۲}\sin x}{۲\sin x}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{۲x^۲}{x^۲}=۲$

۵- تابع باید پیوسته باشد:

$\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=f(۰) \to \lim\limits_{x\to ۰^+}(x^۲+۲x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(ax+b) \to b=۰$

$f'(x)=\begin{cases}۲x+۲ & x>۰\\ a & x<۰\end{cases} \to f'_+(۰)=f'_-(۰) \to ۰+۲=a \to a=۲$

۶- نقطه $c\in D_f$ را نقطه بحرانی گویند هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

$y=\frac{x^۲+۱}{x}$

$y'=\frac{۲x^۲-(x^۲+۱)}{x^۲}=\frac{x^۲-۱}{x^۲} \to y'=۰ \to x^۲-۱=۰ \to x=\pm ۱$ نقاط بحرانی

۷- $y=\frac{۱}{۱+x^۲} \to y'=\frac{-۲x}{(۱+x^۲)^۲} \xrightarrow{y'=۰} x=۰$ $\quad f(-۱)=\frac{۱}{۲}$ مطلق min $\quad f(۰)=۱$ مطلق max $\quad f(\frac{۱}{۲})=\frac{۴}{۵}$

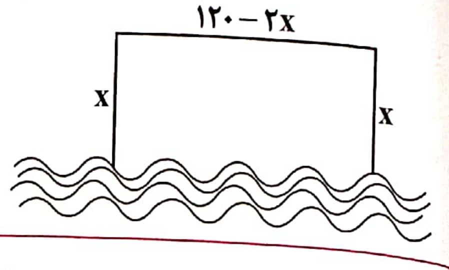
۸- $(-۱\ ,۳) \to y=۲ax^۳-bx^۲ \to ۳=۲a(-۱)^۳-b(-۱)^۲ \to ۲a+b=-۳$

$y'=۶ax^۲-۲bx$

$y''=۱۲ax-۲b \to ۱۲a(-۱)-۲b=۰ \to -۱۲a-۲b=۰$

$۲\left|\begin{array}{l}۲a+b=-۳\\ -۱۲a-۲b=۰\end{array}\right. \to -۱۲a+۴a=-۶ \to a=\frac{۳}{۴}\ ,\ b=-\frac{۹}{۲}$

۹-



$\text{طول} = ۱۲۰ - ۲x$

$s = x(۱۲۰ - ۲x) = -۲x^۲ + ۱۲۰x$

$s' = -۴x + ۱۲۰ \to s' = ۰ \to -۴x + ۱۲۰ = ۰ \to x = ۳۰$

$s = ۳۰(۱۲۰ - ۲\times ۳۰) = ۱۸۰۰m^۲$

۱۰-

$x^۲ + y^۲ + ۲x + ۲y - ۱ = ۰$

$C(\frac{-a}{۲}, \frac{-b}{۲}) \Rightarrow C(\frac{-۲}{۲}, \frac{-۲}{۲}) = (-۱, -۱)$

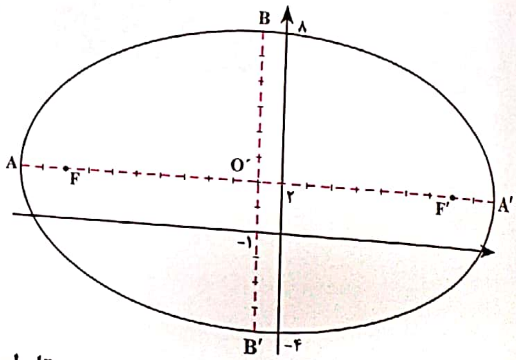
$r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} \to r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ + ۲^۲ - ۴(-۱)} \to r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۲} = \sqrt{۳}$

۱۱-

$BB' = \sqrt{(-۱-(-۱))^۲ + (۸-(-۴))^۲} = ۱۲ \to ۲b = ۱۲ \to b = ۶$

$e = \frac{c}{a} \to \frac{۸}{۱۰} = \frac{c}{a} \to c = \frac{۴}{۵}a \, , \, a^۲ = b^۲ + c^۲ \to a^۲ = ۳۶ + \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ \to a = ۱۰ \to c = \frac{۴}{۵}\times ۱۰ = ۸$

با توجه به اینکه مرکز بیضی، وسط قطرها و کانون‌ها است، شکل می‌کشیم و مختصات دو سر قطر بزرگ و کانون‌ها را به راحتی به دست می‌آوریم.



مرکز بیضی: $\frac{-۱+(-۱)}{۲} = -۱ \, , \, \frac{۸+(-۴)}{۲} = ۲ \to O'(-۱, ۲)$

از نقطه O'، ۱۰ واحد به چپ و ۱۰ واحد به راست می‌رویم تا طول نقاط A و A' مشخص شود.

$x_A = -۱ - ۱۰ = -۱۱$

$x_{A'} = -۱ + ۱۰ = ۹$

هم‌چنین ۸ واحد به چپ و راست می‌رویم تا طول نقاط F و F' به دست آید.

$x_F = -۱ - ۸ = -۹$

$x_{F'} = -۱ + ۸ = ۷$

با توجه به شکل بدیهی است که عرض این نقاط ۲ است. بنابراین:

$A(-۱۱, ۲) \, , \, A'(۹, ۲) \, , \, F(-۹, ۲) \, , \, F'(۷, ۲)$

۱۲-

فرض $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ $\quad A\begin{vmatrix} -۱ \\ ۰ \end{vmatrix} \, , \, B\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰ \end{vmatrix}$

$MA^۲ + MB^۲ = ۴$

$(x+۱)^۲ + y^۲ + (x-۱)^۲ + y^۲ = ۴ \to ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ = ۴$

$x^۲ + y^۲ = ۱$ دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱

۱۳-

$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap A')}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۱ - P(A|B)$

۱۴- الف)

$P(B) = P(A_۱)P(B|A_۱) + P(A_۲)P(B|A_۲)$

$P(A) = ۰/۵۶ \times ۰/۷۵ + ۰/۴۴ \times ۰/۶۵ = ۰/۷۰۵$

B: پیشامد آن که شرکت کننده در کنکور قبول شود.

$A_۱$: پیشامد آن که شرکت کننده دختر باشد.

$A_۲$: پیشامد آن که شرکت کننده پسر باشد.

ب)

$P(B|A_۱) = \frac{۰/۵۶ \times ۰/۷۵}{۰/۷۰۶} = ۰/۶$

یادداشت

آزمون شماره (۱)

آزمون شماره (۲)

پاسخ آزمون شماره (۱)

پاسخ آزمون شماره (۲)