باسمه تعالی

فصل دوم : نظریه ی اعداد

الف : کلیات و تقسیم پذیری

۱ : عدد شش رقمی $\overline{۵a۷b۲۴}$ بر عدد ۴۴ تقسیمپذیر است. باقی مانده ی تقسیم آن عدد بر ۹ کدام است؟ (کنکور۱۳۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: اگر این عدد بر ۴۴ بخشپذیر باشد، پس بر ۴ و ۱۱ نیز بخش پذیر می باشد.

دو رقم سمت راست یعنی (۲۴) بر ۴ بخش است. $\rightarrow$ عدد داده شده بر ۴ بخش پذیر است.

عدد داده شده بر ۱۱ بخش پذیر است. $\rightarrow -۵+a-۷+b-۲+۴=۰ \rightarrow a+b=۱۰$

می دانیم که باقی مانده ی تقسیم عد بر ۹ با مجموع ارقام آن عدد برابر است. لذا

$$۵+a+۷+b+۲+۴=۹k \rightarrow a+b=۹k-۱۸=۹k'$$

یعنی باید باقی مانده ی تقسیم $a+b=۱۰$ بر ۹ را تعیین کرد. لذا $r=۱$ باشد.

***

۲ : عدد شش رقمی $\overline{a۶۳b۲۹}$ بر عدد ۹۹ بخشپذیر است. رقم a کدام است؟ (کنکور۱۳۸۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: اگر این عدد بر ۹۹ بخشپذیر باشد، پس بر ۹ و ۱۱ نیز بخش پذیر می باشد.

عدد داده شده بر ۹ بخش پذیر است. $\rightarrow a+۶+۳+b+۲+۹=۹k \rightarrow a+b=۷ \ \ or \ \ ۱۶$

عدد داده شده بر ۱۱ بخش پذیر است. $\rightarrow -a+۶-۳+b-۲+۹=-a+b+۱۰=۱۱k'$

$$\rightarrow -a+b-۱=۱۱k'-۱۱ \rightarrow -a+b-۱=۰ \rightarrow -a+b=۱$$

در نهایت داریم:

$$\begin{cases} a+b=۷ \\ -a+b=۱ \end{cases} \rightarrow a=۳$$

***

۳ : در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقی مانده ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است، بزرگترین مقدار a مضرب کدام عدد است؟ (کنکور۱۳۸۴)

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

حل: اگر در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ خارج قسمت q و باقی مانده r باشد.

$$a = ۳۷q + r \quad ; \quad r < ۳۷$$

بنا به فرض پرسش $r = q^{۲} - ۲$ پس می توان نوشت.

$$q^{۲} - ۲ < ۳۷ \rightarrow q^{۲} < ۳۳۹ \rightarrow q \leq ۶$$

بزرگترین مقدار a وقتی قابل قبول است که $q = ۶$ پس :

$$a = ۳۷ \times ۶ + (۳۶ - ۱) \rightarrow a = ۲۵۶$$

که مضرب ۱۶ می باشد.

***

۴ : به ازای کدام مقدار n مجموع ارقام عدد $۱۰^{۳n} - ۱۰^{n}$ برابر ۲۱۶ می شود.

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

حل : عدد را به شکل زیر می نویسیم.

$$۱۰^{۳n} - ۱۰^{n} = ۱۰^{n}(۱۰^{۲n} - ۱)$$

اگر عدد در ۱۰^{n} ضرب شود، در مجموع ارقام ان عدد تأثیری ندارد.پس می توانیم بیان کنیم که مجموع ارقام عدد $۱۰^{۲n} - ۱$ برابر ۲۱۶ است؟ اگر از عدد $۱۰^{۲n}$ یک واحد کم شود، از تعداد ارقام آن نیز یک واحد کم می شود. پس از تمام $۲n$ رقم این عدد ۹ می شود.

$$۱۰۰ \;\; ...... \;\; ۰۰ - ۱ = ۹۹ \;\; .... \;\; ۹۹$$

پس خواهیم داشت :

$$۲n \times ۹ = ۲۱۶ \rightarrow n = ۱۲$$

***

۵ : در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b، خارج قسمت مجذور باقی مانده است.چند عدد b می توان یافت؟ (کنکور ۱۳۸۷)

۱(۱ ۲(۲ ۳(۴(۴

حل :

$$۱۶۵ = bq + r \xrightarrow{r<b} ۱۶۵ = br^۲ + r \to ۵\times ۳\times ۱۱ = r(br+۱)$$

$$r = ۱ \to b = ۱۶۴$$

$$r = ۳ \to b = ۱۸$$

$$r = ۵ \to b \notin Z$$

$$r = ۱۱ \to b < r$$

لذا فقط دو مورد قابل قبول است. (گزینه ی ۲)

***

۶ : در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقی مانده ۱۷ و خارج قسمت ۲۵ می باشد. اگر a مضرب ۶ باشد، رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟ (کنکور۱۳۸۸)

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۹

حل :

$$\begin{cases} a = b(۲۵) + ۱۷ \\ b > ۱۷ \end{cases} \to a \overset{۶}{\equiv} b(۱) + ۵ + ۶(b(۴) + ۲) \to a \overset{۶}{\equiv} b(۱) + ۵$$

$$\xrightarrow{a \overset{۶}{\equiv} ۰} b + ۵ \overset{۶}{\equiv} ۰ \to b \overset{۶}{\equiv} -۵ \to b \overset{۶}{\equiv} -۵ + ۶(۱) \to b \overset{۶}{\equiv} ۱$$

$$\to b = ۶k + ۱ \xrightarrow{b>۱۷} Min(b) = ۱۹ \to Min(a) = ۱۶(۲۵) + ۱۷ = ۴۹۲$$

لذا گزینه ی ۴ درست است.

***

۷ : عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ ممکن است ، مضرب کدام عدد نباشد؟ (کنکور ۱۳۸۹)

۱) ۷ ۲) ۳۷ ۳) ۳۱ ۴) ۱۳

حل :

$$\overline{ababab} = \overline{ab} + ۱۰۰\overline{ab} + ۱۰۰۰۰\overline{ab} = ۱۰۱۰۱\overline{ab} = ۳\times ۷\times ۳۷\times ۱۳\times \overline{ab}$$

لذا گزینه ی ۳ درست است.

ب : دستگاه شمار

۱ : اگر $(abc)_{۷}=(cba)_{۸}$، رقم a کدام است؟ (کنکور ۸۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل :

$$(abc)_{۷}=(cba)_{۸} \to ۴۹a+۷b+c=۶۴c+۸b+a \to ۴۸a=۶۳c+b$$

عدد b الزاماً مضرب ۳ و مخالف صفر است. در نتیجه $b=۳$ یا $b=۶$

اگر $b=۳$ را در معادله ی فوق قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$۴۸a=۶۳c+۳ \xrightarrow{\div ۳} ۱۶a=۲۱c+۱ \to a=c+\frac{۵c+۱}{۱۶}$$

عدد $۵c+۱$ بر ۱۶ بخشپذیر است. با توجه به اینکه رقم c فرد و کمتر از ۷ می باشد، الزاماً فقط $c=۳$ قابل قبول است.

$$b=۳\ ,\ c=۳ \to a=۳+\frac{۱۵+۱}{۱۶}=۴$$

اگر $b=۶$ را در معادله ی فوق قرار دهیم، داریم :

$$۴۸a=۶۳c+۶ \xrightarrow{\div ۳} ۱۶a=۲۱c+۲ \to a=c+\frac{۵c+۲}{۱۶}$$

در این حالت c عدد زوج است.یعنی $c=۲,۴,۶$ که به ازای آن رقم a وجود ندارد. پس فقط $a=۴$ جواب مسئله است.

***

۲ : در نمایش عدد ۶۷ در مبنای ۳ رقم صفر چند مرتبه تکرار شده است؟ (کنکور ۱۳۸۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد رقم صفر

حل : به کمک روش های تبدیل یک عدد به مبنای غیر ۱۰ می توان گفت که : $۶۷=(۲۱۱۱)_{۳}$ لذا عـدد بدسـت آمـده فاقـد صفر است.

***

۳ : در نمایش عددی در مبنای ۳ به صورت (۲۰۱۱۲۱) است. در نمایش این عدد در مبنای ۴ ،چند مرتبه رقم صفر تکرار شـده است؟ (کنکور ۱۳۸۷)

۱) فاقد رقم صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل :

$$(۲۰۱۱۲۱)_۳ = (۲\times ۲۴۳) + (۰\times ۸۱) + (۱\times ۲۷) + (۱\times ۹) + (۲\times ۳) + (۱\times ۱) = ۵۲۹$$

$$۵۲۹ = (۲۰۱۰۱)_۴$$

گزینه ی ۳ درست است.

***

ج : اعداد اول و بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

۱ : اگر عدد طبیعی n، مضرب ۷ نباشد، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد $n^۲ + ۹n + ۲۱$ و $n + ۷$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۰)

۱) ۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۰۵ ۴) ۷

حل :

$$d = (n^۲ + ۹n + ۲۱, n + ۷) = ((n+۷)(n+۲) + ۷, n+۷) = (۷, n+۷) = (۷, n) = ۱$$

توجه داشته باشید که عدد n بر ۷ بخش پذیر نیست. لذا $(۷, n) = ۱$

***

۲ : اگر دو عدد a و ۹۰ نسبت به هم اول باشند، بزرگترین عددی که همواره $a^۴ - ۱$ را می شمارد، کدام است؟(کنکور ۱۳۸۱)

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۸۸ ۳) ۳۲۴ ۴) ۴۸۰

حل : دو عدد a و ۹۰ نسبت به هم اولند. چون $۹۰ = ۲\times ۳^۲ \times ۵$، پس عدد a بر هر یک از سه عدد ۲ و ۳ و ۵ بخش پذیر نمی باشد. در این صورت

الف:

$$a \neq ۳k \rightarrow a = ۳k \pm ۱$$

یعنی $a^۴ = ۳m + ۱$ یا $a^۴ - ۱$ بر عدد ۳ بخش پذیر است.

ب :

$$a \neq ۵k \rightarrow a = ۵k \pm ۱ \quad \text{OR} \quad a = ۵k \pm ۲$$

یعنی $a^۴ = ۵n + ۱$ یا $a^۴ - ۱$ بر عدد ۵ بخش پذیر است.

ج :

$a \neq ۲k \rightarrow a = ۲k + ۱$

یعنی $a^۴ = ۴k(k+۱)+۱$ یا $a^۴ - ۱$ بر عدد ۸ بخش پذیر است. با در نظر گرفتن اینکه عدد $a^۲ + ۱$ زوج است. لذا عدد $a^۴ - ۱ = (a^۲+۱)(a^۲-۱)$ بر عدد $۱۶ = ۸ \times ۲$ نیز بخش پذیر است. در نتیجه عدد $a^۴ - ۱$ بر عدد ۳ و ۵ و ۱۶ بخش پذیر است. پس، همواره هر یک از عوامل $۱۶ \times ۵ \times ۳$ عدد $a^۴ - ۱$ را می شمارد که بزرگترین آنها ۲۴۰ می باشد.

***

۳ : اگر n عدد طبیعی و دو عدد $۹n - ۵$ و $n + ۴$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر از یک باشند. تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟

۱) ۱ ۲(۲ ۳) ۳ ۴(۴

حل :

$$d = (a,b) = sa + rb = ۹(n+۴) - (۹n - ۵) = ۴۱ \xrightarrow{d \neq ۱} ۴۱ = kd$$

عدد ۴۱ اول است،پس باید $d = ۴۱$ باشد. چون سئوال عدد طبیعی n را دو قمی تعیین کرده است لذا باید:

$$n + ۴ = ۴۱k \rightarrow n + ۴ = ۴۱ \ or \ ۸۲$$

پس باید گزینه ی ۲ درست باشد.

***

۴ : به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت های $۲۵n + ۹$ و $۱۱n + ۴$ نسبت به هم اولند؟ (کنکور ۱۳۸۹)

۱) ۸۶ ۲(۹۰ ۳) ۸۹ ۴) ۶

حل :

$$(۱۱n + ۴, ۲۵n + ۹) = (۱۱n + ۴, ۲(۱۱n + ۴) + ۳n + ۱) = (۱۱n + ۴, ۳n + ۱) = (۳(۳n + ۱) + ۲n + ۱, ۳n + ۱)$$
$$= (۲n + ۱, ۳n + ۱) = (۲n + ۱, (۲n + ۱) + n) = (۲n + ۱, n) = (۱, n) = ۱$$

لذا به ازای همه ی مقادیر دو رقمی، این دو عدد، نسبت به هم اولند.

از طرفی تعداد اعداد طبیعی دو رقمی برابر $۹۹ - ۱۰ + ۱ = ۹۰$ می باشند و گزینه ی ۳ درست است.

***

د : همنهشتی اعداد صحیح

۱ : در همنهشتی به پیمانه ی m سه عدد a و ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند. کوچکترین عدد سه رقمی a به طوری که مجموعه ی Z به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز شود. کدام است. (کنکور ۱۳۸۱)

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۳ ۳) ۱۰۴ ۴) ۱۰۶

حل : چون در همنهشتی به پیمانه ی m سه عدد a و ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم ارزی قرار دارند. پس تفاضل دو به دو این سه عدد بر m بخش پذیر است. یعنی:

$$۱۳۲-۴۱=mk \quad \text{و} \quad a-۴۱=mk'$$

از تساوی $mk=۹۱$ نتیجه می شود که عدد m برابر ۷ یا ۱۳ یا ۹۱ می باشد. ولی چون قرار است مجموعه ی Z به تعداد کمتری کلاس هم ارزی افراز شود. لذا $m=۷$ مورد قبول است. زیرا می دانیم در همنهشتی به پیمانه ی m مجموعه ی Z به تعداد m کلاس هم ارزی افراز می شود. پس خواهیم داشت.

$$a-۴۱=mk' \to a+۱-۴۲=mk' \to a+۱=۷k''$$

و چون کوچکترین عدد سه رقمی بخش پذیر بر ۷ برابر ۱۰۵ است. لذا در نهایت داریم.

$$a+۱=۱۰۵ \to a=۱۰۴$$

***

۲ : عدد $۷^{۱۵}+a$ مضرب ۱۷ است. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است. (کنکور ۱۳۸۱)

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

حل :

$$۷^۳=۳۴۳\overset{۱۷}{\equiv}۳ \to (۷^۳)^۵\overset{۱۷}{\equiv}(۳)^۵ \to ۷^{۱۵}\overset{۱۷}{\equiv}۲۴۳ \xrightarrow{۲۴۳\overset{۱۷}{\equiv}۵} ۷^{۱۵}\overset{۱۷}{\equiv}۵ \to ۷^{۱۵}+a\overset{۱۷}{\equiv}۵+a$$

حال چون $۷^{۱۵}+a$ بر ۱۷ بخش پذیر است، لذا $a+۵$ نیز بر۱۷ بخش پذیر می باشد. لذا کوچکترین مقدار a باید ۱۲ باشد.

***

۳ : اگر (به پیمانه ی m) $a^۳-a^۲-a+۱\equiv a^۲-۱$ و $(a^۲-۱\,,\,m)=۱$ آنگاه: (کنکور۸۲)

۱) $m|a-۲$ ۲) $m|a-۱$ ۳) $m|a+۱$ ۴) $m|a+۲$

حل :

$$a^{3}-a^{2}-a+1\overset{m}{\equiv}a^{2}-1\to a^{2}(a-1)-(a-1)\overset{m}{\equiv}a^{2}-1\to(a-1)(a^{2}-1)\overset{m}{\equiv}a^{2}-1$$

$$\to(a-1)(a^{2}-1)\overset{m}{\equiv}a^{2}-1\xrightarrow{(a^{2}-1\,,\,m)=1}(a-1)\overset{m}{\equiv}1\to a-2\overset{m}{\equiv}0\to m\mid a-2-0\to m\mid a-2$$

***

۴ : دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته ی هم ارزی به پیمانه ی m همنهشت شده اند. اگر $(m,7)=1$ باقی مانده ی عـدد m^{m} بر ۷ کدام است؟ (کنکور۸۳)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

حل : چون دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته ی هم ارزی به پیمانه ی m همنهشت هستند. لذا

$$185\overset{m}{\equiv}24\to m\mid 185-24\to 161=mk\to 7\times 23=mk\xrightarrow{(m,7)=1}m=23$$

اکنون باقی مانده ی تقسیم 23^{23} بر ۷ را تعیین می کنیم.

$$23\overset{7}{\equiv}2\to 23^{23}\overset{7}{\equiv}2^{23}\xrightarrow{2^{3}\overset{7}{\equiv}1\to(2^{3})^{7}\overset{7}{\equiv}(1)^{7}\to 2^{21}\overset{7}{\equiv}1\xrightarrow{\times 2^{2}}2^{23}\overset{7}{\equiv}4}23^{23}\overset{7}{\equiv}4$$

***

۵ : باقی مانده ی تقسیم عدد 3^{48} بر عدد ۱۱ کدام است؟(کنکور۸۲)

۱) ۵   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۸

حل :

$$3^{5}=243\overset{11}{\equiv}1\to(3^{5})^{9}\overset{11}{\equiv}(1)^{9}\to 3^{45}\overset{11}{\equiv}1\to 3^{45}\times 3^{3}\overset{11}{\equiv}1\times 27\xrightarrow{27\overset{11}{\equiv}5}3^{48}\overset{11}{\equiv}5$$

***

۶ : اگر $a^{p}=10k+7$ ،آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدم است؟(کنکور۸۳)

۱) ۱   ۲) ۳   ۳) ۶   ۴) ۷

حل : از رابطه ی $a^{p}=10k+7$ معلوم می شود که a عددی فرد بوده و بر ۵ بخش پذیر نمی باشد. لذا

$$a=5m\pm 1\ or\ \pm 2\to a^{4}=5m'+1$$

چون a عددی فرد است. الزاماً m' عددی زوج می باشد. یعنی

$a^{۴}=۱۰k+۱$

در نتیجه از دو رابطه ی فوق داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a^{۴}=۵m'+۱\rightarrow a^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۱ \\ a^{p}=۱۰k+۷\rightarrow a^{p}\overset{۱۰}{\equiv}۷ \end{array}\right\}\rightarrow a^{p}\times a^{۴}\overset{۱۰}{\equiv}۱\times ۷\rightarrow a^{p+۴}\overset{۱۰}{\equiv}۷$$

***

۷ : باقی مانده ی تقسیم عدد $۲^{۴۲}-۳^{۴۲}$ بر عدد ۳۵ کدام است؟(کنکور۸۴)

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۵   ۴) ۶

حل :

$$۲۷\overset{۳۵}{\equiv}-۸\rightarrow ۳^{۳}\overset{۳۵}{\equiv}-۲^{۳}\rightarrow (۳^{۳})^{۱۴}\overset{۳۵}{\equiv}(-۲^{۳})^{۱۴}\rightarrow ۳^{۴۲}\overset{۳۵}{\equiv}۲^{۴۲}\rightarrow ۳^{۴۲}-۲^{۴۲}\overset{۳۵}{\equiv}۲^{۴۲}-۲^{۴۲}$$
$$\rightarrow ۳^{۴۲}-۲^{۴۲}\overset{۳۵}{\equiv}۰$$

***

۸ : اگر عدد $۷^{۲۰۰}+a$ مضرب ۱۹ باشد، کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۵)

۱) ۴   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۸

حل :

$$۷^{۲}\overset{۱۹}{\equiv}۱۱\xrightarrow{\times ۷}۷^{۳}\overset{۱۹}{\equiv}۷۷\xrightarrow{۷۷\overset{۱۹}{\equiv}۱}۷^{۳}\overset{۱۹}{\equiv}۱\rightarrow (۷^{۳})^{۶۶}\overset{۱۹}{\equiv}(۱)^{۶۶}\rightarrow ۷^{۱۹۸}\overset{۱۹}{\equiv}۱$$
$$\xrightarrow{۴۹\overset{۱۹}{\equiv}۱۱}۷^{۱۹۸}\times ۷^{۲}\overset{۱۹}{\equiv}۱\times ۱۱\rightarrow ۷^{۲۰۰}\overset{۱۹}{\equiv}۱۱\xrightarrow{+a}۷^{۲۰۰}+a\equiv ۱۱+a$$
$$\rightarrow ۱۱+a=۹k\rightarrow Min(a)=۸$$

***

۹ : باقی مانده ی تقسیم عدد $(-۶)^{۲۳}$ بر عدد ۳۳ کدام است؟(کنکور۸۶)

۱) ۱۸-   ۲) ۱۵-   ۳) ۱۵   ۴) ۱۸

حل : می دانیم که $۳۳=۳\times ۱۱$ و دو عدد ۳ و ۱۱ نسبت به هم اولند. لذا

$$(-۶)^{۳} \overset{۳}{\equiv} ۰ \rightarrow (-۶)^{۳} \times (-۶)^{۲۰} \overset{۳}{\equiv} ۰ \times (-۶)^{۲۰} \rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۳}{\equiv} ۰$$

$$(-۶)^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\text{فرما}} ((-۶)^{۱۰})^{۲} \overset{۱۱}{\equiv} (۱)^{۲} \xrightarrow{\times(-۶)^{۳}} (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} (-۶)^{۳}$$

$$\rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۳۶ \times (-۶) \rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \times (-۶) \rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \times (-۶)$$

$$\rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} -۱۸ \rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} -۱۸ + ۲(۱۱) \rightarrow (-۶)^{۲۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

پس چون باقی مانده باید مثبت بوده و در پیمانه ی ۳ صفر و در پیمانه ی ۱۱ برابر ۴ باشد ، گزینه ی مورد نظر ۳ می باشد.

***

۱۰ : از رابطه ی همنهشتی (پیمانه ی ۱۸) $۹a \equiv ۶b$ ، کدام نتیجه گیری درست است؟(کنکور ۱۳۸۷)

۱) (پیمانه ی ۲) $a \equiv ۰$ ۲) (پیمانه ی ۳) $b \equiv ۰$ ۳) (پیمانه ی ۶) $a \equiv ۲$ ۴) (پیمانه ی ۶) $۳a \equiv ۲b$

حل :

$$۹a \overset{۱۸}{\equiv} ۶b \xrightarrow{\div ۳} ۳a \overset{۶}{\equiv} ۲b \rightarrow \begin{cases} (۳,۶) = ۳ \xrightarrow{۳|۲b} b \overset{۳}{\equiv} ۰ \\ (۲,۶) = ۲ \xrightarrow{۲|۳a} a \overset{۲}{\equiv} ۰ \end{cases}$$

لذا گزینه ی ۳ نادرست است.

***

۱۱ : از رابطه ی همنهشتی (پیمانه ی ۸۴) $۳۶a \equiv ۱۹۲$ ،کدام نتیجه گیری در پیمانه ی ۷ نادرست است؟ (کنکور ۱۳۸۸)

۱) $۲a \equiv -۱$ ۲) $a \equiv ۴$ ۳) $a \equiv ۳$ ۴) $۳a \equiv ۲$

حل :

$$۳۶a \overset{۸۴}{\equiv} ۱۹۲$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} ۳a \overset{۷}{\equiv} ۱۶ \rightarrow ۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ \rightarrow ۳a \overset{۷}{\equiv} ۲ + ۷(۱) \rightarrow ۳a \overset{۷}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\div ۳} a \overset{۷}{\equiv} ۳ \xrightarrow{\times ۲} ۲a \overset{۷}{\equiv} ۶ \rightarrow ۲a \overset{۷}{\equiv} -۱$$

لذا گزینه ی ۲ جواب است.

***

هـ : معادله ی سیاله

۱ : معادله ی سیاله ی خطی $۱۵x + ۱۴y = ۱۰۵۰$ در مجموعه ی اعداد طبیعی، چند جواب دارد؟(کنکور ۱۳۸۰)

۱) ۲ ۲)۳ ۳) ۴ ۴) ۵

حل : در معادله ی سیاله ی $۱۵x + ۱۴y = ۱۰۵۰$ عدد ۱۰۵۰ مضرب ۱۴ و ۱۵ می باشد.

$$۱۵x + ۱۴y = ۱۵ \times ۱۴ \times ۵$$

پس باید x مضرب ۱۴ و y مضرب ۱۵ باشد. یعنی

$$x = ۱۴x' \quad \text{و} \quad y = ۱۵y'$$

در نتیجه معادله ی سیاله ی داده شده به صورت زیر ساده می شود.

$$۱۵ \times ۱۴x' + ۱۴ \times ۱۵y' = ۱۰۵۰ \to x' + y' = ۵$$

و چون x' و y' اعداد طبیعی اند. لذا داریم :

x'	۱	۲	۳	۴
y'	۴	۳	۲	۱

لذا گزینه ی ۳ درست است.

***

۲ : کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته ای که نیاز به۸۵۰ ریال تمبر دارد با تمبر های۹۰ و۵۰ ریالی کدام است؟(کنکور ۱۳۸۱)

۱) ۱۱ ۲)۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

حل : تعداد تمبر های ۹۰ و ۵۰ ریالی را به ترتیب x و y بنامیم. معادله ی سیاله ی $۹۰x + ۵۰y = ۸۵۰$ حاصل می شود.

طرفین معادله را بر۱۰ تقسیم می کنیم.

$$۹x + ۵y = ۸۵$$

هدف تعیین جواب های صحیح و مثبت y و x است که در معادله ی $۹x + ۵y = ۸۵$ صدق کند. با در نظر گرفتن حالت مطلوب پرسش، که مقادیر $x + y$ کمترین مقدار را داشته باشد. از معادله ی $۹x = ۵(۱۷ - y)$ پیداست که عدد x مضرب ۵ و $۱۷ - y$ مضرب ۹ می باشد.

$$\begin{cases} ۱۷ - y = ۰ \\ x = ۰ \end{cases} \to \begin{cases} y = ۱۷ \\ x = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱۷ - y = ۹ \\ x = ۵ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = ۸ \\ x = ۵ \end{cases}$$

لذا $x + y = ۵ + ۸ = ۱۳$ کمترین است.

***

۳ : مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله ی $۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲$ صدق می کند،کدام است؟(کنکور ۱۳۸۹)

۱) ۵ ۲)۸ ۳) ۷ ۴) ۶

حل :

روش اول:

$$۵۷x - ۸۷y = ۳۴۲ \xrightarrow{\div ۳} ۱۹x - ۲۹y = ۱۱۴ \rightarrow -۲۹y = ۱۱۴ - ۱۹x \rightarrow -۲۹y = ۱۹(۶ - x)$$

$$\rightarrow -۲۹y \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \rightarrow -۲۹y + ۱۹y \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \rightarrow -۱۰y \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \rightarrow y \overset{۱۹}{\equiv} ۰ \rightarrow y = ۱۹k \rightarrow x = ۲۹k + ۶ \xrightarrow{k=۴} x = ۱۲۲$$

لذا گزینه ی ۱ درست است.

روش دوم :

$$(x_۰, y_۰) = (۶,۰) \rightarrow (۱۹,-۲۹) = ۱|۱۱۴$$

$$\begin{cases} x = x_۰ + \dfrac{b}{d}k \\ y = y_۰ - \dfrac{a}{d}k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_۰ + \dfrac{b}{d}k = ۶ + \dfrac{-۲۹}{۱}k = ۶ - ۲۹k \\ y = y_۰ - \dfrac{a}{d}k = ۰ - \dfrac{۱۹}{۱}k = ۱۹k \end{cases}$$

حال برای تعیین کوچکترین مقدار مثبت مثبت سه رقمی x کافی است، مقدار k را برابر۴- قرار دهیم.

$$\rightarrow x = ۶ - ۲۹(-۴) = ۶ + ۱۱۶ = ۱۲۲$$

***

موفق باشید.

جابر عامری ، دبیر ریاضی دبیرستان های شهرستان های اهواز و باوی