

بسمه تعالی

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

خلاصه‌ای از مهم‌ترین نکات و فرمول‌ها

مهدی تقدسی

انرژی و توان سیگنال

نکته ۱: انرژی کل یک سیگنال دوره‌محدود و کراندار، محدود است و در نتیجه توان کل آن برابر صفر خواهد بود.

$$\text{سیگنال دوره‌محدود و کراندار} \longrightarrow E_{\infty} < \infty, P_{\infty} = 0$$

نکته ۲: برای محاسبه انرژی یا توان کل یک سیگنال، می‌توان سیگنال را به بازه‌های زمانی جداگانه تقسیم کرد و انرژی یا توان کل هر قسمت را محاسبه و در آخر با هم جمع نمود.

$$\begin{aligned} E\{x(t)\} &= \sum_i E_i & , & \quad x(t) \text{ سیگنال از جداگانه از سیگنال } E_i \\ P\{x(t)\} &= \sum_i P_i & , & \quad x(t) \text{ توان کل قسمت‌های جداگانه از سیگنال } P_i \end{aligned}$$

نکته ۳: از دو نکته قبل می‌توان نتیجه گرفت که اگر دو سیگنال مختلف، فقط در یک قسمت کراندار با دوره زمانی محدود با هم تفاوت داشته باشند، توان کل آن‌ها یکسان خواهد بود؛ زیرا طبق نکته ۱، توان کل هر قسمت کراندار با دوره زمانی محدود برابر صفر است و بنابراین تأثیری در توان کل سیگنال ندارد.

$$\begin{aligned} \text{اگر سیگنال‌های } x(t) \text{ و } y(t) \text{ فقط در یک} \\ \text{قسمت کراندار و دوره‌محدود، با هم تفاوت داشته باشند؛} \end{aligned} \longrightarrow P\{x(t)\} = P\{y(t)\}$$

سیگنال‌های متناوب

نکته ۴: اگر $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب باشد، آنگاه $x(f(t))$ لزوماً متناوب نیست، بنابراین رابطه $x(f(t+T)) = x(f(t))$ لزوماً برقرار نمی‌باشد؛ ولی می‌توان از رابطه $x(t+T) = x(t)$ اثبات کرد که تساوی $x(f(t+T)) = x(f(t))$ حتماً برقرار است. $f(t)$ می‌تواند هر سیگنال دلخواهی باشد.

$$x(t) \text{ متناوب با } T \longrightarrow x(t+T) = x(t) \Rightarrow \begin{cases} x(f(t+T)) = x(f(t)) \\ ? \\ x(f(t+T)) = x(f(t)) \end{cases}$$

نکته ۵: دوره تناوب سیگنال‌های $\cos at$ و $\sin at$ و e^{jat} برابر $\frac{2\pi}{a}$ و دوره تناوب سیگنال‌های $\tan at$ ، $\cot at$ ، $|\cos at|$ و $|\sin at|$ برابر $\frac{\pi}{a}$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \cos at, \sin at, e^{jat} & \longrightarrow T = \frac{2\pi}{a} \\ \tan at, \cot at, |\cos at|, |\sin at| & \longrightarrow T = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

نکته ۶: در سیگنال‌های $\cos \omega_0 n$ ، $\sin \omega_0 n$ و $e^{j\omega_0 n}$ ، اگر کسر $\frac{\gamma\pi}{\omega_0}$ گویا نباشد، سیگنال‌ها متناوب نمی‌باشند؛ ولی اگر کسر $\frac{\gamma\pi}{\omega_0}$ گویا باشد، سیگنال‌های مذکور متناوب هستند و برای محاسبه دوره تناوب آن‌ها، ابتدا کسر $\frac{\gamma\pi}{\omega_0}$ را تا حد امکان ساده می‌کنیم؛ سپس صورت کسر برابر دوره تناوب اصلی سیگنال خواهد بود.

$$\cos \omega_0 n, \sin \omega_0 n, e^{j\omega_0 n} \longrightarrow \begin{cases} \text{گویا } \frac{\gamma\pi}{\omega_0} \longrightarrow N \triangleq \left(\frac{\gamma\pi}{\omega_0} \text{ کسر} \right) \\ \text{غیرگویا } \frac{\gamma\pi}{\omega_0} \longrightarrow \text{نامتناوب} \end{cases}$$

نکته ۷: اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، سیگنال $x[n^2]$ نیز متناوب خواهد بود. اگر N مضرب ۴ باشد، دوره تناوب اصلی $x[n^2]$ برابر $\frac{N}{4}$ می‌باشد؛ و اگر N مضرب ۴ نباشد، دوره تناوب اصلی $x[n^2]$ برابر همان N خواهد بود.

$$x[n] \text{ متناوب با } N \longrightarrow \begin{cases} N \text{ مضرب } 4 \longrightarrow \frac{N}{4} \text{ متناوب با } x[n^2] \\ \text{O.W} \longrightarrow N \text{ متناوب با } x[n^2] \end{cases}$$

نکته ۸: انرژی کل یک سیگنال متناوب، بی‌نهایت است. اما توان کل سیگنال متناوب $x(t)$ یا $x[n]$ برابر توان آن سیگنال در یک دوره تناوب می‌باشد. یعنی:

$$P_\infty = P_T = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt, \quad P_\infty = P_N = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2$$

نکته ۹: توان کل سیگنال‌های متناوب $A \cos at$ و $A \sin at$ با استفاده از نکته ۸ برابر $\frac{|A|^2}{4}$ و توان سیگنال ثابت A و سیگنال Ae^{jat} نیز برابر $|A|^2$ به دست می‌آید. این نکته در حالت زمان گسسته نیز صادق است.

$$\begin{aligned} A \cos at, A \sin at &\longrightarrow P = \frac{|A|^2}{4} \\ A, Ae^{jat} &\longrightarrow P = |A|^2 \end{aligned}$$

نکته ۱۰: اگر $x(t)$ با دوره تناوب اصلی T متناوب باشد، آنگاه $x(\alpha t)$ با دوره تناوب اصلی $\frac{T}{\alpha}$ متناوب خواهد بود (α ثابتی حقیقی).

$$x(t) \text{ متناوب با } T \longrightarrow x(\alpha t) \text{ متناوب با } \frac{T}{\alpha}$$

نکته ۱۱: اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، آنگاه $x_m[n]$ با دوره تناوب اصلی mN متناوب خواهد بود (m عددی طبیعی). منظور از $x_{(m)}[n]$ ، سیگنال گسترده شده با ضریب m می‌باشد.

$$x[n] \text{ متناوب با } N \longrightarrow x_{(m)}[n] \text{ متناوب با } mN$$

نکته ۱۲: اگر $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد، آنگاه $x[mn]$ متناوب است و برای محاسبه دوره تناوب اصلی آن، ابتدا کسر $\frac{N}{m}$ را تا حد امکان ساده می‌کنیم؛ سپس صورت کسر برابر دوره تناوب اصلی $x[mn]$ خواهد بود.

$$x[n] \text{ متناوب با } N \longrightarrow x[mn] \text{ متناوب با صورت کسر } \frac{N}{m}$$

نکته ۱۳: هر سیگنال $x(t)$ به فرم کلی $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z(t-mT)$ با دوره تناوب T متناوب است.

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z(t \pm mT) \longleftrightarrow x(t) \text{ متناوب با } T$$

سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۱۴: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ فرد باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \text{فرد } x(t) &\longrightarrow x(\circ) = x_o(\circ) = \circ, \quad \int_{-a}^a x(t) dt = \circ \\ \text{فرد } x[n] &\longrightarrow x[\circ] = x_o[\circ] = \circ, \quad \sum_{n=-m}^m x[n] = \circ \end{aligned}$$

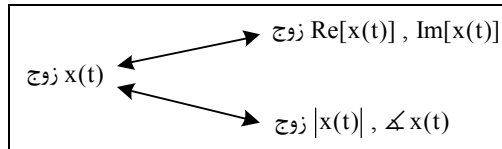
نکته ۱۵: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ زوج باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \text{زوج } x(t) &\longrightarrow x(\circ) = x_e(\circ), \quad \int_{-a}^a x(t) dt = 2 \int_0^a x(t) dt \\ \text{زوج } x[n] &\longrightarrow x[\circ] = x_e[\circ], \quad \sum_{n=-m}^m x[n] = 2 \sum_{n=0}^m x[n] - x[\circ] \end{aligned}$$

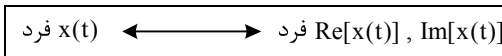
نکته ۱۶: اگر $x(t)$ زوج باشد، آنگاه $x(f(t))$ لزوماً زوج نیست، بنابراین رابطه $x(f(-t)) = x(f(t))$ لزوماً برقرار نمی‌باشد؛ ولی می‌توان به راحتی از رابطه $x(-t) = x(t)$ اثبات کرد که رابطه $x(-f(t)) = x(f(t))$ حتماً برقرار است. همچنین اگر $x(t)$ فرد باشد، آنگاه $x(f(t))$ لزوماً فرد نیست، بنابراین رابطه $x(f(-t)) = -x(f(t))$ لزوماً برقرار نمی‌باشد؛ ولی رابطه $x(-f(t)) = -x(f(t))$ حتماً برقرار است. $f(t)$ می‌تواند هر تابع دلخواهی باشد. این نکته در حالت زمان گسسته نیز صادق است.

$$\begin{aligned} \text{زوج } x(t) &\longrightarrow x(-t) = x(t) \Rightarrow \begin{cases} x(-f(t)) = x(f(t)) \\ ? \\ x(f(-t)) = x(f(t)) \end{cases} \\ \text{فرد } x(t) &\longrightarrow x(-t) = -x(t) \Rightarrow \begin{cases} x(-f(t)) = -x(f(t)) \\ ? \\ x(f(-t)) = -x(f(t)) \end{cases} \end{aligned}$$

نکته ۱۷: اگر سیگنال مختلط $x(t)$ یا $x[n]$ زوج باشد، آنگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن سیگنال‌هایی زوج می‌باشند؛ همچنین اندازه و فاز آن نیز توابعی زوج خواهند بود. عکس این قضیه نیز صادق است.



نکته ۱۸: اگر سیگنال مختلط $x(t)$ یا $x[n]$ فرد باشد، آنگاه قسمت‌های حقیقی و موهومی آن سیگنال‌هایی فرد می‌باشند؛ عکس این قضیه نیز صادق است. در مورد اندازه و فاز یک سیگنال فرد نمی‌توان نکته چندان مفیدی مطرح نمود.



نکته ۱۹: اگر سیگنال دلخواه $x(t)$ برای $t < 0$ برابر صفر باشد، آنگاه می‌توان $x(t)$ را از روی $x_e(t)$ یا $x_o(t)$ با استفاده از روابط زیر به دست آورد:

$$x(t) = 0, t < 0 \longrightarrow x(t) = \begin{cases} 2x_e(t), & t > 0 \\ x_e(0), & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad x(t) = \begin{cases} 2x_o(t), & t > 0 \\ x(0), & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

نکته ۲۰: انرژی (یا توان) یک سیگنال برابر مجموع انرژی (یا توان) قسمت‌های زوج و فرد آن می‌باشد.

$$E\{x(t)\} = E\{x_e(t)\} + E\{x_o(t)\}, \quad P\{x(t)\} = P\{x_e(t)\} + P\{x_o(t)\}$$

محاسبه $\delta(f(t))$

نکته ۲۱: اگر $t = t_i$ ریشه حقیقی و مرتبه اول $f(t)$ باشد، آنگاه $\delta(f(t))$ شامل یک ضربه در $t = t_i$ با اندازه $\frac{1}{|f'(t_i)|}$ خواهد بود. بنابراین $\delta(f(t))$ به تعداد ریشه‌های حقیقی و مرتبه اول خود، ضربه دارد که اندازه هر کدام از آن‌ها برابر $\frac{1}{|f'(t_i)|}$ می‌باشد. به طور خلاصه می‌توان بیان کرد:

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{1}{|f'(t_i)|} \delta(t - t_i), \quad f(t) \text{ مرتبه اول حقیقی و مرتبه اول } t_i$$

سیستم‌های خطی

نکته ۲۲: در یک سیستم خطی، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی از ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز ترکیب خطی از خروجی‌های دیگر خواهد بود.

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \dots \xrightarrow{\text{سیستم خطی}} y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) + \dots$$

نکته ۲۳: در یک سیستم خطی، پاسخ به ورودی «همیشه صفر» ($x(t)=0$) برابر خروجی «همیشه صفر» ($y(t)=0$) می‌باشد.

$$x(t) = 0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی}} y(t) = 0$$

سیستم‌های بدون حافظه

نکته ۲۴: در یک سیستم بدون حافظه، اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در لحظه‌ای از زمان با هم برابر باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود، یعنی خروجی‌ها نیز در همان لحظه با هم برابرند.

$$x_2(t_0) = x_1(t_0) \xrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه}} y_2(t_0) = y_1(t_0)$$

سیستم‌های خطی و بدون حافظه

نکته ۲۵: رابطه ورودی - خروجی یک سیستم خطی بدون حافظه به صورت $y(t) = f(t) \cdot x(t)$ می‌باشد.

$$y(t) = f(t) \cdot x(t) \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی بدون حافظه}}$$

نکته ۲۶: در یک سیستم خطی بدون حافظه اگر ورودی $x_2(t)$ در لحظه‌ای از زمان، α برابر ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t_0) = \alpha x_1(t_0) \xrightarrow{\text{سیستم خطی بدون حافظه}} y_2(t_0) = \alpha y_1(t_0)$$

نکته ۲۷: در یک سیستم خطی بدون حافظه اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان برابر صفر باشد، خروجی نیز در همان لحظه برابر صفر خواهد بود.

$$x(t_0) = 0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی بدون حافظه}} y(t_0) = 0$$

سیستم‌های علی

نکته ۲۸: در یک سیستم علی، اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ تا لحظه‌ای از زمان یکسان باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t) = x_1(t), t < t_0 \xrightarrow{\text{سیستم علی}} y_2(t) = y_1(t), t < t_0$$

سیستم‌های خطی و علی

نکته ۲۹: در یک سیستم خطی و علی، اگر ورودی $x_2(t)$ تا لحظه‌ای از زمان α برابر ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t) = \alpha x_1(t), t < t_0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی و علی}} y_2(t) = \alpha y_1(t), t < t_0$$

نکته ۳۰: در یک سیستم خطی و علی، اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان برابر صفر باشد، خروجی آن نیز تا آن لحظه از زمان برابر صفر خواهد بود. به این ویژگی، سکون اولیه می‌گویند.

$$x(t) = 0, t < t_0 \xrightarrow{\text{سیستم خطی و علی}} y(t) = 0, t < t_0$$

نکته ۳۱: در سیستم‌های خطی، علی بودن و سکون اولیه داشتن، معادل هم می‌باشند، یعنی از هر کدام می‌توان دیگری را نتیجه گرفت.

$$\text{سیستم علی} \xleftrightarrow{\text{سیستم خطی}} \text{سکون اولیه}$$

سیستم‌های TI

نکته ۳۲: در یک سیستم TI، اگر ورودی $x_2(t)$ شیفت‌یافته ورودی $x_1(t)$ به مقدار t_0 باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \xrightarrow{\text{سیستم TI}} y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

نکته ۳۳: در یک سیستم TI، اگر ورودی سیگنالی متناوب با دوره تناوب T باشد، خروجی نیز با دوره تناوب T متناوب خواهد بود (البته لزوماً دوره تناوب‌های اصلی ورودی و خروجی با هم برابر نیستند). همچنین با توجه به اینکه سیگنال‌های ثابت نیز حالت خاصی از سیگنال‌های متناوب می‌باشند، پس در یک سیستم TI، اگر ورودی سیگنالی ثابت باشد، خروجی نیز ثابت خواهد بود.

$$\begin{array}{ccc} x(t) = x(t - T) & \xrightarrow{\text{سیستم TI}} & y(t) = y(t - T) \\ x(t) = C_1 & \xrightarrow{\text{سیستم TI}} & y(t) = C_1 \end{array}$$

سیستم‌های LTI

نکته ۳۴: در یک سیستم LTI، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی و انتقالی از ورودی یا ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز برابر ترکیب خطی و انتقالی از خروجی یا خروجی‌های دیگر خواهد بود.

$$x(t) = \alpha x_1(t-t_1) + \beta x_2(t-t_2) + \dots \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y(t) = \alpha y_1(t-t_1) + \beta y_2(t-t_2) + \dots$$

سیستم‌های بدون حافظه و TI

نکته ۳۵: رابطه یک سیستم بدون حافظه و TI در حالت کلی به صورت $y(t) = f(x(t))$ می‌باشد (که منظور از f ، یک تابع است).

$$\text{سیستم بدون حافظه و TI} \longleftrightarrow y(t) = f(x(t))$$

نکته ۳۶: در یک سیستم بدون حافظه و TI، اگر ورودی $x(t)$ ، در دو لحظه t_1 و t_2 مقدار یکسانی داشته باشد، خروجی آن نیز همین‌طور خواهد بود.

$$x(t_2) = x(t_1) \xrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه و TI}} y(t_2) = y(t_1)$$

نکته ۳۷: در یک سیستم بدون حافظه و TI، اگر مقدار ورودی $x_1(t)$ در لحظه t_1 ، با مقدار ورودی $x_2(t)$ در لحظه t_2 برابر باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود.

$$x_2(t_2) = x_1(t_1) \xrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه و TI}} y_2(t_2) = y_1(t_1)$$

سیستم‌های LTI و بدون حافظه

نکته ۳۸: رابطه یک سیستم LTI و بدون حافظه به صورت $y(t) = Ax(t)$ می‌باشد که A یک ضریب ثابت است. یعنی در یک سیستم LTI و بدون حافظه، خروجی ضربی ثابت از ورودی است.

$$\text{سیستم LTI و بدون حافظه} \longleftrightarrow y(t) = Ax(t)$$

سیستم‌های علی و TI

نکته ۳۹: در یک سیستم علی و TI، اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان با دوره تناوب T متناوب باشد، خروجی نیز تا آن لحظه با دوره تناوب T متناوب خواهد بود. همچنین در حالت خاص اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان، ثابت باشد، خروجی نیز تا آن لحظه از زمان، ثابت خواهد بود.

$$\begin{array}{l} x(t) = x(t-T), t < t_0 \longrightarrow y(t) = y(t-T), t < t_0 \\ \text{سیستم علی و TI} \\ x(t) = C_1, t < t_0 \longrightarrow y(t) = C_1, t < t_0 \end{array}$$

سیستم‌های پایدار

نکته ۰: در یک سیستم پایدار اگر ورودی در همه زمان‌ها محدود (کراندار) باشد، خروجی نیز در همه زمان‌ها محدود (کراندار) خواهد بود.

$$\forall t: |x(t)| < \infty \xrightarrow{\text{سیستم پایدار}} \forall t: |y(t)| < \infty$$

سیستم‌های بدون حافظه و پایدار

نکته ۱: در یک سیستم بدون حافظه و پایدار اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان محدود باشد، خروجی نیز در آن لحظه محدود خواهد بود.

$$|x(t_0)| < \infty \xrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه و پایدار}} |y(t_0)| < \infty$$

* توجه شود که ویژگی سیستم‌های بدون حافظه (نکته ۲۴) نیز در مورد این سیستم باید صادق باشد.

سیستم‌های خطی و بدون حافظه و پایدار

نکته ۲: در یک سیستم خطی و بدون حافظه و پایدار اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان محدود باشد، خروجی نیز در آن لحظه محدود خواهد بود.

$$|x(t_0)| < \infty \xrightarrow{\text{سیستم خطی و بدون حافظه و پایدار}} |y(t_0)| < \infty$$

* توجه شود که ویژگی سیستم‌های خطی و بدون حافظه (نکات ۲۵ و ۲۶ و ۲۷) نیز در مورد این سیستم باید صادق باشد.

سیستم‌های علی و پایدار

نکته ۳: در یک سیستم علی و پایدار اگر ورودی تا لحظه‌ای از زمان محدود باشد، خروجی نیز تا آن لحظه محدود خواهد بود.

$$|x(t)| < \infty, t < t_0 \xrightarrow{\text{سیستم علی و پایدار}} |y(t)| < \infty, t < t_0$$

* توجه شود که ویژگی سیستم‌های علی (نکته ۲۸) نیز در مورد این سیستم باید صادق باشد.

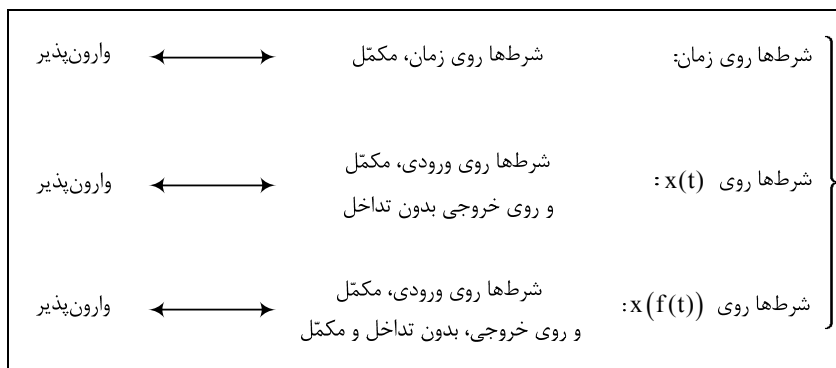
بررسی وارون پذیری

نکته ۴۴: در سیستم‌های چندضابطه‌ای (زمان پیوسته و زمان گسسته) بعد از اینکه ورودی را برحسب خروجی نوشتیم و در ضابطه‌ها نیز ابهام نداشتیم، آنگاه یکی از سه حالت زیر وجود خواهد داشت:

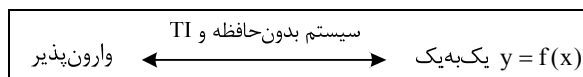
حالت اول: اگر شرط‌ها روی زمان باشد؛ در این حالت شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این است که شرط‌ها مکمل هم باشند (یعنی همه زمان‌ها در شرط‌ها پوشش داده شوند).

حالت دوم: اگر شرط‌ها روی $x(t)$ یا $x(t_0)$ باشد؛ در این حالت شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این است که اولاً شرط‌ها، مکمل هم باشند، ثانیاً بعد از جایگذاری شرط‌ها از هر ضابطه برحسب خروجی، شرط‌های به‌دست‌آمده، با هم تداخل و همپوشانی نداشته باشند.

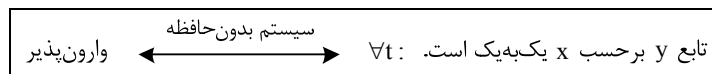
حالت سوم: اگر شرط‌ها روی $x(f(t))$ باشد؛ در این حالت شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این است که اولاً شرط‌ها مکمل هم باشند (یعنی همه مقادیر ورودی در شرط‌ها پوشش داده شوند)، ثانیاً بعد از جایگذاری شرط‌ها از هر ضابطه برحسب خروجی، شرط‌های به‌دست‌آمده، با هم تداخل و همپوشانی نداشته باشند و همچنین مکمل هم نیز باشند.



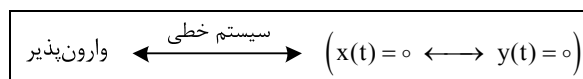
نکته ۴۵: با استفاده از نکته ۳۵ می‌دانیم که رابطه یک سیستم بدون حافظه و TI به صورت $y(t) = f(x(t))$ می‌باشد. شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم‌ها این است که تابع $y = f(x)$ یک‌به‌یک باشد.



نکته ۴۶: شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری یک سیستم بدون حافظه این است که رابطه y برحسب x به‌ازای همه t ها یک‌به‌یک باشد.



نکته ۴۷: شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری یک سیستم خطی این است که تنها ایجادکننده‌ی خروجی «همیشه صفر» $(y(t) = 0)$ ، ورودی «همیشه صفر» $(x(t) = 0)$ باشد.



نکته ۴۸: سیستم زمان پیوسته $y(t) = Ax(at + t_1) + Bx(bt + t_2)$ (با فرض $a, b \neq 0$)، فقط به ازای " $A \neq \pm B$, $a = -b$ " وارون پذیر است؛ و سیستم زمان گسسته $y[n] = Ax[an + n_1] + Bx[bn + n_2]$ (با فرض $a, b \neq 0$)، فقط به ازای " $A \neq \pm B$, $a = -b = 1$ " وارون پذیر می باشد.

$y(t) = Ax(at + t_1) + Bx(bt + t_2)$	$\xrightarrow{A \neq \pm B, a = -b}$	وارون پذیر
$y[n] = Ax[an + n_1] + Bx[bn + n_2]$	$\xrightarrow{A \neq \pm B, a = -b = 1}$	وارون پذیر

نکته ۴۹: اگر در رابطه سیستمی، خارج از آرگومان ورودی اثری از زمان نباشد، آنگاه شرط لازم برای وارون پذیری این است که تابع y بر حسب x یکبه یک باشد. یعنی اگر تابع y بر حسب x یکبه یک نباشد، سیستم قطعاً وارون ناپذیر خواهد بود.

وارون ناپذیر	$\xrightarrow{\text{سیستم بدون زمان خارجی}}$	اگر تابع y بر حسب x یکبه یک نباشد.
--------------	--	--

نکته ۵۰: برای بررسی وارون پذیری سیستم هایی که رابطه آنها به صورت $y(t) = T\{x(t)\} + f(t)$ یا $y(t) = T\{x(t)\} \cdot g(t)$ (و $\forall t: g(t) \neq 0$) می باشد، کافی است وارون پذیری سیستم $y(t) = T\{x(t)\}$ را بررسی نماییم.

$y(t) = T\{x(t)\} + f(t)$	\longleftrightarrow	$y(t) = T\{x(t)\}$
از لحاظ وارون پذیری		
$y(t) = T\{x(t)\} \cdot g(t)$	\longleftrightarrow	$y(t) = T\{x(t)\}$
$\forall t: g(t) \neq 0$		

سیستم های وارون پذیر

نکته ۵۱: در یک سیستم وارون پذیر، ورودی های متمایز، خروجی های متمایز ایجاد می کنند. به عبارت بهتر، ورودی های یکسان، خروجی های یکسان را نتیجه می دهند و بالعکس.

$x_1(t) = x_2(t)$	$\xleftrightarrow{\text{سیستم وارون پذیر}}$	$y_1(t) = y_2(t)$
-------------------	---	-------------------

سیستم‌های خطی و وارون‌پذیر

نکته ۵۲: در یک سیستم خطی و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی از ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز ترکیب خطی از خروجی‌های دیگر خواهد بود و بالعکس.

$$\boxed{x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \dots \quad \longleftrightarrow \quad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) + \dots}$$

سیستم خطی و وارون‌پذیر

نکته ۵۳: در یک سیستم خطی و وارون‌پذیر، پاسخ به ورودی «همیشه صفر» ($x(t) = 0$) برابر خروجی «همیشه صفر» ($y(t) = 0$) می‌باشد و بالعکس. یعنی تنها ایجاد کننده خروجی «همیشه صفر»، ورودی «همیشه صفر» می‌باشد.

$$\boxed{x(t) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad y(t) = 0}$$

سیستم خطی و وارون‌پذیر

سیستم‌های بدون حافظه و وارون‌پذیر

نکته ۵۴: در یک سیستم بدون حافظه و وارون‌پذیر، اگر دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ ، در لحظه‌ای از زمان با هم برابر باشند، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$\boxed{x_2(t_0) = x_1(t_0) \quad \longleftrightarrow \quad y_2(t_0) = y_1(t_0)}$$

سیستم بدون حافظه و وارون‌پذیر

سیستم‌های خطی و بدون حافظه و وارون‌پذیر

نکته ۵۵: با توجه به اینکه رابطه یک سیستم خطی بدون حافظه به صورت $y(t) = f(t) \cdot x(t)$ می‌باشد، شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم‌ها این است که $f(t)$ به‌ازای همه t مخالف صفر باشد.

$$\boxed{y(t) = f(t) \cdot x(t) \quad , \quad \forall t: f(t) \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{سیستم خطی و بدون حافظه و وارون‌پذیر}}$$

نکته ۵۶: در یک سیستم خطی و بدون حافظه و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x_2(t)$ در لحظه‌ای از زمان، α برابر ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$\boxed{x_2(t_0) = \alpha x_1(t_0) \quad \longleftrightarrow \quad y_2(t_0) = \alpha y_1(t_0)}$$

سیستم خطی و بدون حافظه و وارون‌پذیر

نکته ۵۷: در یک سیستم خطی و بدون حافظه و وارون‌پذیر، اگر ورودی در لحظه‌ای از زمان برابر صفر باشد، خروجی نیز در همان لحظه برابر صفر خواهد بود و بالعکس.

$$\boxed{x(t_0) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad y(t_0) = 0}$$

سیستم خطی و بدون حافظه و وارون‌پذیر

سیستم‌های TI و وارون‌پذیر

نکته ۵۸: در یک سیستم TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x_1(t)$ شیفت‌یافته ورودی $x_1(t)$ باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$\boxed{x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad \xleftrightarrow{\text{سیستم TI و وارون‌پذیر}} \quad y_2(t) = y_1(t - t_0)}$$

نکته ۵۹: در یک سیستم TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی سیگنالی متناوب با دوره تناوب T باشد، خروجی نیز با دوره تناوب T متناوب خواهد بود و بالعکس (یعنی دوره تناوب‌های اصلی ورودی و خروجی با هم برابرند). با توجه به اینکه سیگنال‌های ثابت نیز حالت خاصی از سیگنال‌های متناوب هستند، در یک سیستم TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی سیگنالی ثابت باشد، خروجی نیز ثابت خواهد بود و بالعکس.

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x(t) = x(t - T) & \xleftrightarrow{\text{سیستم TI و وارون‌پذیر}} & y(t) = y(t - T) \\ x(t) = C_1 & \xleftrightarrow{\text{سیستم TI و وارون‌پذیر}} & y(t) = C_2 \end{array}}$$

سیستم‌های بدون حافظه و TI و وارون‌پذیر

نکته ۶۰: با توجه به اینکه رابطه یک سیستم بدون حافظه و TI به صورت $y(t) = f(x(t))$ می‌باشد، شرط لازم و کافی برای وارون‌پذیری این سیستم‌ها این است که تابع $y = f(x)$ یک‌به‌یک باشد.

$$\boxed{\text{یک‌به‌یک } y = f(x) \quad , \quad y(t) = f(x(t)) \quad \xleftrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه و TI و وارون‌پذیر}}}$$

نکته ۶۱: در یک سیستم بدون حافظه و TI و وارون‌پذیر، اگر ورودی $x(t)$ ، در دو لحظه t_1 و t_2 مقدار یکسانی داشته باشد، خروجی آن نیز همین‌طور خواهد بود و بالعکس.

$$\boxed{x(t_2) = x(t_1) \quad \xleftrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه و TI و وارون‌پذیر}} \quad y(t_2) = y(t_1)}$$

نکته ۶۲: در یک سیستم بدون حافظه و TI و وارون‌پذیر، اگر مقدار ورودی $x_1(t)$ در لحظه t_1 ، با مقدار ورودی $x_2(t)$ در لحظه t_2 برابر باشد، خروجی‌های آن‌ها نیز همین‌طور خواهند بود و بالعکس.

$$\boxed{x_2(t_2) = x_1(t_1) \quad \xleftrightarrow{\text{سیستم بدون حافظه و TI و وارون‌پذیر}} \quad y_2(t_2) = y_1(t_1)}$$

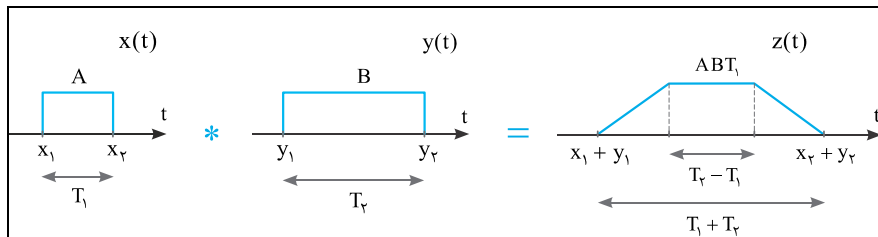
مشتق گیری و انتگرال گیری از کانولوشن

نکته ۶۳: اگر $z(t) = x(t) * y(t)$ باشد، آنگاه روابط زیر برای مشتق و انتگرال $z(t)$ وجود دارد:

$$z(t) = x(t) * y(t) \begin{cases} \rightarrow z'(t) = x'(t) * y(t) = x(t) * y'(t) \\ \rightarrow \int_{-\infty}^t z(\tau) d\tau = \left[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right] * y(t) = x(t) * \left[\int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau \right] \end{cases}$$

کانولوشن سیگنال‌های پالسی

نکته ۶۴: فرض کنید سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ ، دو سیگنال پالسی به شکل زیر باشند. با فرض اینکه $T_1 < T_2$ باشد، کانولوشن این دو سیگنال، یک دوزنقه متقارن به شکل $z(t)$ خواهد بود.



تأثیر مقیاس دهی و انتقال زمانی در کانولوشن

نکته ۶۵: اگر $z(t) = x(t) * y(t)$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$x(t) * y(t) = z(t) \quad \longrightarrow \quad x(at + t_1) * y(at + t_2) = \frac{1}{|a|} z(at + t_1 + t_2)$$

که t_1, t_2 و a مقادیر ثابت حقیقی هستند. در حالت خاص $a = -1$ و $t_1 = t_2 = 0$ به فرمول مهم زیر می‌رسیم:

$$x(t) * y(t) = z(t) \quad \longrightarrow \quad x(-t) * y(-t) = z(-t)$$

این نکته در حالت زمان گسسته نیز فقط در حالت $a = 1$ یا $a = -1$ برقرار است.

کانولوشن با قطار ضربه

نکته ۶۶: اگر سیگنال دلخواه $z(t)$ با قطار ضربه متناوب با دوره تناوب T ، کانوالو شود، سیگنال حاصل قطعاً با دوره تناوب T متناوب خواهد بود.

$$x(t) = z(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \quad \longrightarrow \quad x(t) \text{ متناوب با } T$$

روابط پاسخ ضربه و پله در سیستم‌های LTI

نکته ۶۷: اگر $h[n]$ پاسخ ضربه و $s[n]$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان‌گسسته باشند، روابط زیر بین $h[n]$ و $s[n]$ برقرار است:

$$s[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[n-k] \quad , \quad s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad , \quad h[n] = s[n] - s[n-1]$$

نکته ۶۸: پاسخ حالت دائمی یک سیستم LTI به ورودی پله واحد (یعنی $s[+\infty]$) برابر است با:

$$s[+\infty] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]$$

نکته ۶۹: اگر $h(t)$ پاسخ ضربه و $s(t)$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان‌پیوسته باشند، خواهیم داشت:

$$s(t) = \int_0^{+\infty} h(t-\tau) d\tau \quad , \quad s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad , \quad h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

نکته ۷۰: پاسخ حالت دائمی یک سیستم LTI به ورودی پله واحد (یعنی $s(+\infty)$) برابر است با:

$$s(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$$

بررسی خواص سیستم‌های LTI با استفاده از پاسخ ضربه

نکته ۷۱: شرط لازم و کافی برای بدون‌حافظه بودن یک سیستم LTI این است که $h[n]$ برای $n \neq 0$ برابر صفر باشد که در این صورت رابطه سیستم نیز به صورت $y[n] = Ax[n]$ می‌باشد.

سیستم بدون‌حافظه زمان‌گسسته	↔	$h[n] = 0, n \neq 0$	↔	$y[n] = Ax[n]$
سیستم بدون‌حافظه زمان‌پیوسته	↔	$h(t) = 0, t \neq 0$	↔	$y(t) = Ax(t)$

نکته ۷۲: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI این است که پاسخ ضربه $h[n]$ برای $n < 0$ برابر صفر باشد، یا به طور معادل برای حالت زمان‌پیوسته $h(t)$ برای $t < 0$ برابر صفر باشد.

سیستم LTI علی زمان‌گسسته	↔	$h[n] = 0, n < 0$
سیستم LTI علی زمان‌پیوسته	↔	$h(t) = 0, t < 0$

نکته ۷۳: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI زمان گسسته این است که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع پذیر باشد، یعنی مجموع $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]|$ محدود باشد. همچنین شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI زمان پیوسته این است که پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt$ محدود باشد.

سیستم LTI پایدار زمان گسسته	\longleftrightarrow	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] < \infty$
سیستم LTI پایدار زمان پیوسته	\longleftrightarrow	$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < \infty$

نکته ۷۴: اگر یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ ، وارون پذیر باشد، می توان ثابت کرد که سیستم وارون آن نیز LTI می باشد و پاسخ ضربه آن برابر سیگنالی به نام $h_i(t)$ خواهد بود، به طوری که خواهیم داشت:

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

نوشتن انتگرال $x(t)$ به صورت کانولوشن

نکته ۷۵: فرمول پرکاربرد زیر را به خاطر بسپارید.

$$\int_{t+a}^{t+b} x(\tau) d\tau = x(t) * [u(t+b) - u(t+a)]$$

روابط پاسخ ضربه و پله شیفیت یافته در سیستم های خطی

نکته ۷۶: اگر $h[n, k]$ پاسخ ضربه شیفیت یافته (یعنی پاسخ به $\delta[n - k]$) و $s[n, k]$ پاسخ پله شیفیت یافته (یعنی پاسخ به $u[n - k]$) در یک سیستم خطی زمان گسسته باشند، روابط زیر بین آنها برقرار است:

$$s[n, k] = \sum_{m=k}^{+\infty} h[n, m] \quad , \quad h[n, k] = s[n, k] - s[n, k+1]$$

نکته ۷۷: اگر $h(t, \tau)$ پاسخ ضربه شیفیت یافته (یعنی پاسخ به $\delta(t - \tau)$) و $s(t, \tau)$ پاسخ پله شیفیت یافته (یعنی پاسخ به $u(t - \tau)$) در یک سیستم خطی زمان پیوسته باشند، روابط زیر بین آنها برقرار است:

$$s(t, \tau) = \int_{\tau}^{+\infty} h(t, \alpha) d\alpha \quad , \quad h(t, \tau) = -\frac{\partial s(t, \tau)}{\partial \tau}$$

بررسی خواص سیستم‌های خطی با استفاده از پاسخ ضربه شیفیت یافته

نکته ۷۸: شرط لازم و کافی برای بدون حافظه بودن یک سیستم خطی این است که $h[n, k] = 0$ برای $n \neq k$ برابر صفر باشد که در این صورت رابطه سیستم نیز به صورت $y[n] = f(n)x[n]$ خواهد بود.

سیستم خطی بدون حافظه زمان گسسته	\longleftrightarrow	$h[n, k] = 0, n \neq k$	\longleftrightarrow	$y[n] = f(n)x[n]$
سیستم خطی بدون حافظه زمان پیوسته	\longleftrightarrow	$h(t, \tau) = 0, t \neq \tau$	\longleftrightarrow	$y(t) = f(t)x(t)$

نکته ۷۹: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم خطی این است که $h[n, k] = 0$ برای $n < k$ برابر صفر باشد، یا بطور معادل برای حالت زمان پیوسته $h(t, \tau) = 0$ برای $t < \tau$ برابر صفر باشد.

سیستم خطی علی زمان گسسته	\longleftrightarrow	$h[n, k] = 0, n < k$
سیستم خطی علی زمان پیوسته	\longleftrightarrow	$h(t, \tau) = 0, t < \tau$

نکته ۸۰: شرط لازم و کافی برای TI بودن یک سیستم خطی این است که $h[n, k]$ تابعی از $n - k$ باشد، یا بطور معادل برای حالت زمان پیوسته $h(t, \tau)$ تابعی از $t - \tau$ باشد.

سیستم خطی TI زمان گسسته	\longleftrightarrow	تابعی از $n - k$ $h[n, k] \triangleq "n - k"$
سیستم خطی TI زمان پیوسته	\longleftrightarrow	تابعی از $t - \tau$ $h(t, \tau) \triangleq "t - \tau"$

نکته ۸۱: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم خطی زمان گسسته این است که $h[n, k]$ نسبت به k مطلقاً جمع پذیر باشد، یعنی مجموع $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n, k]|$ به ازای همه n ها محدود باشد. همچنین شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم خطی زمان پیوسته این است

که $h(t, \tau)$ نسبت به τ مطلقاً انتگرال پذیر باشد، یعنی انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t, \tau)| d\tau$ به ازای همه t ها محدود باشد.

سیستم خطی پایدار زمان گسسته	\longleftrightarrow	$\forall n: \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n, k] < \infty$
سیستم خطی پایدار زمان پیوسته	\longleftrightarrow	$\forall t: \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau) d\tau < \infty$

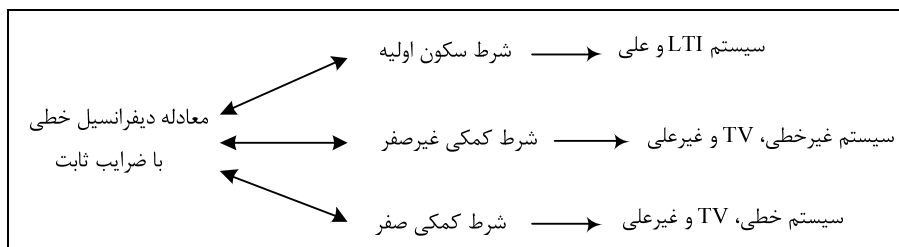
معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی با ضرایب ثابت

نکته ۸۲: سه حالت مختلف را برای شرط کمکی در نظر می‌گیریم:

حالت اول: شرط سکون اولیه (یعنی اگر برای $t \leq t_0$ ، $x(t)$ برابر صفر باشد، آنگاه برای $t \leq t_0$ ، $y(t)$ نیز برابر صفر خواهد بود): اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط سکون اولیه باشند، حتماً LTI و علی خواهند بود.

حالت دوم: شرط کمکی غیرصفر ($y(t_0) = C \neq 0$): اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی غیرصفر باشند، حتماً غیرخطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

حالت سوم: شرط کمکی صفر ($y(t_0) = 0$): اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی صفر باشند، حتماً خطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

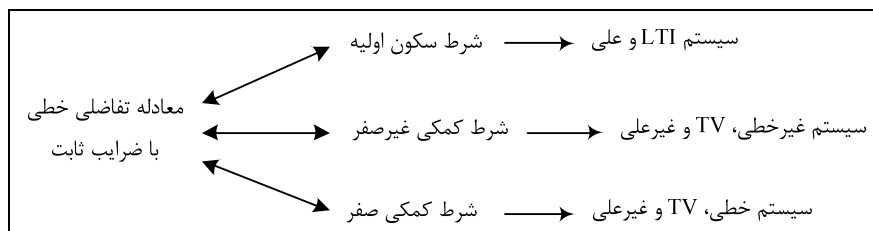


نکته ۸۳: مانند حالت زمان پیوسته سه حالت مختلف را برای شرط کمکی در نظر می‌گیریم:

حالت اول: شرط سکون اولیه: اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط سکون اولیه باشند، حتماً LTI و علی خواهند بود.

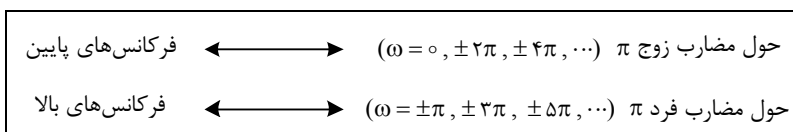
حالت دوم: شرط کمکی غیرصفر ($y[n_0] = C \neq 0$): اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی غیرصفر باشند، حتماً غیرخطی، TV و غیرعلی خواهند بود.

حالت سوم: شرط کمکی صفر ($y[n_0] = 0$): اگر این نوع سیستم‌ها دارای شرط کمکی صفر باشند، حتماً خطی، TV و غیرعلی خواهند بود.



فرکانس‌های موهومی در حالت زمان گسسته

نکته ۸۴: در حالت زمان گسسته، فرکانس‌های پایین حول مضارب زوج π ($\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$) و فرکانس‌های بالا حول مضارب فرد π ($\omega = \pm \pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$) قرار دارند.



همگرایی و پیوستگی تبدیل فوریه

نکته ۸۵: شرط لازم و کافی برای اینکه تبدیل فوریه یک سیگنال زمان پیوسته یا زمان گسسته، همگرا و پیوسته باشد، این است که آن سیگنال مطلقاً انتگرال پذیر یا مطلقاً جمع پذیر باشد.

$$\begin{array}{l} X(\omega) \text{ همگرا و پیوسته} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty \\ X(\omega) \text{ همگرا و پیوسته} \iff \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \end{array}$$

تبدیل فوریه سیگنال های زوج و فرد

نکته ۸۶: اگر سیگنال $x(t)$ زوج (یا فرد) باشد، تبدیل فوریه آن نیز زوج (یا فرد) خواهد بود. همچنین تبدیل فوریه قسمت زوج $x(t)$ (یعنی $x_e(t)$) برابر قسمت زوج $X(\omega)$ (یعنی $X_e(\omega)$) و تبدیل فوریه قسمت فرد $x(t)$ (یعنی $x_o(t)$) برابر قسمت فرد $X(\omega)$ (یعنی $X_o(\omega)$) می باشد.

$$\begin{array}{l} \text{زوج } x(t) \xrightarrow{F} \text{ زوج } X(\omega) \quad , \quad \text{فرد } x(t) \xrightarrow{F} \text{ فرد } X(\omega) \\ x_e(t) \xrightarrow{F} X_e(\omega) \quad , \quad x_o(t) \xrightarrow{F} X_o(\omega) \end{array}$$

دوره تناوب تبدیل فوریه زمان گسسته

نکته ۸۷: اگر سیگنال $x[n]$ حداکثر فقط در مضارب m ($0, \pm m, \pm 2m, \dots$) مقدار داشته باشد، یعنی در زمان های غیر مضرب m ، برابر صفر باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن با دوره تناوب $\frac{2\pi}{m}$ متناوب خواهد بود. عکس این گزاره نیز برقرار است.

$$x[n] = 0, n \neq 0, \pm m, \pm 2m, \dots \iff X(\omega) \text{ متناوب با } \frac{2\pi}{m}$$

نوشتن سیگنال های متناوب زمان گسسته دوتایی بر حسب نمایی

نکته ۸۸: هر سیگنال زمان گسسته متناوب با دوره تناوب 2 که به شکل $z[n]$ تعریف شده باشد را می توان با استفاده از فرمول زیر به صورت نمایی نوشت:

$$z[n] = \begin{cases} A, & \text{زوج } n \\ B, & \text{فرد } n \end{cases} = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}(-1)^n$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های حقیقی

نکته ۸۹: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی باشد، تبدیل فوریه آن ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:

الف) $X(\omega)$ تقارن مزدوج (هرمیتی) دارد.

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

ب) $|X(\omega)|$ تابعی زوج و $\angle X(\omega)$ تابعی فرد است.

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}$$

ج) $X_R(\omega)$ تابعی زوج و $X_I(\omega)$ تابعی فرد است.

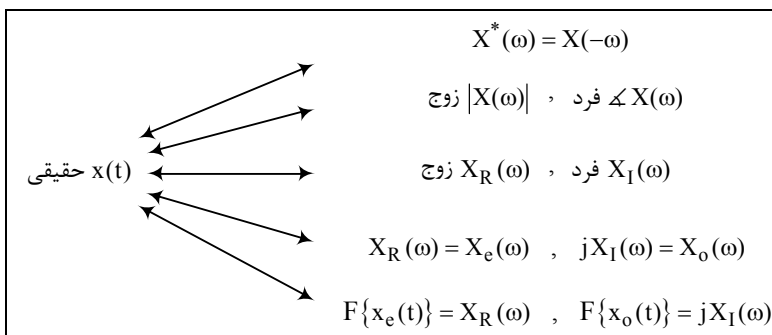
$$\begin{cases} X_R(\omega) = X_R(-\omega) \\ X_I(\omega) = -X_I(-\omega) \end{cases}$$

د) $X_R(\omega)$ با $X_e(\omega)$ و $jX_I(\omega)$ با $X_o(\omega)$ برابر است.

$$\begin{cases} X_R(\omega) = X_e(\omega) \\ jX_I(\omega) = X_o(\omega) \end{cases}$$

هـ) تبدیل فوریه $x_e(t)$ برابر $X_R(\omega)$ و تبدیل فوریه $x_o(t)$ برابر $jX_I(\omega)$ می‌باشد.

$$\begin{cases} x_e(t) \xleftrightarrow{F} X_R(\omega) \\ x_o(t) \xleftrightarrow{F} jX_I(\omega) \end{cases}$$



نکته ۹۰: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج است و اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و فرد باشد، تبدیل فوریه آن موهومی و فرد خواهد بود.

$x(t)$ حقیقی و زوج	\xleftrightarrow{F}	$X(\omega)$ حقیقی و زوج
$x(t)$ حقیقی و فرد	\xleftrightarrow{F}	$X(\omega)$ موهومی و فرد

محاسبه ضرایب سری فوریه با استفاده از تبدیل فوریه

نکته ۹۱: اگر سیگنال متناوب $x(t)$ با دوره تناوب T به فرم $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t-kT)$ باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن برابر است با:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t-kT) \xrightarrow{FS} a_k = \frac{1}{T} Z(k\omega_0) = \frac{1}{T} Z(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

ضرایب فوریه سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۹۲: اگر سیگنال متناوب $x(t)$ زوج (یا فرد) باشد، ضرایب فوریه آن نیز زوج (یا فرد) خواهد بود. همچنین ضرایب فوریه قسمت زوج $x(t)$ برابر قسمت زوج a_k (یعنی $\{ev\{a_k\}\}$) و ضرایب فوریه قسمت فرد $x(t)$ برابر قسمت فرد a_k (یعنی $\{od\{a_k\}\}$) می‌باشد.

$$\begin{array}{ccc} \text{زوج } x(t) & \xleftarrow{Fs} & \text{زوج } a_k \\ \text{فرد } x(t) & \xleftarrow{Fs} & \text{فرد } a_k \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} \text{زوج } x(t) & \xleftarrow{Fs} & \text{زوج } a_k \\ \text{فرد } x(t) & \xleftarrow{Fs} & \text{فرد } a_k \end{array}$$

ضرایب فوریه سیگنال‌های متقارن نیم موج

نکته ۹۳: اگر سیگنال $x(t)$ تقارن نیم موج داشته باشد، یعنی $x(t) = -x(t + \frac{T}{\nu})$ یا $x(t) = -x(t - \frac{T}{\nu})$ باشد، آنگاه بسط سری فوریه $x(t)$ فقط شامل هارمونیک‌های فرد می‌باشد و ضرایب هارمونیک‌های زوج آن ($a_{\nu k}$) برابر صفر است. عکس این گزاره نیز برقرار می‌باشد.

$$x(t) = -x(t \pm \frac{T}{\nu}) \longleftrightarrow a_{\nu k} = 0$$

دوره تناوب ضرایب فوریه زمان گسسته

نکته ۹۴: اگر سیگنال متناوب $x[n]$ حداکثر فقط در مضارب m ($0, \pm m, \pm 2m, \dots$) مقدار داشته باشد، یعنی در زمان‌های غیر مضرب m ، برابر صفر باشد، آنگاه ضرایب فوریه آن با دوره تناوب $\frac{N}{m}$ متناوب خواهد بود. عکس این گزاره نیز برقرار است.

$$x[n] = 0, n \neq 0, \pm m, \pm 2m, \dots \longleftrightarrow \text{متناوب با } \frac{N}{m}$$

محاسبه ضرایب فوریه بر اساس دوره تناوب غیراصلی

نکته ۹۵: اگر ضرایب فوریه یک سیگنال متناوب را بر اساس m برابر دوره تناوب اصلی آن محاسبه نماییم، ضرایب فوریه آن با ضریب m گسترده خواهند شد.

$$T, x(t) \xleftarrow{FS} a[k] \Rightarrow mT, x(t) \xleftarrow{FS} a_{(m)}[k]$$

ضرایب فوریه سیگنال‌های حقیقی

نکته ۹۶: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی باشد، ضرایب فوریه آن ویژگی‌های زیر را دارا می‌باشد:

(۱) a_k تقارن مزدوج (هرمیتی) دارد.

$$a_k^* = a_{-k}$$

(۲) $|a_k|$ تابعی زوج و $\angle a_k$ تابعی فرد است.

$$\begin{cases} |a_k| = |a_{-k}| \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$$

(۳) $\text{Re}\{a_k\}$ تابعی زوج و $\text{Im}\{a_k\}$ تابعی فرد است.

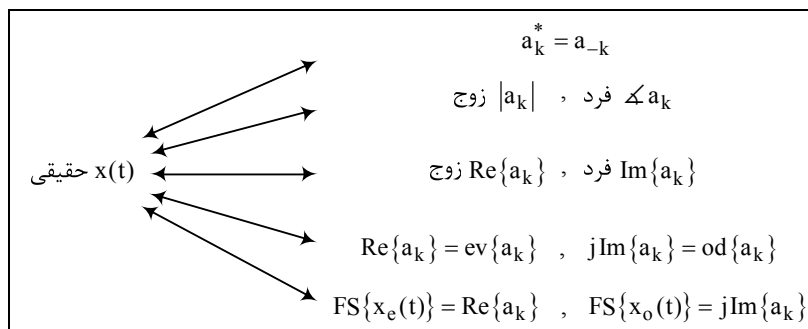
$$\begin{cases} \text{Re}\{a_k\} = \text{Re}\{a_{-k}\} \\ \text{Im}\{a_k\} = -\text{Im}\{a_{-k}\} \end{cases}$$

(۴) $\text{Re}\{a_k\}$ با $\text{ev}\{a_k\}$ و $j\text{Im}\{a_k\}$ با $\text{od}\{a_k\}$ برابر است.

$$\begin{cases} \text{Re}\{a_k\} = \text{ev}\{a_k\} \\ j\text{Im}\{a_k\} = \text{od}\{a_k\} \end{cases}$$

(۵) ضرایب فوریه $x_e(t)$ برابر $\text{Re}\{a_k\}$ و ضرایب فوریه $x_o(t)$ برابر $j\text{Im}\{a_k\}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} x_e(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} \text{Re}\{a_k\} \\ x_o(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} j\text{Im}\{a_k\} \end{cases}$$

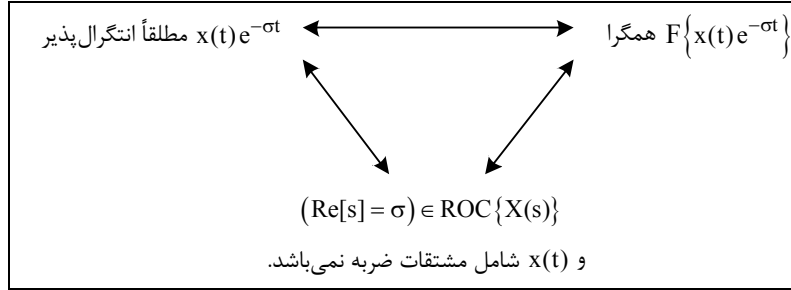


نکته ۹۷: اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و زوج باشد، ضرایب فوریه آن نیز حقیقی و زوج است و اگر $x(t)$ یا $x[n]$ حقیقی و فرد باشد، ضرایب فوریه آن موهومی و فرد خواهد بود.

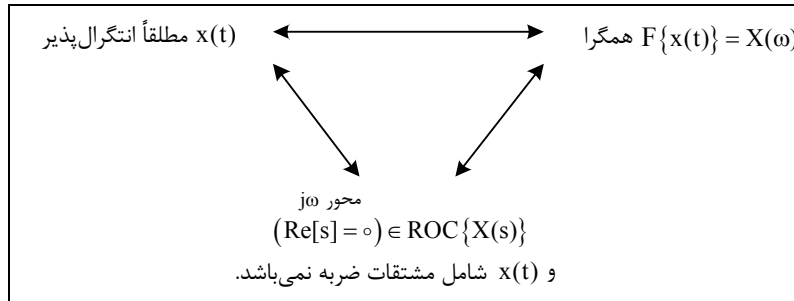
$$\begin{cases} a_k \text{ حقیقی و زوج} \xleftrightarrow{\text{FS}} x(t) \text{ حقیقی و زوج} \\ a_k \text{ موهومی و فرد} \xleftrightarrow{\text{FS}} x(t) \text{ حقیقی و فرد} \end{cases}$$

رابطه تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه

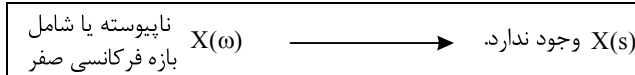
نکته ۹۸: اگر $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:



نکته ۹۹: اگر $x(t)$ دارای تبدیل لاپلاس $X(s)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:



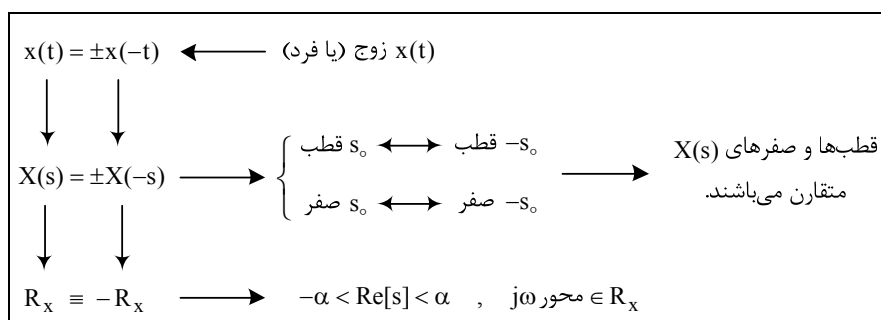
نکته ۱۰۰: اگر سیگنالی تبدیل فوریه داشته باشد، ولی تبدیل فوریه آن ناپیوستگی داشته و یا در بازه‌ای از فرکانس برابر صفر باشد، آن سیگنال تبدیل لاپلاس نخواهد داشت، به عنوان مثال، سیگنال سینک، سیگنال ثابت و سیگنال‌های متناوب تبدیل لاپلاس ندارند.



این نکته در مورد تبدیل \mathcal{L} نیز برقرار است.

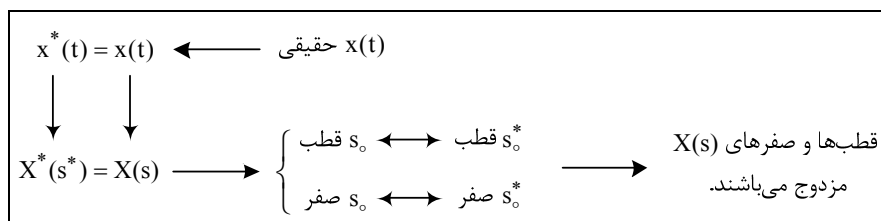
تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۱۰۱: اگر $x(t)$ زوج (یا فرد) باشد، تبدیل لاپلاس آن نیز زوج (یا فرد) است، یعنی $X(s) = X(-s)$ (یا $X(s) = -X(-s)$) می‌باشد. در نتیجه قطب‌ها و صفرهای $X(s)$ ، قرینه هم (متقارن) می‌باشند، یعنی اگر s_0 قطب $X(s)$ باشد، $-s_0$ نیز قطب $X(s)$ خواهد بود، و اگر s_0 صفر $X(s)$ باشد، $-s_0$ نیز صفر $X(s)$ خواهد بود. همچنین ناحیه همگرایی $X(s)$ (یعنی R_x) نسبت به محور $j\omega$ قرینه است و حتماً شامل محور $j\omega$ نیز خواهد بود، یعنی ناحیه همگرایی برابر $-\alpha < \text{Re}[s] < \alpha$ است. این نکته و اثبات سطحی آن را در ذیل مشاهده می‌کنید:



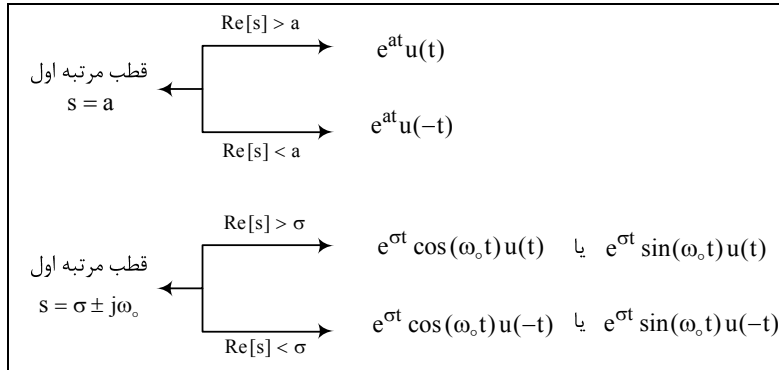
تبدیل لاپلاس سیگنال‌های حقیقی

نکته ۱۰۲: اگر $x(t)$ حقیقی باشد و $X(s)$ قطبی (یا صفری) در s_0 داشته باشد، حتماً قطبی (یا صفری) در s_0^* نیز خواهد داشت، یعنی قطب‌ها و صفرهای مختلط $X(s)$ مزدوج هستند.



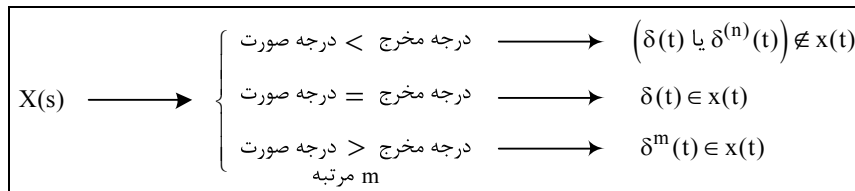
رابطه قطب در حوزه لاپلاس با حوزه زمان

نکته ۱۰۳: قطب مرتبه اول $s = a$ در یک تبدیل لاپلاس گویا، معادل عبارت $e^{at}u(\pm t)$ در حوزه زمان می‌باشد. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب به صورت $\text{Re}[s] > a$ باشد، سیگنال سمت راستی یعنی $e^{at}u(t)$ در نظر گرفته می‌شود و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب به صورت $\text{Re}[s] < a$ باشد، سیگنال سمت چپی یعنی $e^{at}u(-t)$ قابل قبول خواهد بود. همچنین قطب‌های مزدوج مرتبه اول به شکل $s = \sigma \pm j\omega_0$ در یک تبدیل لاپلاس گویا، معادل عباراتی به صورت $e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t)u(\pm t)$ یا $e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t)u(\pm t)$ در حوزه زمان می‌باشند. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $\text{Re}[s] > \sigma$ باشد، سیگنال سمت راستی یعنی $e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t)u(t)$ یا $e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t)u(t)$ در نظر گرفته می‌شود و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب به صورت $\text{Re}[s] < \sigma$ باشد، سیگنال سمت چپی یعنی $e^{\sigma t} \cos(\omega_0 t)u(-t)$ یا $e^{\sigma t} \sin(\omega_0 t)u(-t)$ قابل قبول خواهد بود.



تأثیر ضربه و مشتقات آن در حوزه لاپلاس

نکته ۱۰۴: اگر درجه صورت $X(s)$ از درجه مخرج آن کمتر باشد، $x(t)$ شامل ضربه و مشتقات آن نمی‌باشد. ولی اگر درجه صورت $X(s)$ با درجه مخرج آن برابر باشد، $x(t)$ شامل ضربه می‌باشد. همچنین اگر درجه صورت $X(s)$ ، m مرتبه از درجه مخرج آن، بیشتر باشد، $x(t)$ شامل مشتق m ام ضربه خواهد بود.



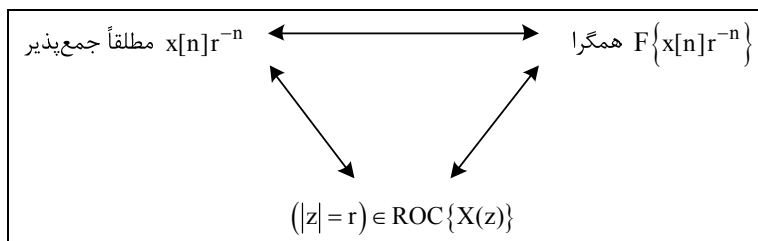
تبدیل لاپلاس سیگنال‌های نیمه‌متناوب

نکته ۱۰۵: فرض کنید سیگنال $x(t)$ برای $t < 0$ برابر صفر و برای $t \geq 0$ با دوره تناوب T متناوب است. اگر $f(t)$ برابر همان $x(t)$ در یک دوره تناوب باشد، تبدیل لاپلاس $x(t)$ برابر $X(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}}$ با ناحیه همگرایی $\text{Re}[s] > 0$ می‌باشد که $F(s)$ برابر تبدیل لاپلاس سیگنال $f(t)$ است.

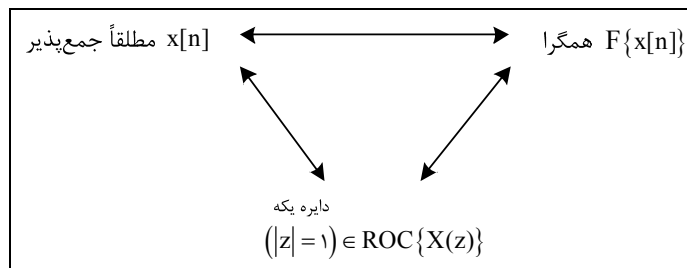
$$\begin{cases} x(t+T) = x(t), & t \geq 0 \\ x(t) = 0, & t < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{F(s)}{1 - e^{-sT}}, & \text{Re}[s] > 0 \\ f(t) = x(t), & 0 \leq t < T \end{cases}$$

رابطه تبدیل \mathcal{L} و تبدیل فوریه

نکته ۱۰۶: اگر $x[n]$ دارای تبدیل \mathcal{L} برابر $X(z)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:

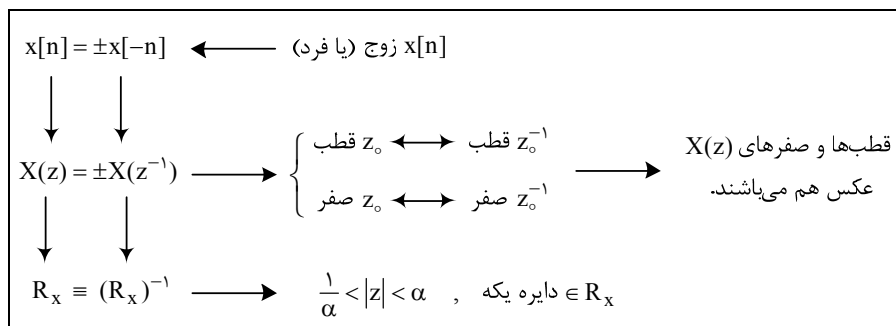


نکته ۱۰۷: اگر $x[n]$ دارای تبدیل \mathcal{L} برابر $X(z)$ باشد، آنگاه رابطه سه طرفه زیر برقرار است:



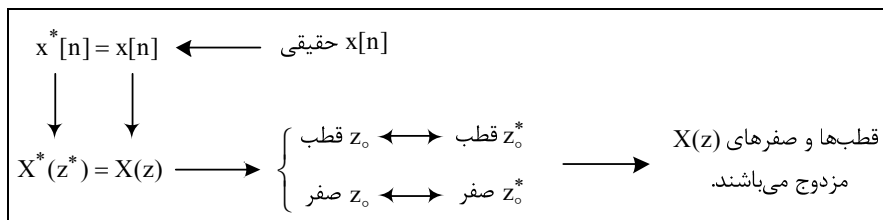
تبدیل \mathcal{L} سیگنال‌های زوج و فرد

نکته ۱۰-۸: اگر سیگنال $x[n]$ زوج (یا فرد) باشد، آنگاه $X(z) = X(z^{-1})$ (یا $X(z) = -X(z^{-1})$) می‌باشد. در نتیجه قطب‌ها و همچنین صفرهای $X(z)$ ، عکس هم می‌باشند، یعنی اگر z_0 قطب $X(z)$ باشد، z_0^{-1} نیز قطب $X(z)$ خواهد بود، و اگر z_0 صفر $X(z)$ باشد، z_0^{-1} نیز صفر $X(z)$ خواهد بود. همچنین ناحیه همگرایی $X(z)$ (یعنی R_x) نسبت به دایره یکه، تقارن معکوس دارد و حتماً شامل دایره یکه نیز خواهد بود، یعنی ناحیه همگرایی به صورت $\frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha$ می‌باشد. این نکته و اثبات سطحی آن را در ذیل مشاهده می‌کنید:



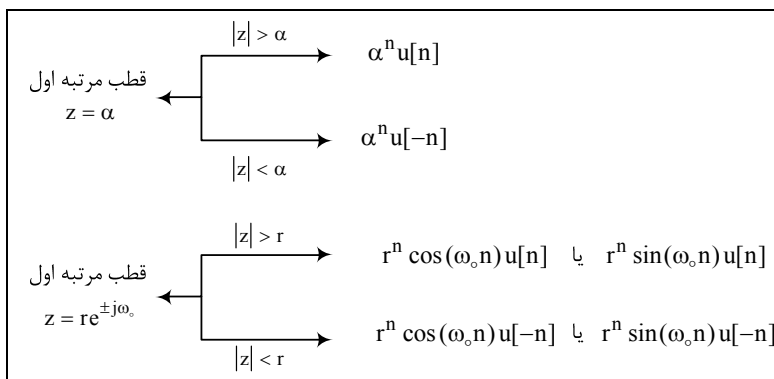
تبدیل \mathcal{L} سیگنال‌های حقیقی

نکته ۱۰-۹: اگر $x[n]$ حقیقی باشد و $X(z)$ قطبی (یا صفری) در z_0 داشته باشد، حتماً قطبی (یا صفری) در z_0^* نیز خواهد داشت، یعنی قطب‌ها و صفرهای مختلط $X(z)$ مزدوج هستند.



رابطه قطب در حوزه \mathcal{Z} با حوزه زمان

نکته ۱۱۰: قطب مرتبه اول $z = \alpha$ در یک تبدیل \mathcal{Z} گویا، معادل عبارت $\alpha^n u[\pm n]$ در حوزه زمان است. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z| > \alpha$ باشد، سیگنال سمت راستی یعنی $\alpha^n u[n]$ را در نظر می‌گیریم و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z| < \alpha$ باشد، سیگنال سمت چپی یعنی $\alpha^n u[-n]$ قابل قبول است. همچنین قطب‌های مزدوج مرتبه اول $z = r e^{\pm j\omega_0}$ در یک تبدیل \mathcal{Z} گویا، معادل عباراتی به صورت $r^n \cos(\omega_0 n) u[\pm n]$ یا $r^n \sin(\omega_0 n) u[\pm n]$ در حوزه زمان می‌باشند. اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z| > r$ باشد، سیگنال سمت راستی یعنی $r^n \cos(\omega_0 n) u[n]$ یا $r^n \sin(\omega_0 n) u[n]$ را در نظر می‌گیریم و اگر ناحیه همگرایی مربوط به این قطب برابر $|z| < r$ باشد، سیگنال سمت چپی یعنی $r^n \cos(\omega_0 n) u[-n]$ یا $r^n \sin(\omega_0 n) u[-n]$ قابل قبول است.



تبدیل \mathcal{Z} سیگنال‌های نیمه‌متناوب

نکته ۱۱۱: فرض کنید سیگنال $x[n]$ برای $n < 0$ برابر صفر و برای $n \geq 0$ با دوره تناوب N متناوب است. اگر $f[n]$ برابر همان $x[n]$ در یک دوره تناوب باشد، تبدیل \mathcal{Z} سیگنال $x[n]$ برابر $X(z) = \frac{F(z)}{1 - z^{-N}}$ با ناحیه همگرایی $|z| > 1$ می‌باشد که $F(z)$ برابر تبدیل \mathcal{Z} سیگنال $f[n]$ است.

$\begin{cases} x[n+N] = x[n], & n \geq 0 \\ x[n] = 0, & n < 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X(z) = \frac{F(z)}{1 - z^{-N}}, & z > 1 \\ f[n] = x[n], & 0 \leq n < N \end{cases}$

رابطه مساحت ورودی و خروجی در سیستم‌های LTI

نکته ۱۱۲: اگر سیگنال‌های x ، h و y به ترتیب ورودی، پاسخ ضربه و خروجی یک سیستم LTI زمان پیوسته یا زمان گسسته باشند، روابط زیر بین انتگرال و مجموع آن‌ها برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]$$

رابطه پاسخ ضربه و پاسخ پله سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس

نکته ۱۱۳: اگر $h(t)$ پاسخ ضربه و $s(t)$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان پیوسته باشند، روابط زیر بین $h(t)$ و $s(t)$ در حوزه زمان، بین $H(\omega)$ و $S(\omega)$ در حوزه فوریه و بین $H(s)$ و $S(s)$ در حوزه لاپلاس برقرار است:

$$\begin{cases} s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \\ h(t) = s'(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(\omega) = H(\omega) \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right] \\ H(\omega) = j\omega S(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(s) = \frac{1}{s} H(s) \quad , \quad R_s \geq (R_h \cap \text{Re}[s] > 0) \\ H(s) = s S(s) \quad , \quad R_h \geq [R_s \cap (-\infty < \text{Re}[s] < +\infty)] \end{cases}$$

نکته ۱۱۴: اگر $h[n]$ پاسخ ضربه و $s[n]$ پاسخ پله یک سیستم LTI زمان گسسته باشند، روابط زیر بین $h[n]$ و $s[n]$ در حوزه زمان، بین $H(\omega)$ و $S(\omega)$ در حوزه فوریه و بین $H(z)$ و $S(z)$ در حوزه \mathcal{Z} برقرار است:

$$\begin{cases} s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \\ h[n] = s[n] - s[n-1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(\omega) = H(\omega) \left[\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \tilde{\delta}(\omega) \right] \\ H(\omega) = (1 - e^{-j\omega}) S(\omega) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} H(z) \quad , \quad R_s \geq [R_h \cap (|z| > 1)] \\ H(z) = (1 - z^{-1}) S(z) \quad , \quad R_h \geq [R_s \cap (|z| > 0)] \end{cases}$$

رابطه محدوده زمانی ورودی و خروجی در سیستم‌های LTI

نکته ۱۱۵: در یک سیستم LTI، اگر $x(t)$ و $h(t)$ هر دو سمت راستی باشند (یعنی از سمت چپ محدود باشند) و حد سمت چپ آن‌ها به ترتیب برابر x_1 و h_1 باشد، آنگاه $y(t)$ نیز سمت راستی خواهد بود و حد سمت چپ آن برابر $y_1 = x_1 + h_1$ می‌باشد. همچنین اگر $x(t)$ و $h(t)$ هر دو سمت چپی باشند (یعنی از سمت راست محدود باشند) و حد سمت راست آن‌ها به ترتیب برابر x_2 و h_2 باشد، آنگاه $y(t)$ نیز سمت چپی خواهد بود و حد سمت راست آن برابر $y_2 = x_2 + h_2$ می‌باشد. توجه داشته باشید که عکس این قضیه لزوماً برقرار نیست، یعنی مثلاً ممکن است $x(t)$ یا $h(t)$ سمت راستی نباشند اما $y(t)$ سمت راستی باشد.

$x(t)$	→	$[x_1, x_2]$
*	+	+
$h(t)$	→	$[h_1, h_2]$
$y(t) = x(t) * h(t)$	→	$[y_1 = x_1 + h_1, y_2 = x_2 + h_2]$

تغییرات در ورودی – خروجی سیستم‌های LTI

نکته ۱۱۶: در یک سیستم LTI، اگر ورودی یا سیگنال دلخواه $f(t)$ کانوالو شود، خروجی آن نیز با $f(t)$ کانوالو خواهد شد. به عبارت دیگر اگر ورودی $x_2(t)$ برابر ترکیب کانولوشنی از $x_1(t)$ و $f(t)$ باشد، خروجی $y_2(t)$ نیز برابر همان ترکیب از $y_1(t)$ و $f(t)$ خواهد بود.

$$x_2(t) = f(t) * x_1(t) \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y_2(t) = f(t) * y_1(t)$$

نکته ۱۱۷: در یک سیستم LTI، اگر پاسخ به ورودی $x(t)$ برابر $y(t)$ باشد، پاسخ به مشتق و انتگرال ورودی به ترتیب برابر مشتق و انتگرال خروجی خواهد بود.

$$x'(t) \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} y'(t) \quad , \quad \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{\text{سیستم LTI}} \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$$

پاسخ سیستم‌های LTI به ورودی‌های نمایی و متناوب

نکته ۱۱۸: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t) = e^{at}$ برابر $y(t) = H(a)e^{at}$ می‌باشد که $H(a)$ همان $H(s)$ به‌ازای $s = a$ است. بدیهی است که اگر $s = a$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار نداشته باشد، $H(a)$ و در نتیجه خروجی $y(t)$ در همه زمان‌ها بیکران و نامحدود خواهد شد.

$$x(t) = e^{at} \xrightarrow[\text{با تابع } H(s)]{\text{سیستم LTI}} y(t) = \begin{cases} H(a)e^{at} & , a \in \text{ROC}[H(s)] \\ H(a)e^{at} = \infty & , a \notin \text{ROC}[H(s)] \end{cases}$$

نکته ۱۱۹: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x[n] = \alpha^n$ برابر $y[n] = H(\alpha)\alpha^n$ می‌باشد که $H(\alpha)$ همان $H(z)$ (تابع تبدیل سیستم) به ازای $z = \alpha$ است (در حالت کلی ثابت مختلط است). بدیهی است که اگر $z = \alpha$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار نداشته باشد، $H(\alpha)$ و در نتیجه $y[n]$ در همه زمان‌ها بیکران و نامحدود می‌شود.

$$x[n] = \alpha^n \xrightarrow[\text{با تابع } H(z)]{\text{سیستم LTI}} y[n] = \begin{cases} H(\alpha)\alpha^n & , \alpha \in \text{ROC}[H(z)] \\ H(\alpha)\alpha^n = \infty & , \alpha \notin \text{ROC}[H(z)] \end{cases}$$

نکته ۱۲۰: پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ برابر $y(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$ می‌باشد که $H(\omega_0)$ همان $H(\omega)$ (پاسخ فرکانسی سیستم) به ازای $\omega = \omega_0$ است. در حالت زمان گسسته نیز عبارت مشابهی وجود دارد.

$$\begin{array}{ccc} x(t) = e^{j\omega_0 t} & \longrightarrow & y(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} \\ & \text{سیستم LTI} & \\ & H(\omega) & \\ x[n] = e^{j\omega_0 n} & \longrightarrow & y[n] = H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x(t) = e^{j2\pi f_0 t} & \longrightarrow & y(t) = H(f_0)e^{j2\pi f_0 t} \\ & \text{سیستم LTI} & \\ & H(f) & \\ x[n] = e^{j2\pi f_0 n} & \longrightarrow & y[n] = H(f_0)e^{j2\pi f_0 n} \end{array}$$

نکته ۱۲۱: در یک سیستم LTI حقیقی، پاسخ به ورودی‌های $\cos(\omega_0 t + \theta)$ و $\sin(\omega_0 t + \theta)$ به ترتیب برابر $|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0))$ و $|H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0))$ خواهد بود که $|H(\omega_0)|$ و $\angle H(\omega_0)$ اندازه و فاز تابع $H(\omega)$ در $\omega = \omega_0$ می‌باشند.

$$\begin{array}{ccc} x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta) & \longrightarrow & y(t) = |H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0)) \\ & \text{سیستم LTI و حقیقی} & \\ x(t) = \sin(\omega_0 t + \theta) & \longrightarrow & y(t) = |H(\omega_0)|\sin(\omega_0 t + \theta + \angle H(\omega_0)) \end{array}$$

نکته ۱۲۲: پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ به ورودی متناوب $x(t)$ با دوره تناوب اصلی T و فرکانس اصلی $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ و ضرایب فوریه a_k یعنی $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ برابر است با:

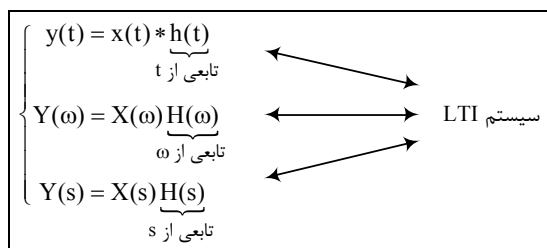
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow[\text{سیستم LTI}]{H(\omega)} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \xrightarrow[\text{سیستم LTI}]{H(\omega)} y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 n}$$

در واقع ضرایب فوریه خروجی برابر $b_k = a_k H(k\omega_0)$ می‌باشد (البته به شرطی که دوره تناوب اصلی خروجی و ورودی یکسان باشند).

ویژگی‌های سیستم‌های LTI

نکته ۱۲۳: اگر بتوان رابطه یک سیستم را در حوزه زمان به صورت $y(t) = x(t) * h(t)$ یا در حوزه فرکانس به صورت $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ (یا $Y(s) = X(s)H(s)$) نمایش داد، سیستم قطعاً LTI و دارای پاسخ ضربه $h(t)$ یا پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ (یا تابع تبدیل $H(s)$) می‌باشد. در حالت زمان‌گسسته نیز نکته مشابهی وجود دارد.



نکته ۱۲۴: در یک سیستم LTI، اگر ورودی $x(t)$ ترکیب خطی و انتقالی (یا در حالت کلی ترکیب کانولوشنی) از ورودی‌های دیگر باشد، خروجی آن نیز برابر ترکیب خطی و انتقالی (یا در حالت کلی ترکیب کانولوشنی) از خروجی‌های دیگر خواهد بود.

$x(t) = \alpha x_1(t - t_1) + \beta x_2(t - t_2) + \dots$	\longrightarrow سیستم LTI \longrightarrow	$y(t) = \alpha y_1(t - t_1) + \beta y_2(t - t_2) + \dots$
$x(t) = f_1(t) * x_1(t) + f_2(t) * x_2(t) + \dots$	\longrightarrow سیستم LTI \longrightarrow	$y(t) = f_1(t) * y_1(t) + f_2(t) * y_2(t) + \dots$

نکته ۱۲۵: اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت نمایی دو طرفه e^{at} (در حالت زمان‌پیوسته) یا α^n (در حالت زمان‌گسسته) باشد، خروجی نیز مضربی ثابت از همین نمایی‌ها خواهد بود (البته صفر و بی‌نهایت نیز می‌توانند به عنوان یک مضرب ثابت تلقی شوند). a و α در حالت کلی ثابت مختلط هستند.

$x(t) = e^{at} \longrightarrow y(t) = A e^{at}$
سیستم LTI
$x[n] = \alpha^n \longrightarrow y[n] = A \alpha^n$

نکته ۱۲۶: در یک سیستم LTI، ناحیه همگرایی $X(s)$ (تبدیل لاپلاس ورودی) و ناحیه همگرایی $Y(s)$ (تبدیل لاپلاس خروجی) و ناحیه همگرایی $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ (تابع تبدیل سیستم) باید با هم اشتراک داشته باشند. در حالت زمان‌گسسته نیز نکته مشابهی در حوزه \mathcal{Z} وجود دارد.

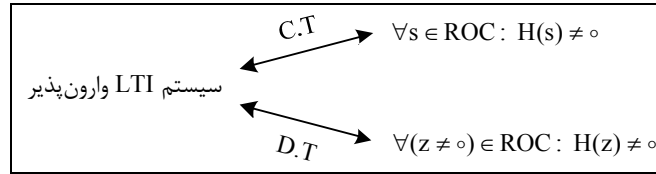
$Y(s) = X(s)H(s)$
سیستم LTI
$[R_x \cap R_y \cap R_h] \neq \emptyset$

نکته ۱۲۷: در یک سیستم LTI، اگر طیف ورودی در بازه‌ای از فرکانس برابر صفر باشد، طیف خروجی نیز در آن بازه فرکانسی برابر صفر خواهد بود (منظور از طیف، همان تبدیل فوریه است).

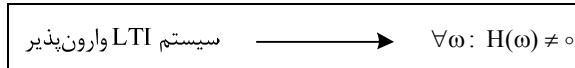
$X(\omega) = 0, \omega_1 < \omega < \omega_2 \longrightarrow Y(\omega) = 0, \omega_1 < \omega < \omega_2$
سیستم LTI

سیستم‌های LTI وارون پذیر

نکته ۱۲۸: شرط لازم و کافی برای وارون پذیری یک سیستم LTI زمان پیوسته با تابع تبدیل $H(s)$ این است که $H(s)$ صفری در ناحیه همگرایی خود نداشته باشد. به طور معادل در حالت زمان گسسته، شرط لازم و کافی برای وارون پذیری یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(z)$ این است که $H(z)$ صفری در ناحیه همگرایی خود نداشته باشد. البته اگر $H(z)$ صفری در $z = 0$ داشته باشد، استثنائاً مشکلی برای وارون پذیری سیستم ایجاد نخواهد شد.



نکته ۱۲۹: شرط لازم برای وارون پذیری یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ این است که $H(\omega)$ صفری نداشته باشد.



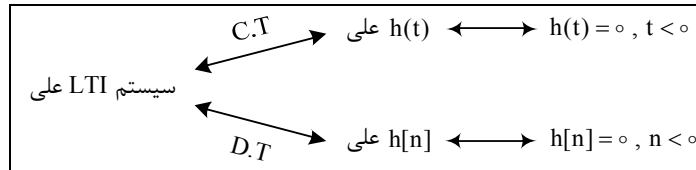
نکته ۱۳۰: اگر تابع تبدیل یک سیستم LTI وارون پذیر برابر $H(s)$ با ناحیه همگرایی R باشد، آنگاه تابع تبدیل سیستم وارون آن برابر $H_i(s)$ با ناحیه همگرایی R_i می‌باشد، به طوری که:

$$H_i(s) = \frac{1}{H(s)}, \quad \text{ROC: } R_i, \quad R_i \cap R \neq \emptyset$$

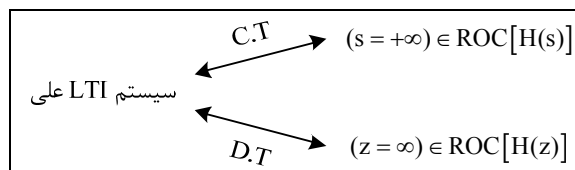
در حالت زمان گسسته نیز نکته مشابهی در حوزه \mathcal{Z} وجود دارد.

سیستم‌های LTI علی

نکته ۱۳۱: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ این است که $h(t) = 0$ برای $t < 0$ برابر صفر باشد، یا به طور معادل در حالت زمان گسسته $h[n] = 0$ برای $n < 0$ برابر صفر باشد.

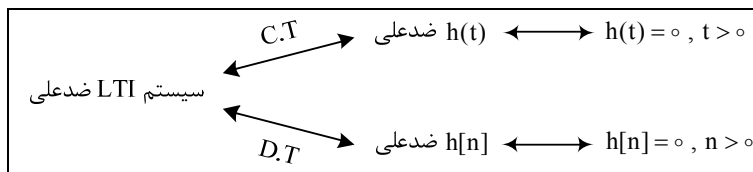


نکته ۱۳۲: شرط لازم و کافی برای علی بودن یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که $s = +\infty$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته باشد، یا به طور معادل، $z = \infty$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته باشد.

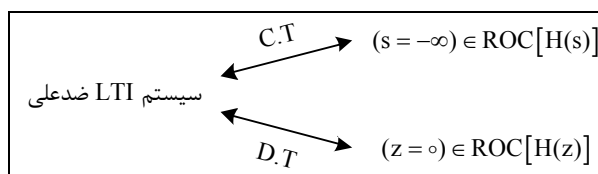


سیستم‌های LTI ضدعلی

نکته ۱۳۳: شرط لازم و کافی برای ضدعلی بودن یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ این است که $h(t)$ برای $t > 0$ برابر صفر باشد، یا به طور معادل در حالت زمان گسسته $h[n]$ برای $n > 0$ برابر صفر باشد.

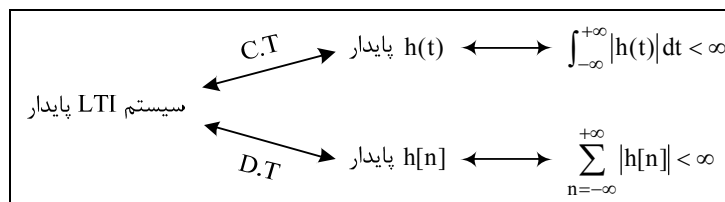


نکته ۱۳۴: شرط لازم و کافی برای ضدعلی بودن یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که $s = -\infty$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته باشد، یا به طور معادل، $z = 0$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته باشد.

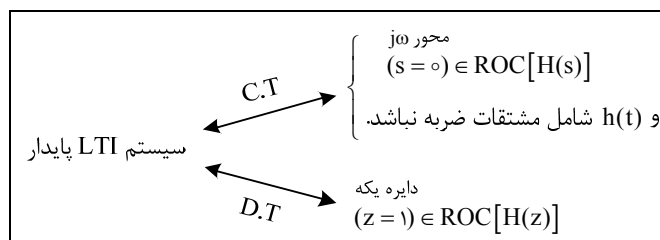


سیستم‌های LTI پایدار

نکته ۱۳۵: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ این است که $h(t)$ سیگنالی پایدار (مطلقاً) باشد، یا به طور معادل در حالت زمان گسسته $h[n]$ سیگنالی پایدار (مطلقاً جمع پذیر) باشد.



نکته ۱۳۶: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که محور $j\omega$ ($\text{Re}[s] = 0$) یا به عبارت ساده‌تر $s = 0$ در ناحیه همگرایی $H(s)$ قرار داشته باشد و $h(t)$ نیز شامل مشتقات ضربه نباشد، یا به طور معادل در حالت زمان گسسته، دایره یک ($|z| = 1$) یا به عبارت ساده‌تر $z = 1$ در ناحیه همگرایی $H(z)$ قرار داشته باشد.

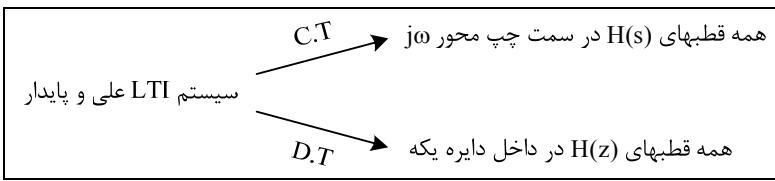


نکته ۱۳۷: شرط لازم و کافی برای پایداری یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی $H(\omega)$ این است که $H(\omega)$ به ازای همه فرکانس‌ها کراندار (محدود) و پیوسته باشد.

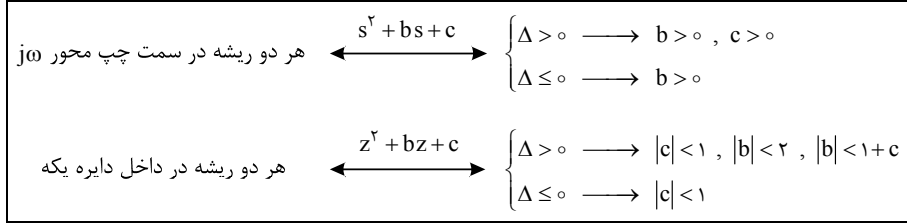
$$\text{سیستم LTI پایدار} \iff \forall \omega: |H(\omega)| < \infty$$

سیستم‌های LTI علی و پایدار

نکته ۱۳۸: شرط لازم برای علی و پایدار بودن یک سیستم LTI با تابع تبدیل $H(s)$ این است که هیچ قطبی در سمت راست محور $j\omega$ نباشد. به طور معادل در حالت زمان گسسته، هیچ قطبی نباید در خارج دایره یک قرار گیرد.

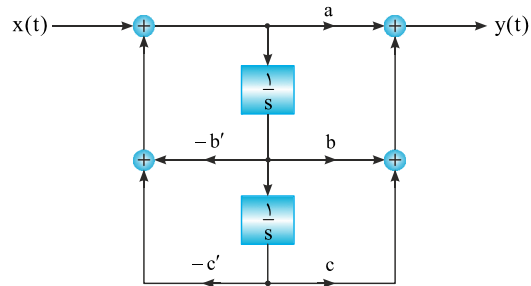


نکته ۱۳۹: شرط لازم و کافی برای اینکه هر دو ریشه چندجمله‌ای $s^2 + bs + c$ در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند، این است که $b, c > 0$ باشند. البته اگر $\Delta \leq 0$ باشد (یعنی ریشه‌ها مضاعف یا مختلط باشند)، شرط $b > 0$ کفایت می‌کند. همچنین شرط لازم و کافی برای اینکه هر دو ریشه چندجمله‌ای $z^2 + bz + c$ در داخل دایره یکه قرار داشته باشند، این است که $|c| < 1$ و $|b| < 1 + c$ و $|b| < 1 + c$ باشند. البته اگر $\Delta \leq 0$ باشد (یعنی ریشه‌ها مضاعف یا مختلط باشند)، شرط $|c| < 1$ کفایت می‌کند.



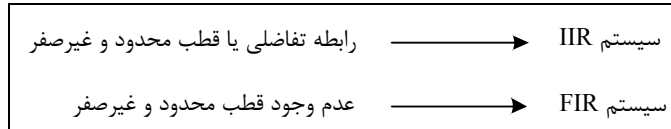
دیاگرام بلوکی سیستم‌های LTI

نکته ۱۴۰: بلوک دیاگرام زیر معادل تابع تبدیل $H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + b's + c'}$ می‌باشد و پیشنهاد می‌شود آن را به خاطر بسپارید. این نکته به طور مشابه در حوزه \mathcal{Z} به ازای $s = z^{-1}$ یا $\frac{1}{s} = z^{-1}$ برقرار است.



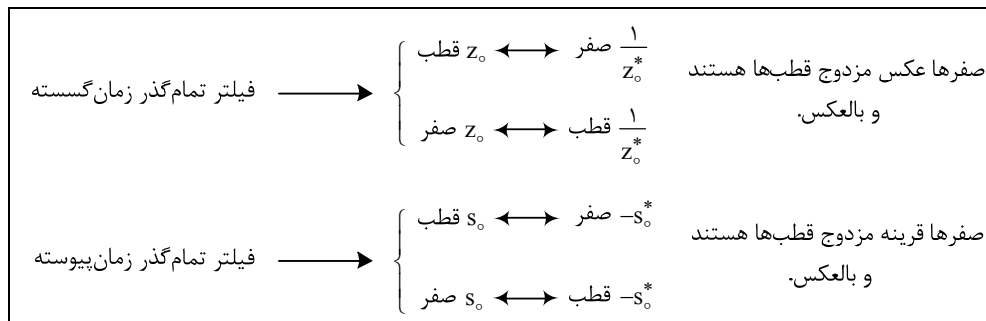
فیلترهای FIR و IIR

نکته ۱۴۱: هر سیستم یا فیلتر LTI که رابطه ورودی - خروجی آن به صورت یک معادله تفاضلی باشد یا تابع تبدیل آن گویا و دارای قطب محدود و غیرصفر در صفحه Z باشد، IIR خواهد بود. همچنین اگر تابع تبدیل دارای قطب محدود غیرصفر نباشد، سیستم FIR خواهد بود.



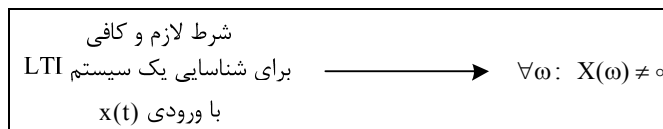
فیلترهای تمام‌گذر

نکته ۱۴۲: در یک فیلتر تمام‌گذر زمان‌گسسته، صفرها عکس مزدوج قطبها هستند و بالعکس. یعنی اگر Z_0 قطب $H(z)$ باشد، $\frac{1}{Z_0^*}$ صفر $H(z)$ خواهد بود و اگر Z_0 صفر $H(z)$ باشد، $\frac{1}{Z_0^*}$ قطب $H(z)$ خواهد بود. در حالت زمان‌پیوسته نیز صفرها قرینه مزدوج قطبها هستند و بالعکس. یعنی اگر s_0 قطب $H(s)$ باشد، $-s_0^*$ صفر $H(s)$ خواهد بود و اگر s_0 صفر $H(s)$ باشد، $-s_0^*$ قطب $H(s)$ خواهد بود.

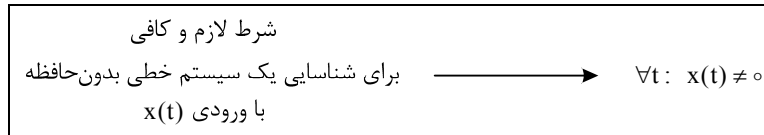


شناسایی سیستمها

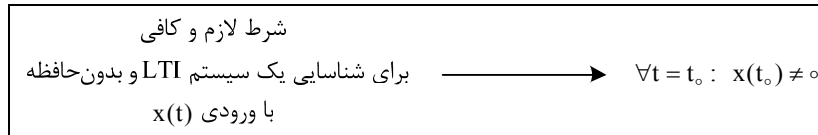
نکته ۱۴۳: یک سیستم LTI زمان‌پیوسته یا زمان‌گسسته را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی - خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد، به شرطی که طیف ورودی در هیچ فرکانسی صفر نباشد.



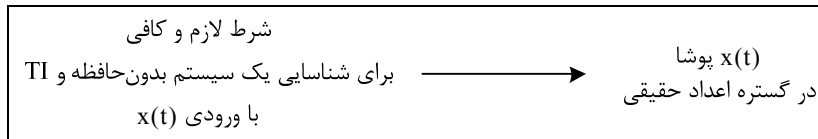
نکته ۱۴۴: یک سیستم خطی بدون حافظه را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی - خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد، به شرطی که سیگنال ورودی در هیچ زمانی صفر نباشد.



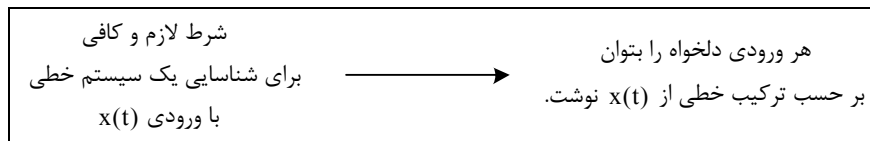
نکته ۱۴۵: یک سیستم LTI و بدون حافظه را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی - خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد، به شرطی که سیگنال ورودی حداقل در یک لحظه، مخالف صفر باشد.



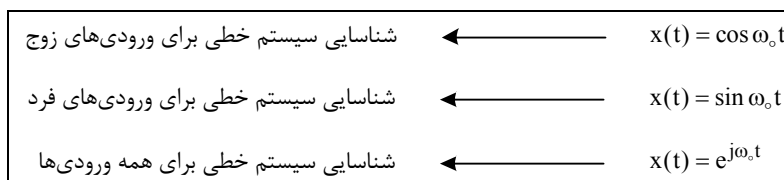
نکته ۱۴۶: یک سیستم بدون حافظه و TI را می‌توان با داشتن یک زوج ورودی - خروجی از آن کاملاً شناسایی کرد (البته فقط برای ورودی‌های حقیقی). به شرطی که سیگنال ورودی همه مقادیر حقیقی را به خود بگیرد.



نکته ۱۴۷: برای شناسایی یک سیستم خطی باید ورودی یا دسته ورودی‌هایی به سیستم اعمال کنیم که بتوان هر ورودی دلخواه دیگر را بر حسب ترکیب خطی از آن‌ها نوشت. در این صورت با داشتن پاسخ آن دسته از ورودی‌ها پاسخ به هر ورودی دلخواه دیگر به دست خواهد آمد.



نکته ۱۴۸: اگر در یک سیستم خطی، پاسخ به دسته ورودی‌های $\cos \omega_0 t$ به‌ازای همه ω_0 ها داده شود، سیستم برای ورودی‌های زوج شناسایی می‌شود و در نتیجه می‌توان رابطه آن را برای ورودی‌های زوج حدس زد. همچنین اگر پاسخ به دسته ورودی‌های $\sin \omega_0 t$ به‌ازای همه ω_0 ها داده شود، سیستم برای ورودی‌های فرد شناسایی می‌شود و در نتیجه می‌توان رابطه آن را برای ورودی‌های فرد حدس زد. و در حالت کلی اگر در یک سیستم خطی، پاسخ به دسته ورودی‌های $\cos \omega_0 t$ و $\sin \omega_0 t$ یا در واقع پاسخ به دسته ورودی‌های $e^{j\omega_0 t}$ به‌ازای همه ω_0 ها داده شود، سیستم (برای همه ورودی‌ها) کاملاً شناسایی می‌شود و در نتیجه می‌توان رابطه آن را برای همه ورودی‌ها حدس زد.



نمونه برداری

نکته ۱۴۹: هرگاه از سیگنال زمان پیوسته‌ای، با پریود نمونه برداری T یا به طور معادل فرکانس نمونه برداری $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ نمونه برداری کنیم، طیف آن سیگنال در حوزه ω ، در $\frac{1}{T}$ ضرب و با مضاربی از ω_s به چپ و راست شیفت پیدا می‌کند و با هم جمع می‌شود.

$$x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \xrightarrow{F} \frac{1}{T} X_c(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega-n\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

نکته ۱۵۰: هرگاه از سیگنال زمان پیوسته‌ای، با پریود نمونه برداری T یا به طور معادل فرکانس نمونه برداری $f_s = \frac{1}{T}$ نمونه برداری کنیم، طیف آن سیگنال در حوزه f ، در $\frac{1}{T}$ ضرب و با مضاربی از f_s به چپ و راست شیفت پیدا می‌کند و با هم جمع می‌شود.

$$x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \xrightarrow{F} \frac{1}{T} X_c(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nf_s), \quad f_s = \frac{1}{T}$$

قضایای مقدار اولیه و نهایی در لاپلاس

قضیه مقدار اولیه: اگر $x(t)$ برای $t < 0$ برابر صفر باشد و در $t = 0$ نیز ضربه یا مشتقات ضربه نداشته باشد، آنگاه $x(0^+)$ محدود و برابر $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ خواهد بود.

$$x(t) = 0, t < 0 \quad \text{و} \quad \left(\delta(t) \text{ یا } \delta^{(n)}(t) \right) \notin x(t) \quad \longrightarrow \quad x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

قضیه مقدار نهایی: اگر $x(t)$ برای $t < t_0$ برابر صفر باشد و همه قطب‌های محدود $sX(s)$ نیز در سمت چپ محور $j\omega$ قرار داشته باشند یا به عبارت دیگر، $sX(s)$ هیچ قطب محدودی در سمت راست یا روی محور $j\omega$ نداشته باشد،^۱ آنگاه $x(+\infty)$ محدود و برابر $x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ خواهد بود؛ ولی اگر همه قطب‌های محدود $sX(s)$ سمت چپ محور $j\omega$ قرار نداشته باشند، در ناحیه همگرایی $sX(s)$ قرار نخواهد گرفت و بنابراین: $x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \infty$.

$$x(t) = 0, t < t_0 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s), & \text{همه قطب‌های محدود } sX(s) \text{ سمت چپ محور } j\omega \\ x(+\infty) = \infty, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

^۱ شرط وجود همه قطب‌های $sX(s)$ در سمت چپ محور $j\omega$ ، تضمین می‌کند که در $s = 0$ در ناحیه همگرایی $sX(s)$ قرار بگیرد، زیرا سیگنال سمت راستی است و ROC نیز سمت راست راست‌ترین قطب خواهد بود.

قضایای مقدار اولیه و نهایی در \mathcal{L}

قضیه مقدار اولیه: اگر $x[n]$ برای $n < n_0$ برابر صفر باشد، آنگاه $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ خواهد بود.

$$x[n] = 0, n < 0 \longrightarrow x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

قضیه مقدار نهایی: اگر $x[n]$ برای $n < n_0$ برابر صفر باشد و همه قطب‌های محدود $(1-z^{-1})X(z)$ نیز در داخل دایره یک قرار داشته باشند یعنی $(1-z^{-1})X(z)$ هیچ قطب محدودی در خارج یا روی دایره یک نداشته باشد،^۱ آنگاه $x[+\infty]$ محدود و برابر $x[+\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})X(z)$ خواهد بود ولی اگر همه قطب‌های محدود $(1-z^{-1})X(z)$ در داخل دایره یک قرار نداشته باشند، در $z=1$ ناحیه همگرایی $(1-z^{-1})X(z)$ قرار نخواهد گرفت و بنابراین:

$$x[+\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})X(z) = \infty$$

$$x[n] = 0, n < n_0 \longrightarrow \begin{cases} x[+\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})X(z) & , \quad \text{همه قطب‌های محدود } (1-z^{-1})X(z) \\ & \text{در داخل دایره یک} \\ x[+\infty] = \infty & , \quad \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

^۲ شرط وجود همه قطب‌های $(1-z^{-1})X(z)$ در داخل دایره یک، تضمین می‌کند که $z=1$ در ناحیه همگرایی $(1-z^{-1})X(z)$ قرار بگیرد، زیرا سیگنال سمت راستی است و ROC نیز خارج‌ترین قطب خواهد بود.

سیگنال‌های مختلط

$$\text{Re}[x(t)] = \frac{x(t) + x^*(t)}{2}, \quad \text{Im}[x(t)] = \frac{x(t) - x^*(t)}{2j}$$

$$|x(t)|^2 = x(t) \cdot x^*(t)$$

انرژی و توان

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt, \quad P_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_\infty}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2, \quad P_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_\infty}{2N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

فرمول تصاعد هندسی

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} \alpha^n = \alpha^{m_1} + \alpha^{m_1+1} + \dots + \alpha^{m_2} = \begin{cases} \frac{\alpha^{m_1} - \alpha^{m_2+1}}{1 - \alpha}, & \alpha \neq 1 \\ m_2 - m_1 + 1, & \alpha = 1 \end{cases}$$

ک.م.م دو عدد کسری

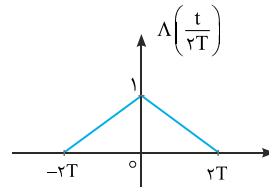
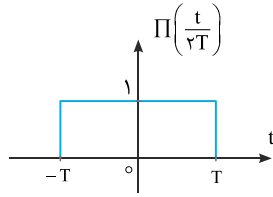
$$\text{lcm}\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{\text{lcm}(a, c)}{\text{gcd}(b, d)}$$

فرمول پادمشتق

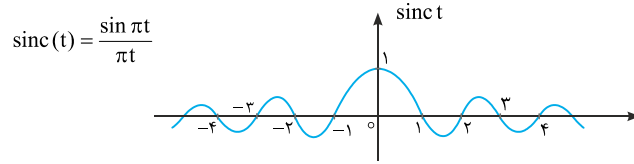
$$\frac{d \left[\int_{g(t)}^{f(t)} h(\tau) d\tau \right]}{dt} = f'(t) \cdot h(f(t)) - g'(t) \cdot h(g(t))$$

سیگنال‌های پالس و مثلث

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{\tau T}\right) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & \text{O.W} \end{cases}, \quad \Lambda\left(\frac{t}{\tau T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{\tau T}, & |t| < \tau T \\ 0, & \text{O.W} \end{cases}$$



سیگنال سینک



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(t)| dt = \infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{sinc}(t)|^2 dt = 1$$

فرمول‌های اویلر

$$\begin{cases} e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \\ e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \end{cases}, \quad \cos \theta = \text{Re}[e^{j\theta}] = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \text{Im}[e^{j\theta}] = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$e^{\pm j\tau\pi} = 1, \quad e^{\pm j\pi} = -1, \quad e^{j\frac{\pi}{\tau}} = e^{-j\frac{\tau\pi}{\tau}} = j, \quad e^{-j\frac{\pi}{\tau}} = e^{j\frac{\tau\pi}{\tau}} = -j$$

$$e^{\pm j\tau\pi n} = 1^n = 1, \quad e^{\pm j\pi n} = (-1)^n, \quad e^{j\frac{\pi}{\tau}n} = e^{-j\frac{\tau\pi}{\tau}n} = j^n, \quad e^{-j\frac{\pi}{\tau}n} = e^{j\frac{\tau\pi}{\tau}n} = (-j)^n$$

$$e^{j(\theta \pm \tau\pi n)} = e^{j\theta}, \quad \cos(\theta \pm \tau\pi n) = \cos \theta, \quad \sin(\theta \pm \tau\pi n) = \sin \theta$$

ضربه، پله و شیب زمان گسسته

$$\delta[f(n)] = \begin{cases} 1, & f(n) = 0 \\ 0, & f(n) \neq 0 \end{cases}, \quad u[f(n)] = \begin{cases} 1, & f(n) \geq 0 \\ 0, & f(n) < 0 \end{cases}$$

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = nu[n], \quad r[f(n)] = \begin{cases} f(n), & f(n) \geq 0 \\ 0, & f(n) < 0 \end{cases} = f(n) \cdot u[f(n)]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] = 1$$

$$x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0] = \begin{cases} x[n_0], & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - k] = 1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \delta[n - k] = x[n]$$

$$\delta[an] = \delta[n], \quad \delta[af(n)] = \delta[f(n)], \quad a \neq 0$$

$$u[mn] = u[n], \quad u[mf(n)] = u[f(n)], \quad m > 0$$

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] = u[n], \quad \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] = u[n]$$

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} \delta[k - n_0] = u[m_2 - n_0] - u[m_1 - 1 - n_0], \quad m_2 \geq m_1$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n + kN] = \begin{cases} 1, & N \text{ مضرب } n \\ 0, & \text{O.W} \end{cases}$$

ضربه، پله و شیب زمان پیوسته

$$u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \delta(\tau - t_0) d\tau$$

$$u(f(t)) = \begin{cases} 1, & f(t) > 0 \\ 0, & f(t) < 0 \end{cases}, \quad \delta(f(t)) = u'(f(t)) = \frac{[u(f(t))]'}{f'(t)}$$

$$r(f(t)) = f(t) \cdot u(f(t)) = \begin{cases} f(t), & f(t) > 0 \\ 0, & f(t) < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad \delta(af(t)) = \frac{1}{|a|} \delta(f(t)), \quad a \neq 0$$

$$u(at) = u(t), \quad u(af(t)) = u(f(t)), \quad a > 0$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\int_0^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau = u(t), \quad \int_{-\infty}^t \delta(\alpha) d\alpha = u(t)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(\tau - t_0) d\tau = u(\beta - t_0) - u(\alpha - t_0)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(\tau - t_0) d\tau = r(\beta - t_0) - r(\alpha - t_0) = (\beta - t_0)u(\beta - t_0) - (\alpha - t_0)u(\alpha - t_0)$$

خاصیت انتقال دهنده گی ضربه

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

رابطه مثلث و پالس

$$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$$

رابطه کلی سیستم های خطی

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n, k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

توابع ویژه (مشتقات و انتگرال های ضربه)

$$x(t) * \delta^{(n)}(t - t_0) = x^{(n)}(t - t_0)$$

$$x(t) * u(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0)d\tau, \quad x[n] * u[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k - n_0]$$

$$x(t) * u_{-n}(t) = \underbrace{\int \int \int \dots \int}_n x(\tau)d\tau$$

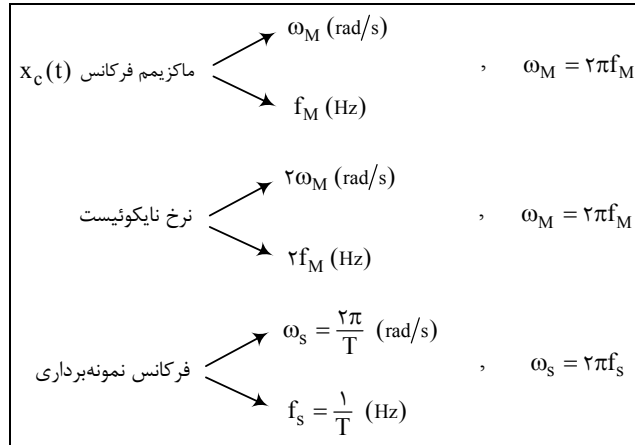
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(n)}(t)dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta^{(n)}(t)|dt = +\infty$$

$$\delta'(a(t - t_0)) = \frac{1}{a|a|} \delta'(t - t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta^{(n)}(t - t_0)dt = (-1)^n x^{(n)}(t_0)$$

نمونه برداری



$$X_d(\omega) = \frac{1}{T} X_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi$$

$$H_d(\omega) = H_c\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad |\omega| < \pi$$

$$h_d[n] = T h_c(nT)$$

جدول تبدیل فوریه زمان پیوسته

حوزه زمان	حوزه فرکانس
$e^{at}u(t)$, $\text{Re}[a] < 0$	$\frac{1}{j\omega - a}$
$te^{at}u(t)$, $\text{Re}[a] < 0$	$\frac{1}{(j\omega - a)^2}$
$\delta(t + t_0)$, $\delta(t)$	$e^{j\omega t_0}$, 1
$e^{j\omega_0 t}$, 1	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, $2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\frac{\sin \omega t}{\pi t}$	$\Pi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{\omega_0 \sin \omega T}{\omega}$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{1}{T} \left(\frac{\omega \sin \omega T}{\omega^2}\right)^2$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$e^{-a t }$, $a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}$
$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
$\text{sgn } t$	$\frac{2}{j\omega}$

جدول تبدیل فوریه زمان گسسته

حوزه زمان	حوزه فرکانس
$\alpha^n u[n]$, $ \alpha < 1$	$\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$
$n\alpha^n u[n]$, $ \alpha < 1$	$\frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2}$
$\delta[n + n_0]$, $\delta[n]$	e^{jn_0} , 1
$e^{j\omega_0 n}$, 1	$\gamma\pi \tilde{\delta}(\omega - \omega_0)$, $\gamma\pi \tilde{\delta}(\omega)$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \tilde{\delta}(\omega)$
$\frac{\sin wn}{\pi n}$, $0 < w < \pi$	$\tilde{\Pi}\left(\frac{\omega}{\gamma w}\right)$
$\tilde{\Pi}\left(\frac{n}{\gamma N}\right)$	$\sin\left((\gamma N + 1)\frac{\omega}{\gamma}\right) / \sin\frac{\omega}{\gamma}$
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \omega_0 \delta(\omega - k\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{\gamma\pi}{N}$
$\alpha^{ n }$, $ \alpha < 1$	$\frac{1 - \alpha^\gamma}{1 - \gamma\alpha \cos \omega + \alpha^\gamma}$

جدول خواص تبدیل فوریه در حوزه ω

خاصیت	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$Ax(t) + By(t)$ $Ax[n] + By[n]$	$AX(\omega) + BY(\omega)$
انتقال زمانی	$x(t + t_0)$ $x[n + n_0]$	$X(\omega)e^{j\omega t_0}$ $X(\omega)e^{j\omega n_0}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{j\omega_0 t}$ $x[n]e^{j\omega_0 n}$	$X(\omega - \omega_0)$
وارونگی	$x(-t)$ $x[-n]$	$X(-\omega)$
مزدوجی	$x^*(t)$, $x^*(-t)$ $x^*[n]$, $x^*[-n]$	$X^*(-\omega)$, $X^*(\omega)$
مقیاس دهی	$x(\alpha t)$, $\frac{1}{ \alpha }x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ $x_{(m)}[n]$ $x[mn]$	$\frac{1}{ \alpha }X\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$, $X(\alpha\omega)$ $X(m\omega)$ $\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1}X\left(\frac{\omega}{m} - \frac{j\pi}{m}i\right)$
کانولوشن	$x(t) * y(t)$ $x[n] * y[n]$	$X(\omega)Y(\omega)$
ضرب	$x(t)y(t)$ $x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$ $\frac{1}{2\pi}X(\omega) \otimes Y(\omega)$
مشتق گیری (تفاضل) در زمان	$x'(t)$ $x[n] - x[n-1]$	$j\omega X(\omega)$ $(1 - e^{-j\omega})X(\omega)$
انتگرال گیری (انباشتگی) در زمان	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$ $\frac{X(\omega)}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(0)\delta(\omega)$
مشتق گیری در فرکانس	$tx(t)$ $nx[n]$	$jX'(\omega)$
دوگانی تبدیل فوریه زمان پیوسته	$ \begin{array}{ccc} x(t) & \xleftrightarrow{F} & X(\omega) \\ & \swarrow & \searrow \\ & & X(t) \\ & \nwarrow & \swarrow \\ X(t) & \xleftrightarrow{F} & 2\pi x(-\omega) \end{array} $	

جدول خواص تبدیل فوریه در حوزه f

خاصیت	حوزه زمان	حوزه فرکانس
خطی بودن	$Ax(t) + By(t)$ $Ax[n] + By[n]$	$AX(f) + BY(f)$
انتقال زمانی	$x(t + t_0)$ $x[n + n_0]$	$X(f)e^{j2\pi f t_0}$ $X(f)e^{j2\pi f n_0}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$ $x[n]e^{j2\pi f_0 n}$	$X(f - f_0)$
وارونگی	$x(-t)$ $x[-n]$	$X(-f)$
مزدوجی	$x^*(t)$, $x^*(-t)$ $x^*[n]$, $x^*[-n]$	$X^*(-f)$, $X^*(f)$
مقیاس دهی	$x(\alpha t)$, $\frac{1}{ \alpha }x\left(\frac{t}{\alpha}\right)$	$\frac{1}{ \alpha }X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$, $X(\alpha f)$
	$x_{(m)}[n]$ $x[mn]$	$X(mf)$ $\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X\left(\frac{f}{m} - \frac{j}{m}i\right)$
کانولوشن	$x(t) * y(t)$ $x[n] * y[n]$	$X(f)Y(f)$
ضرب	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
	$x[n]y[n]$	$X(f) \otimes Y(f)$
مشتق گیری (تفاضل) در زمان	$x'(t)$	$j2\pi f X(f)$
	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j2\pi f})X(f)$
انتگرال گیری (انباشتگی) در زمان	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{X(f)}{1 - e^{-j2\pi f}} + \frac{1}{2}X(0)\tilde{\delta}(f)$
مشتق گیری در فرکانس	$tx(t)$ $nx[n]$	$\frac{j}{2\pi} X'(f)$
دوگانی تبدیل فوریه زمان پیوسته		

روابط پارسوال در تبدیل فوريه

حالت زمان گسسته	حالت زمان پيوسته
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega) ^2 d\omega$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) ^2 d\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega)Y(-\omega) d\omega$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y(-\omega) d\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[-n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\omega)Y(\omega) d\omega$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)Y(\omega) d\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 df$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) ^2 df$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(-f) df$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(-f) df$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[-n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f) df$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y(f) df$

روابط پارسوال در سری فوريه

حالت زمان گسسته	حالت زمان پيوسته
$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] ^2 = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k ^2$	$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$
$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n]y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k b_{-k}$	$\frac{1}{T} \int_T x(t)y(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_{-k}$
$\frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n]y[-n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k b_k$	$\frac{1}{T} \int_T x(t)y(-t) dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k b_k$

جدول خواص سری فوریه

خاصیت	حوزه زمان	ضرایب فوریه
خطی بودن به شرط $T_x = T_y$	$Ax(t) + By(t)$ $Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
انتقال زمانی	$x(t + t_0)$ $x[n + n_0]$	$a_k e^{jk\omega_0 t_0}$ $a_k e^{jk\omega_0 n_0}$
انتقال فرکانسی به شرط $m \in \mathbb{Z}$	$x(t) e^{jm\omega_0 t}$ $x[n] e^{jm\omega_0 n}$	a_{k-m}
وارونگی	$x(-t)$ $x[-n]$	a_{-k}
مزدوجی	$x^*(t)$, $x^*(-t)$ $x^*[n]$, $x^*[-n]$	a_{-k}^* , a_k^*
مقیاس دهی زمانی	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ $x_{(m)}[n]$ $x[mn]$	a_k $\frac{1}{m} a_k$ $b[k] = \sum_{i=0}^{m-1} a_{(\frac{M}{N})} \left[k - \frac{M}{m} i \right]$, $M = \text{lcm}(N, m)$
کانولوشن متناوب به شرط $T_x = T_y$	$x(t) \otimes y(t)$ $x[n] \otimes y[n]$	$T a_k b_k$ $N a_k b_k$
ضرب به شرط $T_x = T_y$	$x(t) y(t)$ $x[n] y[n]$	$a_k * b_k$ $a_k \otimes b_k$
مشتق گیری (تفاضل) در زمان	$x'(t)$ $x[n] - x[n-1]$	$jk\omega_0 a_k$ $(1 - e^{-jk\omega_0}) a_k$
انتگرال گیری (انباشتگی) در زمان به شرط $a_0 = 0$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ $\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$b_k = \begin{cases} \frac{a_k}{jk\omega_0} & , k \neq 0 \\ \frac{1}{T} \int_T y(t) dt & , k = 0 \end{cases}$ $b_k = \begin{cases} \frac{a_k}{1 - e^{-jk\omega_0}} & , k \neq 0 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] & , k = 0 \end{cases}$
دوگانگی سری فوریه زمان گسسته به شرط $N_a = N$	$x[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} a[k]$ $a[n] \xleftrightarrow{\text{FS}} \frac{1}{N} x[-k]$	
دوگانگی تبدیل فوریه زمان گسسته با سری فوریه زمان پیوسته به شرط $T_X = 2\pi$	$x[n] \xleftrightarrow{F} X(\omega)$ $X(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} x[-k]$	

جدول تبدیل لاپلاس

حوزه زمان	حوزه لاپلاس	ناحیه همگرایی
$e^{at}u(t)$ $-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Re}[s] > \text{Re}[a]$ $\text{Re}[s] < \text{Re}[a]$
$t^n e^{at}u(t)$ $-t^n e^{at}u(-t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\text{Re}[s] > \text{Re}[a]$ $\text{Re}[s] < \text{Re}[a]$
$u(t)$ $-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}[s] > 0$ $\text{Re}[s] < 0$
$t^n u(t)$ $-t^n u(-t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}[s] > 0$ $\text{Re}[s] < 0$
$\delta(t)$ $\delta(t+t_0)$	1 e^{st_0}	کل صفحه S $\text{Re}[s] > -\infty$ یا $\text{Re}[s] < +\infty$
$\cos at u(t)$ $-\cos at u(-t)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\text{Re}[s] > 0$ $\text{Re}[s] < 0$
$\sin at u(t)$ $-\sin at u(-t)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\text{Re}[s] > 0$ $\text{Re}[s] < 0$
$e^{-a t }$, $a > 0$	$\frac{-2a}{s^2-a^2}$	$-a < \text{Re}[s] < a$
$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$-\infty < \text{Re}[s] < +\infty$
$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$\text{Re}[s] > 0$

جدول خواص تبدیل لاپلاس

خاصیت	حوزه زمان	حوزه لاپلاس	ناحیه همگرایی
خطی بودن	$Ax(t) + By(t)$	$AX(s) + BY(s)$	$\geq (R_x \cap R_y)$
انتقال زمانی	$x(t + t_0)$	$X(s)e^{st_0}$	$R_x \pm \{s = +\infty \text{ or } s = -\infty\}$
انتقال فرکانسی	$x(t)e^{s_0 t}$	$X(s - s_0)$	$R_x + \text{Re}[s_0]$
وارونگی	$x(-t)$	$X(-s)$	$-R_x$
مزدوجی	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R_x
مقیاس دهی	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	aR_x
	$\frac{1}{ a } x\left(\frac{t}{a}\right)$	$X(as)$	$\frac{R_x}{a}$
کانولوشن	$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$	$\geq (R_x \cap R_y)$
مشتق گیری در زمان	$x'(t)$	$sX(s)$	$\geq [R_x \cap (-\infty < \text{Re}[s] < +\infty)]$
انتگرال گیری در زمان	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} X(s)$	$\geq [R_x \cap (\text{Re}[s] > 0)]$
مشتق گیری در فرکانس	$t x(t)$	$-X'(s)$	R_x

جدول تبدیل \mathcal{Z}

حوزه زمان	حوزه \mathcal{Z}	ناحیه همگرایی
$\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
$-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
$n \alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
$-n \alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z > 1$
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z < 1$
$\delta[n]$	1	کل صفحه Z
$\delta[n + n_0]$	z^{n_0}	$ z > 0$ یا $ z < \infty$
$\cos an u[n]$	$\frac{1 - (\cos a) z^{-1}}{1 - 2(\cos a) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$-\cos an u[-n - 1]$	$\frac{1 - (\cos a) z^{-1}}{1 - 2(\cos a) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z < 1$
$\sin an u[n]$	$\frac{(\sin a) z^{-1}}{1 - 2(\cos a) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$-\sin an u[-n - 1]$	$\frac{(\sin a) z^{-1}}{1 - 2(\cos a) z^{-1} + z^{-2}}$	$ z < 1$
$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{1}{1 - z^{-N}}$	$ z > 1$

جدول خواص تبدیل \mathcal{Z}

خاصیت	حوزه زمان	حوزه \mathcal{Z}	ناحیه همگرایی
خطی بودن	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$\geq (R_x \cap R_y)$
انتقال زمانی	$x[n + n_0]$	$X(z)z^{n_0}$	$R_x \pm \{ z = \infty \text{ or } z = 0 \}$
مقیاس دهی در حوزه \mathcal{Z}	$x[n]z_0^n$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$ z_0 \cdot R_x$
وارونگی زمانی	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	$(R_x)^{-1}$
مزدوجی	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
مقیاس دهی در زمان	$x_{(m)}[n]$	$X(z^m)$	$(R_x)^{\frac{1}{m}}$
	$x[mn]$	$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} X\left(\frac{z}{z_0^m} e^{-j\frac{2\pi i}{m}}\right)$	$(R_x)^m$
کانولوشن	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$\geq (R_x \cap R_y)$
تفاضل گیری در زمان	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$\geq [R_x \cap (z > 0)]$
انباشتگی در زمان	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$\geq [R_x \cap (z > 1)]$
مشتق گیری در حوزه \mathcal{Z}	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz} = z^{-1} \frac{dX(z)}{dz^{-1}}$	R_x