معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}.$$

حل:

$$(3x^2y + y^2)\,dx = -(2x^3 + 3xy)\,dy \Longrightarrow$$

$$\underbrace{(3x^2y + y^2)}_{M}\,dx + (\underbrace{2x^3 + 3xy}_{N})\,dy = 0$$

$$\begin{cases} M_y = 3x^2 + 2y \\ N_x = 6x^2 + 3y \end{cases} \Longrightarrow M_y \neq N_x \Longrightarrow$$ کامل نیست

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{3x^2 + 2y - 6x^2 - 3y}{-3x^2y - y^2} = \frac{\cancel{(-3x^2 - y)}}{y\cancel{(-3x^2 - y)}} = \frac{1}{y}$$

(حالت ب)

عامل انتگرال ساز

$$\overset{\text{حالت ب}}{\Longrightarrow} \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y}dy} = e^{\ln|y|} = |y|$$

y یا $-y$ فرقی ندارن بعنوان عامل انتگرال ساز در معادله ناکامل ضرب بشود. داریم

$$(3x^2y + y^2)\,y\,dx + (2x^3 + 3xy)\,y\,dy = 0 \Longrightarrow$$

$$(\underbrace{3x^2y^2 + y^3}_{M})\,dx + (\underbrace{2x^3y + 3xy^2}_{N})\,dy = 0$$

A19 ص

الف

$$\begin{cases} M_y = 6x^2y + 3y^2 \\ N_x = 6x^2y + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$$ (معادله کامل است)

مرحله الف حل معادله کامل

ب -

$$U_x = M \Rightarrow U = \int M\,dx + f(y) = \int (3x^2y^2 + y^3)\,dx + f(y)$$

مرحله ب از حل معادله کامل

$$\Rightarrow U = x^3y^2 + xy^3 + f(y) \xrightarrow{U_y = N} 2x^3y + 3xy^2 + f'(y) = 2x^3y + 3xy^2$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = c \Rightarrow U = x^3y^2 + xy^3 + c$$

جواب آخر $x^3y^2 + xy^3 = C$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$(y + x^4y^2)\,dx + x\,dy = 0$$

حل: $$\begin{cases} M_y = 1 + 2x^4y \\ N_x = 1 \end{cases} \Rightarrow M_y \neq N_x \rightarrow$$ کامل نیست

$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = \frac{1 + 2x^4y - 1}{xy - xy - x^5y^2} = \frac{2x^4y}{-x^5y^2} = \frac{-2}{xy} = \frac{-2}{z} = h(z)$$

(حالت ج)

$$\mu(z) = e^{\int h(z)\,dz} = e^{\int \frac{-2}{z}dz} = e^{-2\ln z} = e^{\ln z^{-2}} = z^{-2} = \frac{1}{x^2y^2}$$

حال طرفین معادله ناکامل را در $\frac{1}{x^2y^2}$ ضرب می‌کنیم و به یک معادله کامل می‌رسیم:

$$\frac{y + x^4y^2}{x^2y^2}\,dx + \frac{x}{x^2y^2}\,dy = 0$$

A20

$$\Big(\frac{\cancel{y}}{x^2y^2}+\frac{x^{\cancel{4}\,2}\cancel{y^2}}{\cancel{x^2}\cancel{y^2}}\Big)dx+\underbrace{-\frac{1}{x\,y^2}}_{N}dy=0 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Big(\frac{1}{x^2y}+x^2\Big)}_{M}dx+\underbrace{\frac{1}{xy^2}}_{N}dy=0$$

$$\begin{cases} M_y=\dfrac{-1}{x^2y^2} \\ N_x=\dfrac{-1}{x^2y^2}\end{cases} \Rightarrow M_y=N_x \Rightarrow$$ معادله کامل ~~الف~~

ب

$$U_y=N \Rightarrow U=\int N\,dy+g(x)=\int \frac{1}{xy^2}dy+g(x) \Rightarrow$$

$$U=\frac{-1}{xy}+g(x) \xrightarrow{U_x=M} \frac{1}{x^2y}+g'(x)=\cancel{\frac{1}{x^2y}}+x^2$$

$$\Rightarrow g'(x)=x^2 \Rightarrow g(x)=\frac{x^3}{3}+c \Rightarrow U=\frac{-1}{xy}+\frac{x^3}{3}+c$$

$$\frac{-1}{xy}+\frac{x^3}{3}=C$$ جواب آخر

تمرین شما: صفحه 80 تمرینهای ۱ تا ۱۰

ص A21

(5) معادله خطی مرتبه اول

صورت کلی این معادله به شکل $y' + p(x)y = q(x)$ است. که در آن

p و q توابعی برحسب x هستند. جواب این معادله به صورت

$$y = \frac{\int \mu q \, dx + c}{\mu}$$

که در آن $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ عامل انتگرال ساز معادله خطی مرتبه اول نام دارد.

* پس اول معادله خطی مرتبه اول را شناسایی می کنیم سپس از آن نتیجه μ عامل انتگرال ساز آن را بدست می آوریم و سپس جواب معادله را با فرمول $y = \frac{\int \mu q \, dx + c}{\mu}$ بدست می آوریم *

مثال: معادله زیر را حل کنید

$$\frac{dy}{dx} = e^x - y$$

حل: می نویسیم

$$y' = e^x - y \Rightarrow y' + \underbrace{1}_{p(x)} y = \underbrace{e^x}_{q(x)}$$

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 1\,dx} = e^x$$

$$\boxed{\text{یادآوری} \quad \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}}$$

$$y = \frac{\int q(x)\mu(x)\,dx + c}{\mu(x)} = \frac{\int e^x \cdot e^x \, dx + c}{e^x}$$

$$y = \frac{\int e^{2x} dx + c}{e^x} = \frac{\frac{1}{2} e^{2x} + c}{e^x} = \frac{1}{2} e^x + c e^{-x}$$

A22 ص

$$y' + y \cot g\, x = \frac{1}{\sin x} \;;\; 0 < x < \pi/2 .$$ مثال ۱ ص ۴۸

حل: $$y' + \underbrace{(\cot g\, x)}_{p(x)}\, y = \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{q(x)}$$ (خطی مرتبه اول)

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \cot g\, x\,dx} = e^{\ln|\overbrace{\sin x}^{>0}|} = \sin x$$

$$y = \frac{\int q(x)\,\mu(x)\,dx + c}{\mu(x)} = \frac{\int \frac{1}{\cancel{\sin x}}\,\cancel{\sin x}\,dx + c}{\sin x}$$

$$\boxed{y = \frac{x + c}{\sin x}}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید $xy' + 2y = \sin x \;\; (x>0)$

حل: $$y' + \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)}\, y = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{q(x)}$$ (خطی مرتبه اول)

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y = \frac{\int q(x)\,\mu(x)\,dx + c}{\mu(x)} = \frac{\int \left(\frac{\sin x}{\cancel{x}}\right) x^{\cancel{2}}\,dx + c}{x^2}$$

A23 ص

$$y = \frac{\int x\sin x\,dx + c}{x^2} \overset{*}{=} \frac{-x\cos x + \sin x + c}{x^2}$$

حل ✱ : $\int x\sin x\,dx$ با روش جزء به جزء

$$\begin{cases} u = x \\ \sin x\,dx = dv \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} du = dx \\ -\cos x = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x\sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x.$$

تمرین: صفحه 78 تمرینهای 1 تا 13

(6) معادله دیفرانسیل برنولی

صورت کلی معادله دیفرانسیل برنولی عبارتست از

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \qquad n \neq 0, 1$$

(توجه کنید که اگر $n=0$ یا $n=1$ باشد معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول خواهد بود)

برای حل طرفین معادله را بر y^n تقسیم می‌کنیم (یا در y^{-n} ضرب می‌کنیم) و داریم

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

از تغییر متغیر $v = y^{1-n}$ در نتیجه $v' = (1-n)y^{-n}y'$ نتیجه می‌شود

$$\frac{v'}{1-n} + p(x)v = q(x) \longrightarrow$$

A24

$$v' + (1-n)p(x)v = (1-n)q(x)$$

که یک معادله خطی مرتبه اول است (برحسب x , v)

* اول معادله برنولی را شناسایی می‌کنیم ($y' + p(x)y = q(x)y^n$ $n \neq 0,1$)

در مرحله طرفین را در y^{-n} ضرب می‌کنیم و از تغییر متغیر $v = y^{1-n}$ استفاده می‌کنیم

و در آخر به یک معادله خطی مرتبه اول برحسب x , v می‌رسیم *

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{cotg} x + \frac{y^2}{\sin x} \quad ; \quad 0 < x < \pi/2$$

مثال 3
ص 79

حل: می‌نویسیم

$$y' - (\operatorname{cotg} x)\, y = \frac{1}{\sin x}\, y^2$$

$\Rightarrow$ برنولی، $n=2$

طرفین را در y^{-2} ضرب می‌کنیم و داریم

$$y^{-2}y' - (\operatorname{cotg} x)\, y^{-1} = \frac{1}{\sin x}$$

بعد قرار می‌دهیم $v = y^{1-2} = y^{-1}$ و درنتیجه $v' = -y^{-2}y'$، حال

با این تغییر متغیر معادله بالا را بازنویسی می‌کنیم و داریم

$$-v' - (\operatorname{cotg} x)\, v = \frac{1}{\sin x} \Longrightarrow$$

$$v' + \underbrace{(\operatorname{cotg} x)}_{p(x)}\, v = \underbrace{\frac{-1}{\sin x}}_{q(x)}$$

(خطی مرتبه اول برحسب x , v)

A25

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int \cot x\,dx} = e^{\ln|\sin x|} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$V = \frac{\int q(x)\,\mu(x)\,dx + c}{\mu(x)} = \frac{\int \frac{-1}{\sin x}\sin x\,dx + c}{\sin x}$$

$$\to V = \frac{-x+c}{\sin x} \xrightarrow{V = y^{-1}} \frac{1}{y} = \frac{-x+c}{\sin x} \longrightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{\sin x}{-x+c}}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$dy + (4y - 8y^{-3})\,x\,dx = 0$$

حل: طرفین را به dx تقسیم می‌کنیم داریم

$$\frac{dy}{dx} + 4xy - 8xy^{-3} = 0 \Rightarrow y' + 4xy = 8xy^{-3}$$

(برنولی با $n=-3$)

$y^{1-(-3)}$

طرفین در y^3 ضرب می‌شود

$$y^3 y' + 4xy^4 = 8x \xrightarrow[V' = 4y^3 y']{V = y^4} \frac{V'}{4} + 4xV = 8x$$

$$\to V' + \underbrace{16x}_{p(x)}V = \underbrace{32x}_{q(x)}$$

(خطی مرتبه اول بر حسب x, V)

A26

$$\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 16x\,dx} = e^{8x^2}$$

$$V = \frac{\int q(x)\mu(x)\,dx + C}{\mu(x)} = \frac{\int 32x\, e^{8x^2}\,dx + C}{e^{8x^2}}$$

$$= \frac{2\int 16x\, e^{8x^2}\,dx + C}{e^{8x^2}} \overset{*}{=} \frac{2e^{8x^2} + C}{e^{8x^2}}$$

$$V = 2 + Ce^{-8x^2} \xrightarrow{V = y^4} y = \left(2 + Ce^{-8x^2}\right)^{1/4}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{* یادآوری} \\ \int u' e^u\,dx = e^u\end{array}}$$

تمرین نهایی: صفحه ۷۹ تمرینهای ۱ تا ۸.

A27 ص

مختصری راجع به اعداد مختلط.

می دانیم جذر اعداد منفی تعریف نشده است. (عدد حقیقی نیست)، به جهت گسترش مجموعه اعداد حقیقی با تعریف $i=\sqrt{-1}$ مجموعه اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathbb{C}=\{\lambda+i\mu : \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

اگر $z=\lambda+i\mu$ یک عدد مختلط باشد به λ قسمت حقیقی z گوییم و آن را با $Re(z)=\lambda$ نشان می دهیم، و μ قسمت موهومی z نامیده می شود و آن را با $Im(z)=\mu$ نشان می دهیم.

مثال) معادله $r^2+2r+5=0$ را حل کنید

حل:

$$r=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(5)}}{2\times 1}$$

$$\Rightarrow r=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{-2\pm\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{-2\pm 4i}{2}$$

$$\Rightarrow r=-1\pm 2i$$