

تحقیق در عملیات

بازنویسی : عبدالعظیم بهمنی

منابع

- ۱- برنامه ریزی خطی، تالیف بازارا و همکاران، ترجمه دکتر اسماعیل خرم، نشر کتاب دانشگاهی
- ۲- برنامه ریزی خطی، تالیف دکتر آریانژاد و دکتر سجادی، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران
- ۳- تحقیق در عملیات جلد ۱، تالیف هیلیر و لیبرمن، ترجمه دکتر مدرس و دکتر آصف وزیری، نشر جوان
- 4- Introduction to Operations Research, H. Lieberman, McGraw Companies.
- 5- Linear Programming And Network Flows, M.S. Bazaraa, J.J Jarvis, John Wiley & Sons
- 6- Principles of Mathematics in Operations Research, Levent Kandiller, Springer
- 7- Operations Research, A.P. Verma, S.K. Kataria & Sons
- 8- Linear Programming: Foundations and Extensions, R.J. Vanderbei

سرفصل ها

- کلیات
- مدل سازی ریاضی خطی (مفاهیم، متغیرهای تصمیم، مثال)
- رویه حل مدل های ریاضی خطی
 - ▶ روش هندسی
 - ▶ روش سیمپلکس (ریاضیات، مفاهیم، و الگوریتم)
 - ▶ روش Big M
 - ▶ روش دوفازی
 - ▶ روش سیمپلکس دوگان (ریاضیات، قضایا، و الگوریتم)
- حالت های خاص مدل های ریاضی خطی
- تحلیل حساسیت مدل های ریاضی خطی

فصل اول

کلیات

اهداف

- ❖ آشنایی با تاریخچه تحقیق در عملیات
- ❖ آشنایی با ویژگی های فرایند تحقیق در عملیات

تاریخچه تحقیق در عملیات

- در طول جنگ جهانی دوم توسط دانشمندان انگلیسی توسعه یافت.
- پس از جنگ وارد دنیای تجارت گردید.
- در اوایل دهه ۱۹۵۰ در امریکا کارشناسان OR وارد بخش صنعت شدند.
- ابداع روش سیمپلکس به سال ۱۹۴۷ توسط جرج دنتزیک (مشاور ریاضی اداره نظارت و بازرسی نیروی هوایی ایالات متحده آمریکا) برمی گردد.
- الگوریتم سیمپلکس به دلیل کارایی بالا در حل مسائل مدیریتی و قابلیت کامپیوتری شدن به سرعت توسعه یافته است.

تحقیق در عملیات

به عنوان کاربرد یک رویکرد علمی به منظور بهینه سازی.

با عناوینی همچون علم مدیریت، روشهای مقداری، تحلیل مقداری و علم تصمیم گیری نیز شناخته می شود.

گرچه نوپاست ولی در حوزه صنعت بازرگانی شناخته شده است.

در انواع مختلفی از سازمانهای دولتی-خدماتی-نظامی....کاربرد دارد.

فنون ریاضی به کار برده در آن با رایانه قابل حل هستند.

چیزی بیش از مجموعه فنون ریاضی است.

نگاهی سیستماتیک و منطقی به مسایل مدیریتی دارد.

تعریف تحقیق در عملیات

- ❖ ۱- مجموعه ای از روشهای علمی که برای شناخت مسائل درون سیستم به کار می روند و در پی جواب بهینه هستند.
- ❖ ۲- کاربرد روش های علمی برای مطالعه و بررسی فعالیت ها و عملیات پیچیده در سازمان های بزرگ.
- ❖ ۳- کاربرد روش علمی برای تحلیل و حل مسائل و تصمیمات مدیریتی.

ویژگی های تحقیق در عملیات

- ✓ ۱- تمرکز اصلی روی تصمیم گیری مدیران
- ✓ ۲- رویکرد علمی
- ✓ ۳- دیدگاه سیستمی
- ✓ ۴- میان رشته ای بودن
- ✓ ۵- استفاده از مدل های ریاضی
- ✓ ۶- استفاده از رایانه

دلایل استفاده از مدل های ریاضی

۱- تعریف موقعیت های خیلی پیچیده

۲- شبیه سازی زمان عملیات واقعی

۳- امکان پذیری آزمایش سیستم

۴- کاهش هزینه

۵- محاسبه ریسک

۶- فراهم کردن زمینه یادگیری

طبقه بندی مدل های ریاضی

❖ ۱- قطعی

❖ ۲- احتمالی

❖ ۳- فازی

❖ ۴- ترکیبی

Journals

Computer and Information Systems Abstracts Journal

Computer and Industrial Engineering

European Journal of Operational Research

IEEE Transactions on Automatic Control

International Abstracts in Operations Research

Journal of Computer and System Sciences

Journal of Research of the National Bureau of Standards

Journal of the Canadian Operational Research Society

Management Science (published by The Institute for Management Science TIMS)

Mathematical Programming

Mathematics in Operations Research

Naval Research Logistics (published by the Office of Naval Research-ONR)

Operational Research Quarterly

Operations Research (published by the Operations Research Society of American ORSA)

Operations Research Letters

ORSA Journal on Computing

Transportation Science

Iranian Journal of Operations Research

رشته های مرتبط با علم تحقیق در عملیات

- ▶ ریاضیات (محض و کاربردی)
- ▶ مهندسی صنایع
- ▶ مدیریت (اجرایی ، صنعتی ، بازرگانی ، دولتی ، IT)
- ▶ برق
- ▶ معدن
- ▶ عمران
- ▶ ...

فصل دوم

مدل سازی ریاضی خطی
(مفاهیم، متغیرهای تصمیم، مثال)

هدف

- آشنایی با مفاهیم مدل سازی ریاضی خطی
- تعریف اجزای برنامه ریزی ریاضی (متغیرهای تصمیم ، تابع هدف ، محدودیت)
- آشنایی با صورت کلی برنامه ریزی خطی
- مثال هایی در زمینه مدل سازی ریاضی خطی

گام های اساسی در مدل سازی

- ❖ ۱- تعریف مسئله
- ❖ ۲- فرموله کردن مسئله در قالب یک مدل
- ❖ ۳- حل مدل با استفاده از فنی خاص

گام های اساسی در مدل سازی ریاضی

- ۱- تعریف مسئله در چهارچوب روابط منطقی و ریاضی.
- ۲- فرموله کردن مسئله در قالب یک مدل ریاضی.
- ۳- حل مدل با استفاده از فن ریاضی.

اجزای یک مدل ریاضی

✓ ۱- متغیرهای تصمیم

✓ ۲- تابع هدف

✓ ۳- محدودیت های مدل

متغیرهای تصمیم

نمادهای ریاضی برای بیان سطح فعالیت موسسه

تابع هدف

تابع هدف مدل، یک رابطه ریاضی که هدف موسسه را در قالب متغیرهای تصمیم توصیف می کند. تابع هدف همواره به صورت حداکثرسازی یا حداقل سازی بیان می شود (توابع هدف قابل تبدیل شدن به صور مختلف می باشند).

محدودیت های مدل

محدودیت های مدل بیانگر روابط بین متغیرهای تصمیم هستند.
محدودیت ها به وسیله محیط عملیاتی که اغلب ناشی از محدودیت منابع
و یا سیاست گذاری های داخلی موسسه اند، به موسسه تحمیل می شوند.
محدودیت ها در ریاضیات عموماً به صورت روابط کوچکتر، کوچکتر
مساوی، بزرگتر، بزرگتر مساوی، مساوی، یا شرطی بیان می شوند.

مراحل فرموله سازی یک مدل ریاضی

۱ - تعریف متغیرهای تصمیم

۲ - فرموله کردن تابع هدف

۳- فرموله کردن محدودیت ها

مثال اول

شرکتی می خواهد برای حداکثر سازی سود خود از تولید ۳ محصول و براساس محدودیت های منابع با توجه به واقعیت های جدول زیر برنامه ریزی نماید.

منابع	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	مقدار
نیروی کار (ساعت / واحد)	۵	۲	۴	۲۴۰ ساعت
مواد (کیلوگرم / واحد)	۴	۶	۳	۴۰۰ کیلوگرم
سود هر واحد	۳	۵	۲	---

حل مسئله – گام اول

تعریف متغیرهای تصمیم

▶ مقدار تولید از محصول اول : X_1

▶ مقدار تولید از محصول دوم : X_2

▶ مقدار تولید از محصول سوم : X_3

حل مسئله – گام دوم

فرموله کردن تابع هدف با توجه به تعریف متغیرهای تصمیم و حداکثر سازی سود:

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

حل مسئله – گام سوم

فرموله کردن محدودیت ها با توجه به اطلاعات موجود در جدول یعنی محدودیت در ساعت کار و همچنین مواد اولیه داریم:

محدودیت اول

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$$

محدودیت دوم

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$$

محدودیت هایی که بیان کننده غیر منفی بودن
متغیرهای تصمیم هستند.

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

خلاصه مدل ساخته شده

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

s.to:

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 240$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال دوم

یک شرکت چوب بری باید سفارش هایی، به ابعاد زیر تهیه و برای متقاضیان ارسال نماید.

مقدار سفارش	ابعاد چوب های سفارشی
1300	1*2
100	1*4
700	2*2

سفارشات باید از تخته های استاندارد به ابعاد 2×4 تهیه شوند. چوب بری
برآوردن سفارشات می خواهد حداقل تخته استاندارد مورد استفاده قرار
گیرد.

حل مسئله – گام اول

تعریف متغیر تصمیم

X_1 تعداد تخته های استاندارد دی که دارای طریقه اول برش هستند:

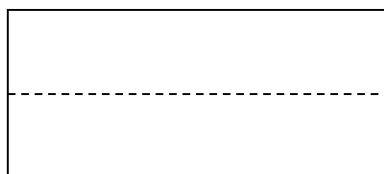
X_2 تعداد تخته های استاندارد دی که دارای طریقه دوم برش هستند:

X_3 تعداد تخته های استاندارد دی که دارای طریقه سوم برش هستند:

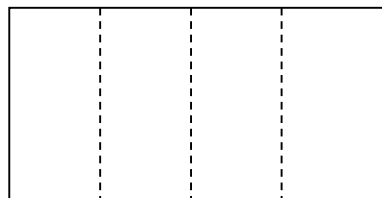
X_4 تعداد تخته های استاندارد دی که دارای طریقه چهارم برش هستند:

X_5 تعداد تخته های استاندارد دی که دارای طریقه پنجم برش هستند:

متغیر تصمیم براساس تعداد برش هائی که از یک تخته
استاندارد تهیه می شوند، تعریف میگردد.



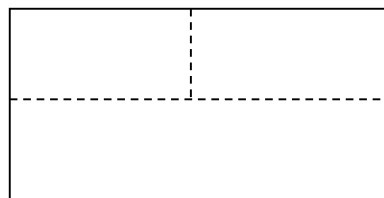
طریقه دوم برش



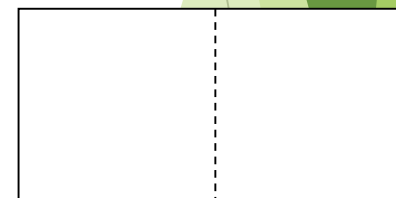
طریقه اول برش



طریقه چهارم برش



طریقه سوم برش



طریقه پنجم برش

حل مسئله - گام دوم

فرموله سازی تابع هدف

هدف مسئله، حداقل سازی تعداد تخته های استاندارد

مورد استفاده است. پس:

$$\text{Minimize } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

حل مسئله – گام سوم

فرموله سازی محدودیت ها

تعداد محدودیت های کار کردی مدل به اندازه تعداد طریق سفارش داده شده می باشد پس مدل دارای ۲ محدودیت است.

$$4X_1 + 2X_3 + 2X_4 \geq 1300$$

$$2X_2 + X_3 \geq 1000$$

$$X_4 + 2X_5 \geq 700$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

خلاصه مدل

$$\text{Min } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

S .to

$$4X_1 + 2X_3 + 2X_4 \geq 1300$$

$$2X_2 + X_3 \geq 1000$$

$$X_4 + 2X_5 \geq 700$$

$$0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

مثال سوم

ردی میکس رنگ های داخلی و خارجی را از دو نوع ماده ی اولیه ی M_1 و M_2 تولید می کند.

مقدار مواد اولیه ی رنگ خارجی	مورد نیاز برای هر تن از رنگ داخلی	حد اکثر ماده ی اولیه که روزانه قابل دسترس است (تن)
ماده اولیه ی M_1	۶	۴
ماده اولیه ی M_2	۱	۲
سود هر تن (هزار دلار)	۵	۴

برآوردی که از بازار شده است، نشان می دهد که حداکثر تقاضای روزانه برای رنگ داخلی به ۲ تن محدود است. به علاوه، تقاضای رنگ داخلی ممکن نیست بیش از یک تن از تقاضای رنگ خارجی تجاوز کند. ردی میکس می خواهد تولید بهینه ی توام رنگ های داخلی و خارجی را که مجموع سود روزانه را ماکسیمم می کند، تعیین نماید.

حل مسئله – گام اول

X_1 : مقدار تولید روزانه ی رنگ خارجی بر حسب تن

X_2 : مقدار تولید روزانه ی رنگ داخلی بر حسب تن

حل مسئله – گام دوم

یک هدف منطقی برای این شرکت, افزایش هر چه بیشتر (ماکسیمم) مجموع سود روزانه از رنگ های داخلی و خارجی است.

$$Max(C) = 5x_1 + 4x_2$$

حل مسئله – گام سوم

این بخش استفاده از مواد اولیه و مقدار تقاضا را محدود می کنند. محدودیت مواد اولیه بطور کلی به شکل زیر بیان می شود:

(حداکثر ماده ی اولیه ی قابل دسترس) $\leq$ (ماده ی اولیه ی لازم برای هر دو رنگ)

$$6x_1 + 4x_2 = M1 \text{ (بر حسب تن) مصرف مقدار ماده ی اولیه ی}$$

$$1x_1 + 2x_2 = M2 \text{ (بر حسب تن) مصرف مقدار ماده ی اولیه ی}$$

و با توجه به جدول موجودی روزانه ی مواد اولیه ی $M1$ و $M2$ به ۲۴ و ۶ تن محدود است، محدودیت های متناظر به این صورت مشخص می شود:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

- حداکثر تقاضای روزانه ی رنگ داخلی به ۲ تن محدود است. $x_2 \leq 2$
- تولید روزانه ی رنگ داخلی حداکثر یک تن بیشتر از رنگ خارجی است. $x_2 - x_1 \leq 1$

یک محدودیت ضمنی مدل آن است که متغیرها نباید منفی باشند

خلاصه مدل

$$\text{Max } c = 5x_1 + 4x_2$$

st

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

برنامه ریزی خطی

تحقیق در عملیات

برنامه ریزی ریاضی

برنامه ریزی خطی

...		...	
...		...	
...		...	
...		...	

مفروضات برنامه ریزی خطی

۱- فرض تناسب

۲- فرض جمع پذیری

۳- فرض غیر منفی بودن

۴- فرض معین بودن

فرض تناسب

- هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت ها عمل می کند.

- آهنگ تغییر یا شیب رابطه تابعی ثابت است.

پس: اگر متغیر تصمیم برابر مقداری تغییر کند، مقدار تابع نیز دقیقا به همان نسبت تغییر می کند .

فرض جمع پذیری

روابط ریاضی بین متغیر ها در مدل به صورت جمع جبری بیان می شوند. در مدل برنامه ریزی خطی، هیچ گاه حاصل ضرب دو متغیر دیده نمی شود.

معین بودن

کلیه پارامترهای مدل عمومی برنامه ریزی خطی در
افق برنامه ریزی مقادیر ثابتی هستند .

فرض غیر منفی بودن

► در برنامه ریزی خطی فرض بر غیر منفی بودن همه متغیرهاست.

صورت کلی مدل ریاضی خطی

$$\text{Max } c = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

st

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j \quad \forall j$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

مثال های متنوع

▶ مساله امتزاج (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ مساله تولید ترکیبی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ مساله حمل و نقل (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ مساله شرکت تعاونی مزروعی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ ماکزیمم محصول تکمیل شده (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ مساله کنترل موجودی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ مساله تولید غذای دامی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ استراتژی مالی مختلط (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

▶ مساله تولید ترکیبی (تعریف مساله، متغیر تصمیم، تابع هدف، محدودیت ها، مدل نهایی)

نرم افزار های تحقیق در عملیات

LINDO-LINGO ►

GAMS ►

Optimization toolbox

MATLAB ►

مثال

$$\text{Max } c = 5x_1 + 4x_2$$

st

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

LINDO-LINGO

max=5*x1+4*x2;

6*x1+4*x2<=24;

x1+2*x2<=6;

-x1+x2<=1;

x2<=2;

x1>=0;

x2>=0;

end

Global optimal solution found.

Objective value: 21.00000

Variable	Value
----------	-------

X1	3.000000
----	----------

X2	1.500000
----	----------

Row	Slack or Surplus
-----	------------------

1	21.00000
---	----------

2	0.000000
---	----------

3	0.000000
---	----------

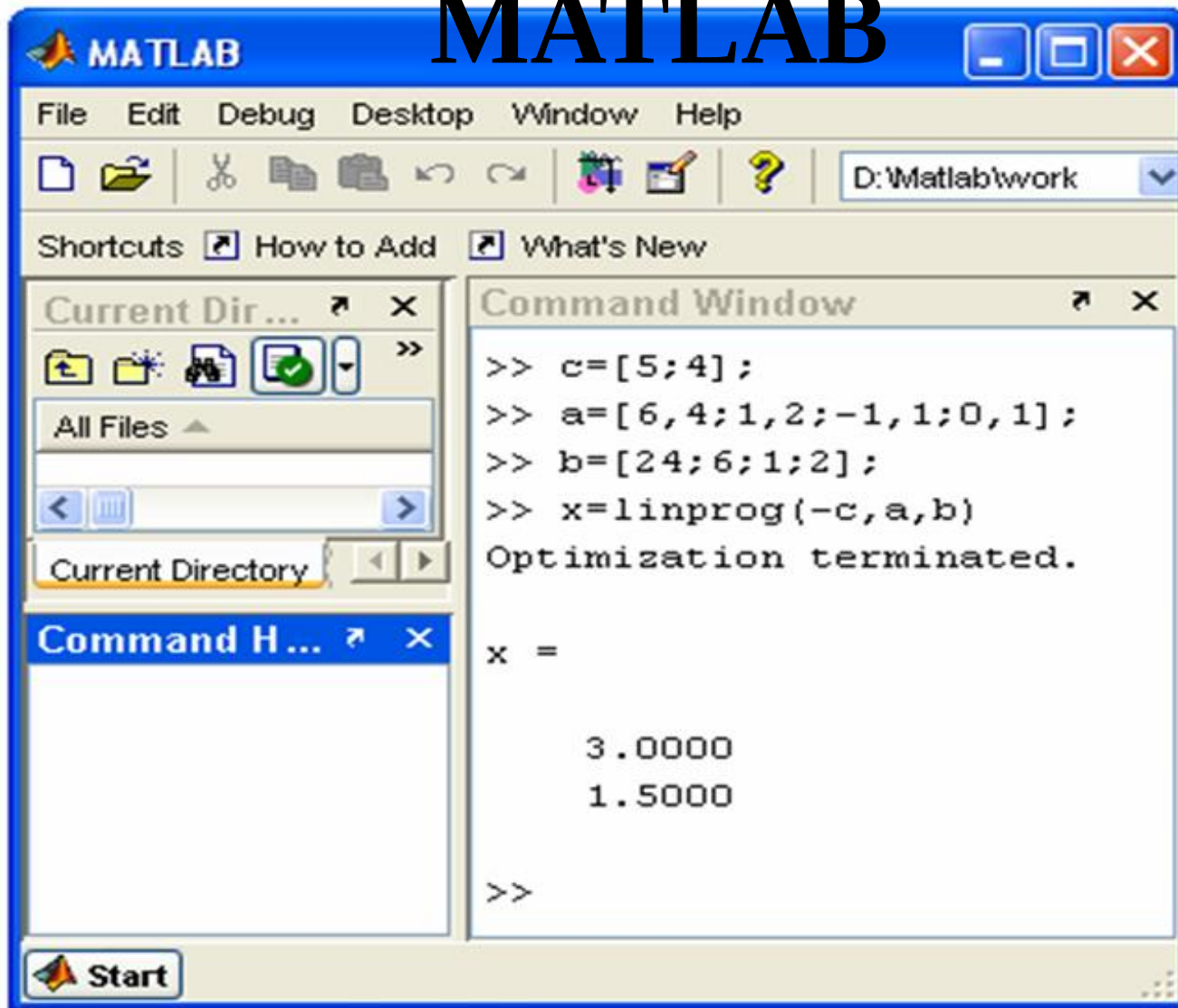
4	2.500000
---	----------

5	0.5000000
---	-----------

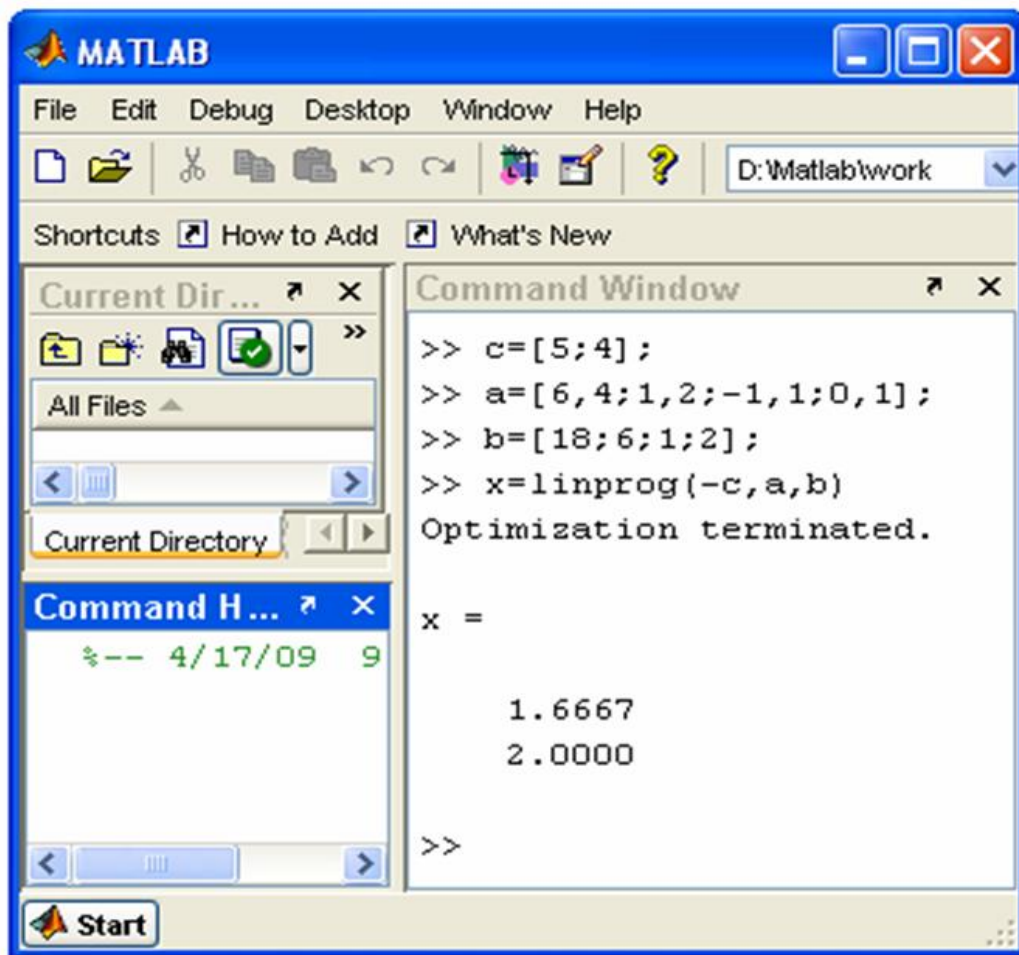
6	3.000000
---	----------

7	1.500000
---	----------

MATLAB

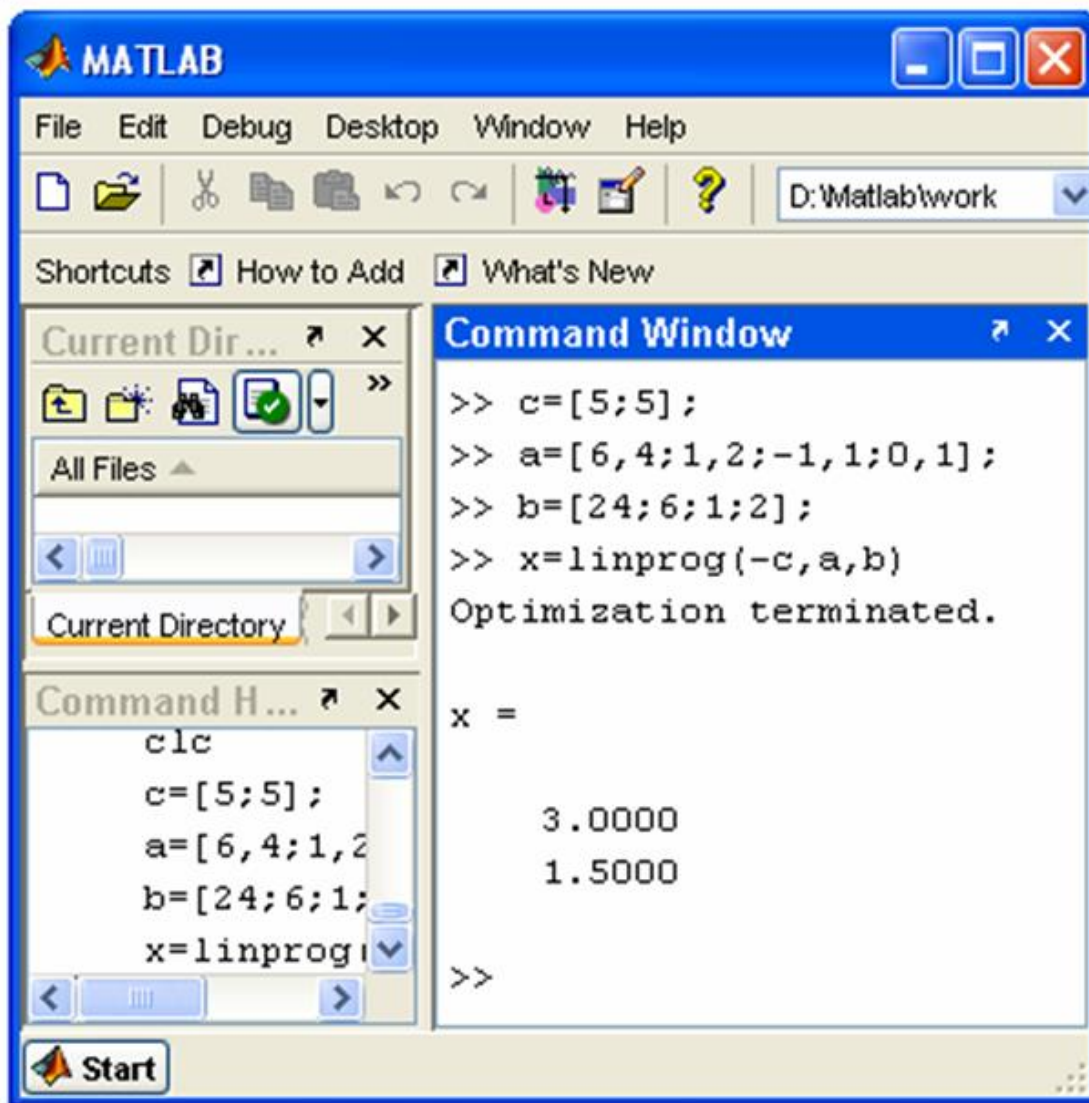


$$\text{Max } c = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow 5(3) + 4(1.5) = 21$$



در صورتی که
مقدار رنگ خارجی
موجود در انبار از
۲۴ تن به ۱۸ تن
کاهش یابد، در
این صورت سود
ماکزیمم چقدر
است؟

$$\text{Max } c = 5x_1 + 4x_2 \longrightarrow 5(1.6667) + 4(2) = 16.3335$$



در صورتی که سود
هر تن رنگ داخلی
از ۴ تن به ۵ تن
افزایش یابد، سود
ماکزیمم حاصل
چقدر خواهد شد؟

در این صورت سود تغییر نخواهد کرد و همان ۲۱ هزار دلار خواهد ماند !!!

فصل سوم

رویه حل مدل های ریاضی خطی

روش هندسی

روش سیمپلکس (ریاضیات، مفاهیم، و الگوریتم)

روش Big M

روش دوفازی

روش سیمپلکس دوگان (ریاضیات، قضایا، و الگوریتم)

اهداف فصل

آشنائی با شیوه حل ترسیمی مسائل دو متغیره

حل مسائل مختلف

آشنائی با موارد خاص و تشخیص آنها با استفاده از رویه حل هندسی

آشنائی با روش سیمپلکس برای حل مسائل دو و چند متغیره خطی

آشنائی با موارد خاص و تشخیص آنها با استفاده از رویه حل سیمپلکس

هدف اساسی در هر سازمان

۱- حداکثر سازی سود

۲- حداقل سازی هزینه

روش ترسیمی حل مسئله LP

مسائل حداکثر سازی

این روش به مدل هایی محدود می شود که حداکثر سه متغیر تصمیم دارند. حل مدل های دارای بیش از ۳ متغیر تصمیم به روش ترسیمی امکان پذیر نیست. شیوه ترسیمی جنبه ی تئوریک دارد.

مثال

مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$$

s. to:

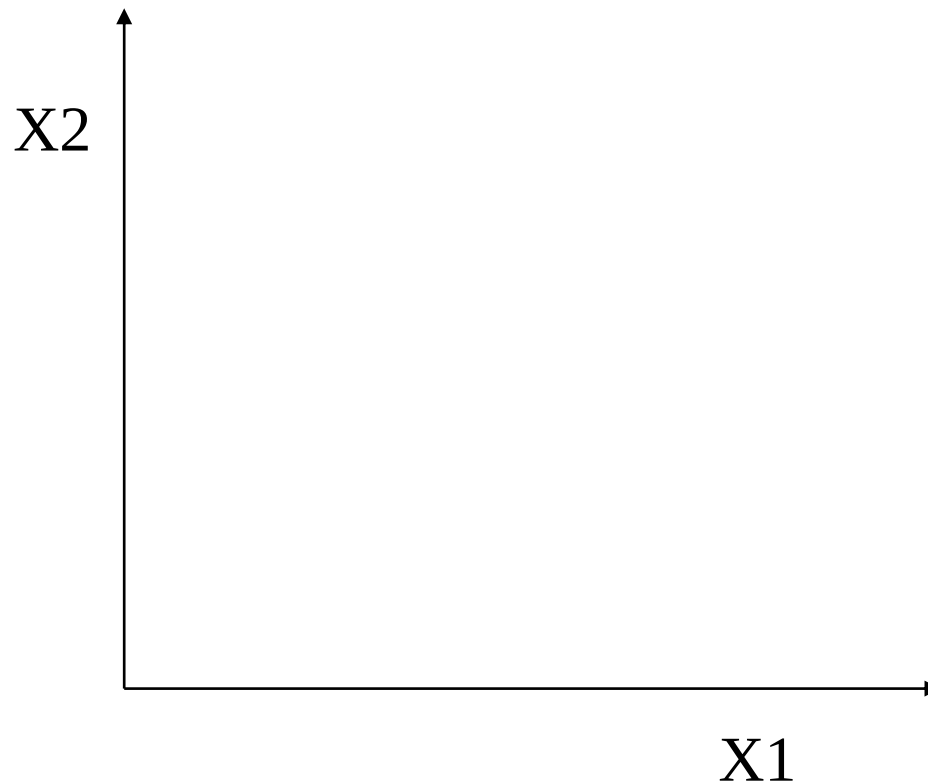
$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

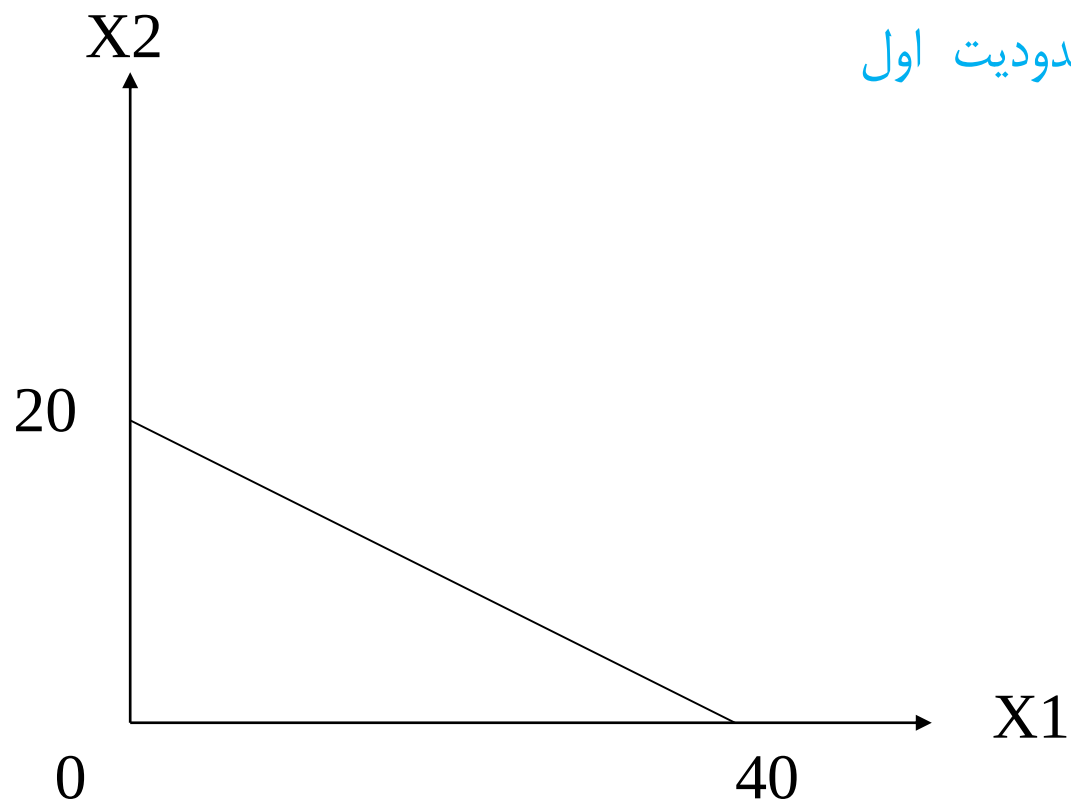
روش هندسی

برای حل مدل ابتدا باید یک دستگاه مختصات تشکیل دهیم:



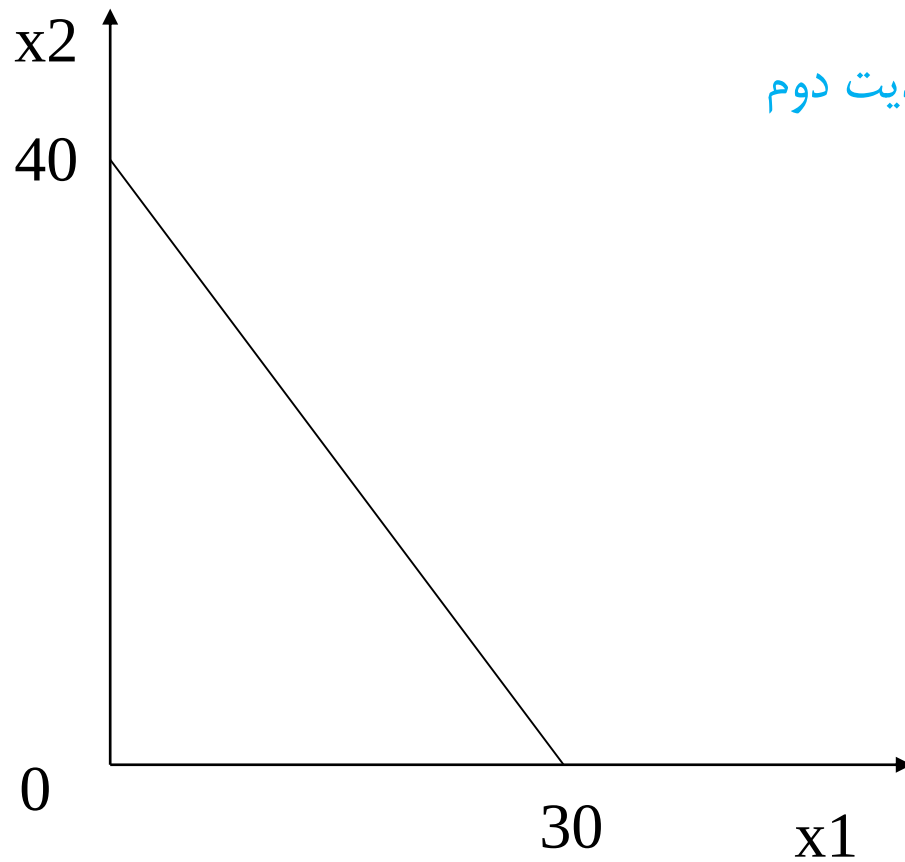
روشن هندسی

رسم محدودیت اول



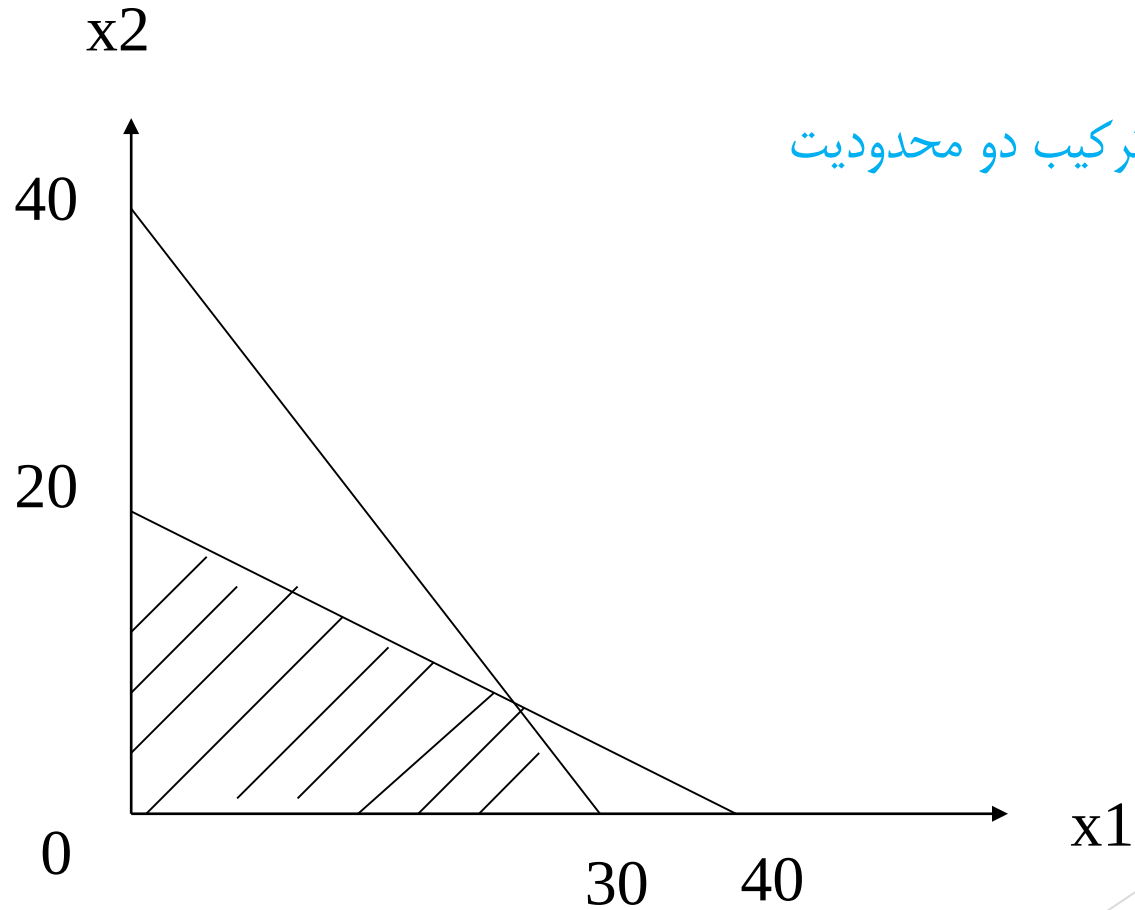
روش هندسی

رسم محدودیت دوم

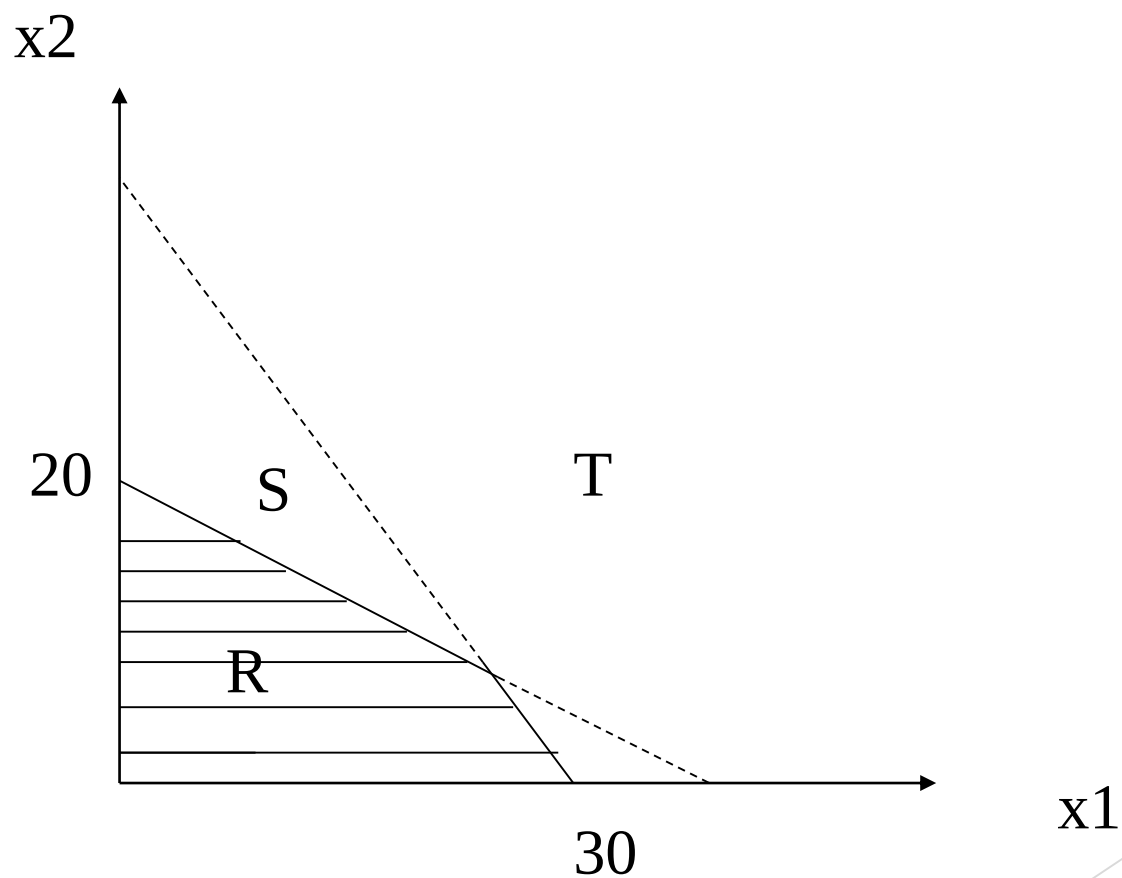


روش هندسی

ترکیب دو محدودیت ►



روش هندسی



نقاط موجّه- ناحیه موجّه

کلیه نقاطی که در هر دو محدودیت صدق می کنند نقاط موجّه می باشند. و هر نقطه که یک محدودیت و یا هر دو محدودیت را نقض نماید غیر موجّه است. ناحیه هاشور خورده ناحیه موجّه نامیده می شود.

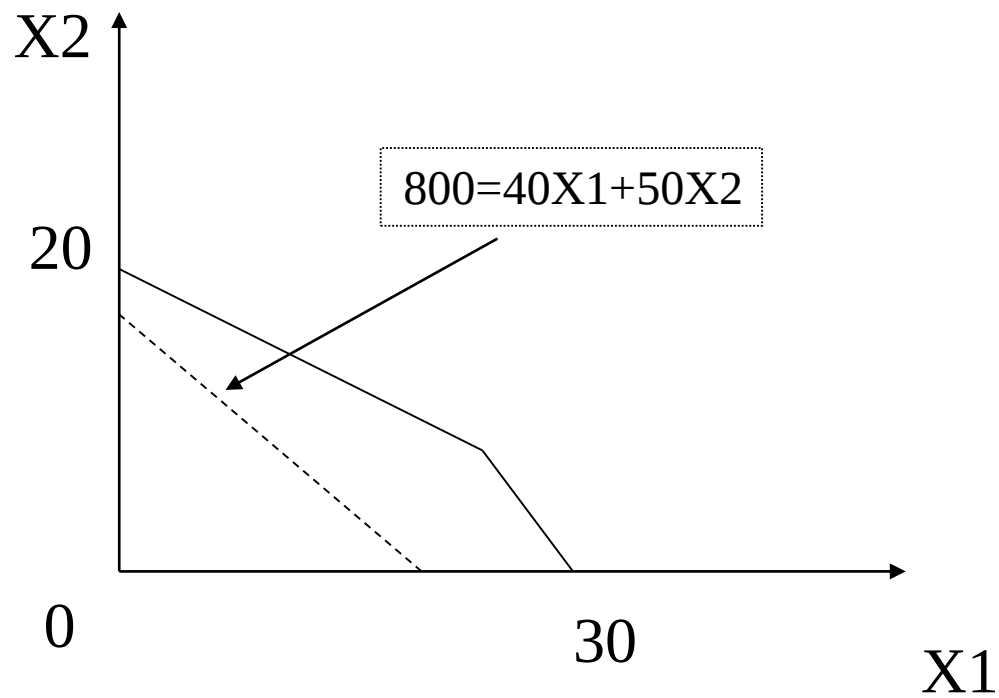
تعیین نقطه بهینه

ترسیم تابع هدف به ازاء یک مقدار دلخواه.

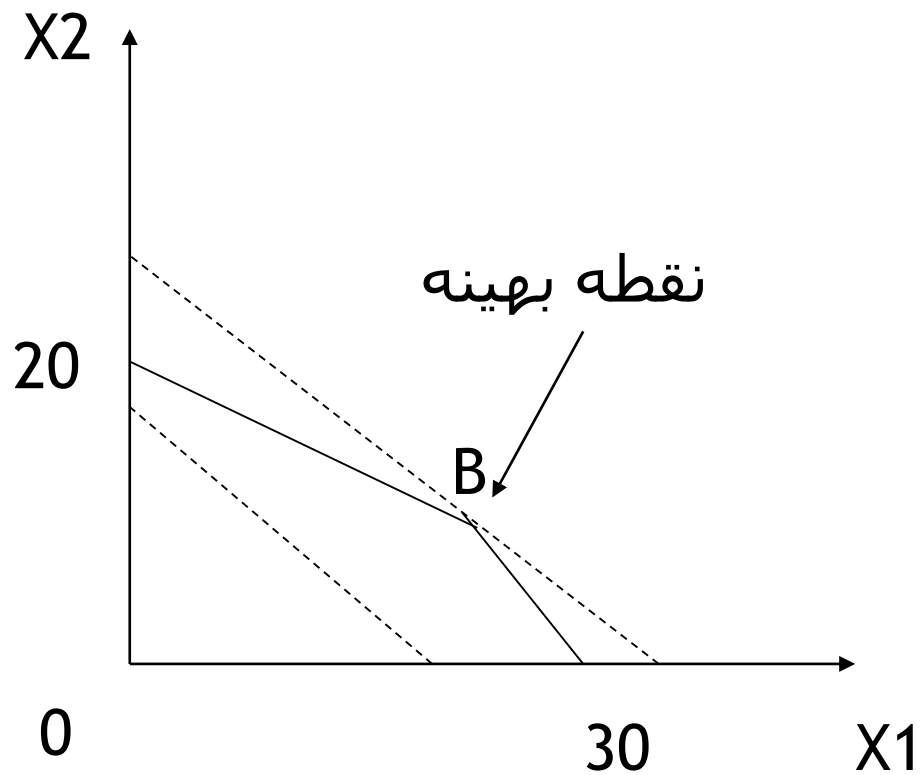
حرکت خط تابع هدف به موازات خط اولیه رسم شده تا آخرین

نقطه ناحیه موجه.

روش هندسی

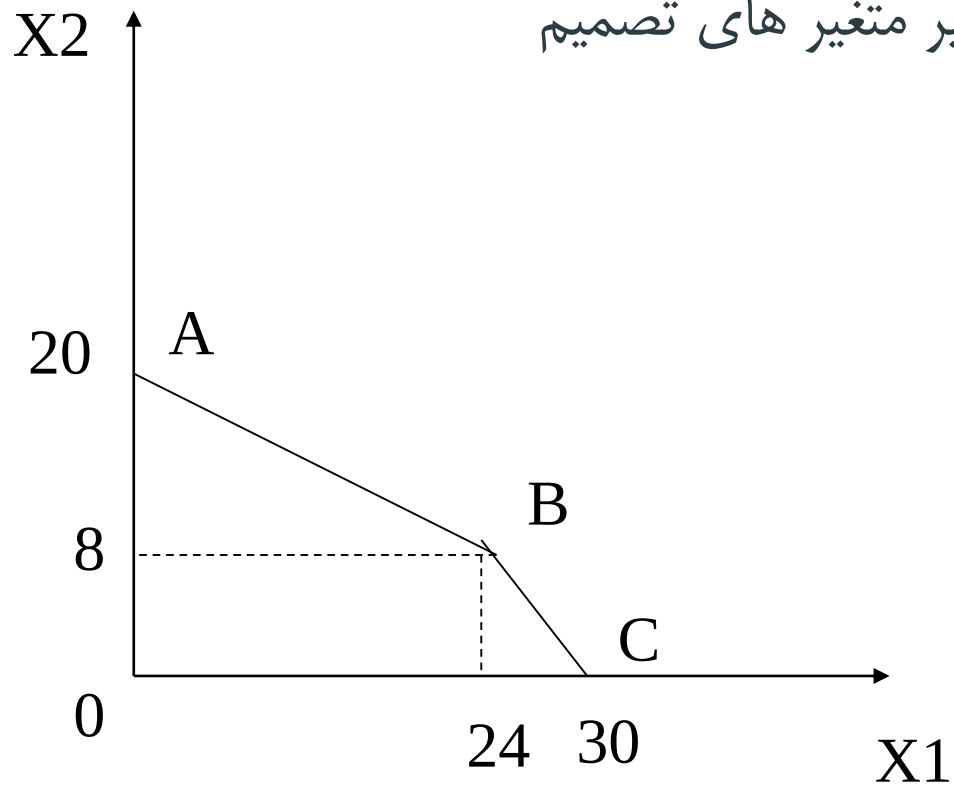


روش هندسی



روش هندسی

مقادیر متغیر های تصمیم



خلاصه

نام گوشه	مشخصات نقاط	مقدار تابع هدف (Z)
A	$(X_1=0, X_2=20)$	$Z=1000$
B	$(X_1=24, X_2=8)$	$Z=1360$
C	$(X_1=30, X_2=0)$	$Z=1200$

گوشه **B**، بهترین گوشه و جواب بهینه است.
زیرا دارای بیشترین سود است.

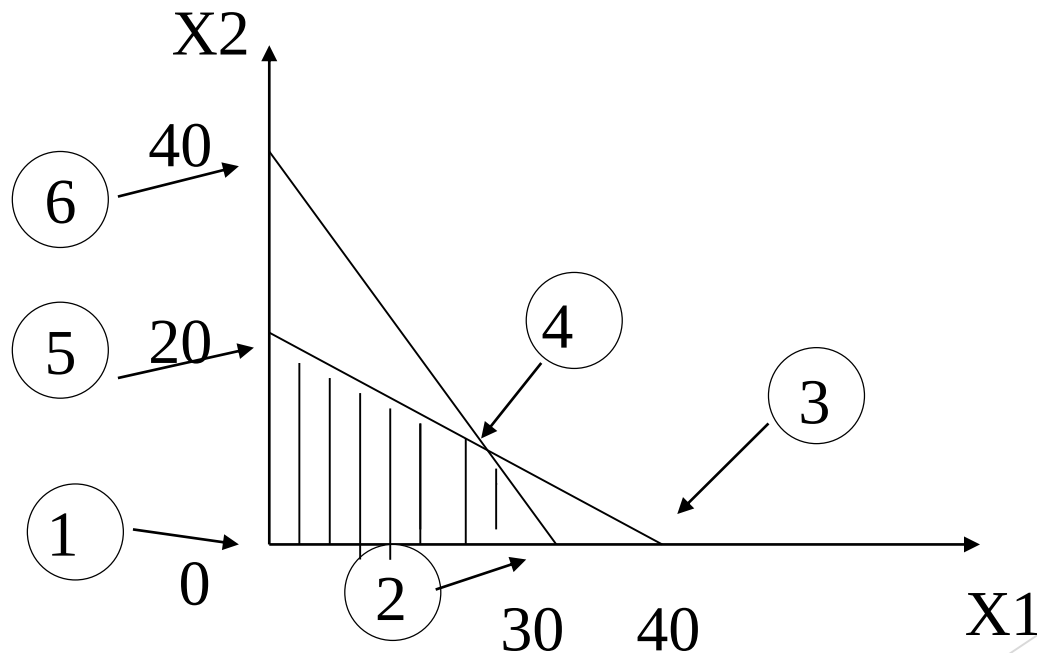
جواب بهینه

- ۱- در اکثر موارد جواب بهینه یکی از جواب های گوشه موجه است. (به جز موارد خاص)
- ۲- تعداد جوابهای گوشه موجه، متناهی است.
- ۳- اگر یک گوشه موجه از تمام جوابهای گوشه موجه مجاور خود بهتر باشد گوشه جواب بهینه است .

نمایش هندسی گوشه ها

هر گوشه موجه جواب همزمان یک دستگاه n معادله ای است که از بین حل معادله محدودیت ها انتخاب شده است.

پس تعداد ترکیبات برابر است با:

$$\frac{(m+n)!}{M! N!}$$


تعداد گوشه ها

$$n=2, m=2$$

$$\frac{4!}{2! 2!}$$

تعداد گوشه ها = 6

خلاصه مراحل رویکرد ترسیمی حل مدل

۱- رسم محدودیت های مدل در قالب یک معادله در دستگاه مختصات.

۲- رسم تابع هدف به ازای مقدار دلخواه.

۳- انتقال خط تابع هدف برای تعیین نقطه بهینه، به سمت مناسب.

۴- حل دستگاه معادلات مشترک گوشه بهینه.

روش حل ترسیمی - مسائل حداقل سازی

بر اساس توضیحات ارائه شده با یک مثال به حل مدل می پردازیم.

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 3X_2$$

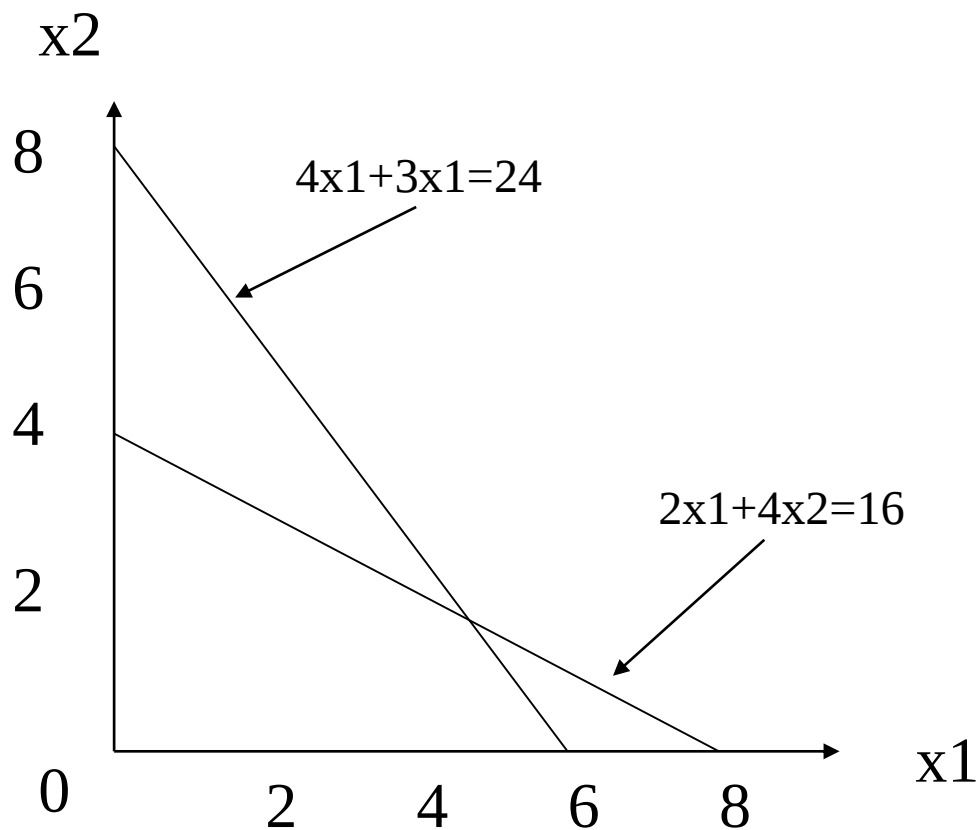
S .to:

$$2X_1 + 4X_2 \geq 16$$

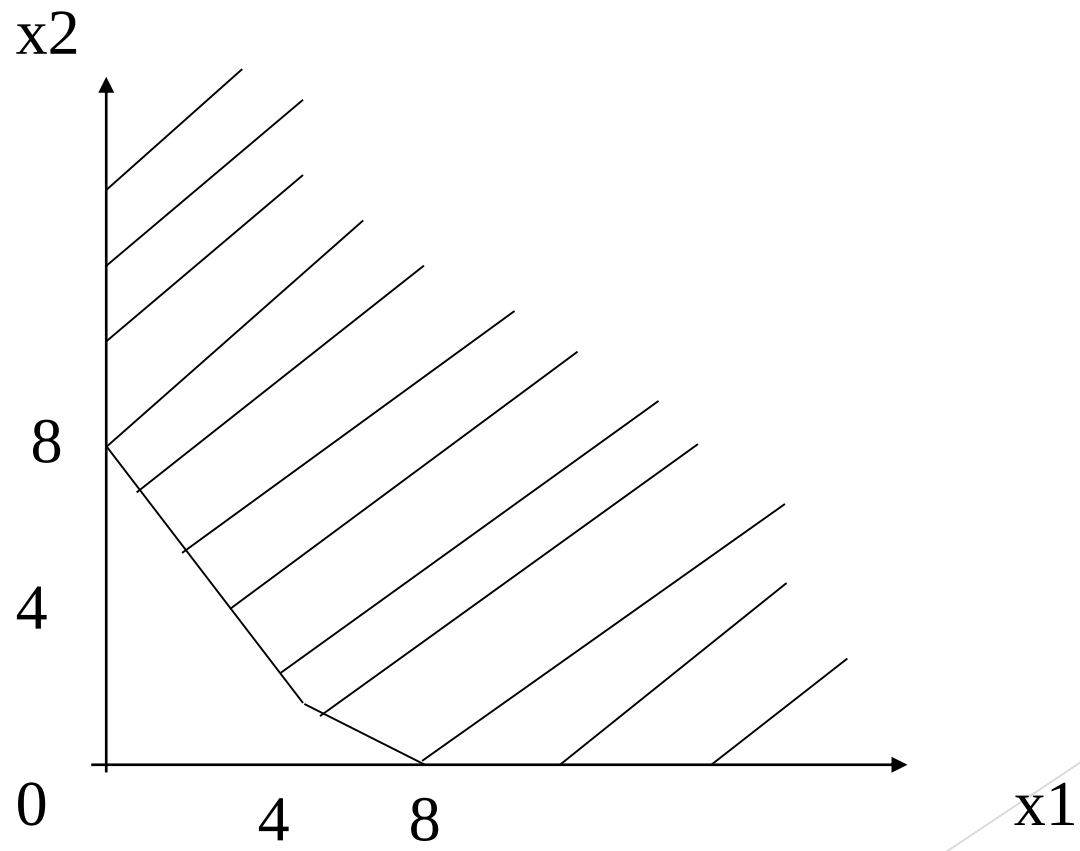
$$4X_1 + 3X_2 \geq 24$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رسم همزمان معادلات محدودیت



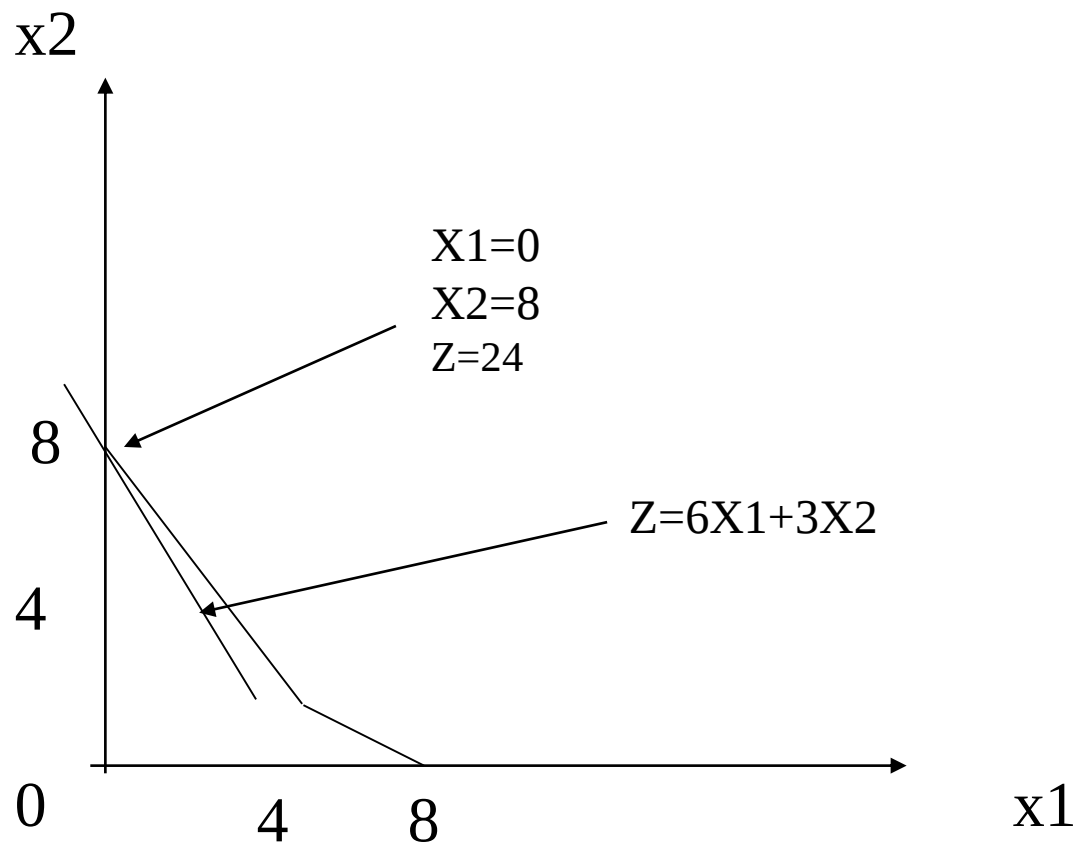
نا حیه موجه



توجه

به ازاء یک مقدار دلخواه خط تابع هدف رسم گردیده و با توجه به هدف مسئله که حداقل سازی است در یکی از نقاط پایین ناحیه جواب با توجه به شیب خط تابع هدف مماس می گردد که آن نقطه بهینه است.

در مثال نقطه بهینه عبارت است از



روش هندسی: موارد خاص در برنامه ریزی خطی

(۱) جواب بهینه چند گانه

(۲) فاقد ناحیه موجه (جواب)

(۳) جواب بیکران

(۴) جواب تبهگن (تباهیده)

(۱) جواب بهینه چند گانه

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 30X_2$$

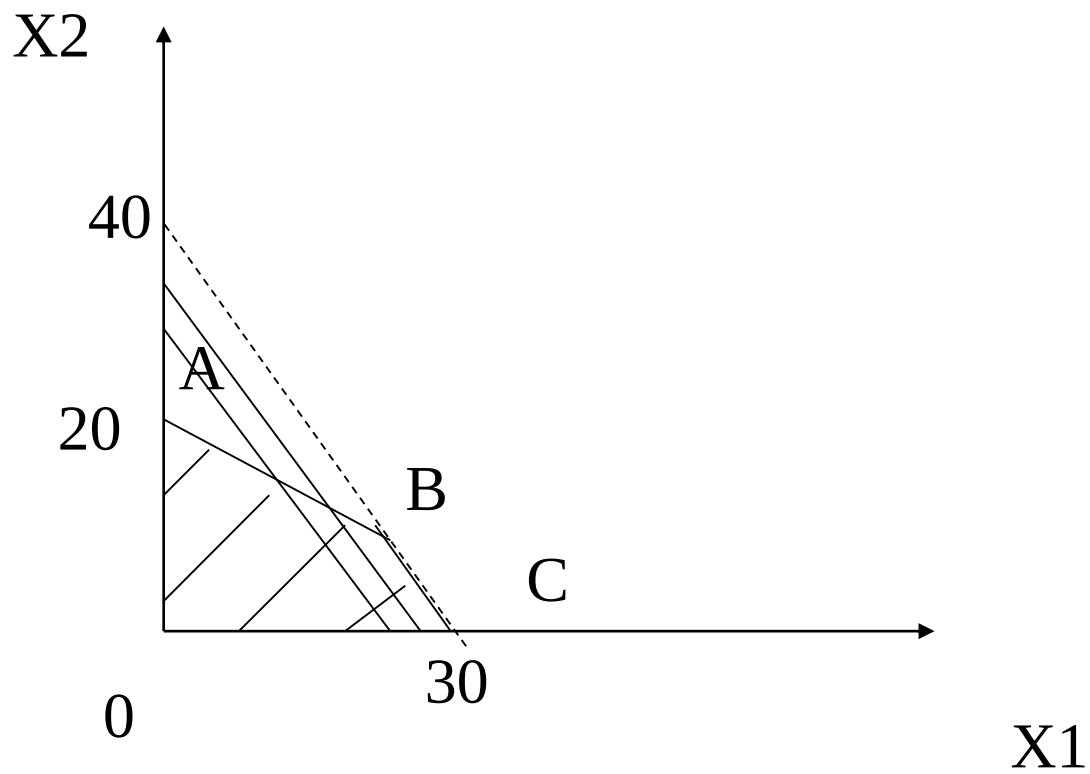
s .to:

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رسم شکل



نتیجه

همان طور که دیده می شود شیب خط تابع هدف و معادله محدودیت دوم یکسانند. پس کلیه نقاط روی پاره خط جزء نقاط بهینه مدل قراردارند.

(۲) فاقد ناحیه موجه (جواب)

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

to: s.

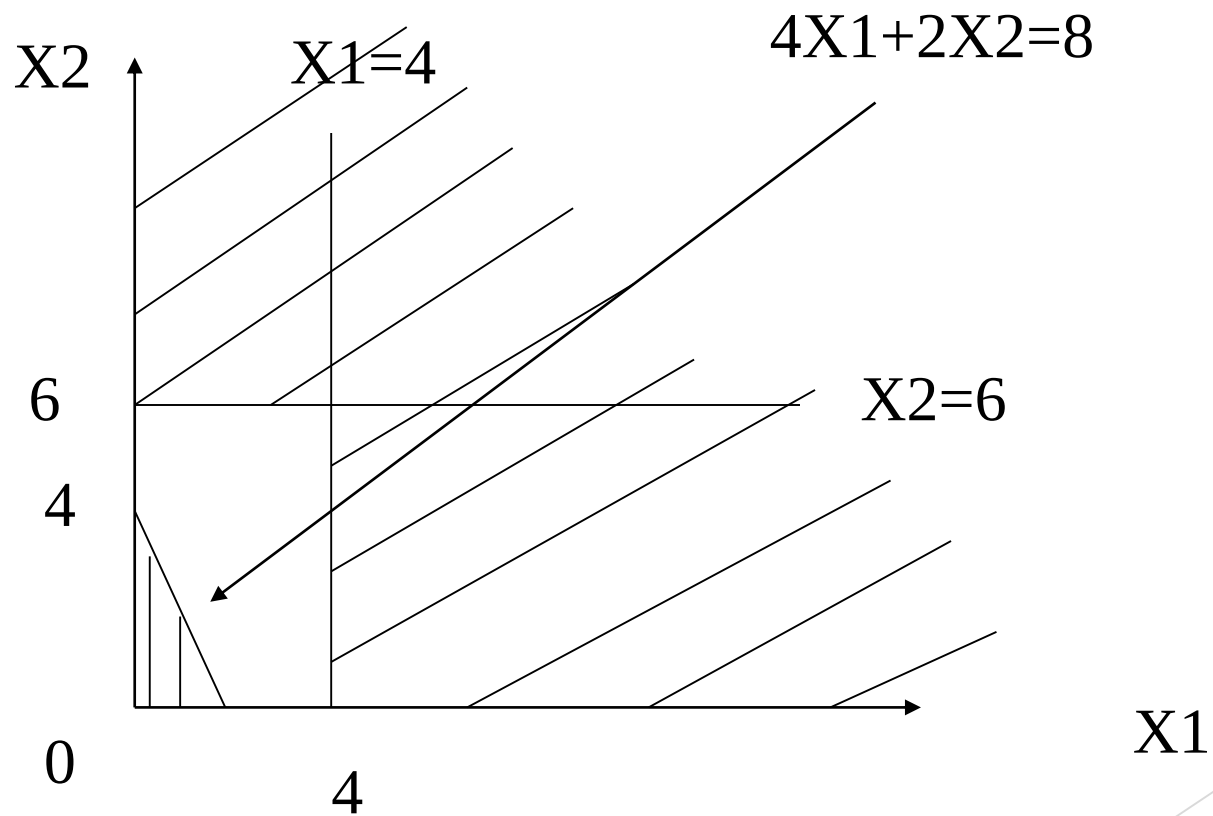
$$2X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 0 \geq 4$$

$$X_2 \geq 6 \quad 0 \quad +$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رسم شکل مدل



جواب

با توجه به شکل بین محدودیت های اول با دوم و سوم
اشتراکی وجود ندارد. پس هیچ نقطه ای که در هر سه
محدودیت صدق کند یافت نمی شود. یعنی مسئله جواب ندارد.

٣) جواب بیكران

$$\text{MAX } Z=4X_1+2X_2$$

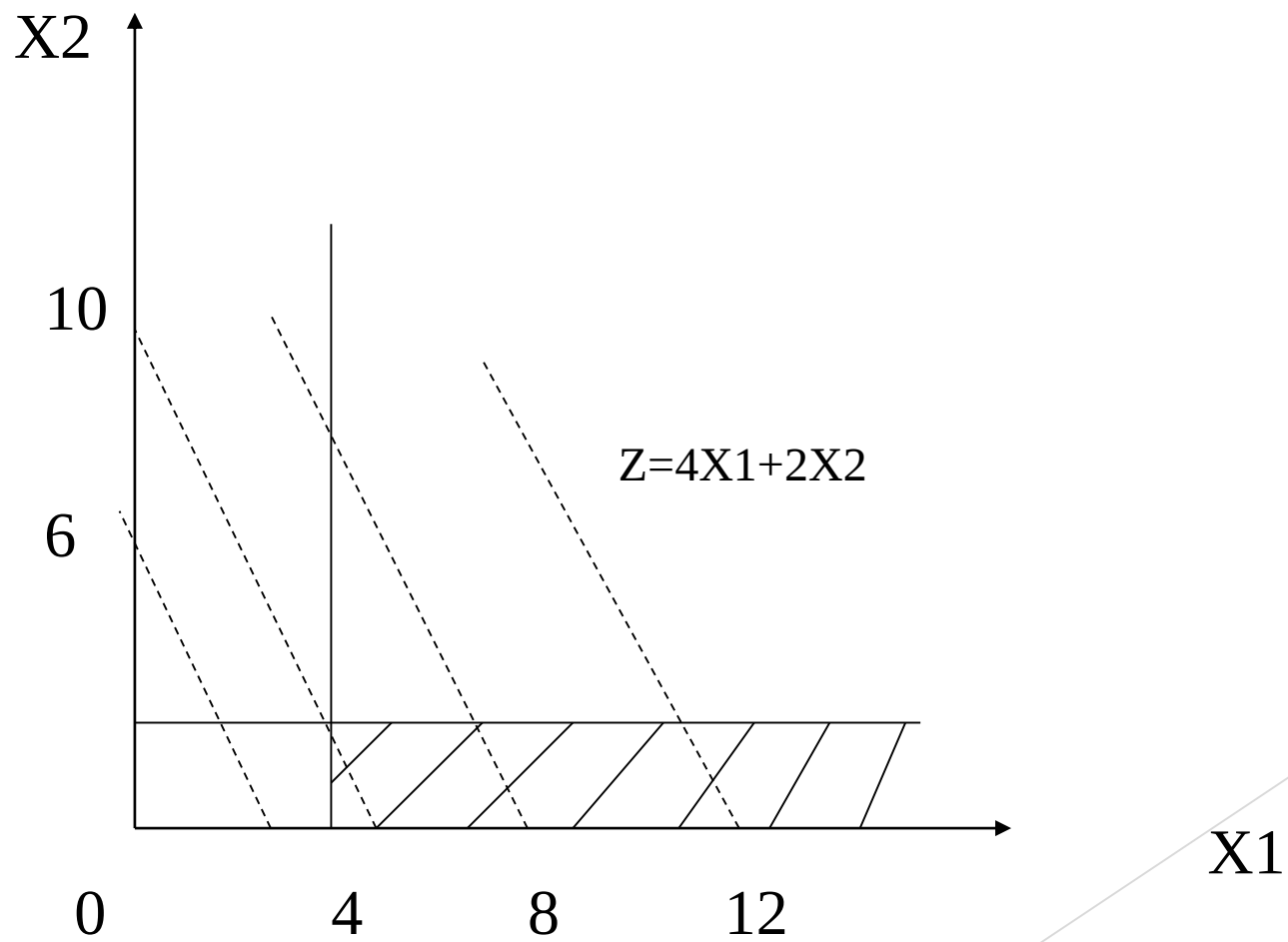
S.TO

$$X_1 \geq 4$$

$$X_2 \leq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

رسم شکل



جواب

► شکل بیانگر ناحیه موجه و ارتباط آن با خط تابع هدف است
که بدون هیچ حد و مرزی می تواند در فضای بیکران جواب
موجه رسم شود.

مثال

$$\text{Max } Z = 6x_1 - 2x_2$$

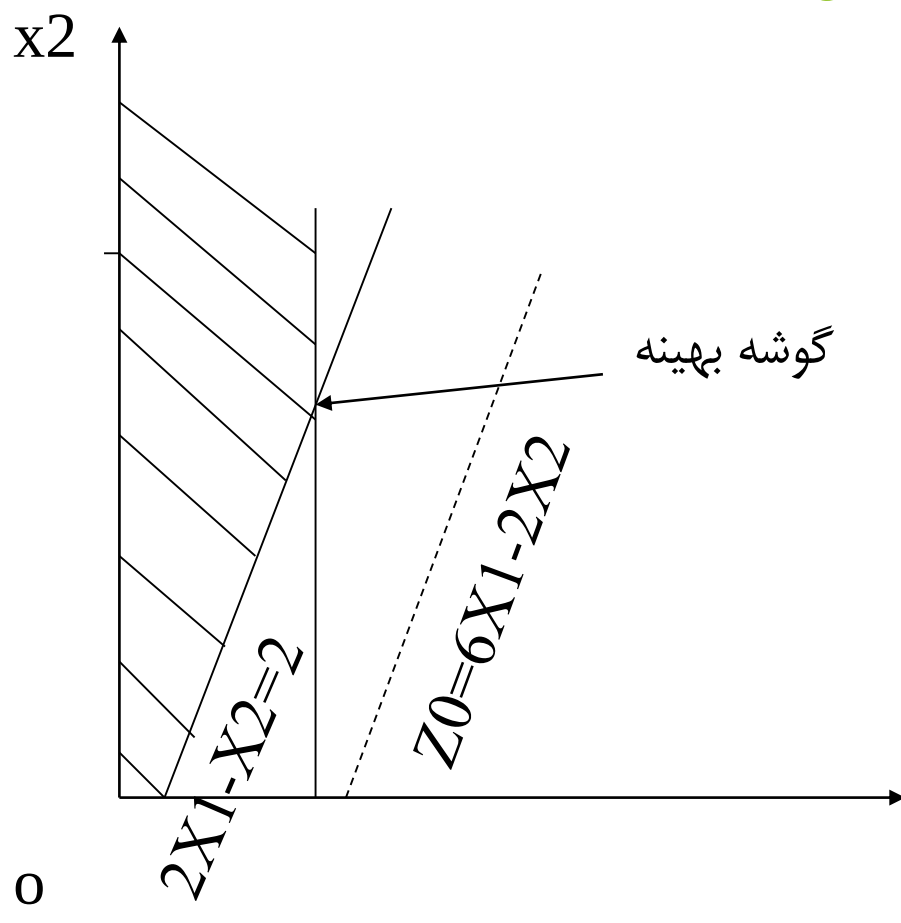
S .to:

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نکته: لزوماً فضای بیکران جواب بیکران را
تداعی نمی کند.



(۴) جواب تبه‌گن

برای تشکیل هر گوشه، دو معادله کافیست.

اگر گوشه‌ای بر اثر تلاقی بیش از دو معادله تشکیل

شده باشد آن گوشه تبه‌گن است.

مثال

$$\text{Max } z = 4x_1 + 6x_2$$

s. to:

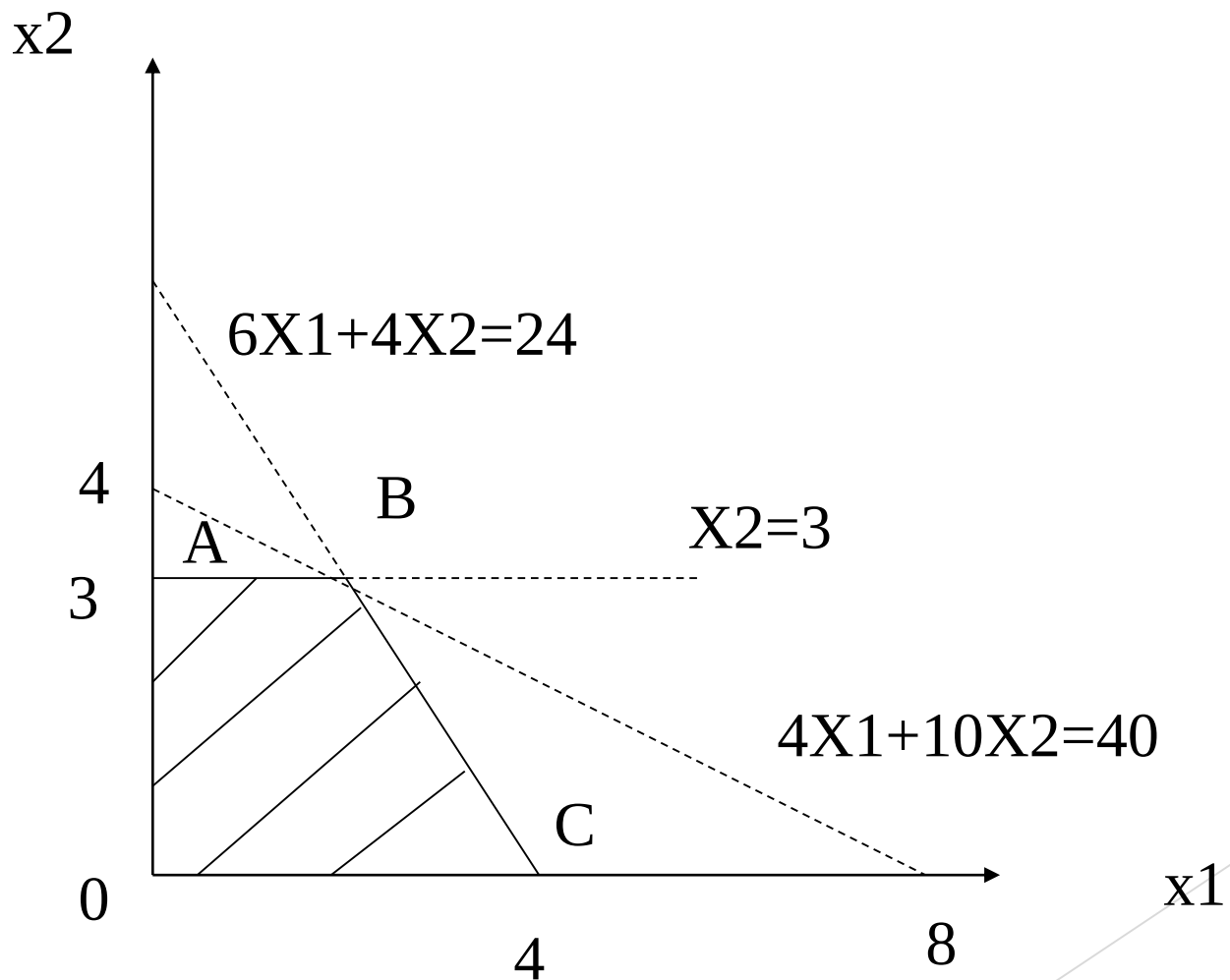
$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_2 \leq 3$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

رسم مدل



جواب

نقطه B نقطه بهینه است و از طلاقی سه معادله مرزی تشکیل شده است. یکی از معادلات فوق زائد بوده و چنین گوشه ای راتبهگن گویند.

روش سیمپلکس

- ▶ یک فن کلی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی ریاضی است.
- ▶ در این روش ابتدا مدل وارد یک جدول گردیده و سپس یک سری مراحل ریاضی بر روی جدول اجرا می گردد.
- ▶ در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه به گوشه ای دیگر (که قطعا بدتر نیست) حرکت کرده تا بهترین گوشه پیدا شود.

فرم استاندارد

اولین قدم در حل یک مدل برنامه ریزی خطی در روش

سیمپلکس تبدیل مدل به فرم استاندارد است.

ویژگی های فرم استاندارد

تابع هدف حداکثر سازی

محدودیت ها به فرم مساوی

مثال ١

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2$$

S.t

$$X_1 + 2X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 120$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تبدیل محدودیت ها به محدودیت های مساوی با استفاده از متغیرهای کمکی

▶ نامعادلات محدودیت ها با استفاده از متغیر های کمکی به معادلات با علامت مساوی تبدیل می شوند.

▶ این متغیر های کمکی در معادلات با علامت کوچکتر مساوی **متغیر کمبود** نامیده می شود.

▶ این متغیر های کمکی در نامعادلات با علامت بزرگتر مساوی **متغیر مازاد** نامیده می شود.

تبدیل نامعادله به معادله

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 40$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

مثال ٢

$$\text{Min } Z = 6X_1 + 3X_2$$

to S.

$$2X_1 + 4X_2 \geq 16$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 22$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

تبدیل مدل به فرم استاندارد

استاندارد سازی تابع هدف ►

$$\text{Min } Z = \text{Max}(-Z)$$

استاندارد سازی محدودیت ها ►

محدودیت اول $2X_1 + 4X_2 - S_1 = 16$ ►

محدودیت دوم $4X_1 + 3X_2 - S_2 = 22$ ►

متغیر مازاد

برخلاف مثال قبل در اینجا اجبارا باید یک متغیر مازاد از طرف چپ نامعادله کم کنیم متغیر مازاد در اینجا بیانگر منبعی است که بیش از حداقل لازم مصرف شده است متغیر مازاد نیز باید نامنفی باشد.

خلاصه مدل استاندارد شده

$$\text{Max}(-Z) = -6X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

S.to:

$$2X_1 + 4X_2 - S_1 = 16$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 = 2$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2$$

تبدیل مدل برنامه ریزی خطی به شکل استاندارد.

الف: مدل حداکثرسازی

۱- محدودیت کوچکتر مساوی را با اضافه کردن متغیر کمکی تبدیل به مساوی کنید.

۲- محدودیت بزرگتر مساوی را با کم کردن متغیر کمکی تبدیل به مساوی کنید.

۳- محدودیت مساوی را عیناً بنویسید.

تبدیل مدل برنامه ریزی خطی به شکل استاندارد.

ب: مدل حداقل سازی

۱ - طرفین تابع هدف را در ۱- ضرب نموده و آن را بصورت حد اکثر سازی بنویسید.

۲ - محدودیت کوچکتر مساوی را با اضافه کردن متغیر کمکی تبدیل به مساوی کنید.

۳- محدودیت بزرگتر مساوی را با کم کردن متغیر کمکی تبدیل به مساوی کنید.

۴- محدودیت مساوی را عینا بنویسید.

روش سیمپلکس

مجموعه ای از مراحل ریاضی برای حل یک مسئله برنامه ریزی
خطی که در یک جدول که به تابلوی سیمپلکس معروف
است انجام می گیرد.

مثال

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

s.t.

$$X_1 + X_2 + S_1 = 40$$

$$4X_1 + 3X_2 + S_2 = 120$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

تابلوی اولیه سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست

شرح تابلوی سیمپلکس

- ▶ ستون اول با عنوان متغیر های اساسی نامیده میشود.
- ▶ ستون آخر بیانگر مقادیر سمت راست معادلات مدل است.
- ▶ ستون وسط بیانگر نام متغیر های مورد استفاده در مدل است.
- ▶ سطر اول تابلو به ضرایب متغیر ها در تابع هدف اختصاص دارد. این سطر را سطر صفر می گویند.

تابلوی اولیه سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0						0
S1						40
S2						120

تابلوی اولیه سیمپلکس بیانگر

مبدا مختصات

مدل برنامه ریزی خطی است .

پُر کردن تابلوی سیمپلکس

► تعیین یک جواب موجه اساسی

► جواب موجه اولیه همواره مبدا مختصات است

متغیرهای اساسی در تابلوی اولیه هستند S_1 و S_2

انتقال ضرایب فنی به تابلو

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-40	-50	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	40
S2	0	4	3	0	1	120

طریقه نوشتن سطر صفر

تابع هدف را به فرم حداکثر سازی تبدیل کنید.

مقادیر سمت راست تابع هدف را به سمت چپ معادله انتقال دهید.

مثال

$$\text{Max } Z = 40X_1 + 50X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$Z - 40X_1 - 50X_2 = 0$$

متغیرهای اساسی

در یک مدل از نوع حداکثر سازی با محدودیت های کوچکتر

مساوی در تابلوی اول همواره متغیرهای اساسی (غیرصفر)

متغیرهای کمکی بوده و متغیرهای تصمیم (بامقدارصفر)

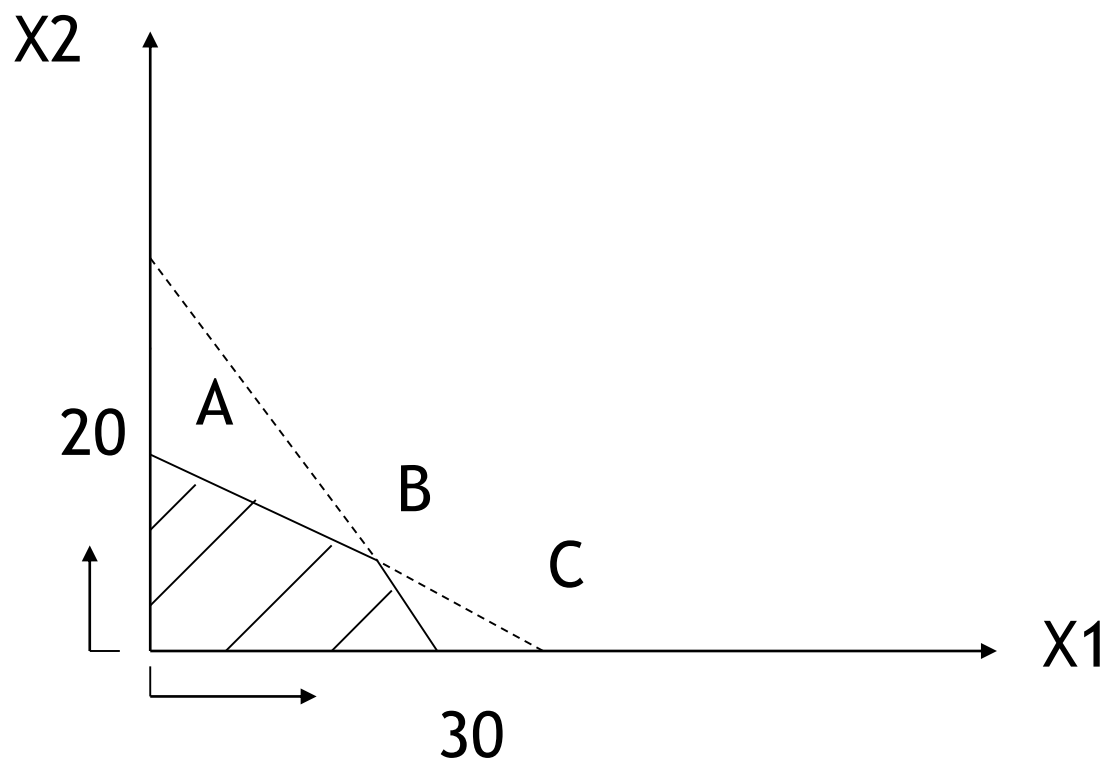
غیراساسی اند .

مراحل سیمپلکس: انتخاب متغیر ورودی

1

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-40	-50	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	40
S2	0	4	3	0	1	120

نمایش هندسی



مراحل سیمپلکس: انتخاب متغیر خروجی (سطر لولا)

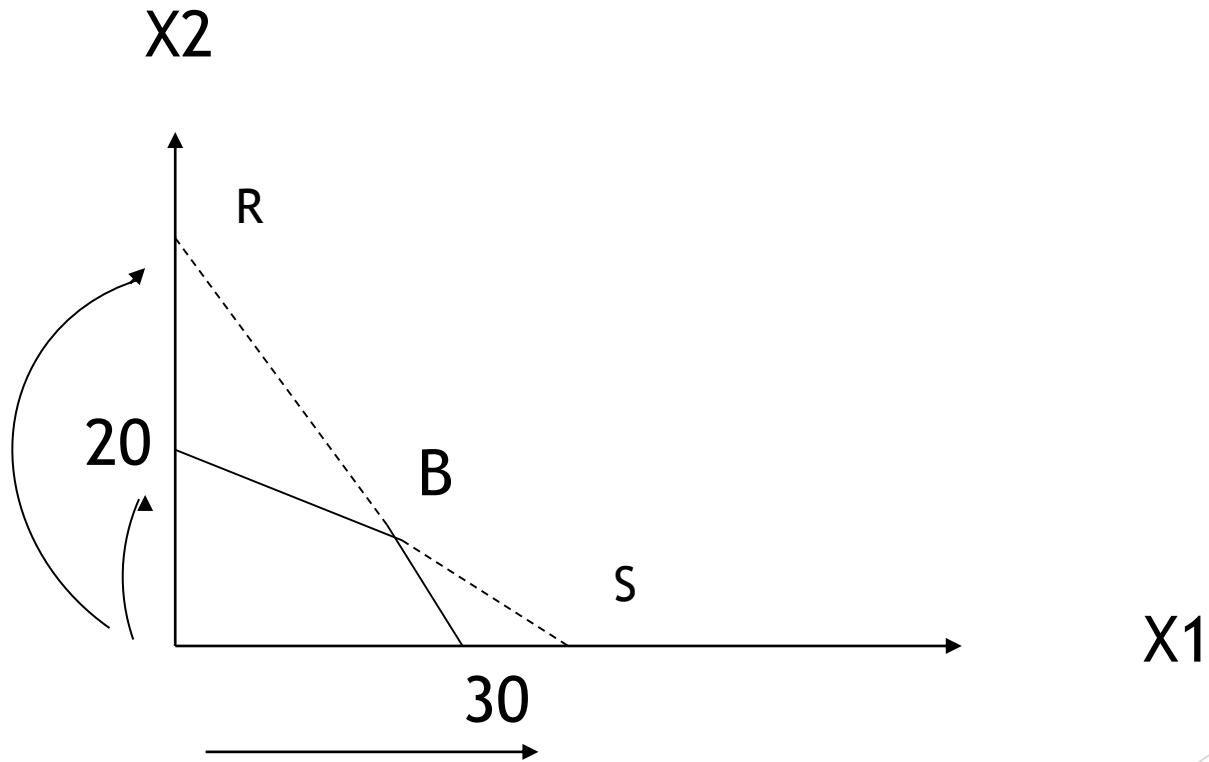
متغیری که دارای حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد در مثال داریم :

$$40 \div 2 = 20$$

$$120 \div 3 = 40$$

حداقل عدد بدست آمده، ۲۰ بوده که متعلق به سطر S_1 است پس S_1 متغیر خروجی است. سطر S_1 را سطر لولا گویند.

نمایش هندسی



خلاصه: سطر - ستون و عنصر لولا

متغیرهای اساسي	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-40	-50	0	0	0
S1	0	1	2	1	0	40
S2	0	4	3	0	1	120

سطر لولا

عنصر لولا ستون لولا

مراحل سیمپلکس: تابلوی جدید سیمپلکس

تابلوی دوم سیمپلکس با جواب موجه اساسی جدید

یعنی X_2 و S_2 می باشد

محاسبه سطر جدید لولا

$$\frac{\text{مقادیر سطر لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}} = \text{مقادیر سطر لولای جدید}$$

تابلوی جدید

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0						
X2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	20
S2						

مقادیر سطر جدید

مقادیر سطر جدید

=

(مقادیر سطر قدیم) - (ضریب مربوط در ستون لولا)*مقادیر مربوط
به ردیف لولای جدید

محاسبه ضرایب

S2

مقادیر ردیف جدید	مقادیر مربوط به ردیف لوای جدید	ضرب مربوط درستون لولا	مقادیر	ردیف قدیم	ستون
0	=	0)	*	(3	- 0
5/2	=	1/2)	*	(3	- 4
0	=	1)	*	(3	- 3
-3/2	=	1/2)	*	(3	- 0
1	=	0)	*	(3	- 1
60	=	20)	*	(3	- 120
					سمت راست

محاسبه ضرایب

Z

مقادیر ردیف جدید	مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید			ضریب مربوط در ستون لولا			مقادیر ردیف قدیم		ستون
1	=	0)	*	(-50	-	1	z		
-15	=	1/2)	*	(-50	-	-40	x1		
0	=	1)	*	(-50	-	-50	x2		
25	=	1/2)	*	(-50	-	0	s1		
0	=	0)	*	(-50	-	0	s2		
1000	=	20)	*	(-50	-	0	سمت راست		

تابلوی سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-15	0	25	0	1000
X2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	20
S2	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	60

محاسبات تابلوی جدید

تابلوی جدید

- منفی ترین ضریب مربوط به X_1 است. (۱۵ -)

- نحوه تعیین متغیر خروجی:

متغیر اساسی	مقادیر سمت راست
X_2	$20 / (2/1) = 40$
متغیر خروجی S_2	$60 / (2/5) = 24$

سطروستون لولای جدید

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	-15	0	25	0	1000
X2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	20
S2	0	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	60

عدد لولا

تابلوی جدید

متغیرهای اساسی	Z	X1	X2	S1	S2	مقادیر سمت راست
Z0	1	0	0	16	6	1360
X2	0	0	1	4/5	-1/5	8
x1	0	1	0	-3/5	2/5	24

شرط بهینگی تابلوی سیمپلکس

► کلیه مقادیر سطر صفر (Z) ، غیر منفی باشند یا کلیه مقادیر سطر صفر (Z)
(صفر یا عدد مثبت باشند.

با توجه به شرط بهینگی تابلوی سیمپلکس تابلوی سوم تابلوی بهینه است .

خلاصه مراحل روش سیمپلکس

- ۱ - مدل مسئله به فرم استاندارد تبدیل شود .
- ۲ - تابلوی اولیه بر اساس جواب موجه اساسی در مبدا مختصات تنظیم شود .
- ۳ - ستون لولا بر اساس متتقی ترین ضریب سطر صفر تعیین شود.
- ۴ - سطر لولا بر اساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا تعیین شود .
- ۵ - ضرایب سطر لولای جدید محاسبه شود .
- ۶ - ضرایب دیگر سطرها محاسبه شود .
- ۷ - شرط بهینگی کنترل گردد .