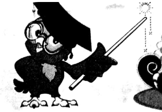


آموزش

تعریف توان

تعریف توان: جویا و پویا جدولی مطابق جدول زیر را تهیه کرده‌اند. آن‌ها در خانهٔ اول جدول دو شکلات و در خانهٔ دوم دو برابر خانهٔ اول و در خانهٔ سوم دو برابر خانهٔ دوم و به همین ترتیب ادامه دادند و جدول را کامل کرده‌اند. آیا شما نیز می‌توانید جدول را کامل کنید.

خانهٔ nام	....	خانهٔ پنجم	خانهٔ چهارم	خانهٔ سوم	خانهٔ دوم	خانهٔ اول
	....	۲×۲×۲×۲×۲	۲×۲×۲×۲	۲×۲×۲	۲×۲	۲

جویا برای محاسبهٔ تعداد شکلات‌های هر خانه به‌صورت زیر عمل کرده است.

خانهٔ اول $\longrightarrow$ ۲

خانهٔ دوم $\longrightarrow$ ۴ = ۲×۲

خانهٔ سوم $\longrightarrow$ ۸ = ۲×۲×۲

خانهٔ چهارم $\longrightarrow$ ۱۶ = ۲×۲×۲×۲

خانهٔ پنجم $\longrightarrow$ ۳۲ = ۲×۲×۲×۲×۲

خانهٔ nام $\longrightarrow$ $\underbrace{۲\times۲\times۲\times...\times۲}_{\text{n تا}}$

به نظر شما در خانهٔ پنجم چند شکلات قرار می‌گیرد؟ ۳۲ شکلات

جویا و پویا هم مانند شما به این نتیجه رسیده‌اند که در ضرب‌های بالا اعداد به‌طور تکراری در خودشان ضرب می‌شوند و این تکرارها کار مقایسه و خواندن اعداد را مشکل می‌کند. آن‌ها در می‌یابند برای خلاصه کردن و جلوگیری از تکرار ضرب‌های یک عدد در خودش می‌توان یکی از اعـداد را نوشته و به تعداد تکرار اعداد، تعداد را در بالای آن عدد بنویسیم. به مثال‌های زیر دقت کنید.

الف) $۵\times۵\times۵\times۵ = ۵^۴$ $\longrightarrow$ در این‌جا ۵ را پایه و ۴ را توان یا نما می‌خوانیم $\longrightarrow$ می‌خوانیم ۵ به توان ۴

ب) $۷\times۷\times۷ = ۷^۳$ $\longrightarrow$ می‌خوانیم ۷ به توان ۳

پ) $\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳} = (\frac{۲}{۳})^۲$ $\longrightarrow$ می‌خوانیم $\frac{۲}{۳}$ به توان ۲

ت) $(-۵)\times(-۵)\times(-۵)\times(-۵) = (-۵)^۴$ $\longrightarrow$ می‌خوانیم ۵- به توان ۴

ث) $\frac{۵}{۳}\times\frac{۵}{۳}\times\frac{۵}{۳}\times\frac{۵}{۳}\times\frac{۵}{۳} = (\frac{۵}{۳})^۵$ $\longrightarrow$ می‌خوانیم $\frac{۵}{۳}$ به توان ۵

مثال عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید.

الف) ۳ به توان (۷-) $= (-۷)^۳$

ب) ۵ به توان $\frac{۱}{۲} = (\frac{۱}{۲})^۵$

پ) ۴ به توان $۲\frac{۱}{۳} = (۲\frac{۱}{۳})^۴$

ت) ۶ به توان (۰/۱) $= (۰/۱)^۶$

به طور کلی اگر عدد دلخواه a را n بار در خودش ضرب کنیم آن را به‌صورت a^n (a به توان n) نمایش می‌دهیم. که در آن a پایه و n توان است و داریم:

$$\underbrace{a\times a\times a\times...\times a}_{\text{n مرتبه}} = a^n$$

Scanned by CamScanner

مثال۱ ضرب‌های زیر را به طور خلاصه و به‌صورت توان‌دار بنویسید.

الف) $(-۵)\times(-۵)\times(-۵)=(-۵)^{۳}$

ب) $\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۷}\times\frac{۲}{۷}=(\frac{۲}{۷})^{۴}$

پ) $۵\times۵\times۵\times۵\times۵\times۵=۵^{۶}$

ت) $x\times x\times x\times x\times x=x^{۵}$

مثال۲ اعداد توان‌دار زیر را بخوانید و حاصل را حساب کنید.

الف) $۳^{۴}=$ (۳ به توان ۴) $=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$

ب) $(-۷)^{۳}=$ ((۷-) به توان ۳) $=(-۷)\times(-۷)\times(-۷)=-۳۴۳$

پ) $(\frac{۲}{۵})^{۲}=$ ($\frac{۲}{۵}$ به توان ۲) $=\frac{۲}{۵}\times\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۲۵}$

ت) $۵^{۵}=$ (۵ به توان ۵) $=۵\times۵\times۵\times۵\times۵=۳۱۲۵$

حاصل عبارت $(-a)^{۲}$ با حاصل $-a^{۲}$ برابر نمی‌باشد.

الف) $\begin{cases}(-۵)^{۲}=(-۵)\times(-۵)=+۲۵\\ -۵^{۲}=-(۵\times۵)=-۲۵\end{cases}\Rightarrow (-۵)^{۲}\neq-۵^{۲}$

ب) $\begin{cases}(-۳)^{۲}=(-۳)\times(-۳)=+۹\\ -۳^{۲}=-(۳\times۳)=-۹\end{cases}\Rightarrow (-۳)^{۲}\neq-۳^{۲}$

هر عدد به توان یک برابر خود عدد است.

$a^{۱}=a$

مثال حاصل عبارت‌های مقابل را به‌دست آورید.

$۵^{۱}=۵$ و $(-۷)^{۱}=(-۷)$ و $(\frac{۲}{۷})^{۱}=\frac{۲}{۷}$ و $(۰/۸)^{۱}=۰/۸$

عدد یک به هر توان برسد، حاصل برابر یک است.

$۱^{n}=۱$

مثال حاصل عبارت‌های مقابل را به‌دست آورید.

$۱^{۷}=۱$ و $۱^{۵۲۹}=۱$

هر عدد (غیر صفر) به توان صفر برسد، حاصل برابر یک است. $(a\neq۰)$

$a^{۰}=۱$

مثال حاصل عبارت‌های مقابل را به‌دست آورید.

$۱^{۰}=۱$ و $۳^{۰}=۱$ و $(-۸)^{۰}=۱$ و $(۰/۶)^{۰}=۱$ و $(\frac{۲}{۵})^{۰}=۱$

عدد صفر به هر توانی (به جز صفر) برسد حاصل صفر است. $(n\neq۰)$

$۰^{n}=۰$

مثال حاصل عبارت‌های مقابل را به‌دست آورید.

$۰^{۱}=۰$ و $۰^{۷}=۰$

در دوران ابتدایی یاد گرفته‌اید که در برخی مواقع می‌توان جمع را به ضرب تبدیل کرد. مانند $۵\times۳=۵+۵+۵$ و داریم: $a+a+a+a=۴\times a$

حاصل $a\times a\times a$ و $a+a+a$ با هم برابر نیستند. زیرا:

$\begin{cases}a+a+a=۳a\\ a\times a\times a=a^{۳}\end{cases}\Rightarrow ۳a\neq a^{۳}\ (a\neq۰)$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۸+۸+۸+۸=۴\times۸=۳۲$

ب) $(-۷)\times(-۷)\times(-۷)=(-۷)^{۳}=-۳۴۳$

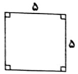
پ) $۸\times۸\times۸\times۸=۸^{۴}=۴۰۹۶$

ت) $(-۷)+(-۷)+(-۷)=۳\times(-۷)=-۲۱$

برخی از کاربردهای اعداد توان‌دار

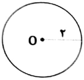
۱ـ محاسبهٔ مساحت و حجم بعضی از اشکال هندسی:

مثال **مساحت مربعی به ضلع ۵ سانتی‌متر را حساب کنید.**



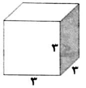
پاسخ: سانتی‌متر مربع $S = ۵ \times ۵ = ۵^{۲}$

مثال **مساحت دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را به‌دست آورید.**



پاسخ: سانتی‌متر مربع $S = ۲ \times ۲ \times ۳/۱۴ = ۲^{۲} \times ۳/۱۴$

مثال **حجم مکعب مربعی به ضلع ۳ سانتی‌متر را به‌دست آورید.**



پاسخ: سانتی‌متر مکعب $V = ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^{۳}$

۲ـ نوشتن یک الگوی عددی (فرمول کلی) به کمک عبارت‌های توان‌دار:

مثال **الف) مساحت مربع به ضلع a برابر است با:** $S = a^{۲}$

ب) مساحت دایره‌ای به شعاع r برابر است با: $S = \pi r^{۲}$

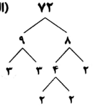
پ) حجم مکعب مربعی به ضلع a برابر است با: $V = a^{۳}$

۳ـ تجزیه اعداد مرکب:

تمام اعداد مرکب را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب اعداد اول تجزیه کرد.

مثال **به کمک تجزیهٔ شمارنده‌های اول، اعداد زیر را به‌دست آورید.**

الف)



$۷۲ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ \Rightarrow ۷۲ = ۲^{۳} \times ۳^{۲} \longrightarrow$ شمارنده‌های اول ۷۲ اعداد ۲ و ۳ هستند.

ب) $۸۰۰ = ۵^{۲} \times ۲^{۵} \longrightarrow$ شمارنده‌های اول ۸۰۰ اعداد ۲ و ۵ هستند.

پ) $۱۲۰۰ = ۲^{۴} \times ۳ \times ۵^{۲} \longrightarrow$ شمارنده‌های اول ۱۲۰۰ اعداد ۲ و ۳ و ۵ هستند.

مفهوم مجذور یک عدد

تعریف مجذور: توان دوم هر عدد را مجذور یا مربع آن عدد گویند. به عبارت دیگر اگر عددی در خودش ضرب شود حاصل را مجذور آن عدد گویند.

مثال **مجذور هر یک از اعداد زیر را حساب کنید.**

الف) مجذور عدد ۵ $= ۵ \times ۵ = ۵^{۲} = ۲۵$

ب) مجذور عدد (-۷) $= (-۷) \times (-۷) = (-۷)^{۲} = +۴۹$

پ) مجذور عدد $\frac{۲}{۳}$ $= \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = (\frac{۲}{۳})^{۲} = \frac{۴}{۹}$

ت) مجذور عدد $(۰/۳)$ $= (۰/۳) \times (۰/۳) = (۰/۳)^{۲} = ۰/۰۹$

مجذور اعداد منفی، همواره عددی مثبت است.

مثال مجذور عدد (۲−) را به‌دست آورید. $(-۲)^۲ = (-۲)\times(-۲) = +۴$

مجذور هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک، همواره از خود عدد بزرگ‌تر است.

مثال مجذور دو عدد ۳ و ۷ را با خود اعداد مقایسه کنید. $۹ > ۳$ و $۴۹ > ۷$

مجذور هر عدد بین صفر تا یک از خود عدد کوچک‌تر است.

مثال مجذور هر یک از اعداد را با خود آن عدد مقایسه کنید.

الف) $(\frac{۱}{۳})^۲ < \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۹} < \frac{۱}{۳}$

ب) $(۰/۴)^۲ < ۰/۴ \Rightarrow ۰/۱۶ < ۰/۴$

مجذور هر عدد صحیح بزرگ‌تر از یک و کوچک‌تر از (۱−) همواره از خود عدد بزرگ‌تر است.

مثال مجذور دو عدد ۶ و (۸−) را با خود اعداد مقایسه کنید. $۶^۲ > ۶ \Rightarrow ۳۶ > ۶$ و $(-۸)^۲ > -۸ \Rightarrow ۶۴ > -۸$

مفهوم مکعب یک عدد

تعریف مکعب: توان سوم هر عدد را مکعب آن عدد گویند. به عبارت دیگر اگر عددی سه بار در خودش ضرب شود حاصل را مکعب آن عدد گویند.

مثال مکعب هر یک از اعداد ۲، $\frac{۵}{۲}$، (۰/۳) و (۳−) را به‌دست آورید.

الف) مکعب عدد ۲ $= ۲\times۲\times۲ = ۲^۳ = ۸$

ب) مکعب عدد $\frac{۵}{۲}$ $= \frac{۵}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times\frac{۵}{۲} = (\frac{۵}{۲})^۳ = \frac{۱۲۵}{۸}$

پ) مکعب عدد (۰/۳) $= ۰/۳\times۰/۳\times۰/۳ = (۰/۳)^۳ = ۰/۰۲۷$

ت) مکعب عدد (۳−) $= (-۳)\times(-۳)\times(-۳) = (-۳)^۳ = -۲۷$

مکعب هر عدد منفی، عددی منفی خواهد شد.

مثال مکعب عدد (۵−) را به‌دست آورید. $(-۵)^۳ = (-۵)\times(-۵)\times(-۵) = -۱۲۵$

مکعب هر عدد بزرگ‌تر از یک، از خود عدد بزرگ‌تر است.

مثال مکعب هر یک از اعداد را با خود آن عدد مقایسه کنید. $۳^۳ > ۳ \Rightarrow ۲۷ > ۳$ و $۷^۳ > ۷ \Rightarrow ۳۴۳ > ۷$

مکعب هر عدد بین صفر تا یک از خود عدد کوچک‌تر است.

مثال مکعب هر یک از اعداد را با خود آن عدد مقایسه کنید.

الف) $(\frac{۱}{۴})^۳ < \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{۶۴} < \frac{۱}{۴}$

ب) $(۰/۵)^۳ < ۰/۵ \Rightarrow ۰/۱۲۵ < ۰/۵$

مکعب اعداد بین صفر تا منفی یک از خود عدد بزرگ‌تر است.

مثال مکعب هر یک از اعداد را با خود آن عدد مقایسه کنید.

الف) $(-\frac{۱}{۲})^۳ > -\frac{۱}{۲} \Rightarrow (-\frac{۱}{۸}) > (-\frac{۱}{۲})$

ب) $(-۰/۳)^۳ > -۰/۳ \Rightarrow -۰/۰۲۷ > -۰/۳$

مکعب اعداد کوچک‌تر از (۱−) از خود عدد کوچک‌تر است.

مثال مکعب عدد (۲−) را با خود آن عدد مقایسه کنید. $(-۲)^۳ < -۲ \Rightarrow -۸ < -۲$

در محاسبهٔ اعداد توان‌دار ترتیب انجام عملیات بسیار مهم و تاثیرگذار در پاسخ عبارت‌ها می‌باشد. که اگر رعایت نشود جواب‌های مختلفی به‌دست می‌آید و ما را دچار سردرگمی خواهد کرد. به این منظور و جهت هماهنگی بین تمام محاسبات به‌طور قراردادی در تمام دنیا اولویت‌هایی را در محاسبات قرار داده‌اند که باید رعایت شود که در زیر به آن می‌پردازیم.

ترتیب انجام عملیات در اعداد توان‌دار

اولویت در محاسبات و ترتیب انجام عملیات در اعداد صحیح را در بخش‌های قبلی مورد بررسی قرار دادیم. مشاهده کردید که رعایت نکردن این اولویت‌ها و نداشتن ترتیب صحیح در انجام عملیات باعث ایجاد اشتباه در محاسبات می‌شود. در محاسبات اعداد توان‌دار نیز رعایت اولویت‌های زیر الزامی است:

۱- پرانتز ۲- توان یا جذر ۳- ضرب یا تقسیم (هر کدام در سمت چپ باشد) ۴- جمع و تفریق

مثال **به ترتیب عملیات انجام شده در عبارت‌های زیر توجه نمائید.**

الف) $۲^۳ \times (۵+۳^۲) \div ۴ + ۵ = ۸(۵+۹) \div ۴ + ۵ = ۸\times۱۴ \div ۴ + ۵ = ۱۱۲ \div ۴ + ۵ = ۲۸ + ۵ = ۳۳$

ب) $۳^۲ \times ۲^۴ \div ۲^۳ - ۲(۳-۵)^۳ - (-۱)^۴ + ۵ = ۹\times۱۶ \div ۸ - ۲(-۲)^۳ - (+۱) + ۵ = \frac{۹\times \overset{۲}{\cancel{۱۶}}}{\underset{۱}{\cancel{۸}}} - ۲(-۸) - ۱ + ۵ =$

$= ۹\times۲ + ۱۶ + ۴ = ۱۸ + ۲۰ = ۳۸$

به اهمیت وجود پرانتز در اعداد توان‌دار کسری توجه کنید.

مثال **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $(\frac{۲}{۳})^۲ = (\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}) = \frac{۴}{۹}$

ب) $\frac{۲^۲}{۳} = \frac{۲\times۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$

پس ملاحظه می‌کنید که حاصل $(\frac{۲}{۳})^۲$ و $\frac{۲^۲}{۳}$ با هم مساوی نیستند و به‌طور کلی داریم:

$$(\frac{a}{b})^n \neq \frac{a^n}{b}$$

به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف)
$$\begin{cases} (\frac{۵}{۳})^۳ = \frac{۵^۳}{۳^۳} = \frac{۱۲۵}{۲۷} \\ \frac{۵^۳}{۳} = \frac{۵\times۵\times۵}{۳} = \frac{۱۲۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow (\frac{۵}{۳})^۳ \neq \frac{۵^۳}{۳}$$

ب)
$$\begin{cases} (\frac{۲}{۷})^۲ = \frac{۲^۲}{۷^۲} = \frac{۴}{۴۹} \\ \frac{۲^۲}{۷} = \frac{۴}{۷} \end{cases} \Rightarrow \frac{۴}{۴۹} \neq \frac{۴}{۷} \Rightarrow (\frac{۲}{۷})^۲ \neq \frac{۲^۲}{۷}$$

مثال **آیا عبارت‌های زیر درست محاسبه شده‌اند؟ دلیل درستی یا نادرستی آن را توضیح دهید.**

الف) $-۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow -(۷\times۷) = ۴۹ \Rightarrow -۴۹ \neq ۴۹ \rightarrow$ تساوی نادرست

ب) $۳\times۵^۲ = (۳\times۵)^۲ \Rightarrow ۳\times(۵\times۵) = (۱۵)^۲ \Rightarrow ۳\times۲۵ = ۱۵\times۱۵ \Rightarrow ۷۵ \neq ۲۲۵ \rightarrow$ تساوی نادرست

پ) $(۵+۲)^۲ = ۵^۲ + ۲^۲ \Rightarrow (۷)^۲ = ۵\times۵ + ۲\times۲ \Rightarrow ۴۹ = ۲۵ + ۴ \Rightarrow ۴۹ \neq ۲۹ \rightarrow$ تساوی نادرست

ت) $۲ + ۷^۲ + ۱ = ۱۰۰ \Rightarrow ۲ + ۷\times۷ + ۱ = ۱۰۰ \Rightarrow ۲ + ۴۹ + ۱ = ۱۰۰ \Rightarrow ۵۲ \neq ۱۰۰ \rightarrow$ تساوی نادرست

ث) $(۷-۵)^۲ = ۲^۲ \Rightarrow ۴ = ۴ \rightarrow$ تساوی درست

ج) $\frac{۷^۲}{۲} = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow \frac{۷\times۷}{۲} = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow \frac{۴۹}{۲} \neq \frac{۴۹}{۴} \rightarrow$ تساوی نادرست

چ) $(\frac{۷}{۲})^۲ = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow (\frac{۷}{۲})\times(\frac{۷}{۲}) = \frac{۴۹}{۴} \Rightarrow \frac{۴۹}{۴} = \frac{۴۹}{۴} \rightarrow$ تساوی درست

مثال حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\frac{۷}{۲})^۳ = (\frac{۷}{۲})\times(\frac{۷}{۲})\times(\frac{۷}{۲}) = (\frac{۳۴۳}{۸})$

ب) $(-۱)^۳ = (-۱)\times(-۱)\times(-۱) = -۱$

پ) $(-۵)^۲ = (-۵)\times(-۵) = ۲۵$

ت) $(-۱۱)^۲ = (-۱۱)\times(-۱۱) = ۱۲۱$

ث) $(۷/۲۳)^۰ + ۱^۷ = ۱+۱ = ۲$

ج) $(-\frac{۳}{۵})^۰ + \frac{۵^۲}{۳} = ۱ + \frac{۲۵}{۳} = \frac{۲۸}{۳}$

چ) $(-۵)^۲ - (-\frac{۲}{۳})^۲ = (-۵)\times(-۵) - (-\frac{۲}{۳})(-\frac{۲}{۳}) = ۲۵ - \frac{۴}{۹} = \frac{۲۲۱}{۹}$

ح) $(۶^۰ - ۲)^۲ + ۱^۵ = (۱-۲)^۲ + ۱ = (-۱)^۲ + ۱ = ۱+۱ = ۲$

با توجه به جدول ارزش مکانی اعداد که در سال‌های قبل یاد گرفته‌اید می‌دانیم:

$۳۷۴۵۷ \rightarrow$

ده‌هزارتایی	هزارتایی	صدتایی	دهتایی	یکی
۳	۷	۴	۵	۷

نوشتن به‌صورت گسترده $\rightarrow$ $۳۷۴۵۷ = ۳\times۱۰۰۰۰ + ۷\times۱۰۰۰ + ۴\times۱۰۰ + ۵\times۱۰ + ۷\times۱ =$

در نتیجه داریم: $= ۳۷۴۵۷ = ۳\times۱۰^۴ + ۷\times۱۰^۳ + ۴\times۱۰^۲ + ۵\times۱۰^۱ + ۷\times۱۰^۰$

مثال با توجه به جدول ارزش مکانی اعداد، هر یک از عددهای زیر را به‌صورت توانی بنویسید.

الف) $۵۳۱۴ = ۵۰۰۰ + ۳۰۰ + ۱۰ + ۴ = ۵\times۱۰۰۰ + ۳\times۱۰۰ + ۱\times۱۰ + ۴\times۱ = ۵\times۱۰^۳ + ۳\times۱۰^۲ + ۱\times۱۰^۱ + ۴\times۱۰^۰$

ب) $۶۵۷۴۱ = ۶۰۰۰۰ + ۵۰۰۰ + ۷۰۰ + ۴۰ + ۱ = ۶\times۱۰۰۰۰ + ۵\times۱۰۰۰ + ۷\times۱۰۰ + ۴\times۱۰ + ۱\times۱ =$

$= ۶\times۱۰^۴ + ۵\times۱۰^۳ + ۷\times۱۰^۲ + ۴\times۱۰^۱ + ۱\times۱۰^۰$

محاسبه حاصل عبارت‌ها به‌ازای مقادیر داده شده

در جای‌گذاری کردن اعداد به جای حروف داده شده حتماً عدد داده شده را درون پرانتز قرار می‌دهیم.

مثال۱ حاصل عبارت $a^۲ + ۳b^۲$ را به‌ازای $a = -۱$ و $b = ۲$ بنویسید.

پاسخ: $a^۲ + ۳b^۲ = (-۱)^۲ + ۳\times(۲)^۲ = +۱ + ۳\times۴ = ۱ + ۱۲ = ۱۳$

مثال۲ حاصل عبارت $a^۳ - ۲b^۲ + a^۲b$ را به‌ازای $a = -۲$ و $b = -۱$ بنویسید.

پاسخ: $a^۳ - ۲b^۲ + a^۲b = (-۲)^۳ - ۲(-۱)^۲ + (-۲)^۲\times(-۱) = -۸ - ۲\times۱ + ۴(-۱) = -۸ - ۲ - ۴ = -۱۴$

مثال۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌ازای مقادیر داده شده حساب کنید.

الف) $(a = -۱ , b = ۲)$ $\quad (ab)^۲ - a^۲ + b^۲ = [(-۱)(۲)]^۲ - (-۱)^۲ + (۲)^۲ = [-۲]^۲ - (+۱) + ۴ = +۴ - ۱ + ۴ = +۷$

ب) $(a = -۳ , b = ۱)$ $\quad a^۲ + b^۲ - ab = (-۳)^۲ + (۱)^۲ - [(-۳)(۱)] = ۹ + ۱ + ۳ = ۱۳$

پ) $(a = -۲ , b = -۳)$ $\quad \frac{a^۲ + ۲ab}{a^۲ - b^۲} = \frac{(-۲)^۲ + ۲(-۲)(-۳)}{(-۲)^۲ - (-۳)^۲} = \frac{۴ + ۱۲}{۴ - ۹} = \frac{۱۶}{-۵} = -\frac{۱۶}{۵}$

جدول زیر را با قرار دادن اعداد **۱** تا **۷** به جای **n** مانند مثال کامل کنید.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۲^n	$۲^۱ = ۲$	$۲^۲ = ۴$	$۲^۳ = ۸$	$۲^۴ = ۱۶$	$۲^۵ = ۳۲$	$۲^۶ = ۶۴$	$۲^۷ = ۱۲۸$
$n^۲$	$۱^۲ = ۱$	$۲^۲ = ۴$	$۳^۲ = ۹$	$۴^۲ = ۱۶$	$۵^۲ = ۲۵$	$۶^۲ = ۳۶$	$۷^۲ = ۴۹$

ساده کردن عبارت‌های توان‌دار

برای ساده‌کردن عبارت‌های توان‌دار نیز مانند اعداد صحیح چهار عمل اصلی را می‌توان بین اعداد توان‌دار انجام داد و حاصل را به ساده‌ترین صورت ممکن نوشت در مورد جمع و تفریق اعداد توان‌دار در قسمت تعریف توان توضیحات و مثال‌های کافی گفته شده است. در ضرب یا تقسیم اعداد توان‌دار نیز می‌توان حاصل را ساده کرده و به‌صورت یک عدد توان‌دار نوشت که در اینجا به اختصار به حالت‌های مختلف ضرب اعداد توان‌دار می‌پردازیم.

ضرب اعداد توان‌دار

برای ساده کردن عبارت‌های توان‌دار و نوشتن حاصل به‌صورت یک عدد توان‌دار ابتدا عمل ضرب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
در ضرب اعداد توان‌دار چهار حالت امکان‌پذیر است که هر یک از آن‌ها را در ادامه مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱- ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر: در این حالت یکی از پایه‌ها را به عنوان پایهٔ اصلی نوشته و توان‌ها را با هم جمع کنیم.

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

مثال حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $۷^۲ \times ۷^۶ = ۷^{۲+۶} = ۷^۸$

ب) $(-۵)^۳ \times (-۵)^۴ = (-۵)^{۳+۴} = (-۵)^۷$

پ) $۱۳ \times ۱۳^۴ = ۱۳^{۱+۴} = ۱۳^۵$

ت) $(\frac{۱}{۴})^۵ \times (۰/۲۵)^۴ = (\frac{۱}{۴})^۵ \times (\frac{۱}{۴})^۴ = (\frac{۱}{۴})^{۵+۴} = (\frac{۱}{۴})^۹ = (۰/۲۵)^۹$

۲- ضرب اعداد توان‌دار با توان‌های برابر: در این حالت یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

مثال حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $۳^۵ \times ۵^۵ = (۳ \times ۵)^۵ = ۱۵^۵$

ب) $(-۲)^۷ \times ۶^۷ = (-۲ \times ۶)^۷ = (-۱۲)^۷$

پ) $(\frac{۲}{۳})^۲ \times (\frac{۱}{۵})^۲ = (\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۵})^۲ = (\frac{۲}{۱۵})^۲$

ت) $(۰/۲)^۳ \times ۷^۳ = (۰/۲ \times ۷)^۳ = (۱/۴)^۳$

۳- ضرب اعداد توان‌دار با پایه‌های مساوی و توان‌های مساوی: در این حالت می‌توانیم با هر یک از روش‌های بالا به‌طور دلخواه عمل کنیم. در هر صورت جواب‌ها برابر خواهند شد.

مثال حاصل را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

پاسخ:

$$۵^۳ \times ۵^۳ = \begin{cases} ۵^{۳+۳} = ۵^۶ \\ (۵ \times ۵)^۳ = (۲۵)^۳ \end{cases}$$

در این دو روش یک بار جواب $۵^۶$ است و یک بار $(۵^۲)^۳$. آیا دو جواب با هم مساوی‌اند؟ بله، با توجه به نکتهٔ پایین.

اگر یک عدد توان‌دار داخل پرانتز به توان دیگری برسد، عدد پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

مثال حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$(۷^۴)^۳ = ۷^{۴\times۳} = ۷^{۱۲}$$

حال می‌بینید در مثال قبل هر دو جواب برابرند. $(۲۵)^۳ = (۵^۲)^۳ = ۵^۶$ و $۵^۶$

۴- ضرب اعداد توان‌دار که نه پایه‌های مساوی دارند و نه توان‌های مساوی دارند: در این حالت یکی از دو وضعیت زیر رخ خواهد داد:

الف) در اعداد توان‌داری که نه پایه‌ها و نه توان‌ها قابل تجزیه و تبدیل به هم نیستند، که در این حالت حاصل آن‌ها را حساب کرده و در هم ضرب می‌کنیم و جواب را به‌دست می‌آوریم.

مثال حاصل را در صورت امکان به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید.

$$۲^۳ \times ۵^۲ = (۲\times۲\times۲)\times(۵\times۵) = ۸\times۲۵ = ۲۰۰$$

ب) در ضرب اعداد توان‌داری که پایه‌ها یا توان‌های آن‌ها قابل تجزیه و تبدیل به هم هستند، پس از تجزیه و تبدیل به هم یکی از حالت‌های پایه‌های برابر یا توان‌های برابر پدید می‌آید که طبق قاعده‌های آن‌ها حل می‌شود.

مثال حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $۸^۳ \times ۲^۵ = (۲^۳)^۳ \times ۲^۵ = ۲^۹ \times ۲^۵ = ۲^{۱۴}$

ب) $۱۲۵^۲ \times ۵^۳ = (۵^۳)^۲ \times ۵^۳ = ۵^۶ \times ۵^۳ = ۵^۹$

پ) $۹^۳ \times ۲^۶ = (۳^۲)^۳ \times ۲^۶ = ۳^۶ \times ۲^۶ = ۶^۶$

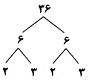
ت) $۶۴^۳ \times ۲^۵ = (۲^۶)^۳ \times ۲^۵ = ۲^{۱۸} \times ۲^۵ = ۲^{۲۳}$

یادآوری: لازم است روش تجزیهٔ یک عدد به شمارنده‌های اول را متذکر شویم. برای تجزیهٔ یک عدد به عامل‌های اول ابتدا عدد مورد نظر را بر اعداد اول تقسیم و ساده می‌کنیم. (ترجیحاً از کوچک‌ترین اعداد شروع می‌کنیم)

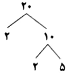
مثال۱ عددهای زیر را به شمارنده‌های اول تجزیه کنید.

الف) ۳۶ ب) ۲۰

پاسخ:



$۳۶ = ۳\times۲\times۳\times۲ = ۲^۲ \times ۳^۲$



$۲۰ = ۲\times۵\times۲ = ۲^۲ \times ۵$

مثال۲ حاصل عبارت‌های زیر را در صورت امکان به‌صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید.

الف) $۲۰\times۲^۵\times۵^۳ = (۲^۲\times۵)\times۲^۵\times۵^۳ = ۲^۷\times۵^۴$

ب) $۸\times۲۷\times۱۲۵ = ۲^۳\times۳^۳\times۵^۳ = (۲\times۳\times۵)^۳ = ۳۰^۳$

پ) $۱۲۰\times۵۴ = (۲^۳\times۳\times۵)\times(۳^۳\times۲) = ۲^۴\times۳^۴\times۵ = ۶^۴\times۵$

ت) $۶۰۰\times۴۵ = (۲^۳\times۳\times۵^۲)\times(۳^۲\times۵) = ۲^۳\times۳^۳\times۵^۳ = ۳۰^۳$

اهمیت وجود پرانتز در محاسبات: به عبارت $(-a)^n = -a^n$ توجه کنید. آیا این تساوی برقرار است؟ ملاحظه می‌شود اگر توان (n) عددی زوج باشد تساوی نمی‌تواند برقرار باشد یعنی $(-a)^n \neq -a^n$.

مثال۱ آیا حاصل $-۸^۲$ و $(-۸)^۲$ با هم برابر است؟ $(-۸)^۲ \neq -۸^۲$

پاسخ: خیر. زیرا:

$$\begin{cases}(-۸)^۲ = (-۸)\times(-۸) = +۶۴ \\ -۸^۲ = -(۸\times۸) = -۶۴\end{cases} \Rightarrow +۶۴ \neq -۶۴$$

اگر توان (n) عددی فرد باشد همیشه تساوی برقرار است و به پرانتز بستگی ندارد.

مثال۲ آیا حاصل $-۲^۳ = (-۲)^۳$ با هم برابر است؟ $(-۲)^۳ = -۲^۳$

پاسخ: بله. زیرا:

$$\begin{cases}(-۲)^۳ = (-۲)\times(-۲)\times(-۲) = -۸ \\ -۲^۳ = -(۲\times۲\times۲) = -۸\end{cases} \Rightarrow -۸ = -۸$$

برخی از کاربردهای تجزیه دو توان

تعیین «ب.م.م» و «ک.م.م» دو عدد به کمک تجزیه

مثال «ب.م.م» و «ک.م.م» اعداد ۳۶۰ و ۸۴ را به‌دست آورید.

پاسخ: ابتدا دو عدد را تجزیه می کنیم

$۳۶۰ = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵$ و $۸۴ = ۲^۲ \times ۳ \times ۷$

ب.م.م = حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با کم‌ترین توان موجود

$(۳۶۰ و ۸۴) = ۲^۲ \times ۳ = ۴ \times ۳ = ۱۲$

ک.م.م = حاصل‌ضرب عامل‌های مشترک با بیش‌ترین توان موجود در عامل‌های غیر مشترک

$[۳۶۰ و ۸۴] = ۲^۳ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷ = ۸ \times ۹ \times ۵ \times ۷ = ۲۵۲۰$

تبدیل جمع یا تفریق در توان یک عدد به ضرب یا تقسیم در پایه‌ها (توان شکن)

اگر a^{m+n} باشد می‌توان نوشت:

$$a^{m+n} = a^m \times a^n$$

مثال اگر $۱۰ = ۲^x$ باشد حاصل $۲^{x+۲}$ چند است؟

$$۲^{x+۲} = ۲^x \times ۲^۲ = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$$

دو نکته دیگر:

$$(a \times b \times c \times d)^n = a^n \times b^n \times c^n \times d^n$$

مثال با توجه به رابطهٔ بالا حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(۶x)^۵ = ۶^۵ \times x^۵$

ب) $(۲ \times ۵ \times ۳^۲)^۴ = ۲^۴ \times ۵^۴ \times (۳^۲)^۴ = ۲^۴ \times ۵^۴ \times ۳^۸$

پ) $(۰/۲y)^۴ = (۰/۲)^۴ \times y^۴$

ت) $(۲xy^۲zn^۳)^۵ = ۲^۵ \times x^۵ \times (y^۲)^۵ \times z^۵ \times (n^۳)^۵ = ۲^۵ \times x^۵ \times y^{۱۰} \times z^۵ \times n^{۱۵}$

$$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال با توجه به رابطهٔ بالا حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\frac{۲}{۵})^{۱۰} = \frac{۲^{۱۰}}{۵^{۱۰}}$

ب) $(\frac{x}{y})^۷ = \frac{x^۷}{y^۷}$

توان در توان

هر عدد توان‌داری که داخل پرانتز، کروشه و ... است مجدداً به توان و یا چند توان دیگری برسد، می‌توانیم پایه را نوشته و همهٔ توان‌ها را در هم ضرب کنیم.

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$(((a^n)^m)^p)^k = a^{nmpk}$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $(۵^۲)^۳ = ۵^{۲\times۳} = ۵^۶$

ب) $([-۵]^۴)^۵ = (-۵)^{۲۰}$

پ) $\left[(\frac{۲}{۳})^۶\right]^۲ = (\frac{۲}{۳})^{۱۲}$

ت) $((۶^۳)^۲)^۵ = ۶^{۳\times۲\times۵} = ۶^{۳۰}$

توانِ توان

اگر عدد توان‌دار داخل پرانتز، کروشه و ... نباشد و به توان دیگری برسد، باید توان را به توان بالای خود رساند و به عنوان توان بنویسیم.

$$a^{n^m} = a^{(n^m)}$$

مثال حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $۵^{۲^۳} = ۵^{(۲^۳)} = ۵^۸$

ب) $(-۷)^{۳^۲} = (-۷)^۹$

- **مجذور مجذور یک عدد برابر است با:** $(a^۲)^۲ = a^۴$
- **مکعب مکعب یک عدد برابر است با:** $(a^۳)^۳ = a^۹$
- **مجذور مکعب یک عدد برابر است با مکعب مجذور آن عدد.** $\begin{cases}(a^۲)^۳ = a^۶\\(a^۳)^۲ = a^۶\end{cases}$

یک نکته دیگر:

$$(a^m)^n = (a^n)^m$$

مثال حاصل عبارت را طبق رابطهٔ بالا به‌دست آورید.

$(۷^۳)^۵ = (۷^۵)^۳$

جذر و ریشه

حمید و سعید می‌خواهند برای تابلو فرش قدیمی اتاق خود که به شکل مربع و به مساحت ۴ مترمربع است یک قاب چوبی تهیه کنند. آن‌ها نمی‌دانند اندازهٔ هر ضلع این مربع (تابلو فرش) چند متر است. به نظر شما آن‌ها بدون استفاده از متر چگونه می‌توانند اندازهٔ هر ضلع آن را حساب کنند؟ حمید فکری به نظرش می‌رسد. او می‌گوید: ما می‌دانیم که مساحت مربع مساوی حاصل‌ضرب یک ضلع در خودش است.

یعنی اگر ضلع مربع a باشد داریم: مساحت مربع $= a \times a = a^۲$

پس با داشتن مساحت مربع کافی است فقط بدانیم چه عددی در خودش ضرب شده و مساحت حاصل شده است.

سعید با خوشحالی گفت من جواب را دانستم. هر ضلع مربع ۲ متر است. آیا جواب سعید درست است؟

بله درست حدس زده‌اید چون: هر ضلع مربع ۲ متر است. $\longrightarrow$ مساحت مربع $= ۲ \times ۲ = ۴$

مثال **مساحت یک زمین بازی کودکان که به شکل مربع است برابر ۱۴۴ مترمربع است. طول ضلع این مربع چند متر است؟**

پاسخ: پس هر ضلع ۱۲ متر است. $\longleftarrow$ مساحت زمین $= ۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴$

با توجه به مطالب فوق جدول زیر را کامل کنید.

ضلع مربع	۳	۲	۲/۵	۸	۱/۲	۳۰	۱
مساحت مربع	۹	۴	۶/۲۵	۶۴	۱/۴۴	۹۰۰	۱

یادآوری: در بخش توان خواندیم که در تساوی $۸۱ = ۹^۲$ عدد ۸۱ را توان دوم یا مجذور عدد ۹ می‌نامند.

مثال **توان دوم یا مجذور ۵ برابر $۲۵ = ۵^۲$ است و توان دوم یا مجذور (۵−) مساوی $۲۵ = (-۵)^۲$ می‌باشد.**

تعریف ریشه دوم

در تساوی $۸۱ = ۹^۲$ عدد ۹ را نیز ریشهٔ دوم عدد ۸۱ می‌نامند. یعنی می‌گوئیم چه عددی است که اگر دوبار در خودش ضرب شود حاصل ۸۱ می‌شود که مساوی ۹ است. البته عدد (۹−) را نیز اگر دوبار در خودش ضرب کنیم حاصل برابر با عدد ۸۱ می‌شود.

هر عدد مثبت دارای دو تا ریشهٔ دوم است. که یکی از آن‌ها قرینهٔ دیگری است.

مثال ریشهٔ دوم عدد ۲۵ چند است؟

پاسخ: ریشهٔ دوم عدد ۲۵+ مساوی اعداد ۵+ و ۵− می‌باشد چون $۲۵+ = (۵−)^۲$ و $۲۵+ = (۵+)^۲$

اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند چون هیچ عددی را نمی‌توان یافت که اگر در خودش ضرب شود حاصل عددی منفی شود.

مثال آیا عدد (۲۵−) ریشهٔ دوم دارد؟ **پاسخ:** خیر

تعریف جذر

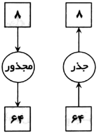
عمل جذر، عکس مجذور می‌باشد. که به آن ریشهٔ دوم یا جذر عدد می‌گویند و با علامت $\sqrt{}$ (رادیکال) نشان داده می‌شود.

مثال

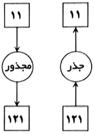
الف) ریشهٔ دوم عدد ۹ یا $\sqrt{۹} = ۳$

ب) ریشهٔ دوم عدد ۲۵ یا $\sqrt{۲۵} = ۵$

پ)

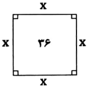


ت)



وقتی صحبت از جذر یک عدد می‌شود، در واقع مساحت مربعی به ما داده شده است.

پس منظور از حاصل جذر، در واقع یافتن اندازهٔ ضلع مربع است.



$\Rightarrow$ هر ضلع مربع $\Leftarrow$ $x = \sqrt{۳۶} = \sqrt{۶^۲} = ۶$

انواع جذر

۱- جذرهای دقیق یا کامل　　　　۲- جذرهای تقریبی

حال به اختصار به هر یک از آن‌ها می‌پردازیم.

۱- جذرهای دقیق یا کامل: اعداد طبیعی که دارای جذر دقیق هستند و جذر آن‌ها یک عدد صحیح است را مجذور کامل می‌گویند.

به اعداد مجذور کامل زیر دقت کنید.

$\sqrt{۹} = \sqrt{۳^۲} = ۳ \leftarrow$ عدد ۹ $\rightarrow$　　$\sqrt{۴} = \sqrt{۲^۲} = ۲ \leftarrow$ عدد ۴ $\rightarrow$　　$\sqrt{۱} = ۱ \leftarrow$ عدد ۱ $\rightarrow$

$\sqrt{۳۶} = ۶ \leftarrow$ عدد ۳۶ $\rightarrow$　　$\sqrt{۲۵} = ۵ \leftarrow$ عدد ۲۵ $\rightarrow$　　$\sqrt{۱۶} = ۴ \leftarrow$ عدد ۱۶ $\rightarrow$

$\sqrt{۸۱} = ۹ \leftarrow$ عدد ۸۱ $\rightarrow$　　$\sqrt{۶۴} = ۸ \leftarrow$ عدد ۶۴ $\rightarrow$　　$\sqrt{۴۹} = ۷ \leftarrow$ عدد ۴۹ $\rightarrow$

اعداد کم‌تر از یک مانند ۰/۰۱ و ۰/۰۰۰۱ و ۰/۰۰۰۰۰۱ و ... نیز مجذور کامل هستند و دارای جذر دقیق می‌باشند و داریم:

الف) $\sqrt{۰/۰۱} = \sqrt{۰/۱ \times ۰/۱} = ۰/۱$

ب) $\sqrt{۰/۰۰۰۱} = \sqrt{۰/۰۱ \times ۰/۰۱} = ۰/۰۱$

در اعداد مجذور کامل همواره داریم:

۱- جذر یک حاصل‌ضرب را می‌توان به حاصل‌ضرب جذرها تفکیک کرد. یعنی داریم:

$$\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

الف) $\sqrt{۹\times ۱۶}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۱۶}=۳\times ۴=۱۲$

ب) $\sqrt{۶۴\times ۳۶}=\sqrt{۶۴}\times\sqrt{۳۶}=۸\times ۶=۴۸$

پ) $\sqrt{۰/۲۵}=\sqrt{۲۵\times ۰/۰۱}=\sqrt{۲۵}\times\sqrt{۰/۰۱}=۵\times ۰/۱=۰/۵$

ت) $\sqrt{۰/۰۹}=\sqrt{۹\times ۰/۰۱}=\sqrt{۹}\times\sqrt{۰/۰۱}=۳\times ۰/۱=۰/۳$

۲- حاصل‌ضرب جذرها را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب آن‌ها نوشت.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

مثال **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $\sqrt{۳}\times\sqrt{۱۲}=\sqrt{۳\times ۱۲}=\sqrt{۳۶}=۶$

ب) $\sqrt{۰/۵}\times\sqrt{۰/۵}=\sqrt{۰/۵\times ۰/۵}=\sqrt{۰/۲۵}=۰/۵$

۳- جذر حاصل تقسیم دو عدد با حاصل تقسیم جذرهای آن دو عدد برابر است. یعنی داریم:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\qquad (b\neq ۰)$$

به مثال‌های زیر دقت کنید.

الف) $\sqrt{\frac{۳۶}{۲۵}}=\frac{\sqrt{۳۶}}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۶}{۵}$

ب) $\sqrt{\frac{۰/۰۴}{۰/۲۵}}=\frac{\sqrt{۰/۰۴}}{\sqrt{۰/۲۵}}=\frac{۰/۲}{۰/۵}=\frac{۲}{۵}$

حاصل تقسیم جذرهای دو عدد با جذر حاصل تقسیم آن دو عدد برابر است.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\qquad (b\neq ۰)$$

مثال **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $\frac{\sqrt{۵۴}}{\sqrt{۶}}=\sqrt{\frac{۵۴}{۶}}=\sqrt{۹}=۳$

ب) $\frac{\sqrt{۱۰۰۰۰۰}}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{\frac{۱۰۰۰۰۰}{۱۰}}=\sqrt{۱۰۰۰۰}=۱۰۰$

۴- در مورد جمع یا تفریق این تفکیک صحیح نمی‌باشد یعنی جذر حاصل جمع یا تفریق دو عدد با حاصل جمع یا تفریق جذرهای آن دو عدد مساوی نیست. در این‌صورت عمل جمع یا تفریق را انجام داده سپس جذر گرفته می‌شود.

$$\sqrt{a\pm b}\neq\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$

مثال۱ **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

$$\sqrt{۹+۱۶}\neq\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}$$
$$\sqrt{۲۵}\neq ۳+۴$$
$$۵\neq ۷$$

$$\sqrt{۱۰۰-۶۴}\neq\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۶۴}$$
$$\sqrt{۳۶}\neq ۱۰-۸$$
$$۶\neq ۲$$

مثال۲ **حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.**

الف) $\sqrt{۲۵-۹}=\sqrt{۱۶}=۴$

ب) $\sqrt{۶۴+۳۶}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

مثال۳ با توجه به مفهوم جذر و جذرهای کامل حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{۰/۸۱} = \sqrt{۰/۰۱ \times ۸۱} = \sqrt{۰/۰۱} \times \sqrt{۸۱} = ۰/۱ \times ۹ = ۰/۹$

ب) $-\sqrt{۱۶} = -۴$

پ) $\sqrt{۰/۰۱ \times ۴۹} = \sqrt{۰/۰۱} \times \sqrt{۴۹} = ۰/۱ \times ۷ = ۰/۷$

ت) $\sqrt{۲} \times \sqrt{۳۲} = \sqrt{۲ \times ۳۲} = \sqrt{۶۴} = ۸$

ث) $\sqrt{\frac{۴۹}{۳۶}} = \frac{\sqrt{۴۹}}{\sqrt{۳۶}} = \frac{۷}{۶}$

ج) $\frac{\sqrt{۵۰}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۵۰}{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵$

- **جذر عدد یك برابر یك است.** $\sqrt{۱} = ۱$
- **جذر عدد صفر برابر صفر است.** $\sqrt{۰} = ۰$
- **جذر اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یك همواره کوچك‌تر از خود عدد است.**

۲- جذرهای تقریبی یا جذر غیر کامل: برای محاسبهٔ جذر، اعداد را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

۱- اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ ولی بزرگ‌تر از ۱ (اعداد بین ۱ تا ۱۰۰)

۲- اعداد بزرگ‌تر از ۱۰۰ یا کوچک‌تر از ۱ در پایهٔ هفتم روش محاسبهٔ جذر بر روی اعداد بین ۱ و ۱۰۰ آموزش داده می‌شود و اعداد کم‌تر یا بیش‌تر از این مقدار را با استفاده از قانون حاصل‌ضرب که بعد خواهیم گفت محاسبه می‌نمائیم.

ابتدا جذر اعداد از ۱ الی ۱۰۰ را بررسی می‌کنیم.

$۱ = \sqrt{۱}$: جذر کامل $۲ >$ جذر اعداد بین ۱ تا ۴ $> ۱ \longleftarrow \sqrt{۴} >$ جذر اعداد بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر از ۴ $> \sqrt{۱}$

مثال $\sqrt{۱} < \sqrt{۳} < \sqrt{۴} \longrightarrow ۱ < \sqrt{۳} < ۲$ $\sqrt{۱} < \sqrt{۲} < \sqrt{۴} \longrightarrow ۱ < \sqrt{۲} < ۲$

$۲ = \sqrt{۴}$: جذر کامل $۳ >$ جذر اعداد بین ۴ تا ۹ $> ۲ \longleftarrow \sqrt{۹} >$ جذر اعداد بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۹ $> \sqrt{۴}$

مثال $\sqrt{۴} < \sqrt{۷} < \sqrt{۹} \longrightarrow ۲ < \sqrt{۷} < ۳$ $\sqrt{۴} < \sqrt{۵} < \sqrt{۹} \longrightarrow ۲ < \sqrt{۵} < ۳$

$۳ = \sqrt{۹}$: جذر کامل $۴ >$ جذر اعداد بین ۹ تا ۱۶ $> ۳ \longleftarrow \sqrt{۱۶} >$ جذر اعداد بزرگ‌تر از ۹ و کوچک‌تر از ۱۶ $> \sqrt{۹}$

مثال $\sqrt{۹} < \sqrt{۱۵} < \sqrt{۱۶} \longrightarrow ۳ < \sqrt{۱۵} < ۴$ $\sqrt{۹} < \sqrt{۱۲} < \sqrt{۱۶} \longrightarrow ۳ < \sqrt{۱۲} < ۴$

$۴ = \sqrt{۱۶}$: جذر کامل $۵ >$ جذر اعداد بین ۱۶ تا ۲۵ $> ۴ \longleftarrow \sqrt{۲۵} >$ جذر اعداد بزرگ‌تر از ۱۶ و کوچک‌تر از ۲۵ $> \sqrt{۱۶}$

مثال $\sqrt{۱۶} < \sqrt{۲۴} < \sqrt{۲۵} \longrightarrow ۴ < \sqrt{۲۴} < ۵$ $\sqrt{۱۶} < \sqrt{۱۷} < \sqrt{۲۵} \longrightarrow ۴ < \sqrt{۱۷} < ۵$

$۵ = \sqrt{۲۵}$: جذر کامل $۶ >$ جذر اعداد بین ۲۵ تا ۳۶ $> ۵ \longleftarrow \sqrt{۳۶} >$ جذر اعداد بزرگ‌تر از ۲۵ و کوچک‌تر از ۳۶ $> \sqrt{۲۵}$

مثال $\sqrt{۲۵} < \sqrt{۳۱} < \sqrt{۳۶} \longrightarrow ۵ < \sqrt{۳۱} < ۶$ $\sqrt{۲۵} < \sqrt{۲۷} < \sqrt{۳۶} \longrightarrow ۵ < \sqrt{۲۷} < ۶$

$۶ = \sqrt{۳۶}$: جذر کامل $۷ >$ جذر اعداد بین ۳۶ تا ۴۹ $> ۶ \longleftarrow \sqrt{۴۹} >$ جذر اعداد بزرگ‌تر از ۳۶ و کوچک‌تر از ۴۹ $> \sqrt{۳۶}$

مثال $\sqrt{۳۶} < \sqrt{۴۵} < \sqrt{۴۹} \longrightarrow ۶ < \sqrt{۴۵} < ۷$ $\sqrt{۳۶} < \sqrt{۳۸} < \sqrt{۴۹} \longrightarrow ۶ < \sqrt{۳۸} < ۷$

$۷ = \sqrt{۴۹}$: جذر کامل   ۸ > جذر اعداد بین ۴۹ تا ۶۴ > ۷ ⟵ $\sqrt{۶۴}$ > جذر اعداد بزرگ‌تر از ۴۹ و کوچک‌تر از ۶۴ > $\sqrt{۴۹}$

مثال $\sqrt{۴۹} < \sqrt{۶۲} < \sqrt{۶۴} \longrightarrow ۷ < \sqrt{۶۲} < ۸$ $\sqrt{۴۹} < \sqrt{۵۷} < \sqrt{۶۴} \longrightarrow ۷ < \sqrt{۵۷} < ۸$

$۸ = \sqrt{۶۴}$: جذر کامل   ۹ > جذر اعداد بین ۶۴ تا ۸۱ > ۸ ⟵ $\sqrt{۸۱}$ > جذر اعداد بزرگ‌تر از ۶۴ و کوچک‌تر از ۸۱ > $\sqrt{۶۴}$

مثال $\sqrt{۶۴} < \sqrt{۷۸} < \sqrt{۸۱} \longrightarrow ۸ < \sqrt{۷۸} < ۹$ $\sqrt{۶۴} < \sqrt{۷۱} < \sqrt{۸۱} \longrightarrow ۸ < \sqrt{۷۱} < ۹$

$۹ = \sqrt{۸۱}$: جذر کامل   ۱۰ > جذر اعداد بین ۸۱ تا ۱۰۰ > ۹ ⟵ $\sqrt{۱۰۰}$ > جذر اعداد بزرگ‌تر از ۸۱ و کوچک‌تر از ۱۰۰ > $\sqrt{۸۱}$

مثال $\sqrt{۸۱} < \sqrt{۹۷} < \sqrt{۱۰۰} \longrightarrow ۹ < \sqrt{۹۷} < ۱۰$ $\sqrt{۸۱} < \sqrt{۸۹} < \sqrt{۱۰۰} \longrightarrow ۹ < \sqrt{۸۹} < ۱۰$

مثال $۱۰ = \sqrt{۱۰۰}$: جذر کامل

مثال **به کمک مطالب گفته شده و جدول زیر مانند نمونهٔ حل شده، جذر تقریبی عددهای داده شده را به‌دست آورید و جدول را کامل کنید.**

جذر تقریبی	مربع کامل بعدی	عدد	مربع کامل قبلی
$\sqrt{۸}$ بین ۲ و ۳ است	۹	۸	۴
$\sqrt{۲۱}$ بین ۴ و ۵ است	۲۵	۲۱	۱۶
$\sqrt{۵۶}$ بین ۷ و ۸ است	۶۴	۵۶	۴۹
$\sqrt{۷۸}$ بین ۸ و ۹ است	۸۱	۷۸	۶۴
$\sqrt{۸۹}$ بین ۹ و ۱۰ است	۱۰۰	۸۹	۸۱
$\sqrt{۹۹}$ بین ۹ و ۱۰ است	۱۰۰	۹۹	۸۱

حال که چگونگی به‌دست آوردن حدود جذرهای تقریبی را آموختید می‌خواهیم ببینیم $\sqrt{۱۱}$ به کدام عدد نزدیک‌تر است.

حل: می‌دانیم $\sqrt{۱۶} > \sqrt{۱۱} > \sqrt{۹}$ است و در نتیجه $۴ > \sqrt{۱۱} > ۳$ است حال به نظرشما عدد $\sqrt{۱۱}$ به ۳ نزدیک‌تر است یا به ۴ ؟ می‌توانیم به‌صورت جدول مقابل عمل کنیم.

عدد	۳	۳/۱	۳/۲	۳/۳	۳/۴
مجذور	۹	۹/۶۱	۱۰/۲۴	۱۰/۸۹	۱۱/۵۶

ملاحظه می‌شود که عدد $\sqrt{۱۱}$ به عدد ۳/۳ نزدیک‌تر است. یعنی مجذور ۳/۳ به عدد ۱۱ نزدیک است.