

انتگرال نامعین

تابع درجه دوم رادیکالی

دکتر یوسف کوهمسکن

ریاضی ۱



AvaEducation16.blog.ir



AvaEducation16@gmail.com



[@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)



[@AvaEducation16](https://www.youtube.com/AvaEducation16)

توضیحات


- این فایل علاوه بر سایت AvaEducation16.blog.ir در کانال تلگرامی [@AvaEducation16](https://t.me/AvaEducation16) نیز موجود و قابل دانلود می‌باشد.
- این فایل جهت گسترش آموزش رایگان ارائه شده است، اما به جهت رعایت حقوق معنوی درخواست می‌شود نام منبع ذکر گردد.
- در این دسته از فایل‌ها که با روجلدی صورتی [REDACTED] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **متوسطه** و در آن دسته که با روجلدی آبی [REDACTED] آغاز می‌شوند، مطالب مربوط به دوره **دانشگاه** ارائه خواهد شد.
- نکات موجود در متن با علامت  نمایش داده شده‌اند.
- در بخش پاسخنامه سوالات از علائم زیر استفاده شده است:
 -  بسیار ساده جهت آشنایی با نمونه‌های اولیه سوالات
 -  ساده جهت تثبیت مطالب
 -  متوسط جهت تمرین بیشتر مطالب
 -  سخت جهت کسب مهارت کافی و آشنایی با روش‌های حل مسائل خاص

۱ مسئله

حاصل انتگرال نامعین زیر را به روش جزء به جزء تعیین کنید.

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx$$

۲ روش حل مسئله

پاسخ: ابتدا مشتق تابع معکوس هایپربولیک مرور می‌شود. 

💡 اگر u تابعی از x باشد، مشتق معکوس سینوس هایپربولیک به صورت زیر است:

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

از نکته بیان شده در انتگرال نامعین استفاده خواهد شد.

انتگرال جزء به جزء به صورت زیر مرور می‌شود:

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

در روش جزء به جزء یکی از توابع به صورت مشتق در انتگرال ظاهر شده است. در این مسئله، انتگرال مورد نظر I نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2 + 4} dx \\ &= \int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{\sqrt{x^2 + 4}}_v dx \end{aligned}$$

با توجه به انتخاب u و v برای انتگرال، مقادیر مشتق و انتگرال این توابع به صورت زیر خواهد بود:

$$u' = 1, \quad \Rightarrow \quad u = x$$

$$v = \sqrt{x^2 + 4}, \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\begin{aligned}
 I &= uv - \int v'u \\
 &= x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}} \\
 &= x\sqrt{x^2+4} - \int \frac{(x^2 \pm 4) dx}{\sqrt{x^2+4}} \\
 &= x\sqrt{x^2+4} - \int \sqrt{x^2+4} dx + \int \frac{4 dx}{\sqrt{x^2+4}} \\
 &= x\sqrt{x^2+4} - I + 4 \sinh^{-1} \frac{x}{2} + C_1
 \end{aligned}$$

در طرف دوم تساوی هم همان انتگرال داده شده ظاهر شد که به سمت چپ منتقل می‌شود. در ضمن عدد ثابت در رابطه فوق با C_1 نشان داده شده است.

$$2I = x\sqrt{x^2+4} + 4 \sinh^{-1} \frac{x}{2} + C_1, \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2 \sinh^{-1} \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2}$$

رابطه نهایی انتگرال به صورت زیر است:

$$\int \sqrt{x^2+4} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2 \sinh^{-1} \frac{x}{2} + C$$

روزی که تو از فردسالی به بزرگسالی
رسیدی روزیست که تو تمام مسئولیت
زندگیات را بر عهده بگیری.

Jim Rohn



 AvaEducation16.blog.ir

 [@AvaEducation16](https://www.instagram.com/AvaEducation16)

   [@AvaEducation16](https://www.facebook.com/AvaEducation16)

 AvaEducation16@gmail.com