emamipour@bam.ac.ir

نمونه سؤال برای فصل چهارم

۱. **با ذکر دلیل، برای هر یک از معادله‌های ذیل، بازه‌ای را تعیین کنید که معادله دیفرانسیل در آن بازه قطعاً جواب داشته باشد.**

الف) $y''' + ty'' + t^2y' + t^3y = \ln t$ **ب)** $t(t-1)y^{(4)} + \mathrm{e}^t y'' + 4t^2 y = 0$ **ج)** $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$

راهنمایی: اگر توابع $p_1, p_2, \cdots, p_n$ و g در یک بازه پیوسته باشند، آنگاه معادله $y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + p_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t)$ در آن بازه قطعاً جواب دارد.

۲. **تحلیلی کیفی از جواب خصوصی معادله $y^{(4)} - y = 0$ با شرایط آغازین $y(0) = \frac{7}{2}, y'(0) = -4, y''(0) = \frac{5}{2}, y'''(0) = -2$ ارائه دهید. سپس بدون تغییر سایر شرایط اولیه، فقط مقدار $y'''(0) = -2$ را به $y'''(0) = -\frac{5}{8}$ تغییر دهید و تغییرات ماهیت کیفی جواب را نسبت به شرایط اولیه قبلی بررسی کنید.** (برای مشاهده حل کامل به حل مثال ۲ در صفحه ۲۴۸ و ۲۴۹ کتاب مرجع تدریس مراجعه نمایید.)

۳. **جواب عمومی هر یک از معادله‌های دیفرانسیل ذیل را بیابید.** (برای مشاهده حل کامل به حل مثال ۱ در ص۲۴۷ و مثال‌های ۳ و ۴ در ص ۲۵۱ کتاب مرجع تدریس مراجعه نمایید.)

الف) $y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$ **ب)** $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ **ج)** $y^{(4)} + y = 0$

۴. **رانسکین مجموعه اساسی جواب‌های معادله دیفرانسیل $t^3y^{(4)} + t^2y''' + ty'' - 2y = 0$ را مشخص کنید.**

راهنمایی: برای معادله $y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + p_2(t)y^{(n-2)} + \cdots + p_n(t)y = 0$ از فرمول آبِل به‌صورت $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(t) = c\mathrm{e}^{-\int p_1(t)\,\mathrm{d}t}$ استفاده کنید.

۵. **معادله دیفرانسیل $t^3y''' - 3t^2y'' + 6ty' - 6y = 0$ مفروض است.**

الف) نشان دهید تابع $\varphi(t) = t$ جوابی از معادله است. ($t > 0$) **ب)** با استفاده از روش کاهش مرتبه، جواب عمومی معادله را بیابید.

۶. **شکل کلی جواب خاص** (بدون تعیین ضرایب نامعین) **معادله دیفرانسیل $y''' - 4y' = t + 3\cos t + \mathrm{e}^{-2t}$ را پیدا کنید.** (مثال ۳ ص ۲۵۷ کتاب)

۷. **جواب خاص هر یک از معادله دیفرانسیل‌های ذیل را بیابید.** (الف=مثال ۱ ص ۲۵۶ و ب=مثال ۲ ص ۲۵۷ کتاب)

الف) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 4\mathrm{e}^t$ **ب)** $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin t$ **ج)** $y^{(4)} + y''' = \sin 2t$ **د)** $y^{(6)} + y''' = t$

۸. **معادله دیفرانسیل $y''' + y' = \tan t$ مفروض است.** ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

الف) جواب خاص معادله را پیدا کنید. (در کلاس درس حل شده است.) **ب)** جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

۹. **معادله دیفرانسیل $y''' + y' = \sec t$ مفروض است.** ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

الف) جواب خاص معادله را پیدا کنید. (در کلاس درس حل شده است.) **ب)** جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

۱۰. **فرض کنید e^t، $t\mathrm{e}^t$ و e^{-t} جواب‌های معادله همگن متناظر با $y''' - y'' - y' + y = g(x)$ باشد. شکل انتگرالی جواب خاص معادله را بیابید.** (مثال ۱ ص ۲۶۲ کتاب که در کلاس درس نیز حل شده است.)

۱۱. **فرض کنید x، x^2 و x^3 جواب‌های معادله همگن متناظر با $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x)$ باشد. ($x > 0$)** (در کلاس درس حل شده است.)

الف) جواب خاص معادله ناهمگن را به‌صورت انتگرال مشخص کنید. **ب)** جواب عمومی معادله ناهمگن را مشخص کنید.

emamipour@bam.ac.ir

نمونه سؤال برای فصل ششم

۱. **مقدار انتگرال‌های ذیل را پیدا کنید.** راهنمایی: برای (الف) تا (د) از تعریف تبدیل لاپلاس و برای (هـ) و (و) از «توجه» در ردیف ۱۹ جدول لاپلاس‌ها و ویژگی تابع دلتا استفاده کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sin 3t\,dt$ **ب)** $\int_\pi^{+\infty} e^{-st}\sin 3t\,dt$ **ج)** $\int_0^{+\infty} te^{-2t}\sin t\,dt$

د) $\int_0^{+\infty} te^{-(s+1)t}\cos t\,dt$ **هـ)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\frac{\pi}{4})\sin 3t\,dt$ **و)** $\int_{\frac12}^{t} \delta(u-\frac{\pi}{4})\sin 3u\,du;\quad t>\frac{\pi}{4}$

۲. **با فرض $t\geq 0$، نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع پله‌ای جزء صحیح یا $f(t)=[t]$ به‌صورت $\mathscr{L}\{[t]\}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ است.** (توجه: $s>0$)
راهنمایی: تابع جزءصحیح را به‌صورت یک تابع بی‌نهایت ضابطه‌ای بنویسید و سپس آن را با تابع پله‌ای هِوی‌ساید (تابع پله‌ای واحد) بازنویسی کنید و در پایان پس از لاپلاس‌گیری، برای $|q|<1$ از فرمول سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q}$ استفاده کنید.

۳. **تبدیل لاپلاس هر یک از تابع‌های زیر را بیابید.** (توجه: $t\geq 0$) راهنمایی: به‌طور مستقیم از جدول تبدیل‌های لاپلاس استفاده کنید.

الف) $$f(t)=-\frac{\pi}{2}-5t^3+e^{-\frac{2}{3}t}-3\sin(4\pi t)-3\delta(t-5)+u_2(t)+\int_0^t \cosh(2u)\,du$$

ب) $$g(t)=3e^{-2t}\cos(2t)+u_\pi(t)\sinh(t-\pi)+(2-t)u_3(t)+t\cos(t)+u_3(5t)+e^{2t}\int_0^t e^{-2u}\cos u\,du$$

ج) $$h(t)=e^{-2t}\sin^2 t-\sqrt{2}te^{-t}\cos(2t)+t\delta(3t-2)+\int_0^t \delta(u-\frac{\pi}{4})\sin 3u\,du$$

د) $$k(t)=u_\pi(t)e^{2t}(t-\pi)\sin 3t$$

۴. **الف)** **اگر $\mathscr{L}\{f(t)\}=\ln(\dfrac{s-2}{s+1})$ در این‌صورت $\mathscr{L}\{f(2t)\}$ و $\mathscr{L}\{f(\frac{t}{3})\}$ را بیابید.** راهنمایی: از ردیف ۱۲ جدول تبدیل‌های لاپلاس استفاده کنید.

ب) **اگر $\mathscr{L}\{\dfrac{1-e^t}{t}\}=\ln(1-\dfrac{1}{s})$ در این‌صورت $\mathscr{L}\{\dfrac{1-e^{3t}}{2t}\}$ را بیابید.** راهنمایی: از ردیف ۱۲ جدول تبدیل‌های لاپلاس استفاده کنید.

ج) **اگر $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}=t+\int_0^t sin^2u\,du$ در این‌صورت $\mathscr{L}^{-1}\{F(2s+3)\}$ را پیدا کنید.** راهنمایی: با کمک «نتیجه» در ردیف ۱۳ جدول لاپلاس.

۵. **تبدیل وارون لاپلاس هر یک از تابع‌های زیر را بیابید.**

الف) $F(s)=\dfrac{s^2}{s^2+1}$ **ب)** $F(s)=\dfrac{3s-1}{s^2+4}$ **ج)** $F(s)=\dfrac{1-e^{-2s}}{s^2}$ **د)** $F(s)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$

هـ) $F(s)=\dfrac{2}{s^2(s^2+4)}$ **و)** $F(s)=\dfrac{s^2}{s^4-1}$ **ز)** $F(s)=\dfrac{1}{2s(s-1)}$

راهنمایی: در (الف) شرط لازم برای وجود وارون لاپلاس تابع داده‌شده را بررسی کنید. (ب) و (ج) را تفکیک کسر نمایید، مخرج (د) را مربع کامل کنید و سپس از قضیه‌های انتقال استفاده نمایید. برای (هـ) یا از انتگرال پیچش یا از تجزیه به کسرهای جزئی استفاده کنید. برای (و) نیز به کسرهای جزئی تجزیه کنید. ضمناً در همه قسمت‌ها از فرمول‌های لاپلاس به نحو مناسب استفاده کنید.

۶. **هر یک از توابع $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}\}$ و $g(t)=\mathscr{L}^{-1}\{\dfrac{e^{-10s}}{5s^2(s^2+4)}\}$ را به‌صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید.** راهنمایی: پس از آنکه حاصل را بر حسب تابع هِوی‌ساید پیدا کردید، مشابه با انتهای مثال ۴ در ص ۳۵۷ یا پایان مثال ۱ در وسط ص ۳۷۴، آن را چندضابطه‌ای کنید.

۷. **با استفاده از تعریف $*$، نشان دهید $\sin t*\cos t \overset{t\ \text{دلخواه}}{=} \frac{1}{2}t\sin t$.** راهنمایی: برای انتگرال‌گیری از فرمول $\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$ استفاده کنید.

۸. **به دو روش استفاده از تعریف ضرب پیچشی $*$** (برای t دلخواه) **و روش استفاده از تبدیل وارون لاپلاس** (برای $t\geqslant 0$)**، حاصل $\delta(t-2)*\sin t$ را بیابید.**

۹. **به دو روش استفاده از تعریف ضرب پیچشی $*$** (برای t دلخواه) **و استفاده از تبدیل وارون لاپلاس** (برای $t\geqslant 0$)**، نشان دهید $\delta(t-c)*f(t)\overset{c\geqq 0}{=}u_c(t)f(t-c)$.**

۱۰. **الف)** **نشان دهید ضرب پیچشی** (تلفیقی یا کانولوشن) **تابع f در تابع ثابت ۱، لزوماً دارای ویژگی $f*1=1$ نیست.** (راهنمایی: تابع $f(t)=\cos t$ را در نظر بگیرید.)

ب) **نشان دهید ضرب پیچشی** (تلفیقی یا کانولوشن) **تابع f در خودش، لزوماً دارای ویژگی $f*f\geq 0$ نیست.** (راهنمایی: تابع $f(t)=\sin t$ را در نظر بگیرید.)

emamipour@bam.ac.ir

۱۱. **تبدیل وارون لاپلاس توابع ذیل را محاسبه کنید.** راهنمایی: از فرمول $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\{F'(s)\}$ در ردیف ۱۴ جدول لاپلاس‌ها استفاده کنید.

الف) $\ln s$ ب) $\ln(\frac{s}{s-1})$ ج) $\arctan(\frac{1}{s})$ د) $\operatorname{arccot} s$ هـ) $\ln\left(\frac{s^3+s}{(s+2)^3}\right)$ و) $\ln\left(\frac{\sqrt[4]{s^2+4}}{\sqrt{s}}\right)$

۱۲. **حاصل** $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)\}$ **را پیدا کنید.** راهنمایی: به‌ترتیب از فرمول‌های ۱۳، ۲۰ و نتیجه ۱۴ استفاده کنید.

۱۳. **تبدیل لاپلاس هر یک از تابع‌های ذیل را پیدا کنید.** راهنمایی: از فرمول ردیف ۱۵ جدول لاپلاس‌ها، یعنی $\mathscr{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_s^{+\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$ استفاده کنید.

الف) $\frac{\sin t}{t}$ ب) $\frac{\sin^2 t}{t}$ ج) $\frac{2\cos^2 t - 2\mathrm{e}^{-t}}{t}$ د) $\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$

۱۴. **مقدار** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$ **را محاسبه کنید.** راهنمایی: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \mathscr{L}\{\frac{\sin t}{t}\}\Big|_{s=1}$

۱۵. **مقدار هر یک از انتگرال‌های ذیل را پیدا کنید.** راهنمایی: از نتیجه در ردیف ۱۵ جدول لاپلاس استفاده کنید.

الف) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ ب) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t - \cos 2t}{t}\,\mathrm{d}t$ ج) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-3t}}{t}\,\mathrm{d}t$

۱۶. **اگر** $\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{s+2}{2s^2+2s+1}$ **در این‌صورت مقدار** $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ **و** $f'(0)$ **را پیدا کنید.** راهنمایی: «نتیجه» ردیف‌های ۲۲ و ۲۳ جدول لاپلاس.

۱۷. **فرض کنید** $y = \varphi(t)$ **جوابی از معادله** $y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} t & 0 \le t < \pi \\ 0 & t \ge \pi \end{cases}$ **باشد که از نقطه** $(0, 1)$ **می‌گذرد و در آنجا شیب صفر دارد. در این‌صورت مقدار** $I_1 = \int_0^\infty 5\mathrm{e}^{-t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ **و** $I_2 = \int_2^\infty 5\mathrm{e}^{-t}\varphi(t-2)\,\mathrm{d}t$ **را بیابید.** جواب آخر: $I_1 = 4 - (1+\pi)\mathrm{e}^{-\pi}$.

راهنمایی: تابع دوضابطه‌ای را با تابع پله‌ای واحد بازنویسی و سپس از طرفین لاپلاس بگیرید. شیب صفر در نقطه $(0, 1)$، یعنی $\varphi'(0) = 0$. همچنین $I_1 = \int_0^\infty 5\mathrm{e}^{-2t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 5\mathscr{L}\{\varphi(t)\}\big|_{s=2}$.

۱۸. **تبدیل لاپلاس جواب معادله دیفرانسیل** $ty'' + 2y' + ty = 0$ **را بر حسب** $y(0)$ **بیابید.**

جواب آخر: $F(s) = y(0)(c + \operatorname{arccot} s) = y(0)(c + \frac{\pi}{2} - \arctan s)$ و توجه کنید که $\operatorname{arccot} s = \arctan(\frac{1}{s})$، $\arctan s + \operatorname{arccot} s = \frac{\pi}{2}$.

راهنمایی: از طرفین، لاپلاس بگیرید و سپس از ردیف ۱۴ جدول لاپلاس به‌نحو مناسب استفاده کنید. در واقع، $\mathscr{L}\{y'\}$ از ردیف ۲۲ جدول لاپلاس محاسبه می‌شود و $\mathscr{L}\{ty\}$ مستقیماً از ردیف ۱۴ و $\mathscr{L}\{ty''\}$ از ردیف ۱۴ به‌صورت $\mathscr{L}\{ty''\} = (-1)^1\left(\mathscr{L}\{y''\}\right)' = -(s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0))' = -(2s\mathscr{L}\{y\} + s^2\mathscr{L}\{y\}' - 1) = -2sF(s) - s^2F'(s) - 1$ می‌شود.

۱۹. ۱- **حاصل عبارات ذیل را بیابید.** توجه: هر سه قسمت اول در کلاس حل شده است.

الف) $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^5 - s}\}$ ب) $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{s(s^4+5s^2+4)}\}$ ج) $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s^2+1}{s^3+s^2+s}\}$

۲- **برای هر یک از معادله‌های ذیل، جوابی را پیدا کنید که در شرایط اولیه داده‌شده صدق کند.**

توجه: برای سه قسمت اول در زیر، از قسمت‌های ۱۸-۱ استفاده کنید که در کلاس حل شده است.

الف) $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t);\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

ب) $y^{(4)} - 5y'' + 4y - 1 = -u_\pi(t);\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

ج) $y' + y = \int_0^t y(t-u)\sin u\,\mathrm{d}u;\ y(0) = 1$

د) $y(t) = t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t\int_0^t \mathrm{e}^{-u}y(u)\,\mathrm{d}u$ (راهنمایی: دومین e^t را به داخل انتگرال ببرید و سپس مشابه قسمت قبل حل کنید. همچنین الزاماً باید $y(0) = 0$.)

هـ) $2y'' + y' + 2y = \delta(t-5);\ y(0) = y'(0) = 0$ (راهنمایی: مثال ۱ ص ۳۷۳ کتاب که در کلاس نیز حل شده است.)

و) $ty'' + (1-t)y' + y = 0;\ y(0) = 1, y'(0) = -1$ (راهنمایی: لاپلاس بگیرید و سپس از ردیف ۱۴ جدول لاپلاس به‌نحو مناسب استفاده کنید.)

ز) $y'' + y = \delta(t-2\pi)\cos t;\ y(0) = 0, y'(0) = 1$ (راهنمایی: لاپلاس بگیرید و سپس از ردیف ۱۹ جدول لاپلاس به‌نحو مناسب استفاده کنید.)

ح) $y' + 2y + \int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u = 0;\ y(0) = 1$ (راهنمایی: لاپلاس بگیرید و سپس از ردیف ۲۰ جدول لاپلاس به‌نحو مناسب استفاده کنید.)

ط) $\int_0^1 \frac{y(tx)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{t}$ (راهنمایی: با تغییرمتغیر $u = tx$، انتگرال را به ضرب پیچشی دو تابع تبدیل کنید و سپس لاپلاس بگیرید. جواب آخر: $y(t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi}$)

emamipour@bam.ac.ir

نمونه سؤال برای فصل هفتم

توجه: تقریباً همه تمرین‌های ذیل، یا در کلاس درس یا در جزوه pdf حل شده‌اند. البته برخی نیز دارای راهنمایی هستند.

۱. **الف) دستگاه ناهمگن معادله دیفرانسیل** $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - 4x + 2\sin 4t \end{cases}$ **را به صورت یک معادله دیفرانسیل بنویسید و سپس جواب عمومی دستگاه را پیدا کنید. سپس با شرایط آغازین** $x(0) = 1$ **و** $y(0) = 3$ **جواب خصوصی دستگاه را بیابید.**

ب) شکل ماتریسی دستگاه معادله $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - 4x + 2\sin 4t \end{cases}$ **با شرایط اولیه** $x(0) = 1$ **و** $y(0) = 3$ **را بنویسید.**

ج) یک رابطه بین جواب‌های $x(t)$ **و** $y(t)$ **مربوط به دستگاه معادلات دیفرانسیل** $\begin{cases} x' = \frac{t}{xy} \\ y' = \frac{t}{x^2} \end{cases}$ **بیابید.** جواب آخر: $y(t) = k|x(t)|$ و $k \neq 0$.

۲. **جواب عمومی هر یک از دستگاه‌های همگن یا ناهمگن را بیابید.** (راهنمایی: همگی از روش حذفی حل می‌شوند.)

الف) $X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X$

ب) $X' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 4 - t^2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -y - 4x + 2\sin 4t \end{cases}$

د) $\begin{cases} x' + 4x - 4y = 12 \\ 10y' = 4x' - 4y \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} x'' = y + 1 \\ y'' = x + t \end{cases}$

و) $\begin{cases} x'' + 2x + 4y = \mathrm{e}^t \\ y'' - x - 3y = -t \end{cases}$

ز) $\begin{cases} x' + y'' = -t \\ 5x' + ty'' = t^3 - 30t \end{cases}$

ح) $\begin{cases} x' + ty' = 2t \\ tx' - y' = -x \end{cases}$

۳. **جواب خصوصی دستگاه معادله دیفرانسیل** $X' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X$ **با شرط آغازین** $X(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **را با توجه به دو روش ذیل پیدا کنید.**

الف) روش حذفی **ب) با استفاده از تبدیل لاپلاس**

۴. **جواب خصوصی دستگاه همگن معادله دیفرانسیل** $X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X$ **با شرط اولیه** $X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ **را پیدا کنید.**

۵. **جواب خصوصی دستگاه ناهمگن معادله دیفرانسیل** $X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$ **با شرط آغازین** $X(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **را پیدا کنید.**

۶. **به کمک تبدیل لاپلاس، دستگاه** $\begin{cases} x' + x = y' + y \\ x'' + y'' = \mathrm{e}^t \end{cases}$ **با شرایط اولیه** $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 1, y'(0) = 0$ **را حل کنید.**

۷. **جواب خصوصی دستگاه** $\begin{cases} x' + y' = 2\sinh t \\ y' + z' = \mathrm{e}^t \\ z' + x' = 2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ **با شرایط اولیه** $x(0) = y(0) = 1, z(0) = 0$ **را بیابید.** راهنمایی: از روش حذفی یا تبدیل لاپلاس

۸. **جواب عمومی دستگاه‌های معادلات انتگرالی را بیابید.** (راهنمایی: از روش تبدیل لاپلاس حل کنید و از فرمول ردیف ۲۰ جدول لاپلاس نیز استفاده کنید.)

الف) $\begin{cases} 4x + 12\int_0^t \big(x(u) - y(u)\big)\,\mathrm{d}u = 1 \\ y + 4\int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{2t} + \int_0^t y(u)\,\mathrm{d}u \\ y = 1 - \mathrm{e}^{2t}\int_0^t \mathrm{e}^{-2u} x(u)\,\mathrm{d}u \end{cases}$