پاسخ تشریحی سؤالات کنکور سراسری ۱۳۹۳

۱) گزینه ۴ صحیح است.

طبق جدول تبدیل فوریه داریم:

$$X(\omega)=\frac{1}{(2+j\omega)^2}\xrightarrow{F^{-1}} x(t)=t\,e^{-2t}u(t)$$

حال طبق خاصیت انتقال زمانی داریم:

$$X(\omega)=\frac{e^{j3\omega}}{(2+j\omega)^2}\xrightarrow{F^{-1}} x(t)=(t+3)\,e^{-2(t+3)}u(t+3)$$

۲) گزینه ۳ صحیح است.

$$x(t)=A\,\delta(t)-\operatorname{sinc} t\xrightarrow{F} X(\omega)=A-\prod(\frac{\omega}{2\pi})$$

طبق رابطه داده شده داریم:

$$x(t)*x(t)=x(t)\xrightarrow{F} X^2(\omega)=X(\omega)$$

یعنی باید مجذور $X(\omega)$ برابر خودش شود. در نتیجه باید مقدار ثابت A طوری باشد که حاصل $X(\omega)=A-\prod(\frac{\omega}{2\pi})$ فقط مقادیر صفر و یک داشته باشد تا مجذور آن برابر خودش شود. در نتیجه A باید برابر ۱ باشد.

۳) گزینه ۱ صحیح است.

$$X(\omega)=2+\cos\omega=2+\frac{1}{2}e^{j\omega}+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\xrightarrow{e^{j\omega}=z} X(z)=2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad Y(z)=X(z^2)=2+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^{-2}\xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y[n]=2\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}\delta[n-2]$$

بنابراین با مجذور کردن سیگنال فوق و سپس مجموع مقادیر آن داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2[n]=4+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=4/5$$

۴) گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به اینکه ضرایب فوریه $y[n]$ برابر $Y[k]$ می‌باشد و با استفاده از خاصیت ضرب در سری فوریه داریم:

$$y[n]=x^2[n]\xrightarrow{FS^{-1}} Y[k]=a_k\circledast a_k=\sum_{m=<N>} a_m\,a_{k-m}=\sum_{m=0}^{7} a_m\,a_{k-m}$$

$$\Rightarrow\qquad Y[0]=\sum_{m=0}^{7} a_m\,a_{-m}=a_0\times a_0+a_1\times a_{-1}+\cdots+a_7\times a_{-7}=5$$

$$\Rightarrow \qquad Y[1]=\sum_{m=0}^{7} a_m\, a_{1-m} = a_0\times a_1 + a_1\times a_0 + \cdots + a_7\times a_{-6} = 4$$

دقت کنید که چون $x[n]$ با دوره تناوب ۸ متناوب است، خود a_k نیز با دوره تناوب ۸ متناوب خواهد بود و بنابراین $a_{-7}=a_1$، $a_{-6}=a_2$ و ... .

۵) گزینه ؟ صحیح است.

بررسی گزینه ۱: این گزینه به دو دلیل نادرست است. اولاً تبدیل $\mathcal{Z}$ یک سیگنال سمت راستی ممکن است بیش از یک قطب داشته باشد. ثانیاً از آنجا که سیگنال دوره‌محدود هم یک سیگنال سمت راستی محسوب می‌شود،[1] پس مثلاً سیگنال $\delta[n]$ هم یک سیگنال سمت راستی است که تبدیل $\mathcal{Z}$ آن برابر ۱ است و اصلاً قطبی ندارد.

بررسی گزینه ۲: اگر کسر $\frac{2\pi}{\omega_0}$ گویا نباشد، سیگنال $e^{-j\omega_0 n}$ متناوب نیست، اما این سیگنال به‌ازای همه ω_0های حقیقی دارای تبدیل فوریه است که طبق جدول برابر $2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$ می‌باشد.

بررسی گزینه ۳: به عنوان مثال نقض، دو سیستم معکوس‌پذیر $y(t)=x(t)$ و $y(t)=-x(t)$ وقتی با هم موازی می‌شوند، سیستم معادل برابر $y(t)=0$ می‌شود که مشخص است وارون‌ناپذیر است، زیرا پاسخ به همه ورودی‌ها، یکسان و برابر صفر می‌شود.

بررسی گزینه ۴: اگر تبدیل لاپلاسی دارای دو قطب محدود متمایز باشد به‌طوری‌که قسمت حقیقی آن‌ها با هم برابر نباشد، سه حالت می‌توان برای ناحیه همگرایی آن تصور کرد (سمت راست راست‌ترین قطب، بین دو قطب و سمت چپ چپ‌ترین قطب). اما اگر این دو قطب متمایز، مزدوج یا قسمت حقیقی آن‌ها با هم برابر باشد، یا اصلاً این دو قطب نامحدود باشند، دیگر نمی‌توان سه حالت ناحیه همگرایی برای آن متصور شد.

۶) گزینه ۱ صحیح است.

در مورد سیستم ۱ داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(\alpha)\,g(\alpha-t)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\,g(\alpha-t)\,u(t-\alpha)\,d\alpha = x(t)*\underbrace{g(-t)u(t)}_{h(t)}$$

چون رابطه سیستم از رابطه کلی $y(t)=x(t)*h(t)$ پیروی می‌کند، این سیستم LTI است.

در مورد سیستم ۲ داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\,x(t-\alpha)\,d\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,x(t-\alpha)\,u(t-\alpha)\,d\alpha = x(t)u(t)*f(t)$$

چون رابطه سیستم از رابطه کلی $y(t)=x(t)*h(t)$ پیروی نمی‌کند، این سیستم LTI نیست.[2]

---

[1] به تعریف سیگنال سمت راستی در فصل ششم و در بحث خواص ناحیه همگرایی مراجعه شود.

[2] ملاحظه می‌کنید که در مورد LTI بودن این سیستم‌ها به طور قطع می‌توان اظهار نظر کرد و آمدن عبارت «می‌تواند» در صورت تست، لزومی نداشت!

۷) گزینه ۲ صحیح است.

سیگنال $g(t)=\cos(2\pi\times 50\times t)=\frac{1}{2}e^{j100\pi t}+\frac{1}{2}e^{-j100\pi t}$ دارای دو فرکانس $\omega=\pm 100\pi$ می‌باشد. بنابراین به دلیل LTI بودن سیستم، حتماً باید این فرکانس‌ها در ورودی هم موجود بوده باشند.

بررسی گزینه ۱: این سیگنال با دوره تناوب اصلی $T=0/01$ متناوب است. در نتیجه با توجه به بسط سری فوریه آن، تنها شامل هارمونیک‌های $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/01}=200\pi$ می‌باشد و قطعاً شامل فرکانس $\omega=\pm 100\pi$ نیست. پس این گزینه امکان ندارد که ورودی این سیستم بوده باشد.

بررسی گزینه ۲: این سیگنال با دوره تناوب اصلی $T=0/04$ متناوب است. در نتیجه با توجه به بسط سری فوریه آن، شامل هارمونیک‌های $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/04}=50\pi$ می‌باشد و در نتیجه شامل فرکانس $\pm 2\omega_0=\pm 100\pi$ خواهد بود. پس این گزینه امکان دارد که ورودی این سیستم بوده باشد.

بررسی گزینه ۳: این سیگنال برابر $x(t)=k\cos(50\pi t)=\frac{k}{2}e^{j100\pi t}+\frac{k}{2}e^{-j100\pi t}$ می‌باشد که فقط شامل فرکانس‌های $\omega=\pm 50\pi$ است. پس این گزینه نمی‌تواند ورودی این سیستم بوده باشد.

بررسی گزینه ۴: این سیگنال با دوره تناوب اصلی $T=0/04$ متناوب است. در نتیجه با توجه به بسط سری فوریه آن، تنها شامل هارمونیک‌های $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0/04}=50\pi$ می‌باشد، اما چون شکل سیگنال تقارن نیم موج دارد، شامل هارمونیک‌های زوج نیست و فقط هامونیک‌های فرد را دارد (نکته ۹۳). بنابراین شامل هارمونیک دوم $\omega_0=50\pi$ یعنی فرکانس‌های $\omega=\pm 100\pi$ نمی‌باشد. پس این گزینه نیز نمی‌تواند ورودی این سیستم بوده باشد.

۸) گزینه ۳ صحیح است.

$$y(t)=h(t)*x(t)=h(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)\delta(t-4k)$$

$$\Rightarrow\quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)h(t)*\delta(t-4k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1+k^2)h(t-4k)$$

با باز کردن سیگمای فوق داریم:

$$\Rightarrow\quad y(t)=h(t)+2h(t-4)+2h(t+4)+5h(t-8)+5h(t+8)+\cdots$$

حال با جایگذاری $t=2$ در تساوی فوق، خواهیم داشت:

$$y(2)=\underbrace{h(2)}_{4}+2\underbrace{h(-2)}_{2}+2\underbrace{h(6)}_{0}+5\underbrace{h(-6)}_{0}+5\underbrace{h(10)}_{0}+\underbrace{\cdots}_{0}=8$$

۹) گزینه ۴ صحیح است.

ابتدا تابع تبدیل سیستم ۱ را به‌دست می‌آوریم:

$$z[n]=\frac{1}{2}x[n-1]+2x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} Z(z)=\frac{1}{2}X(z)z^{-1}+2X(z)$$

$$\Rightarrow \quad H_1(z)=\frac{Z(z)}{X(z)}=\frac{1}{2}z^{-1}+2$$

تابع تبدیل سیستم ۲ نیز برابر است با:

$$h_2[n]=(-\frac{1}{2})^n u[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} H_2(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

حال از آنجا که دو سیستم با هم سری شده‌اند، با ضرب دو تابع تبدیل، تابع تبدیل سیستم کل برابر می‌شود با:

$$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}+2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

۱۰) گزینه ۲ صحیح است.

$$s[n]=\delta[n]+ah[n-1] \xrightarrow{Z} S(z)=1+az^{-1}H(z)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $S(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}H(z)$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1-z^{-1}}H(z)=1+az^{-1}H(z) \quad \Rightarrow \quad H(z)=1-z^{-1}+(az^{-1}-az^{-2})H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-az^{-1}+az^{-2}}=\frac{z^2-z}{z^2-az+a}$$

طبق صورت تست، سیستم علی است؛ پس شرایط قضیه مقدار اولیه برقرار است. همچنین اگر سیستم پایدار نیز باشد (طبق صورت تست)، حتماً همه قطب‌های $H(z)$ و همچنین قطب‌های $(1-z^{-1})H(z)$ در داخل دایره یکه قرار می‌گیرند و بنابراین شرایط قضیه مقدار نهایی نیز برقرار است. در نتیجه با توجه به قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی داریم:

$$h[0]=\lim_{z\to\infty}H(z)=1 \quad , \quad h[+\infty]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})H(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot\frac{z^2-z}{z^2-az+a}=0$$

۱۱) گزینه ؟ صحیح است.

با توجه به خواص انتقال زمانی و فشردگی زمان‌گسسته داریم:

$$z[n]=x[n+1] \xleftrightarrow{F} Z(\omega)=X(\omega)e^{j\omega}$$

$$y[n]=z[2n]=x[2n+1] \xleftrightarrow{F} Y(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{1}Z\left(\frac{\omega}{2}-\frac{2\pi}{2}i\right)=\frac{1}{2}Z(\frac{\omega}{2})+\frac{1}{2}Z(\frac{\omega}{2}-\pi)$$

$$\Rightarrow \quad Y(\omega)=\frac{1}{2}X(\frac{\omega}{2})e^{j\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{2}X(\frac{\omega}{2}-\pi)e^{j(\frac{\omega}{2}-\pi)}$$

احتمالاً منظور طراح محاسبه تبدیل فوریه عبارت زیر بوده است:

$$y[n]=\begin{cases}x[n] & , \text{فرد } n\\ 0 & , \text{زوج } n\end{cases}$$

برای محاسبه تبدیل فوریه سیگنال فوق، از نکته ۸۸ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$y[n]=\begin{cases}x[n] & , \text{فرد } n\\ 0 & , \text{زوج } n\end{cases}=x[n]\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n\right)=\frac{1}{2}x[n]-\frac{1}{2}x[n]e^{j\pi n}$$

حال با توجه به خواص انتقال فرکانسی و خطی بودن داریم:

$$Y(\omega)=\frac{1}{2}X(\omega)-\frac{1}{2}X(\omega-\pi)$$

که مطابق گزینه ۳ است.

۱۲) گزینه ۲ صحیح است.

$$H(z)=\frac{1}{z^{-1}-\frac{5}{2}z^{-2}+z^{-3}}=\frac{z^3}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

چون درجه صورت بیشتر از مخرج است، پس سیستم قطعاً و همواره غیرعلی است؛ زیرا در بینهایت قطب داریم و در نتیجه $z=\infty$ در ROC نخواهد بود (نکته ۱۳۲).