Dimensional Analysis and similitude

Mohsen Soltanpour
Email: soltanpour@kntu.ac.ir
URL: http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

www.Mohandesyar.com

گروههای بی بعد (Dimensionless groups)

اگر ساده ترین نمایش حاصل ضرب (یا تقسیم) گروهی از ابعاد برابر واحد باشد به آن گروه گروه بی بعد گفته می شود.

بسیاری از پارامترهای بی بعد را می توان به صورت نسبت دو نیرو در نظر گرفت که اندازه نسبی پارامتر فوق نشان دهنده اهمیت نسبی یکی از نیروها نسبت به دیگری می باشد. مثلا عدد بی بعد رینولدز (Reynolds number) نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت را نشان می دهد:

$$\frac{Ma}{\tau A}=\frac{Ma}{\mu(dv/dy)A}=\frac{(\rho L^3)\,L/T^2}{\mu(v/L)L^2}=\frac{\rho L^2(L^2/T^2)}{\mu vL}=\frac{\rho v^2L^2}{\mu vL}=\frac{\rho vL}{\mu}$$

$$\left(\frac{\rho vL}{\mu}=\frac{(M/L^3)(L/T)L}{M/LT}=1\right)$$

اگر در جریان خاصی تاثیر بعضی نیروها از سایر نیروها خیلی بیشتر باشد اغلب می توان از اثر نیروهای کوچکتر صرفنظر کرده و تنها اثر نیروهای اصلی را در تجزیه و تحلیل پدیده در نظر گرفت. به این ترتیب می توان روشهای آزمایشگاهی و ریاضی ساده تری برای حل مسئله بکار برد. با این همه در حالاتی که چندین نیرو از اهمیت زیادی برخوردار می باشند (مثلا نیروهای اینرسی، اصطکاکی، ثقل، ...) تحلیل پیچیده بوده و روشهای خاصی مورد نیاز می باشد.

www.Mohandesyar.com

تحلیل ابعادی (Dimensional analysis)

تحلیل ابعادی روشی در تجزیه و تحلیل مسائل مکانیک سیالات با استفاده از پارامترها و متغیرهای بی بعد است. از آنالیز ابعادی در حالات زیر می توان استفاده کرد:

۱- انتقال از یک سیستم آحاد به سیستم دیگر

۲-کاهش تعداد متغیرهای لازم در یک برنامه آزمایشگاهی

۳- تعیین اصول طراحی مدلها با استفاده از مفهوم تشابه و تعیین مقیاس لازم برای خواص سیال و ابعاد مختلف فیزیکی

۴- کمک به فهم فیزیک مسئله و استخراج معادلات حاکم

قانون همگنی ابعادی (Dimensional homogeneity): تمامی معادلات فیزیکی باید از نظر ابعادی جملات یکسانی داشته و در تمام سیستمهای آحاد صادق باشند. در حالت کلی تمام این روابط فیزیکی را می توان بر مبنای مقادیر اصلی نیرو (F)، طول (L) و زمان (T) و یا جرم (M)، طول (L) و زمان (T) نمایش داد.

جدول اسلاید بعد ابعاد کمیات مورد استفاده در مکانیک سیالات را نشان می دهد.

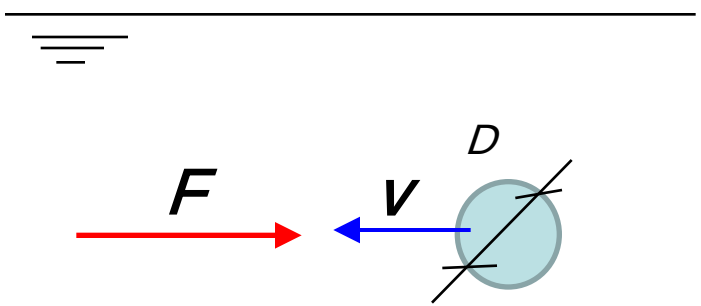
کمیت (Quantity)	علامت	SI Unit	Dimension (M-L-T)	Dimension (F-L-T)
مساحت (area)	A	m^2	L^2	L^2
حجم (volume)	V	m^3	L^3	L^3
سرعت (velocity)	v	m/s	LT^{-1}	LT^{-1}
دبی (discharge)	Q	m^3/s	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
شتاب (acceleration)	a	m/s^2	LT^{-2}	LT^{-2}
سرعت زاویه ای (velocity)	ω	rad/s	T^{-1}	T^{-1}
نیرو یا وزن (force or weight)	F,W	N	MLT^{-2}	F
جرم (mass)	M	kg	M	FT^2L^{-1}
وزن مخصوص (specific weight)	γ	N/m^3, $kg/(m^2.s^2)$	$ML^{-2}T^{-2}$	FL^{-3}
جرم مخصوص (density)	ρ	kg/m^3	ML^{-3}	FT^2L^{-4}
انرژی،کار یا پیچش (energy, work or torsion)	E,W,T	Joule (J), N.m, kg. m^2/s^2	ML^2T^{-2}	FL
توان (power)	P	Watt (W), N.m/s, $kg.m^2/s^3$	ML^2T^{-3}	FLT^{-1}
فشار، تنش، مدول ارتجاعی یا مدول حجمی (pressure, stress, elastic modulus or Bulk modulus)	$P,\sigma(\tau),$ $k(E)$	Pascal (Pa), N/m^2, $kg/(m.s^2)$	$ML^{-1}T^{-2}$	FL^{-2}
لزجت دینامیک (dynamic viscosity)	μ	Pa.s	$ML^{-1}T^{-1}$	FTL^{-2}
لزجت سینماتیک (kinematic viscosity)	ν	m^2/s	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
کشش سطحی (surface tension)	σ	N/m	MT^{-2}	FL^{-1}

www.Mohandesyar.com

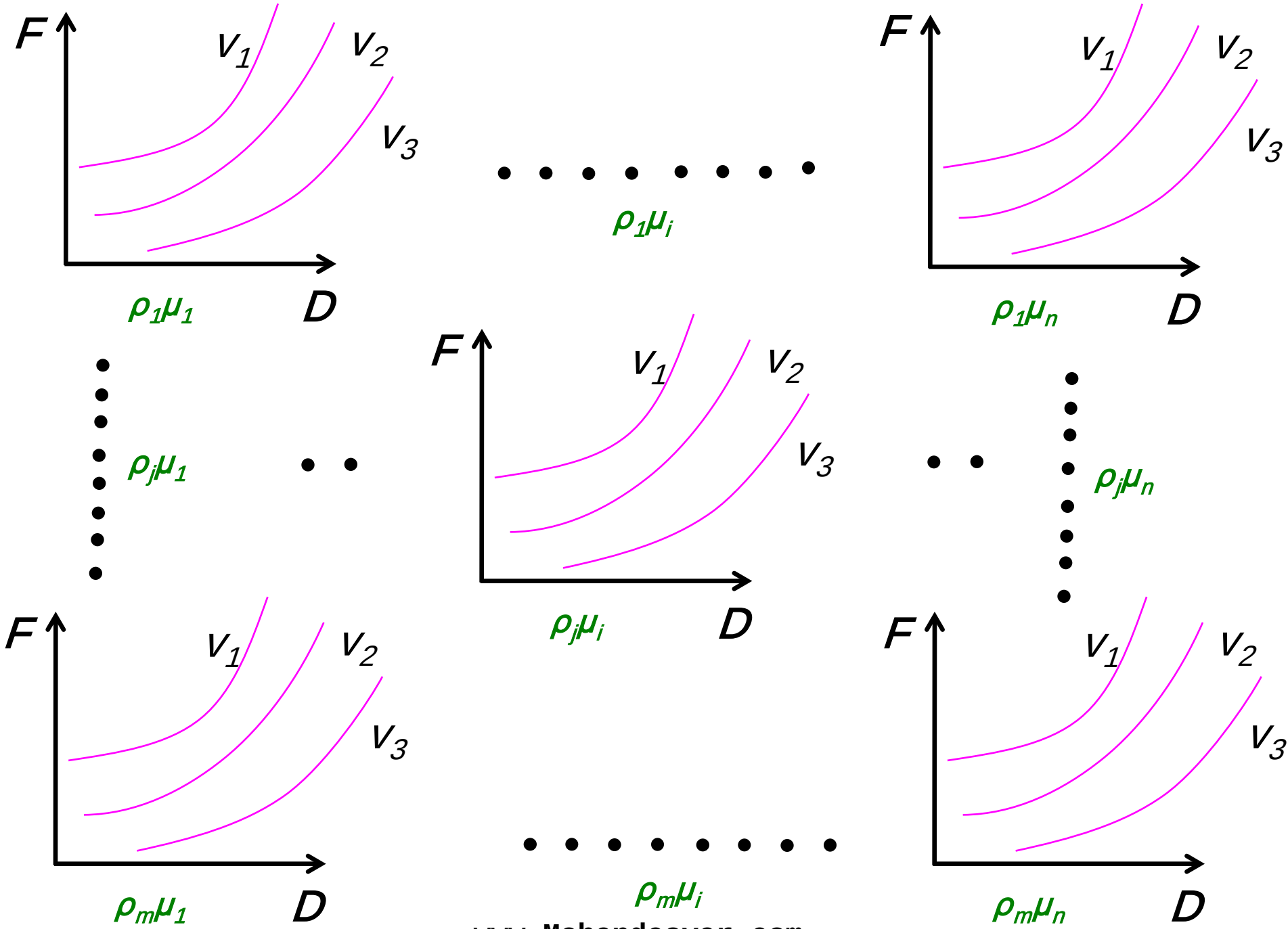
در صورتی که متغیرهای موثر در یک پدیده فیزیکی شناخته شده بوده اما ارتباط بین آنها معلوم نباشد، با استفاده از آنالیز ابعادی می توان پدیده را به صورت رابطه ای بین چند گروه بی بعد که تعدادشان کمتر از تعداد متغیرها است فرموله کرد. به این ترتیب تعداد آزمایشات لازم برای به منظور تعیین رابطه بین متغیرها کمتر شده و غالبا نوع آزمایشات نیز ساده تر می شوند.

فرض می کنیم تعیین نیروی دراگ (Drag) وارد بر کره ای صیقلی به قطر D که با سرعت پایین V در سیال لزجی حرکت می کند مورد نظر باشد. با در نظر گرفتن سایر متغیرهای موثر (جرم مخصوص ρ و لزجت μ):

$$F = f(D, V, \rho, \mu)$$



تعیین این تابع مستلزم حجم آزمایشات زیادی است زیرا در هر آزمایش تنها یکی از کمیتهای داخل پرانتز را می توان تغییر داد. مثلا $m \times n$ دسته نمودار اسلاید بعد تغییرات F را در مقابل D برای مقادیر مختلف V نمایش می دهد.



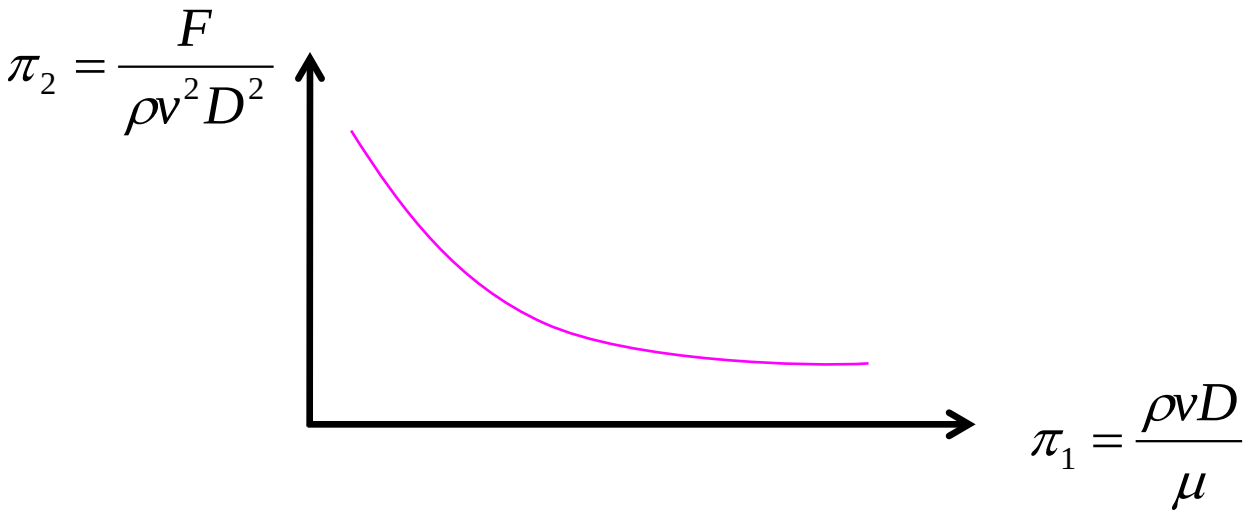
www.Mohandesyar.com

مشاهده می شود که نمودارهای زیادی برای توصیف پدیده مورد نیاز است. ضمنا این روش مستلزم استفاده از تعداد زیادی کره با قطرهای مختلف و سیالات گوناگونی با لزجت و جرم مخصوصهای متفاوت است.

با استفاده از آنالیز ابعادی می توان تعداد آزمایشات را کاهش داد. مثلا خواهیم دید تعیین نیروی دراگ وارد بر کره در مثال قبل که پدیده ای ۴ متغیره است را می توان با ۲ گروه بی بعد π_1 و π_2 فرموله کرد:

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\rho v D}{\mu} \\ \pi_2 = \dfrac{F}{\rho v^2 D^2} \end{cases} \Longrightarrow \quad \frac{F}{\rho v^2 D^2} = g\left(\frac{\rho v D}{\mu}\right)$$

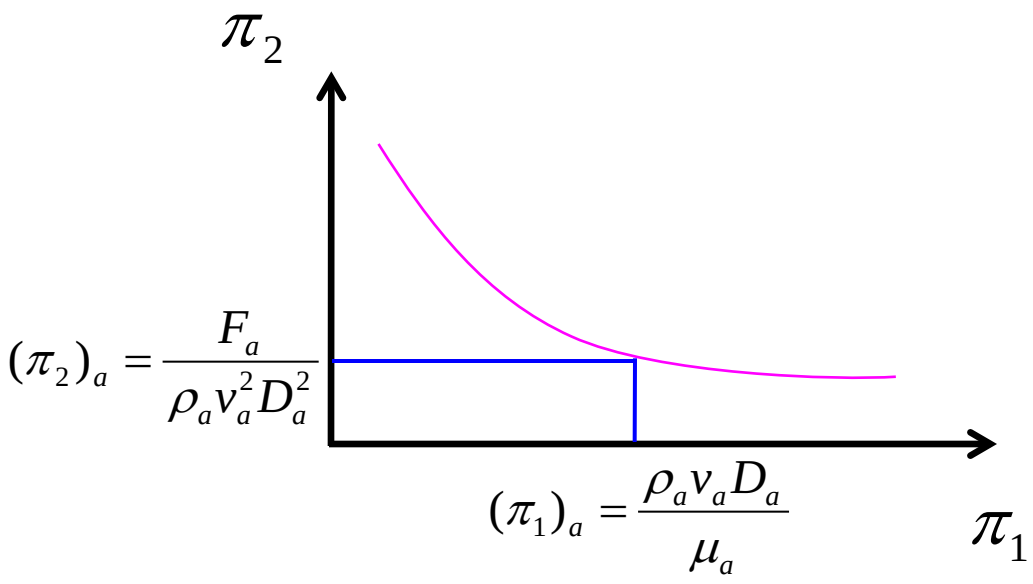
در اینجا نیز تابع g نامعلوم است اما صرفا با یک سری آزمایش و ارائه یک منحنی بین πها می توان آن را تعیین کرد:



منحنی فوق که برای هر سیال و هر قطری در محدوده πهای آزمایش شده معتبر است با وقت و هزینه ای به مراتب کمتر از دسته منحنی های قبل بدست می آید.

www.Mohandesyar.com

پس از رسم منحنی و تعیین تابع g ، با معلوم بودن v_a، D_a، ρ_a و μ_a جهت تعیین نیروی F کافیست گروه بی بعد $(\pi_1)_a$ را تعیین کرده و گروه بی بعد $(\pi_2)_a$ را از نمودار بدست آوریم:



$$F_a = \rho_a v_a^2 D_a^2 (\pi_2)_a$$

تئوری π باکینگهام (Buckingham π theorem):

هرگاه مسئله ای فیزیکی شامل n کمیت موثر بوده و r بعد اصلی برای نمایش آن وجود داشته باشد، کمیتها را می توان با $n-r$ گروه بی بعد مستقل نمایش داد. *

در مثال حرکت کره ۵ کمیت F، D، v، ρ و μ وجود داشته و با توجه به ۳ بعد اصلی T، L و M (و یا T، L و F)، $n-r=2$ عدد بی بعد وجود دارد. روشن است که دو گروه بی بعد مستقل اند زیرا با عملیات جبری به هم مربوط نمی شوند (F و μ تنها در یکی از آنها ظاهر شده اند). هر گروه بی بعد دیگر را می توان از ترکیب بر روی دو گروه بی بعد $\pi_1 = \dfrac{\rho v D}{\mu}$ و $\pi_2 = \dfrac{F}{\rho v^2 D^2}$ بدست آورد. مثلا $\dfrac{F}{\mu v D}$ گروه بی بعدی است که از حاصل ضرب گروههای فوق بدست می آید.

تعریف r به صورت ابعاد اصلی لازم همواره صحیح نیست. در تعریف دقیقتر r رتبه (rank) ماتریس ابعادی (Dimensional matrix) است که برابر با اولین (بزرگترین) زیر گروه مربعی دارای دترمینان مخالف صفر می باشد.

فرض کنیم متغیرهای α، β، γ و δ بر حسب ابعاد اصلی T، L و M تعریف شده باشند:

$$\alpha = ML^{-1}T^{2}, \beta = L^{-2}T, \gamma = M^{3}L^{1}T^{1}, \delta = L^{2}T^{1}$$

www.Mohandesyar.com

اگر روابط قبلی را به شکل جدول زیر مرتب کنیم:

	α	β	γ	δ
M	1	0	3	0
L	-1	-2	1	2
T	2	1	1	1

ماتریس ابعادی برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

رتبه ماتریس فوق ۳ است زیرا می توان ماتریس مربعی با سه سطر و ستون جدا کرد که دترمینان آن غیر صفر باشد. مثلا:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

بنابراین در این مسئله 4-3=1 عدد بی بعد وجود دارد.

www.Mohandesyar.com

استفاده از تئوری باکینگهام هنگامی که تعداد کمیتها ۴ و یا بیشتر است بدلیل کاهش تعداد متغیرها بسیار مفید است:

تئوری باکینگهام (r بعد اصلی)

$$F(A_1, A_2, \ldots, A_n) = 0$$

$$f(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-r}) = 0$$

هر یک از گروههای π به بیش از $r+1$ پارامتر A بستگی ندارند. نکات زیر در اعداد بی بعد صادق است:

۱- کمیات بی بعد خود یک گروه بی بعد π محسوب می شوند.

۲- اگر دو کمیت بعد یکسانی داشته باشند، نسبت آنها خود یک گروه بی بعد π است.

۳- هر گروه بی بعد را می توان با توانی از آن جایگزین کرد (مثلا π^2، π^{-1}، $\pi^{0.5}$، ...)

۴- هر گروه بی بعد را می توان در ضریبی ضرب کرد (مثلا 3π، ...).

۵- هر گروه بی بعد را می توان به صورت تابعی از دیگر گروههای بی بعد نمایش داد. مثلا اگر دو گروه بی بعد وجود داشته باشد $\pi_2 = \emptyset(\pi_1)$.

http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

روش Hunsaker & Rightmire در تعیین اعداد بی بعد :

در این روش کمیتهای تکراری به عنوان متغیرهای اصلی در نظر گرفته شده و سه بعد اصلی T، L و M (و یا T، L و F) بر حسب آنها نوشته می شوند. به این ترتیب با تعیین سایر کمیتها بر حسب کمیتهای تکراری اعداد بی بعد بدست می آیند و دیگر نیازی به حل دستگاه معادلات چند مجهولی وجود ندارد.

گروههای بی بعد مهم:

بدون در نظر گرفتن انتقال حرارت، معمولترین پارامترهای با اهمیت در جریانات عباتند از:

1	2	3	4	5	6	7	8
V,	ρ,	g,	μ,	σ,	K,	Δp,	L
velocity	density	gravity	viscosity	surface tension	compressibility	pressure change	length

که به (۵=۳-۸) عدد بی بعد اصلی منجر می شوند.

۱- عدد رینولدز (Reynolds number)

عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت (یا اصطکاک) است:

$$\frac{Ma}{\tau A}=\frac{Ma}{\mu(dv/dy)A}=\frac{(\rho L^3)\,L/T^2}{\mu(v/L)L^2}=\frac{\rho L^2(L^2/T^2)}{\mu v L}=\frac{\rho v^2 L^2}{\mu v L}=\frac{\rho v L}{\mu}$$

$$\Longrightarrow \boxed{R_{ey}=\frac{\rho v L}{\mu}\left(\frac{vL}{\nu}\right)}$$

عدد رینولدز بحرانی در رژیمهای مختلف جریان نظیر جریان آشفته و لایه ای در لوله ها، لایه مرزی و یا اطراف اجسام شناور تمایز می گذارد.

www.Mohandesyar.com

۲- عدد اولر (Euler number)

عدد اولر نسبت نیروی فشار به نیروی اینرسی را نشان می دهد:

$$\frac{\Delta P.A}{Ma}=\frac{\Delta P(L^2)}{(\rho L^3)\,L/T^2}=\frac{\Delta PL^2}{(\rho L^2)\,L^2/T^2}=\frac{\Delta PL^2}{\rho L^2 v^2}=\frac{\Delta P}{\rho v^2} \Longrightarrow \boxed{Eu=\frac{\Delta P}{\rho v^2}}$$

فشار دینامیکی

که در آن ΔP فشار محلی منهای فشار جریان آزاد است. در آزمایشات محلی معمولا از ضریب فشار $\frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho v^2}$ استفاده می شود که دو برابر عدد اولر است.

۳- عدد ماخ (Mach number)

عدد ماخ نسبت جزر نیروی اینرسی به جزر نیروی ناشی از تراکم پذیری سیال را نشان می دهد:

$$M^2=\frac{Ma}{K.A}=\frac{\rho L^2 v^2}{KL^2}=\frac{v^2}{K/\rho}=\frac{v^2}{c^2} \Longrightarrow \boxed{M=\frac{v}{c}}$$

مدول بالک

که در آن c سرعت صوت در سیال است. این عدد در جریانهای با سرعت بالا که تغییرات جرم مخصوص در اثر فشار قابل توجه است، اهمیت زیادی پیدا می کند

www.Mohandesyar.com

۴- عدد فرود (Froude number)

عدد فرود جزر نسبت نیروی اینرسی به جزر نیروی جاذبه را نشان می دهد:

$$Fr^2 = \frac{Ma}{Mg} = \frac{\rho v^2 L^2}{\rho L^3 g} = \frac{v^2}{Lg} \Longrightarrow \boxed{Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}}}$$

عدد فرود در جریانهای با تاثیر سطح آزاد (نظیر جریان در یک کانال و یا حرکت امواج) مهم است. تعیین رژیم جریان در یک کانال (فوق بحرانی یا زیر بحرانی) بستگی به بزرگتر بودن یا کوچکتر بودن عدد فرود از یک دارد.
عدد فرود در محاسبات پرش هیدرولیکی، طرح سازه های دریایی و طراحی کشتی نیز بکار می رود.

۵- عدد وبر (Weber number)

عدد وبر عبارتست از نسبت نیروی اینرسی به نیروی کشش سطحی:

$$We = \frac{Ma}{\sigma L} = \frac{\rho v^2 L^2}{\sigma L} = \frac{\rho L v^2}{\sigma}$$

در این حالت نیز باید سطح آزاد وجود داشته باشد ولی در حالتی که ابعاد جسم بزرگ است (مثلا قایقی که در آب شناور است) این اثر کوچک است.

درکل معمولا تاثیر نیروی غالب در نظر گرفته می شود. در اکثر مسائل جریان سیال، ثقل، لزجت و یا نیروی الاستیک غالب هستند. مسائلی که در این بخش تحلیل می شوند عمدتا مربوط به حالاتی هستند که الگوی جریان تحت تاثیر یک نیروی غالب قرار دارد. اگر چند نیرو توامان شرایط جریان را تحت تاثیر قرار دهند تحلیل مسائل متفاوت خواهد بود.

www.Mohandesyar.com

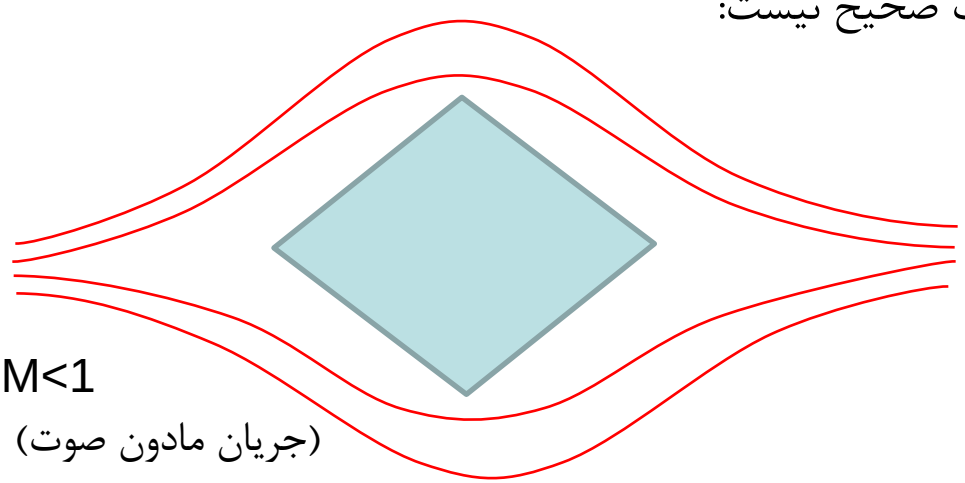
تشابه (similitude)

تشابه در مکانیک سیالات بیانگر ارتباط بین یک جریان با اندازه واقعی و جریانی با مرزهای کوچکتر ولی از نظر هندسی مشابه با آن است. البته در حالتی که مرزها غیر مشابه می باشند نیز قوانینی وجود دارد که در اینجا مورد بحث قرار نمی گیرند. مثلا در هیدرولوژی از مدلی در رودخانه استفاده می شود که از نمای پلان با رودخانه مشابه است ولی غالبا از نظر عمق با آن مشابه نیست (Distorted model).

در اینجا فقط جریانهای مشابه هندسی (Geometrically similar flows) که نسبت کلیه ابعاد در مدل (model) و نمونه اصلی (prototype) یکسانست بررسی می شود:

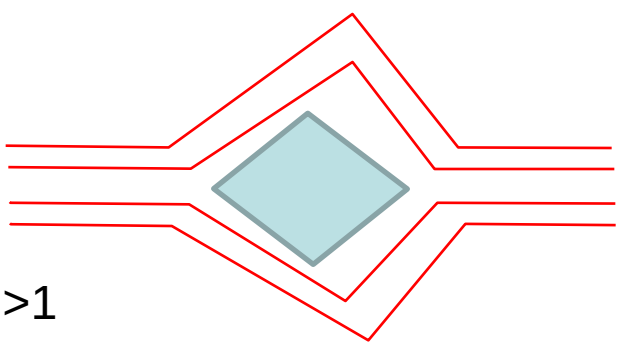
$$\frac{L_m}{L_P} = L_r \Longrightarrow \left(\frac{A_m}{A_P} = L_r^2, \frac{V_m}{V_P} = L_r^3 \ldots\right)$$

وقتی خطوط جریان مربوط به دو جریان با هم مشابه باشند، آن دو جریان تشابه سینماتیکی (Kinematic similarity) دارند. با توجه به اینکه مرزهای جریان خود خطوط جریان هستند، جریانهای مشابه سینماتیکی تشابه هندسی نیز دارند اما عکس این مطلب صحیح نیست:



M<1

(جریان مادون صوت)



M>1

(جریان مافوق صوت)

www.Mohandesyar.com

شرط یکی بودن مسیر ذرات متناظر و یکی بودن نسبت سرعت ها در مدل و نمونه اصلی را نیز میتوان برای تشابه سینماتیکی بیان کرد. به تعبیر دیگر دو جریان تشابه سینماتیکی دارند اگر ذرات متناظر (که موقعیتهای نسبی یکسانی دارند) در زمانهای مشابه در محلهای مشابه قرار گیرند (طول و زمان مشابه باشند):

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{L_m}{L_P} &= L_r \\ \frac{T_m}{T_P} &= T_r\end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{v_m}{v_P} = \dfrac{L_m / T_m}{L_p / T_p} = \dfrac{L_m / L_p}{T_m / T_p} = \dfrac{L_r}{T_r} & \text{سرعت} \\[2ex] \dfrac{a_m}{a_P} = \dfrac{L_m / T_m^2}{L_p / T_P^2} = \dfrac{L_m / L_p}{T_m^2 / T_P^2} = \dfrac{L_r}{T_r^2} & \text{شتاب} \\[2ex] \dfrac{Q_m}{Q_P} = \dfrac{L_m^3 / T_m}{L_P^3 / T_P} = \dfrac{L_m^3 / L_P^3}{T_m / T_P} = \dfrac{L_r^3}{T_r} & \text{دبی} \end{cases}$$

www.Mohandesyar.com

هر گاه توزیع نیرو در دو جریان چنان باشد که در نقاط متناظر آن دو جریان، نیروهای هم نوع (نیروی برشی، فشاری، ...) نظیر به نظیر با هم موازی بوده و متناسب باشند، دو جریان تشابه دینامیکی (Dynamic similarity) دارند.
همین نسبت در نقاط متناظر واقع بر مرزها نیز برقرار است.*

برای برقراری تشابه دینامیکی باید جریانها تشابه سینماتیکی داشته و تشابه جرمی نیز داشته باشند یعنی توزیع جرم به گونه ای باشد که نسبت جرم مخصوص برای تمام جفت نقاط متناظر یکسان باشد.

با توجه به اینکه در تشابه سینماتیکی شتابها در نقاط متناظر موازی و دارای نسبت یکسانی هستند، برآیند نیروهای وارد بر ذرات متناظر موازی بوده و بدلیل تشابه جرمی نسبت یکسانی در تمام نقاط جریان دارند.

اهمیت وجود تشابه دینامیکی اینست که اگر در سرتاسر جریان نسبت بین نیروهای متناظر دو جریان یکسان باشد انتگرال توزیع این نیروها (که می تواند مثلا نیروی دراگ، شناوری، ... را بدست دهد) نیز برای جریان مدل و نمونه اصلی دارای همان نسبت بوده و می توان از نتایج حاصل از آزمایش استفاده کرد.

تشابه هندسی	←	طول متناسب
تشابه سینماتیکی	←	طول و زمان متناسب
تشابه دینامیکی	←	طول، زمان و جرم (یا نیرو) متناسب

www.Mohandesyar.com

شرایط جریان در مدل و نمونه اصلی کاملا مشابه است اگر تمام پارامترهای بی بعد مربوط در مدل و نمونه اصلی برابر باشند:*

$$\boxed{\pi_{i,m} = \pi_{i,p} \qquad i = 1,\ldots,n-r}$$

در عمل حصول شرایط فوق (تشابه کامل) اغلب ممکن نیست و لذا اغلب باید مهمترین عدد بی بعد (اولر، فرود، رینولدز،...) را انتخاب کرده و بقیه را در بهترین حالت بکار برد. مثلا حالتی را فرض کنید که مدلی با سطح آزاد در آب قرار داشته و برقراری تشابه با تساوی اعداد رینولدز و فرود مد نظر باشد (مثلا تعیین نیروی دراگ وارد بر کشتی – نیروی ثقل و اصطکاک مهم هستند):

$$\begin{cases} (Fr)_m = (Fr)_P & \dfrac{v_m}{\sqrt{gL_m}} = \dfrac{v_P}{\sqrt{gL_P}} & \dfrac{v_m}{v_P} = \sqrt{\dfrac{L_m}{L_P}} = \sqrt{L_r} \\ (\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_P & \dfrac{v_m L_m}{\nu_m} = \dfrac{v_P L_P}{\nu_P} & \dfrac{\nu_m}{\nu_P} = \dfrac{v_m}{v_P} \times \dfrac{L_m}{L_P} = \sqrt{L_r} \times L_r = L_r^{3/2} \end{cases}$$

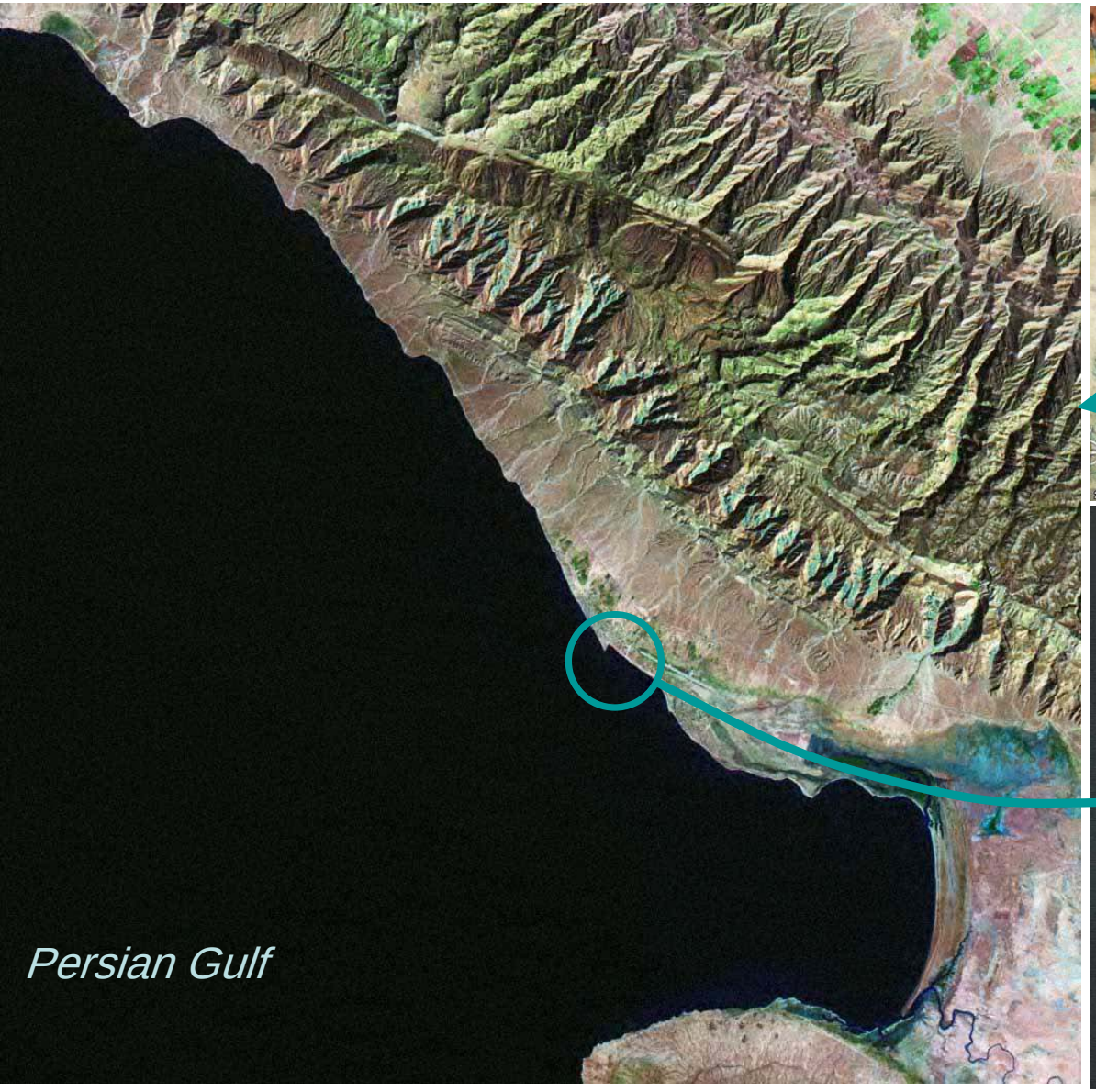
با در نظر گرفتن لزجت آب در دمای ۲۰ درجه ($\nu_P = 1\times10^{-6} \ m^2/s$) و نسبت هندسی $L_r = 1/10$:

$$\nu_m = 1\times10^{-6} \times \left(\frac{1}{10}\right)^{1.5} = 3.16\times10^{-8} \ m^2/s$$

اما سیالی با لزجت فوق وجود ندارد ($\nu_{Hg} = 1.2\times10^{-7} \ m^2/s$) و نمی توان تساوی هر دو عدد را بکار برد و بناچار باید تنها یک عدد بکار رود.

www.Mohandesyar.com

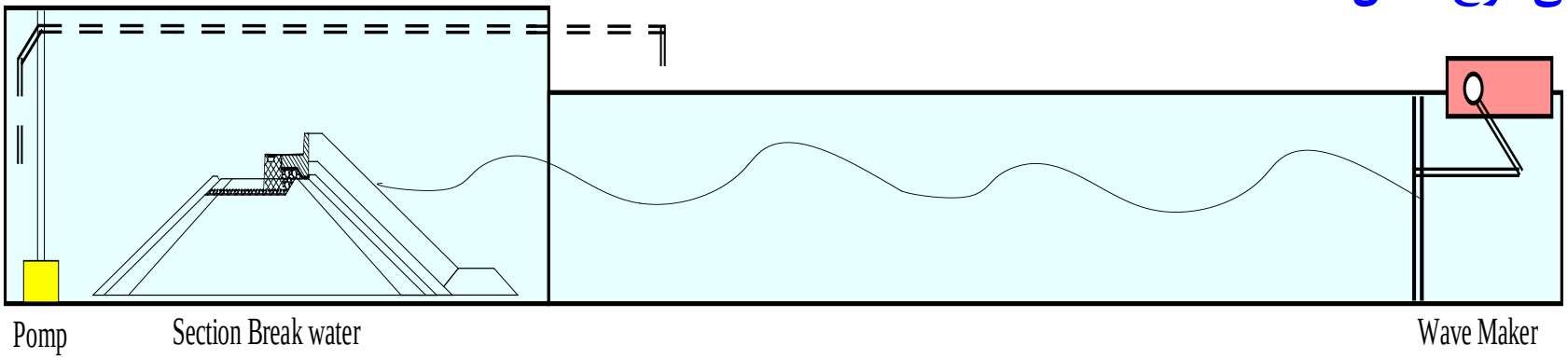
عکس ماهواره ای بندر پتروشیمی پارس



استفاده از بلوکهای آنتی فر در موج شکن بندر پتروشیمی پارس

www.Mohandesyar.com

مدل فیزیکی موج شکن



Longitudinal Section of WRI Flume

Length	42.0 m
Width	1.0 m
Depth	1.0 m

www.Mohandesyar.com