System and Control
Volume (1)

Mohsen Soltanpour
Email: soltanpour@kntu.ac.ir
URL: http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

www.Mohandesyar.com

قوانین اصلی و فرعی: (Basic and subsidiary laws)

در حیطه کارهای مهندسی برای هر محیط پیوسته چهار قانون اساسی (basic law) زیر وجود دارد:

۱- اصل بقای ماده (معادله پیوستگی) Conservation of matter (continuity equation)

۲- قانون دوم نیوتن (معادله اندازه حرکت) Newton's second law (momentum equation)

۳- اصل بقای انرژی (قانون اول ترمودینامیک)

Conservation of energy (1st law of thermodynamics)

۴- قانون دوم ترمودینامیک 2nd law of thermodynamics

علاوه بر قوانین عمومی فوق تعدادی قوانین فرعی نیز وجود دارد که گاهی روابط ساختاری (constitutive equations) نامیده می شود و در مورد انواع ویژه ماده بکار می رود. قانون هوک در جامدات الاستیک، معادله حالت در گازهای کامل و قانون لزجت نیوتن در سیالات لزج نیوتنی نمونه هایی از قوانین فرعی هستند.

سیستم و حجم کنترل: (System and control volume)

دو حالت زیر در استفاده از قوانین اصلی و فرعی بکار می رود:

۱- قوانین فرعی و اصلی برای مقدار معینی جرم برقرار می گردد. این مقدار معین ماده مجموعه یا سیستم (system) نامیده می شود.

سیستم جرم معینی از ماده است که آن جرم را از سایر مواد دیگر که محیط (surroundings) نامیده می شود متمایز می سازد.

سیستم ممکن است تغییر شکل، تغییر مکان یا تغییر دما بدهد ولی همواره حاوی ماده معینی است.

www.Mohandesyar.com

قانون بقای جرم ثابت بودن جرم درون یک سیستم را نسبت به زمان (بدون توجه به اثرات نسبیت) نشان می دهد:

m جرم کلی

$$\frac{dm}{dt}=0$$

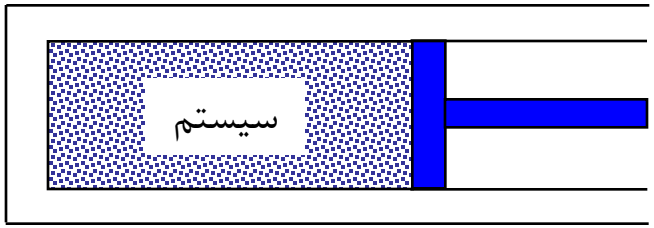
قانون دوم نیوتن نیز برای یک سیستم بصورت زیر بیان می گردد:

جرم ثابت سیستم

$$\sum \vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}\left(\int_m \vec{v}\,dm\right)$$

برآیند تمامی نیروهای خارجی اعمال شده بر سیستم (شامل نیروهای حجمی نظیر وزن)

سرعت مرکز جرم سیستم

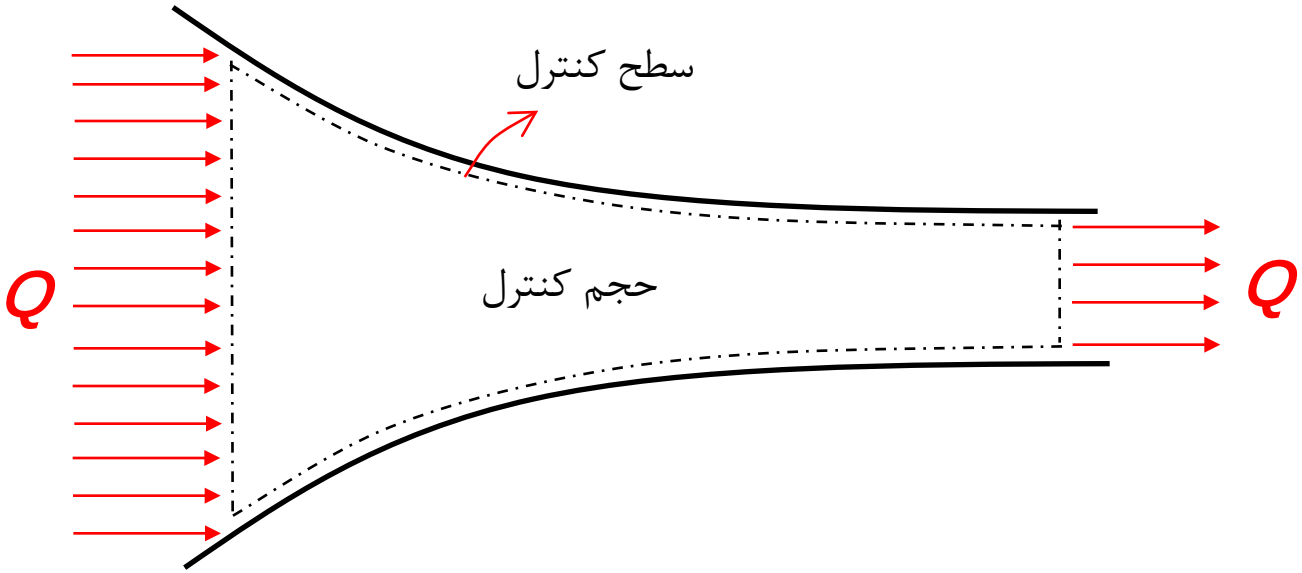


بخار داخل سیلندر یک سیستم است که با حرکت پیستون حجم آن تغییر می کند ولی ماهیت و کمیت جرم داخل آن ثابت است.

www.Mohandesyar.com

در حجم کنترل (control volume) قوانین اصلی و فرعی برای حجم معینی از فضا برقرار می گردد. حجم کنترل، حجم محدودی از فضا می باشد که در تحلیل وضعیتهایی که جریان جرم، اندازه حرکت و انرژی به داخل و خرج یک فضا روی می دهد استفاده می شود. به حجم کنترل سیستم باز (open system) نیز گفته می شود.
مرز حجم کنترل، سطح کنترل (control surface) نامیده می شود.

در مکانیک جامدات، می توان جسم صلب یا بخشهایی از آن را مشخص کرد لذا همواره از روش سیستم (که به آن دیاگرام آزاد – free-body diagram گفته می شود) استفاده می شود. اما در مکانیک سیالات که با تعداد نامحدودی ذره که حرکات نسبی پیچیده ای نسبت به یکدیگر دارند سروکار دارد معمولا استفاده از حجم کنترل ارجح است.



حجم کنترل حجم محدودی از فضا است که اندازه و شکل آن اختیاری است.

www.Mohandesyar.com

معادله انتقال رینولدز: (Reynolds transport equation)

ترمودینامیک دانش مطالعه گرما و انتقال انرژی است. در ترمودینامیک می توان دو دسته خواص زیر را مشخص نمود:

۱- خواص گسترده یا مقداری (Extensive properties):
خواصی از ماده است که اندازه آنها به مقدار ماده موجود بستگی دارد. نظیر وزن، اندازه حرکت، حجم و انرژی.

۲- خواص متمرکز یا شدتی (Intensive properties):
خواصی که اندازه آنها مستقل از مقدار ماده موجود است. نظیر دما و فشارکه مستقل از جرم هستند.

می توان متغیرهای گسترده را در واحد جرم بیان کرده به خواص متمرکز تبدیل نمود. به عنوان نمونه حجم واحد جرم (v)، انرژی بر واحد جرم (e) به مقدار ماده موجود بستگی نداشته کمیات متمرکزی محسوب می شوند. به این کمیتها واژه مخصوص (specific) اطلاق میشود:

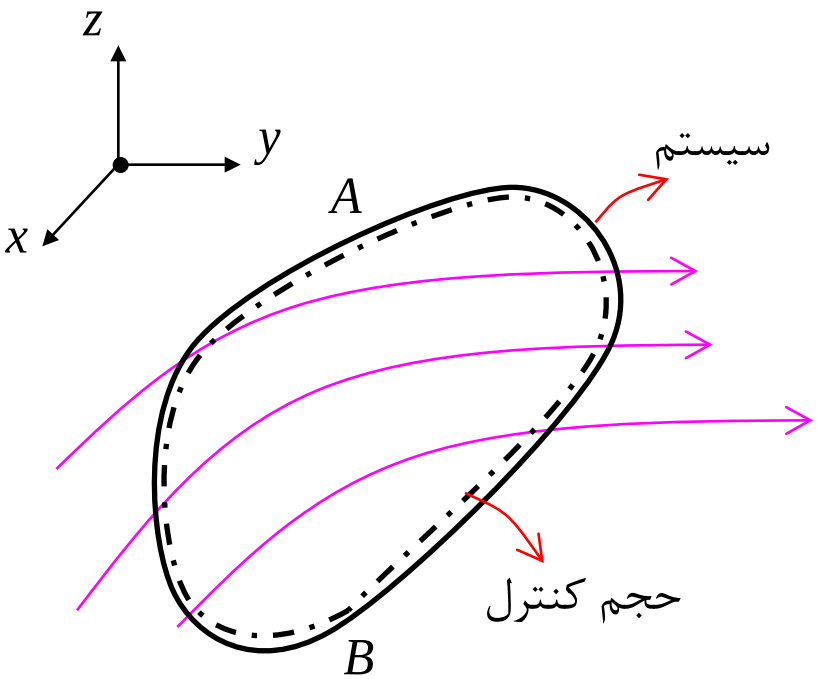
$$e = \frac{dE}{dm} \quad \text{یا} \quad E = \iiint_m e\,dm = \iiint_V e\rho\,dV$$

$$v = \frac{dV}{dm} \quad \text{یا} \quad V = \iiint_m v\,dm = \iiint_V v\rho\,dV$$

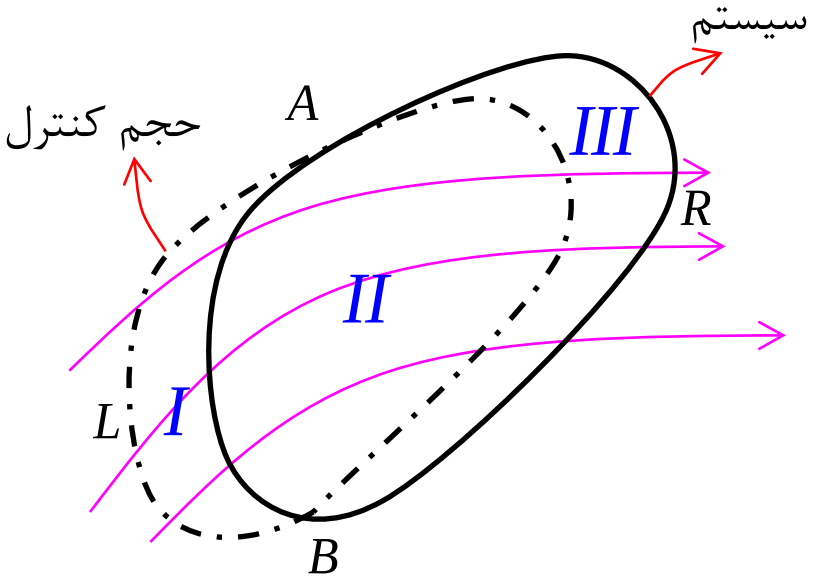
www.Mohandesyar.com

برای مرتبط کردن خاصیتی از سیال در سیستم و خاصیت نظیر آن در حجم کنترل، خاصیت گسترده دلخواه N از سیال را در نظر می گیریم. در اگر توزیع N در واحد جرم را با η نشان دهیم:

$$\eta = \frac{dN}{dm} \quad \text{یا} \quad N = \iiint_V \eta \rho dV$$



سیستم و حجم کنترل در لحظه t



سیستم و حجم کنترل در لحظه $t+\Delta t$

محل حجم کنترل در فضا ثابت است اما سیتم دارای حجم $I+II$ در لحظه t و $II+III$ در لحظه $t+\Delta t$ می باشد.

www.Mohandesyar.com

میزان تغییر N در فاصله زمانی Δt برابر است با:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{system} = \frac{DN}{Dt}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{II} \eta\rho dV + \iiint_{III} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_{I} \eta\rho dV + \iiint_{II} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right]$$

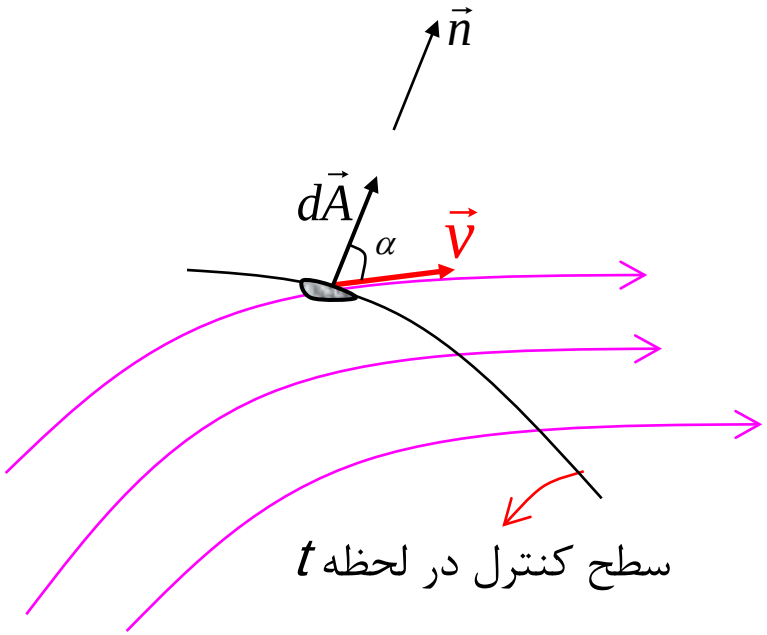
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{II} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_{II} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right] + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{III} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right] - \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{I} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right] \qquad (\mathrm{I})$$

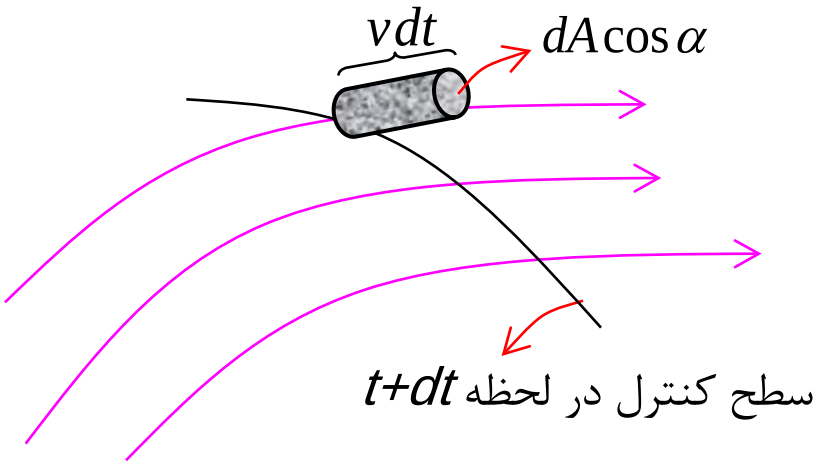
اولین حد مشتق جزئی حجم کنترل می باشد:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{II} \eta\rho dV\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_{II} \eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \eta\rho dV$$

www.Mohandesyar.com

حد دوم مقدار متوسط خروج N از بخش ARB سطح کنترل و حد سوم نرخ ورود N از بخش ALB سطح کنترل را نشان می دهد. بنابراین جملات دوم و سوم مجموعا نرخ خروجی خالص N از حجم کنترل را ارائه می کنند.





حجم سیالی که در زمان dt از dA گذر کرده است:

$$dV = (vdt)dA\cos\alpha$$
$$= \vec{v}.d\vec{A}dt$$

www.Mohandesyar.com

با جایگذاری نرخ خروج N از بخش ARB سطح کنترل برابر است با ($\alpha<\pi/2$):

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{III}\eta\rho dV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}\right]=\iint_{ARB}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}=\iint_{ARB}\eta\rho v\underbrace{\cos\alpha}_{\cos\alpha>0}dA>0$$

و نرخ ورود N از بخش ALB سطح کنترل ($\alpha>\pi/2$):

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\left(\iiint_{I}\eta\rho dV\right)_{t}}{\Delta t}\right]\overset{*}{=}-\iint_{ALB}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}=-\iint_{ALB}\eta\rho v\underbrace{\cos\alpha}_{\cos\alpha<0}dA>0$$

بنابراین نرخ خروجی خالص N:

$$\iint_{ARB}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}-\left(-\iint_{ALB}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}\right)=\iint_{ARB}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}+\iint_{ALB}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}=\oiint_{CS}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}$$

با توجه به این که اثرات غیر دائمی دارای مرتبه دوم اهمیت هستند، معادله فوق که در جریان دائمی بدست آمد در جریان غیر دائمی نیز برقرار است. با جایگذاری در معادله (I) اسلاید ۷:

**

$$\boxed{\frac{DN}{Dt}=\oiint_{CS}\eta\rho\vec{v}.d\vec{A}+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}\eta\rho dV}$$

معادله انتقال رینولدز

که در آن $N(\vec{x},t)$ اسکالر، بردار یا تانسوری از هر مرتبه است

www.Mohandesyar.com

این معادله که امکان ارتباط روش سیستم به حجم کنترل را نشان می دهد، معادله انتقال رینولدز (Reynolds transport equation) نامیده می شود.* این معادله را می توان مستقیما با استفاده از تئوری لایب نیتز (Leibnitz) که مشتق انتگرال حجمی را به انتگرال سطحی تبدیل می کند نیز بدست آورد.

در معادله انتقال رینولدز $\vec{v}$ نسبت به دستگاه XYZ (در واقع نسبت به حجم کنترل که در این دستگاه ثابت است سنجیده می شود). بنابراین نرخ تغییرات زمانی N (و η) نیز که می توانند یک کمیت برداری باشند (مثلا اندازه حرکت) نسبت به حجم کنترل بیان می شوند.

از آنجا که می توان دستگاه مختصات متحرک استفاده کرد، پس حجم کنترل نیز می تواند هرگونه حرکتی داشته باشد. در این حالت کافیست کمیتهای وابسته به زمانی که مشتق آنها محاسبه می شود (نظیر سرعت، اندازه حرکت،..) و سرعتها نسبت به حجم کنترل متحرک بیان شوند.

www.Mohandesyar.com

قوانین اصلی سیستم ها و حجم کنترلهای محدود:

(Basic laws for finite systems and finite control volumes)

در این بخش تعدادی از معادلات اساسی که مبنای اکثر تحلیلهای سیالات را تشکیل می دهد بررسی می شوند.

قانون بقای جرم-معادله پیوستگی: (Conservation of mass-Continuity equation)

در یک سیستم بدلیل ثابت بودن جرم اصل بقای جرم مستقیما بر قرار است. در حجم کنترل با استفاده از معادله انتقال رینولدز داریم:

$$N = m \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{dN}{dm} = \frac{dm}{dm} = 1$$

$$\frac{Dm}{Dt} = \oiint_{CS} \rho \vec{v}.d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho dV$$

اما جرم سیستم (طرف چپ معادله ثابت است)، بنابراین:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\oiint_{CS} \rho \vec{v}.d\vec{A} + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho dV = 0}$$

و یا

$$\boxed{\oiint_{CS} \rho \vec{v}.d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho dV}$$

www.Mohandesyar.com

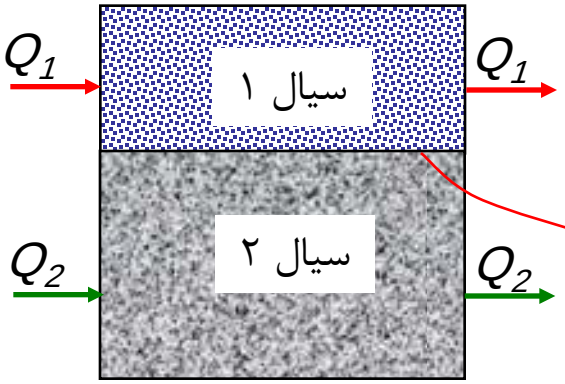
این رابطه در هر لحظه t برای هر حجم کنترل معتبر است. در صورت متحرک بودن حجم کنترل $\vec{v}$ و مشتق زمانی $\frac{\partial}{\partial t}$ باید نسبت به حجم کنترل متحرک محاسبه شوند.

اگر جریان نسبت به دستگاه مختصاتی که به حجم کنترل متصل شده است دائمی باشد، با توجه با ثابت بودن تمام خواص سیال نسبت به زمان و نیز شکل حجم کنترل برای یک یا چند نوع سیال داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV}\rho dV=\iiint_{CV}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV=0 \Longrightarrow \boxed{\oiint_{CS}\rho\vec{v}.d\vec{A}=0}$$

جرم کل داخل حجم کنترل که ثابت است

در صورت وجود تنها یک نوع سیال می توان ρ را از رابطه فوق حذف کرد.



موقعیت مرز مشترک دو سیال در جریان دائمی ثابت است.

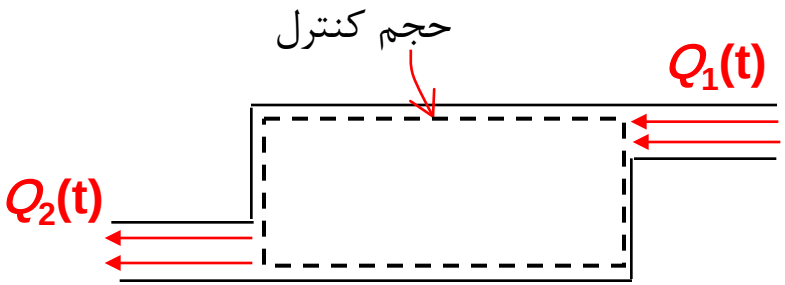
اگر در داخل حجم کنترل، جریان غیر قابل تراکمی از فقط یک نوع سیال وجود داشته باشد، جرم مخصوص سیال حتی در میدان سرعت غیر دائمی همواره و در تمام نقاط حجم کنترل ثابت است. بنابراین:

حجم کنترل (ثابت است)

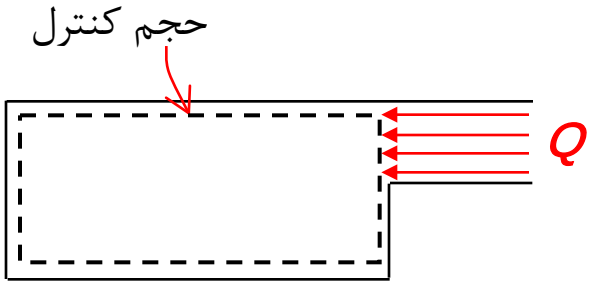
$$\oiint_{CS} \rho \vec{v}.d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \rho dV = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \iiint_{CV} dV\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) = -\rho \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

$$\Longrightarrow \oiint_{CS} \rho \vec{v}.d\vec{A} = 0 \quad \text{و یا} \quad \boxed{\oiint_{CS} \vec{v}.d\vec{A} = 0}$$

بنابراین در هر جریان تراکم ناپذیر از یک نوع سیال، اصل بقای جرم به اصل بقای حجم (conservation of mass) تبدیل می گردد. واضح است که این مطلب در جریان تراکم پذیر غیر دائمی صحیح نیست زیرا جمله مربوط به نرخ تغییر جرم داخل حجم کنترل حذف نمی شود. مثلا ورود هوا به یک محفظه که به افزایش جرم داخل آن منجر می شود:



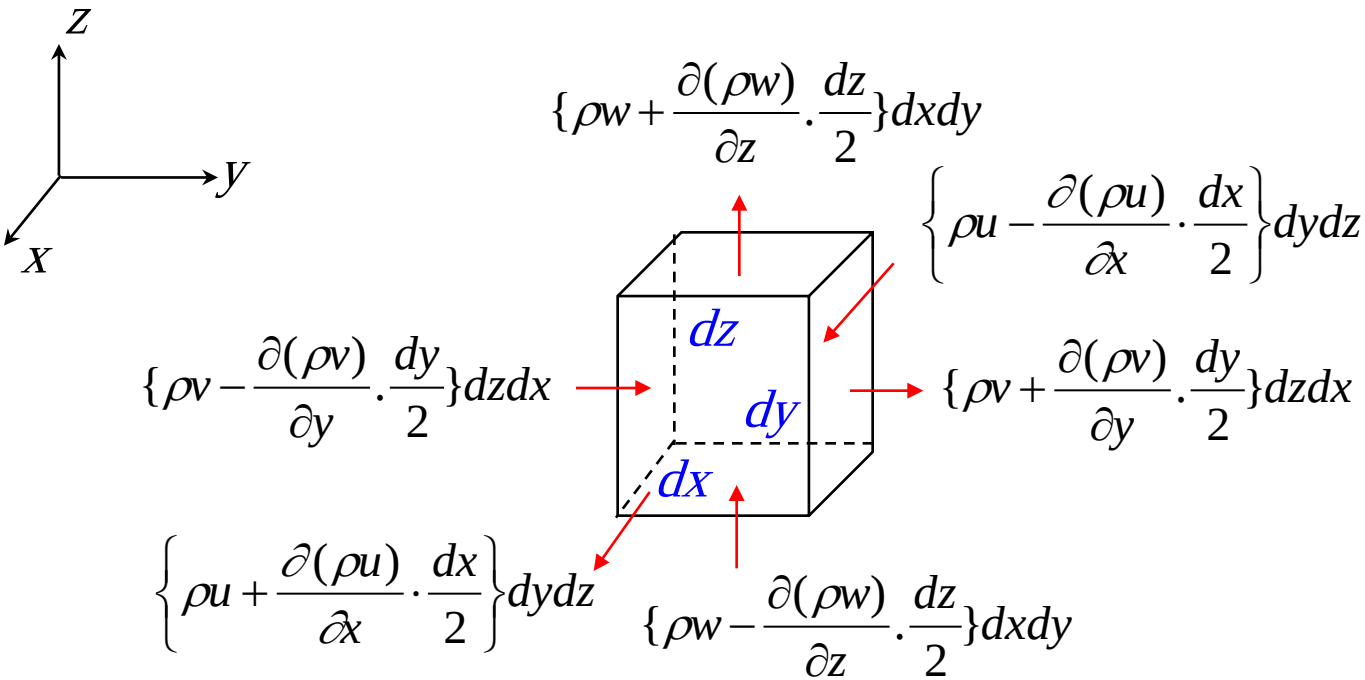
$Q_1(t)=Q_2(t)$ جریان غیر قابل تراکم



جریان قابل تراکم

www.Mohandesyar.com

فرم دیفرانسیلی قانون بقای جرم: (Differential form of mass conservation)



با فرض بردار سرعت $\vec{v}=(u,v,w)$ در مرکز المان:

دبی جرمی ورودی – دبی جرمی خروجی = نرخ کاهش جرم داخل جزء حجم

$$-\frac{\partial(\rho dxdydz)}{\partial t}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dydxdz+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dzdxdy$$

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dxdydz+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dydxdz+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dzdxdy$$

www.Mohandesyar.com

$$\boxed{-\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}$$

قانون بقای جرم

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

در جریان دائمی

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

معادله پیوستگی

در جریان تراکم ناپذیر (دائمی و غیر دائمی)

معادلات مشابهی را در سیستم مختصات استوانه ای و کروی می توان بدست آورد. برای رهایی از سیستم مختصات می توان از عملگر دیورجانس استفاده کرد:

$$\boxed{div(\rho\vec{v})=\vec{\nabla}.(\rho\vec{v})=-\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

قانون بقای جرم

و در جریان تراکم ناپذیر (معادله پیوستگی):

$$div(\vec{v})=\vec{\nabla}.\vec{v}=0$$

www.Mohandesyar.com

قانون اندازه حرکت خطی: (Linear momentum)

در تحلیل سیستم می توان مستقیما قانون دوم نیوتن را بکار برد::

$$\vec{F}_R = \frac{d}{dt}_{system} \left(\iiint_m \vec{v} dm\right) = \frac{d\vec{P}}{dt}_{system}$$

یا

$$\vec{F}_R = \frac{D}{Dt}_{system} \left(\iiint_m \vec{v} dm\right) = \frac{D\vec{P}}{Dt}_{system} \qquad \text{(I)}$$

که در آن $\vec{P}$ اندازه حرکت خطی و $\vec{F}_R$ برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر سیستم بوده و $\vec{v}$ و مشتق زمانی نسبت به یک دستگاه مختصات اینرسیال (inertial refrence) بیان می شوند. با توجه به اینکه نیروهای وارده به سیستم از دو بخش نیروی سطحی (surface force) $\vec{T}(x,y,z,t)$ و نیروی حجمی (body force) $\vec{B}(x,y,z,t)$ تشکیل می شوند:

$$\vec{F}_R = \oiint_S \vec{T} dA + \iiint_V \vec{B} \rho dV$$

سطح سیستم — حجم سیستم

و (I) $\Longrightarrow$

$$\oiint_S \vec{T} dA + \iiint_V \vec{B} \rho dV = \frac{D\vec{P}}{Dt} \qquad \text{(II)}$$

قانون نیوتن در یک سیستم محدود

www.Mohandesyar.com

در تحلیل حجم کنترل ثابت در فضای اینرسیال (control volume fixed in inertial space)، اندازه حرکت $\vec{P}$ بعنوان خاصیت گسترده در معادله انتقال رینولدز در نظر گرفته می شود:

$$N = \vec{P} \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{d\vec{P}}{dm} = \frac{\vec{v}dm}{dm} = \vec{v}$$

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \oiint_{CS} \vec{v}(\rho\vec{v}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \vec{v}(\rho dV)$$

اگر حجم کنترل در فضای اینرسیال ثابت در نظر گرفته شود، $\frac{D\vec{P}}{Dt}$ نیز نسبت به دستگاه اینرسیال بوده و با استفاده از معادله (II) اسلاید قبل:*

$$\boxed{\oiint_{CS} \vec{T}dA + \iiint_{CV} \vec{B}\rho dV = \underbrace{\oiint_{CS} \vec{v}(\rho\vec{v}.d\vec{A})}_{\text{شار اندازه حرکت (اندازه حرکت در واحد زمان) ورودی و خروجی از حجم کنترل}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} \vec{v}(\rho dV)}_{\text{تغییر اندازه حرکت در داخل حجم کنترل}}}$$

این رابطه بدین معنی است که برآیند نیروهای سطحی و حجمی اعمال شده بر یک حجم کنترل برابر با مجموع نرخ زمانی افزایش اندازه حرکت خطی درون حجم کنترل و خالص شار اندازه حرکت خروجی از سطح کنترل می باشد.

www.Mohandesyar.com

با در نظر گرفتن مولفه های کمیتهای برداری اندازه حرکت، سرعت، نیروی سطحی و نیروی حجمی در سه راستای متعامد X، Y و Z:

$$\begin{cases} \oiint_{CS} T_x dA + \iiint_{CV} B_x \rho dV = \oiint_{CS} v_x (\rho \vec{v}.d\vec{A}) + \dfrac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} v_x (\rho dV) \\ \oiint_{CS} T_y dA + \iiint_{CV} B_y \rho dV = \oiint_{CS} v_y (\rho \vec{v}.d\vec{A}) + \dfrac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} v_y (\rho dV) \\ \oiint_{CS} T_z dA + \iiint_{CV} B_z \rho dV = \oiint_{CS} v_z (\rho \vec{v}.d\vec{A}) + \dfrac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} v_z (\rho dV) \end{cases}$$

www.Mohandesyar.com

فرم دیفرانسیلی قانون نیوتن، معادله اولر: (Euler's equation)

در المانی به جرم dm، اندازه حرکت با کمیت برداری $dm\vec{v}$ تعریف می شود. قانون نیوتن در یک سیستم مختصات اینرسیال:

$$d\vec{F} = \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$= dm\frac{D\vec{v}}{Dt} = dm\vec{a}$$

$$= dm(v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t})$$

اگر تنش برشی وجود نداشته و تنها نیروی حجمی نیروی ثقل باشد:

$$d\vec{F} = d\vec{f}dV = (-\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k})dV$$

و یا $$(-\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k})dV = dm(v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t})$$

و $dm = \rho dV$ $\Longrightarrow$ $$(-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} - g\vec{k}) = v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

www.Mohandesyar.com

و یا:

معادله اولر

(Euler's equation)

$$\boxed{(-\frac{\nabla\vec{P}}{\rho}-g\vec{\nabla}z)=v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\frac{D\vec{v}}{Dt}}$$

که در آن:

$$\vec{a}=\frac{D\vec{v}}{Dt}=\frac{Dv_x}{Dt}\vec{i}+\frac{Dv_y}{Dt}\vec{j}+\frac{Dv_z}{Dt}\vec{k}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

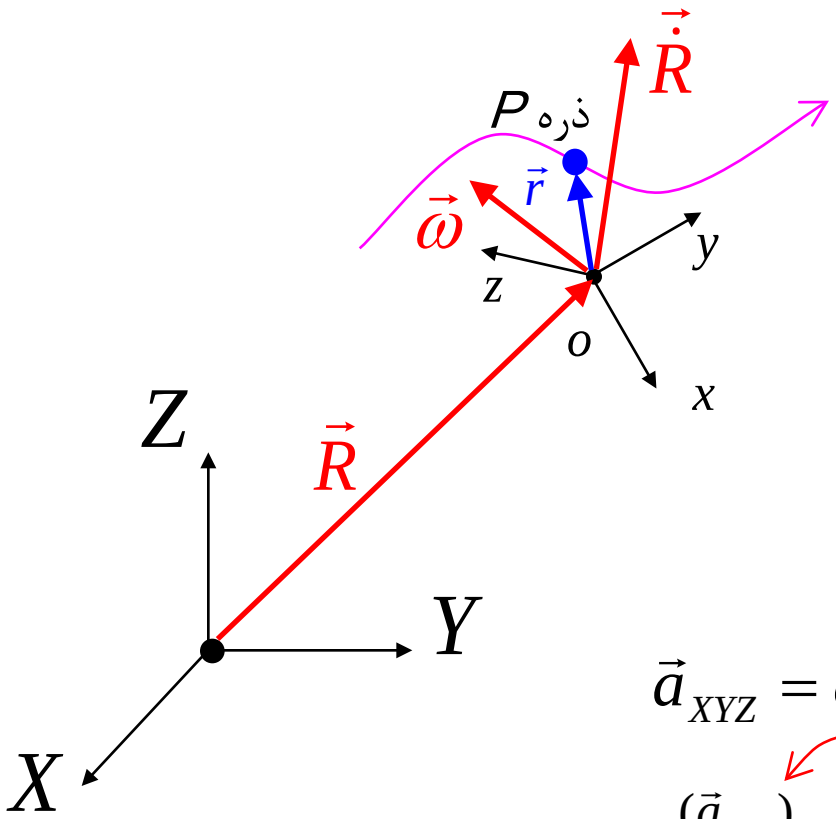
با توجه به $v_x\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+v_y\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}+v_z\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}=(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$ می توان معادله اولر را به فرم زیر نیز نمایش داد:

$$\boxed{(-\frac{\nabla\vec{P}}{\rho}-g\vec{\nabla}z)=(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}$$

www.Mohandesyar.com

حجم کنترل غیر اینرسیال: (Non-inertial control volume)

معادله اصلی اندازه حرکت خطی که از قانون نیوتن بدست می آید در حالتی صحیح است که شتاب نسبت به یک دستگاه مرجع اینرسیال سنجیده شود.* با توجه به اینکه حرکت سیال نسبت به حجم کنترل سنجیده می شود، معادله اندازه حرکت خطی صرفا برای حجم کنترلهایی معتبر است که نسبت به یک دستگاه اینرسیال ثابت بوده و یا با سرعت ثابت حرکت کنند.



دستگاه اینرسیال XYZ و دستگاه xyz را که نسبت به آن حرکت اختیاری دارد در نظر می گیریم:

$$\vec{a}_{XYZ} = \underbrace{\vec{a}_{xyz}}_{(\vec{a}_{P/o})_{xyz}} + \underbrace{\ddot{\vec{R}}}_{\vec{a}_o} + \overbrace{2\times\vec{\omega}\times\underbrace{\vec{v}_{xyz}}_{(\vec{v}_{P/o})_{xyz}}}^{\text{شتاب } Coriolis\ ^{**}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$\dot{\vec{\omega}}, \vec{\omega}$: به ترتیب سرعت زاویه ای و شتاب زاویه ای سیستم دوار xyz در سیستم مختصات ثابت XYZ

www.Mohandesyar.com

قانون نیوتن برای ذره ای بسیار کوچک بر حسب حرکت نسبی آن در دستگاه xyz :

$$d\vec{F} = dm\vec{a}_{XYZ}$$
$$= dm[\vec{a}_{xyz} + \ddot{\vec{R}} + 2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]$$

$$\Longrightarrow \quad d\vec{F} - dm[\ddot{\vec{R}} + 2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})] = dm\vec{a}_{xyz}$$
$$= \frac{D}{Dt_{xyz}}(dm\vec{v}_{xyz})$$

$\frac{D}{Dt_{xyz}}$ معرف مشتق زمانی است که از دیدگاه دستگاه xyz انجام می شود. این معادله قانون نیوتن را در حالتی که جملات سمت چپ به شکل نیروهایی فرضی در نظر گرفته شده اند نشان می دهد. با انتگرالگیری بر روی تمام المانهای داخل سیستم، برای سیستم محدود:

$$\oiint_S \vec{T}dA + \iiint_V \vec{B}\rho dV - \iiint_V [\ddot{\vec{R}} + 2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\rho dV$$
$$= \frac{D}{Dt}_{xyz}\left(\iiint_V \vec{v}_{xyz}\rho dV\right) = \frac{D}{Dt}_{xyz}(\vec{P}_{xyz}) \qquad \text{(I)}$$

www.Mohandesyar.com

با استفاده از معادله انتقال رینولدز:

$$N = \vec{P}_{xyz} \Longrightarrow \eta = \frac{d\vec{P}_{xyz}}{dm} = \frac{\vec{v}_{xyz} dm}{dm} = \vec{v}_{xyz}$$

$$\frac{D\vec{P}_{xyz}}{Dt_{xyz}} = \oiint_{CS} \vec{v}_{xyz} (\rho \vec{v}_{xyz} . d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz} \iiint_{CV} \vec{v}_{xyz} (\rho dV) \qquad \text{(II)}$$

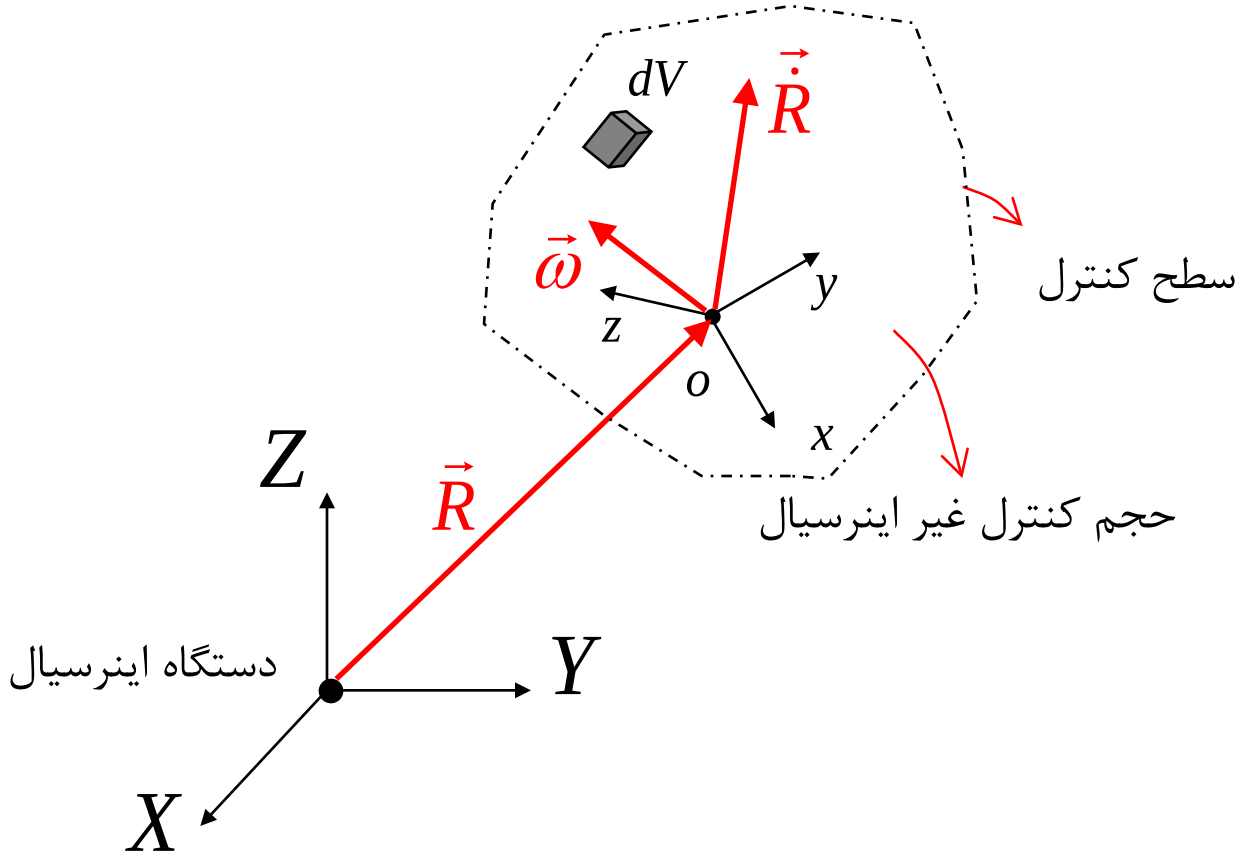
با ترکیب دو معادله (I) و (II):

$$\boxed{\begin{aligned} &\oiint_{CS} \vec{T} dA + \iiint_{CV} \vec{B} \rho dV - \iiint_{CV} [\ddot{\vec{R}} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})] \rho dV \\ &= \oiint_{CS} \vec{v}_{xyz} (\rho \vec{v}_{xyz} . d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz} \iiint_{CV} \vec{v}_{xyz} (\rho dV) \end{aligned}}$$

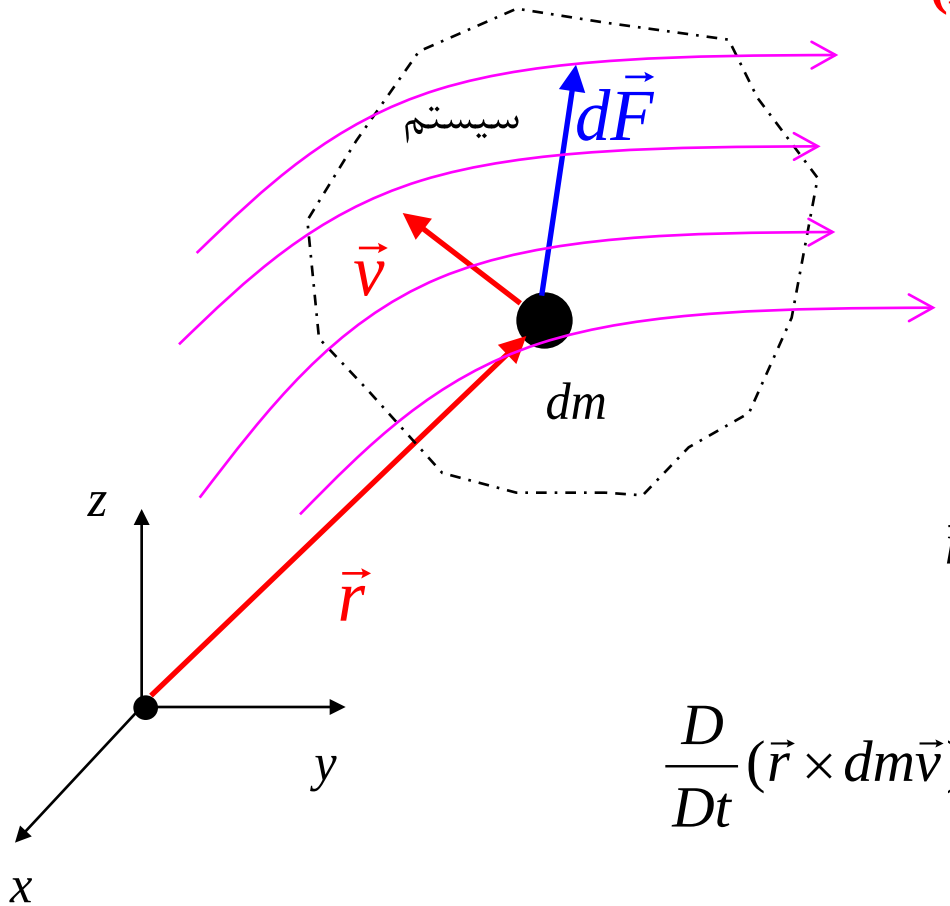
از آنجایی که حجم کنترل در دستگاه xyz ثابت است، معمولا مناسبتر است که از حجم کنترل بعنوان محل سنجش سرعتها و مشتقات زمانی استفاده شود.

http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

بنابر این قانون اندازه حرکت به این معنی است که کل نیروهای سطحی و حجمی وارده به سیال داخل سطح کنترل منهای کل توزیع نیروهای حجمی فرضی که ناشی از غیر اینرسیال بودن حجم کنترل اند برابر است با مجموع گذر اندازه حرکت از سطح کنترل و نرخ تغییر اندازه حرکت داخل حجم کنترل از دید ناظری واقع بر حجم کنترل.



لنگر اندازه حرکت: (Moment of momentum)



سیستم محدودی از سیال را مطابق شکل در نظر می گیریم. بر مبنای قانون نیوتن:

$$d\vec{F} = \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

با ضرب خارجی طرفین رابطه در بردار مکان $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times d\vec{F} = \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

اما

$$\frac{D}{Dt}(\vec{r} \times dm\vec{v}) = \frac{D\vec{r}}{Dt} \times dm\vec{v} + \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$= \cancelto{0}{\vec{v} \times dm\vec{v}} + \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$= \vec{r} \times \frac{D}{Dt}(dm\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r} \times d\vec{F} = \frac{D}{Dt}(\vec{r} \times dm\vec{v})$$

www.Mohandesyar.com

یعنی لنگر کل نیروهای وارد بر المان dm نسبت به مبدا مختصات اینرسیال با میزان تغییر زمانی لنگر اندازه حرکت که از دستگاه مختصات اینرسیال سنجیده می شود برابر است*. با انتگرال گیری روی سیستم:

$$\int \vec{r} \times d\vec{F} = \iiint_M \frac{D}{Dt}(\vec{r} \times \vec{v})dm$$

$$= \frac{D}{Dt}\iiint_M (\vec{r} \times \vec{v})dm$$ با توجه به ثابت بودن جرم سیستم (حدود انتگرال گیری)

$$= \frac{D\vec{H}}{Dt}$$

که در آن $\vec{H}$ (اندازه حرکت زاویه ای – angular momentum) لنگر اندازه حرکت سیستم در فضای اینر یال را نشان می دهد. لنگر سمت چپ معرف کل لنگر نیروهای خارجی وارده به سیستم نسبت به یک نقطه ثابت است که میتواند بر حسب نیروهای سطحی و حجمی نوشته شود:

$$\int \vec{r} \times d\vec{F} = \oiint_S \vec{r} \times \vec{T}dA + \iiint_V \vec{r} \times \vec{B}\rho dV$$

$$\Longrightarrow \boxed{\oiint_S \vec{r} \times \vec{T}dA + \iiint_V \vec{r} \times \vec{B}\rho dV = \frac{D\vec{H}}{Dt}}$$

که معادله اندازه حرکت برای یک سیستم را نشان می دهد.

www.Mohandesyar.com

روش حجم کنترل برای لنگر اندازه حرکت
(Control volume approach for the moment of momentum equation)

حجم کنترل اینرسیال: (Inertial control volume)

اندازه حرکت زاویه ای $\vec{H}$ بعنوان خاصیت گسترده در معادله انتقال رینولدز در نظر گرفته می شود:

$$N = \vec{H} \quad \Longrightarrow \quad \eta = \frac{d\vec{H}}{dm} = \frac{(\vec{r}\times\vec{v})dm}{dm} = \vec{r}\times\vec{v}$$

$$\frac{D\vec{H}}{Dt} = \oiint_{CS} (\vec{r}\times\vec{v})(\rho\vec{v}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} (\vec{r}\times\vec{v})(\rho dV)$$

با توجه به انطباق حجم کنترل و سیستم در لحظه t:

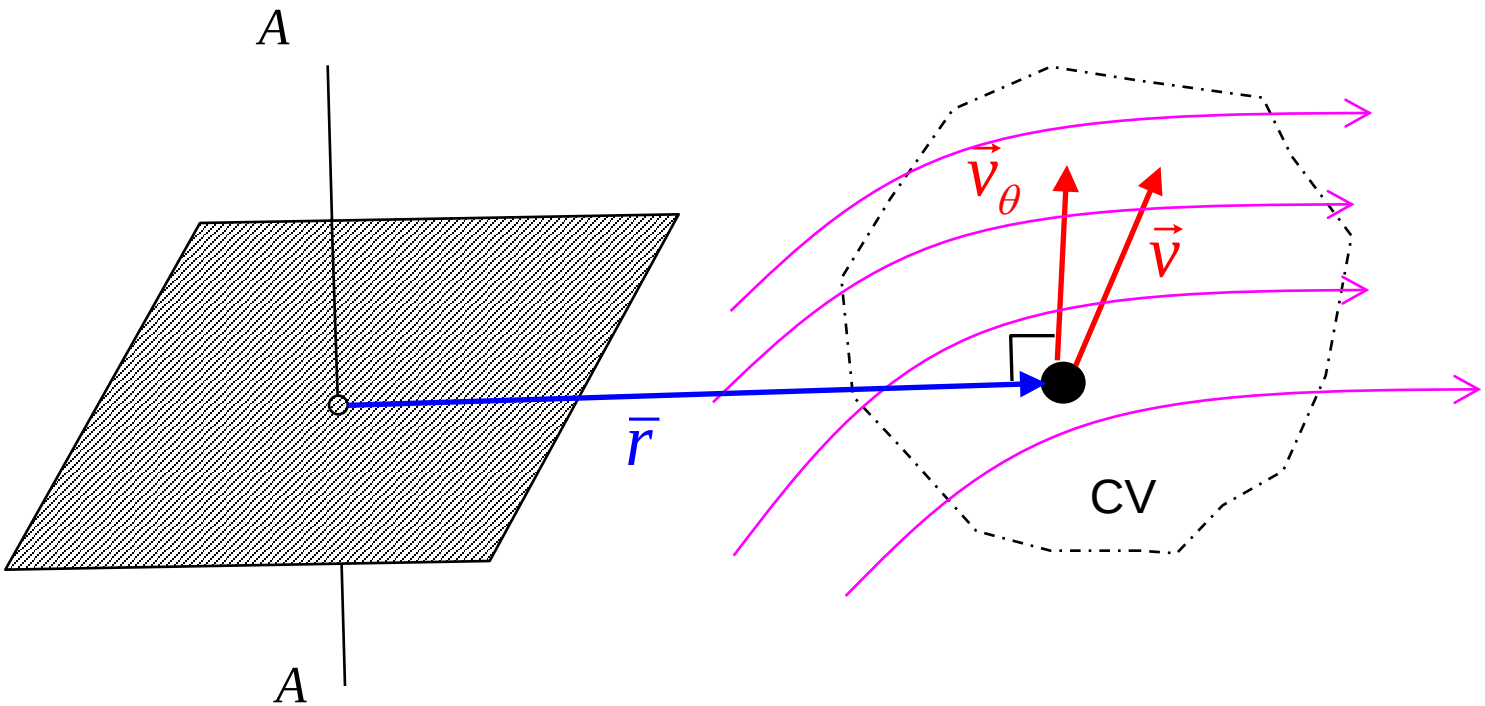
$$\boxed{\oiint_{CS} \vec{r}\times\vec{T}dA + \iiint_{CV} \vec{r}\times\vec{B}\rho dV = \underbrace{\oiint_{CS} (\vec{r}\times\vec{v})(\rho\vec{v}.d\vec{A})}_{\text{شار لنگر اندازه حرکت (اندازه حرکت در واحد زمان) ورودی و خروجی از حجم کنترل}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} (\vec{r}\times\vec{v})(\rho dV)}_{\text{تغییر لنگر اندازه حرکت در داخل حجم کنترل}}}$$

www.Mohandesyar.com

در بسیاری از مسائل عملی با نوشتن لنگر نیروها و اندازه حرکت نسبت به یک محور فقط یک مولفه اسکالر بکار می رود:

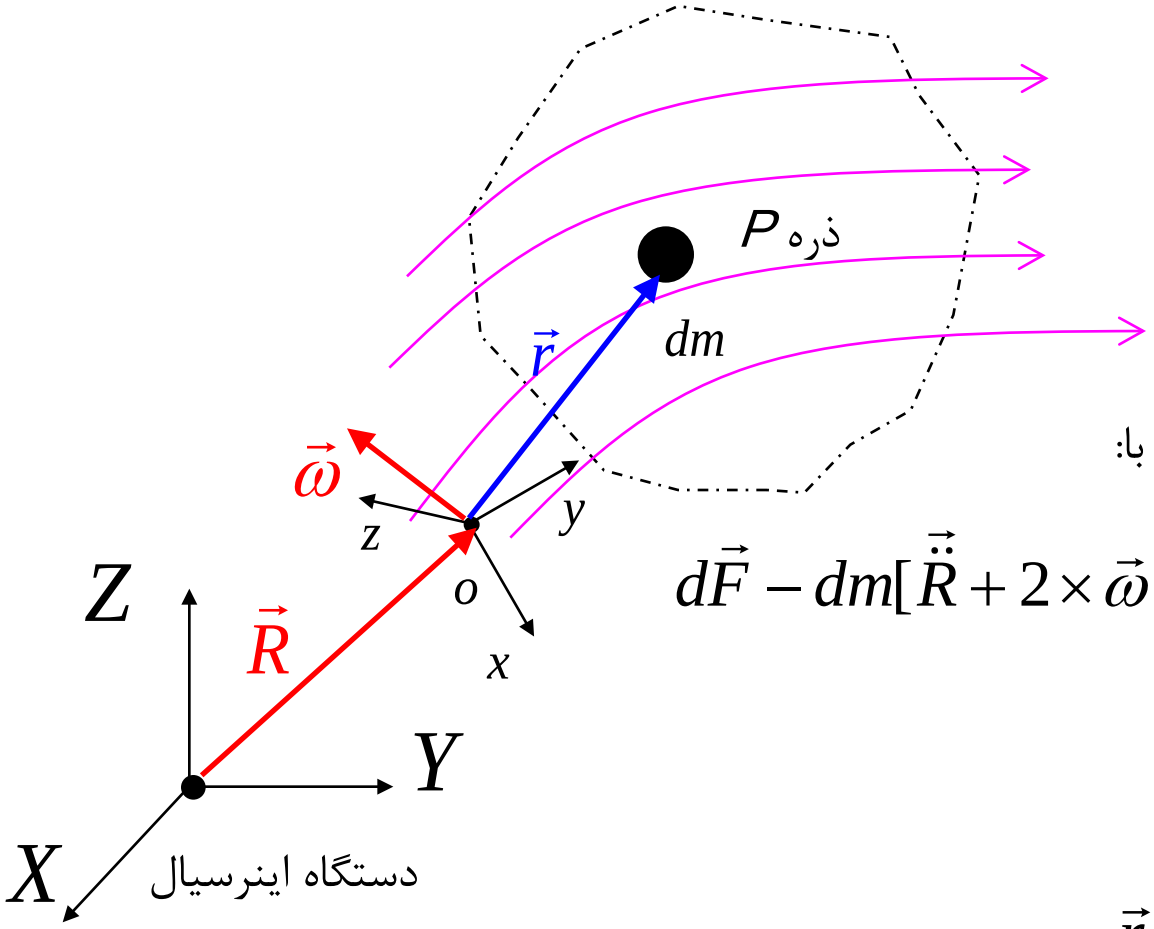
$$\oiint_{CS} \bar{r}T_\theta dA + \iiint_{CV} \bar{r}B_\theta \rho dV = \oiint_{CS} (\bar{r}v_\theta)(\rho\vec{v}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} (\bar{r}v_\theta)(\rho dV)$$

که در آن $\bar{r}$ فاصله شعاعی هر ذره تا محور $A-A$ بوده و v_θ سرعت ذره در راستای عمود بر شعاع است.



www.Mohandesyar.com

حجم کنترل غیر اینرسیال: (Non-inertial control volume)



قانون نیوتن برای جزء جرم dm برابر است با:

$$d\vec{F} - dm[\ddot{\vec{R}} + 2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})] = \frac{D}{Dt_{xyz}}(dm\vec{v}_{xyz})$$

با ضرب خارجی طرفین رابطه در بردار مکان $\vec{r}$:

$$\vec{r}\times d\vec{F} - dm\left\{\vec{r}\times[\ddot{\vec{R}} + 2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\right\} = \vec{r}\times\frac{D}{Dt_{xyz}}(dm\vec{v}_{xyz})$$

اما $\vec{r}\times\frac{D}{Dt}_{xyz}(dm\vec{v}_{xyz})=\frac{D}{Dt}_{xyz}(\vec{r}\times dm\vec{v}_{xyz})$ بنابراین:

$$\vec{r}\times d\vec{F}-dm\left\{\vec{r}\times[\ddot{\vec{R}}+2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\right\}=\frac{D}{Dt_{xyz}}(\vec{r}\times\vec{v}_{xyz})dm$$

با انتگرال گیری بر روی سیستم:

لنگر نیروهای حجمی نسبت به مرکز سیستم اینرسیال

لنگر کل اندازه حرکت سیستم نسبت به مرکز سیستم غیر اینرسیال

$$\vec{M}_S+\vec{M}_B-\iiint_V\left[\vec{r}\times[\ddot{\vec{R}}+2\times\vec{\omega}\times\vec{v}_{xyz}+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})]\right]\rho dV=\frac{D\vec{H}_{xyz}}{Dt_{xyz}}$$

لنگر نیروهای سطحی نسبت به مرکز سیستم اینرسیال

و با در نظر گرفتن خاصیت گسترده $\vec{H}_{xyz}$ در معادله انتقال رینولدز:

$$N=\vec{H}_{xyz}\Longrightarrow\eta=\frac{d\vec{H}_{xyz}}{dm}=\frac{(\vec{r}\times\vec{v}_{xyz})dm}{dm}=\vec{r}\times\vec{v}_{xyz}$$

$$\frac{D\vec{H}_{xyz}}{Dt}=\oiint_{CS}(\vec{r}\times\vec{v}_{xyz})(\rho\vec{v}_{xyz}.d\vec{A})+\frac{\partial}{\partial t}_{xyz}\iiint_{CV}(\vec{r}\times\vec{v}_{xyz})(\rho dV)$$

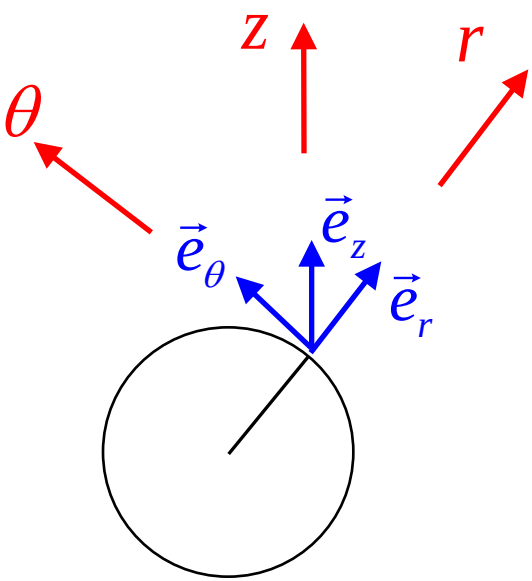
www.Mohandesyar.com

و با توجه به انطباق حجم کنترل و سیستم در لحظه t:

$$\vec{M}_S + \vec{M}_B - \iiint_{CV} \left[\vec{r} \times [\ddot{\vec{R}} + 2 \times \vec{\omega} \times \vec{v}_{xyz} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})]\right] \rho dV$$
$$= \oiint_{CS} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz})(\rho \vec{v}_{xyz}.d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}_{xyz} \iiint_{CV} (\vec{r} \times \vec{v}_{xyz})(\rho dV)$$

در این معادله بجز $\vec{\omega}$، $\dot{\vec{\omega}}$ و $\ddot{\vec{R}}$ سایر کمیتها و مشتق های زمانی نسبت به حجم کنترل متحرک سنجیده می شوند.
در حالتی که $\vec{\omega}$ و $\dot{\vec{\omega}}$ دارای امتداد ثابتی در فضای اینرسیال هستند، می توان رابطه را با استفاده از مختصات استوانه ای ساده کرد:

$$\begin{cases} \vec{r} = \bar{r}\vec{e}_{\bar{r}} + z\vec{e}_z \\ \vec{v}_{xyz} = (v_{\bar{r}})_{xyz}\vec{e}_{\bar{r}} + (v_\theta)_{xyz}\vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz}\vec{e}_z \\ \vec{\omega} = \omega\vec{e}_z \\ \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{e}_z \end{cases}$$



www.Mohandesyar.com

$$-\iiint_{CV}(\vec{r}\times\ddot{\vec{R}})\rho dV=\iiint_{CV}(\ddot{\vec{R}}\times\vec{r})\rho dV=\ddot{\vec{R}}\times\underbrace{\iiint_{M}\vec{r}dm}_{\text{ممان اول جرم حول نقطه } o}=\ddot{\vec{R}}\times M\vec{r}_c=\ddot{\vec{R}}\times\vec{M}_r$$

که در آن $\vec{r}_c$ بردار نظیر مرکز جرم است. در صورت تقارن محوری $\vec{r}_c=0$ است یعنی توزیع جرم در حجم کنترل نسبت به مرکز سیستم متحرک(نقطه o اسلاید ۲۸) صفر است:

$$\vec{r}_c=\bar{r}_c\vec{e}_{\bar{r}}+z_c\vec{e}_z \qquad \begin{cases}\bar{r}_c=\dfrac{\int rdm}{M}\\[2ex] z_c=\dfrac{\int zdm}{M}\end{cases}$$

با جایگزین کردن معادلات فوق در معادله اصلی حجم کنترل غیر اینرسیال (اسلاید قبل):

www.Mohandesyar.com

$$\vec{M}_S + \vec{M}_B + \ddot{\vec{R}} \times M\vec{r}_c - \iiint_{CV} (\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}} + z\vec{e}_z) \times \{(2\omega\vec{e}_z) \times$$

$$[(v_{\bar{r}})_{xyz}\vec{e}_{\bar{r}} + (v_\theta)_{xyz}\vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz}\vec{e}_z] + \dot{\omega}\vec{e}_z \times (\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}} + z\vec{e}_z) +$$

$$\omega\vec{e}_z \times [\omega\vec{e}_z \times (\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}} + z\vec{e}_z)]\}\rho dV =$$

$$\oiint_{CS} (\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}} + z\vec{e}_z) \times [(v_{\bar{r}})_{xyz}\vec{e}_{\bar{r}} + (v_\theta)_{xyz}\vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz}\vec{e}_z]\rho\vec{v}.\overrightarrow{dA}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{CV} [(\bar{r}\vec{e}_{\bar{r}} + z\vec{e}_z) \times [(v_{\bar{r}})_{xyz}\vec{e}_{\bar{r}} + (v_\theta)_{xyz}\vec{e}_\theta + (v_z)_{xyz}\vec{e}_z]\rho dV$$

با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} \vec{e}_{\bar{r}} \times \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_{\bar{r}} = \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\theta \times \vec{e}_z = \vec{e}_{\bar{r}} \end{cases}$$

www.Mohandesyar.com

$$\vec{M}_S + \vec{M}_B + \ddot{\vec{R}} \times M\vec{r}_c - \iiint_{CV} [(2\omega z v_{\bar{r}} + \dot{\omega}\bar{r}z)\vec{e}_{\bar{r}} +$$

$$(2\omega z v_\theta + \omega^2 \bar{r} z)\vec{e}_\theta + (2\omega \bar{r} v_{\bar{r}} + \dot{\omega}\bar{r}^2)\vec{e}_z]\rho dV =$$

$$\oiint_{CS} (z v_\theta \vec{e}_{\bar{r}} + (z v_{\bar{r}} - \bar{r} v_z)\vec{e}_\theta + r v_\theta \vec{e}_z](\rho \vec{v}.\overrightarrow{dA})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{CV} [(-z v_\theta)\vec{e}_{\bar{r}} + (z v_{\bar{r}} - \bar{r} v_z)\vec{e}_\theta + r v_\theta \vec{e}_z]\rho dV$$

این معادله را می توان در سه راستای r, z, θ تفکیک نمود.

www.Mohandesyar.com