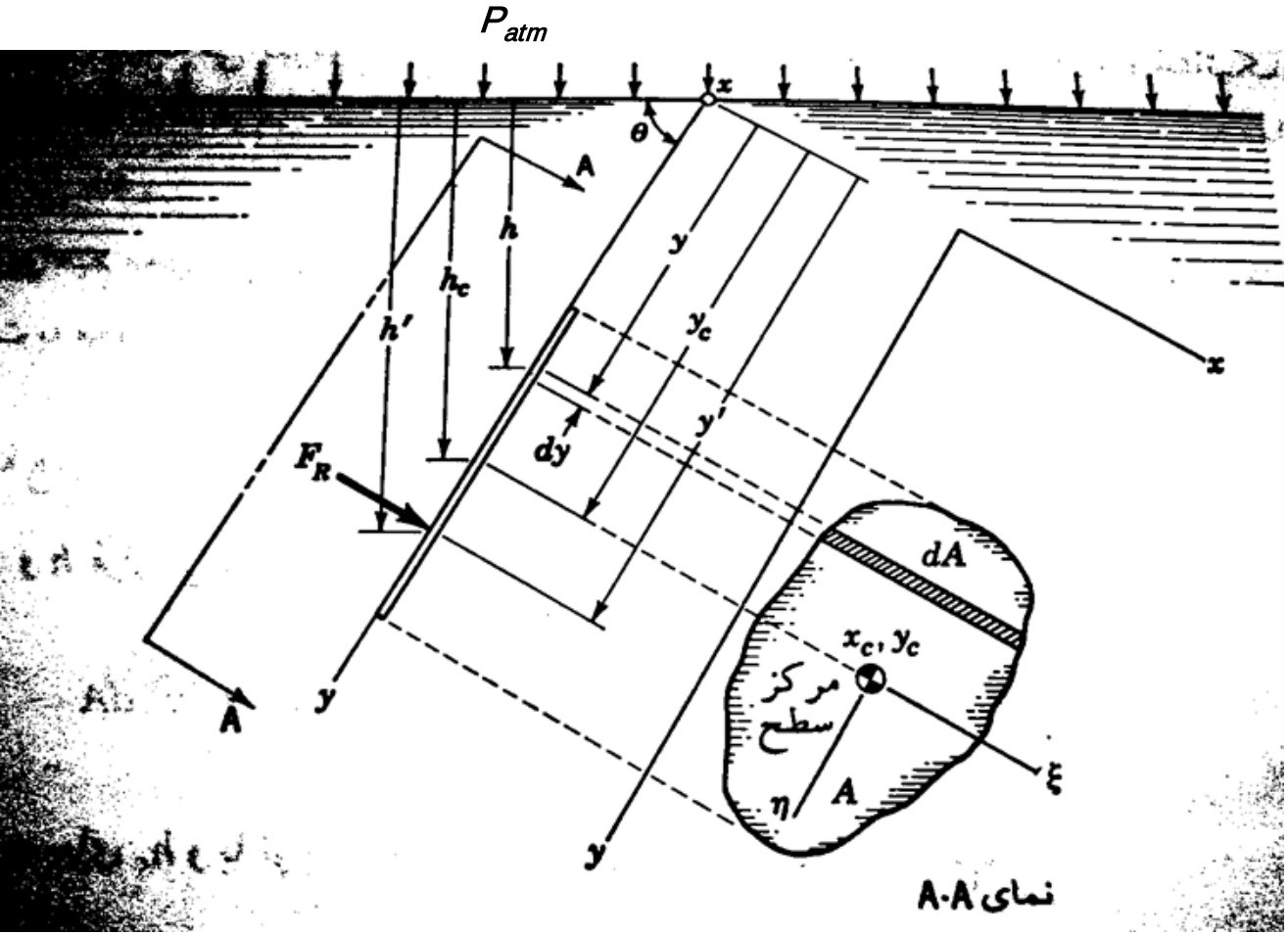
Hydrostatics (2)

Mohsen Soltanpour
Email: soltanpour@kntu.ac.ir
URL: http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

www.Mohandesyar.com

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح مسطح غوطه ور در سیال غیر قابل تراکم ساکن:

(Static incompressible submerged fluid)



بدلیل عدم وجود تنش برشی، نیروی وارد بر سطوح غوطه ور عمود بر آن می باشد. برآیند نیروی فشار ناشی از فشار یکنواخت (P_{atm}) برابر است با:

$$\int_A P_{atm} dA = P_{atm} \int_A dA = P_{atm} A$$

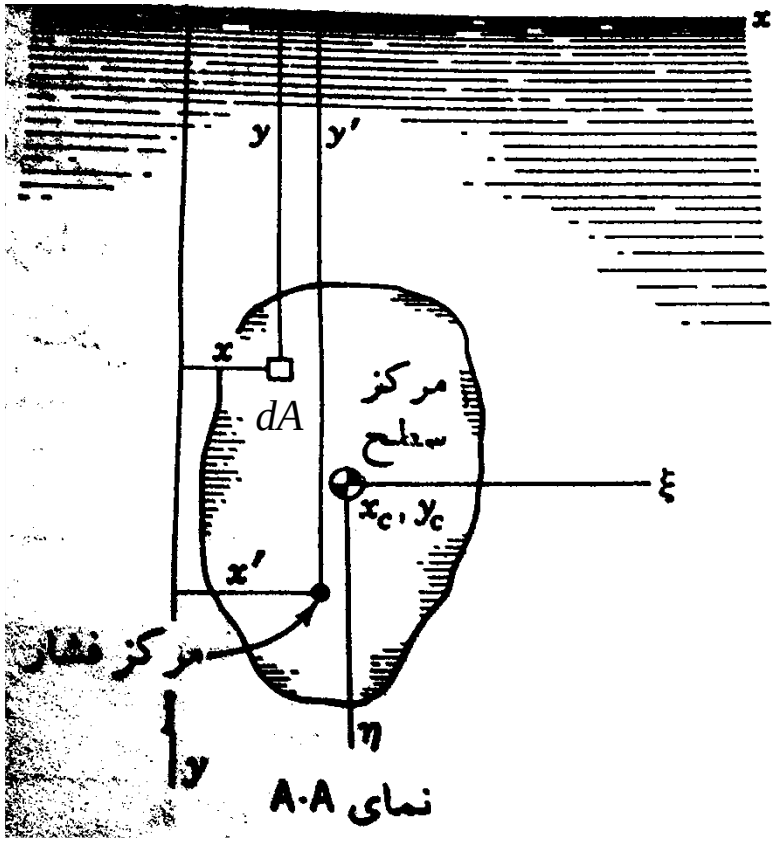
جزء سطحی اختیاری
واقع بر سطح جسم

برای بدست آوردن فشار هیدرواستاتیک سیال، نوار dA را به شکلی انتخاب می کنیم که تمام نقاط آن عمق یکسانی داشته باشند.

در این حالت فشار وارد بر تمام نقاط یکنواخت و برابر γh می باشد. جزء نیروی وارد بر dA:

$$dF = \gamma h dA$$

www.Mohandesyar.com



بنابر این کل نیروی وارد بر سطح A:

$$F_R = \int_A dF = \int_A (\gamma h) dA = \gamma \sin\theta \int_A y dA$$

ممان استاتیک سطح حول محور x ها $= Ay_c$

$$F_R = \gamma \sin\theta y_c A = \gamma h_c A = \underline{P_c A}$$

بنابراین می توانیم فرض کنیم فشار یکنواختی برابر P_c (فشار در مرکز سطح) به تمام صفحه اثر می کند.

برای بدست آوردن محل اثر نیروی برآیند F_R (y')، لنگر توزیع فشار نسبت به محور x ها را در نظر می گیریم:

$$F_R y' = \int_A \underbrace{\overbrace{(\gamma h) dA}^{dF} \times y}_{dM_x}$$

http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

$$\gamma h_c A y' = \int_A \gamma y \sin\theta y dA$$

$$\gamma \sin\theta y_c A y' = \gamma \sin\theta \int_A y^2 dA$$

$$\gamma \sin\theta y_c A y' = \gamma \sin\theta I_{xx} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{I_{xx}}{A y_c}}$$

که در آن I_{XX} ممان دوم سطح حول محور x ها است.

اگر به جای I_{XX} عبارت $I_{\xi\xi}+Ay_c^2$ را قرار دهیم که $I_{\xi\xi}$ ممان دوم سطح حول محور ξ عبوری از مرکز سطح به موازات محور x ها می باشد:

$$y' = \frac{A y_c^2 + I_{\xi\xi}}{A y_c} = \boxed{y_c + \frac{I_{\xi\xi}}{A y_c}}$$

نقطه اثر نیروی برآیند وارد بر سطح غوطه ور مرکز فشار (Center of pressure) نامیده می شود. مرکز فشار همواره زیر مرکز سطح قرار می گیرد:

$$\frac{I_{\xi\xi}}{A y_c} > 0 \Rightarrow y' > y_c$$

www.Mohandesyar.com

برای محاسبه x'، فاصله مرکز فشار از محور y ها، لنگر نیروی برآیند F_R و لنگر توزیع فشار نسبت به محور y ها را در نظر می گیریم:

$$F_R x' = \int_A \underbrace{(\gamma y \sin\theta)\overbrace{dA}^{dF} \times x}_{dM_x}$$

جزء سطح متناظر با نقطه (x,y)

$$(\gamma \sin\theta y_c A)x' = \gamma \sin\theta \int_A xy\,dA$$

$$y_c A x' = I_{xy} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x' = \frac{I_{xy}}{A y_c}}$$

که در آن I_{xy} حاصل ضرب اینرسی (Product of inertia) دستگاه نسبت به محورهای x و y است.

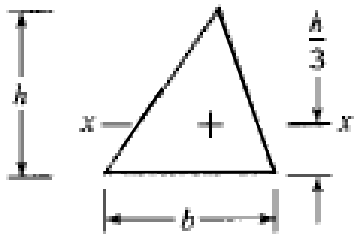
اگر به جای I_{xy} ، $I_{\xi\eta}$ ممان دوم عبوری از مرکز سطح را قرار دهیم:

$$x' = \frac{A x_c y_c + I_{\xi\eta}}{A y_c} = \boxed{x_c + \frac{I_{\xi\eta}}{A y_c}}$$

ξ و η به ترتیب موازی و عمود بر خط اثر صفحه و سطح آزاد می باشند. از آنجایی که $I_{\xi\eta}$ می تواند مثبت یا منفی باشد، مرکز فشار در هر دو طرف خط $x=x_c$ ممکن است قرار بگیرد. چنانچه یکی از محورهای ξ و η بمخور تقارن سطح باشد، $I_{\xi\eta}$ صفر شده و مرکز فشار بر روی خط $x=x_c$ قرار می گیرد.

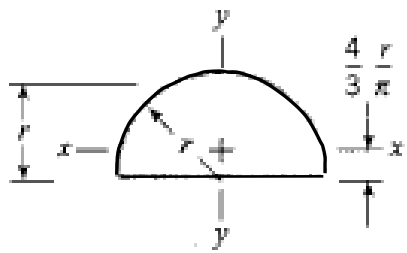
www.Mohandesyar.com

Centroids and moments of inertia of plane surfaces



$$A = \frac{bh}{2}$$

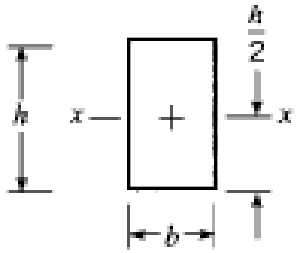
$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{36}$$



$$A = \frac{\pi r^2}{2}$$

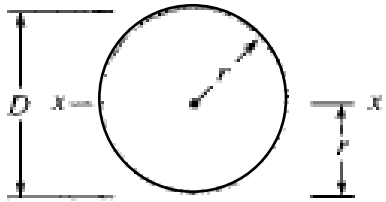
$$\bar{I}_{xx} = 0.110r^4$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi r^4}{8}$$



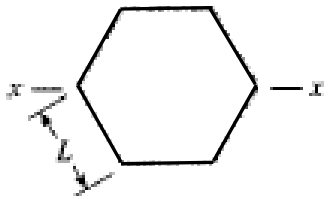
$$A = bh$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{bh^3}{12}$$



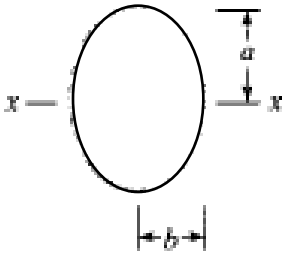
$$A = \pi r^2$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi r^4}{4}$$



$$A = 2.5981L^2$$

$$\bar{I}_x = 0.5127L^4$$



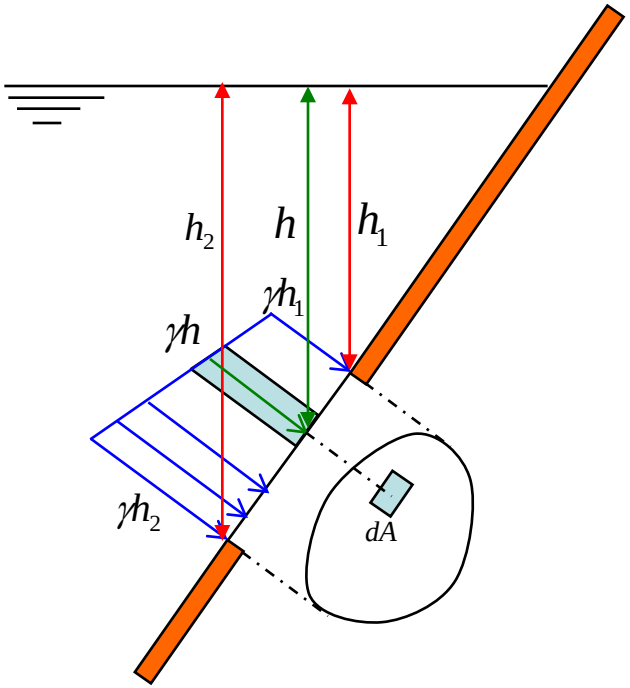
$$A = \pi ab$$

$$\bar{I}_{xx} = \frac{\pi a b^3}{4}$$

www.Mohandesyar.com

منشور فشار: (Pressure prism)

روش دیگر حل مسئله نیروی وارد بر سطوح مسطح غوطه ور تعیین نیروی برآیند و محل اثر آن استفاده از منشور فشار می باشد. این منشور حجم منشوری شکلی است که قاعده اش سطح صاف اعمال فشار بوده و ارتفاعش با رابطه $P=\gamma h$ بدست می آید (h فاصله عمودی تا سطح آزاد واقعی یا فرضی مایع می باشد).



جزء نیروی وارد بر dA :

$$dF = \gamma h dA = dV$$

که یک عنصر حجم از منشور فشار می باشد. بنابراین کل نیروی وارده (برآیند فشار اعمال شده به سطح) برابر است با حجم منشور فشار:

$$F = \int_V dV = V$$

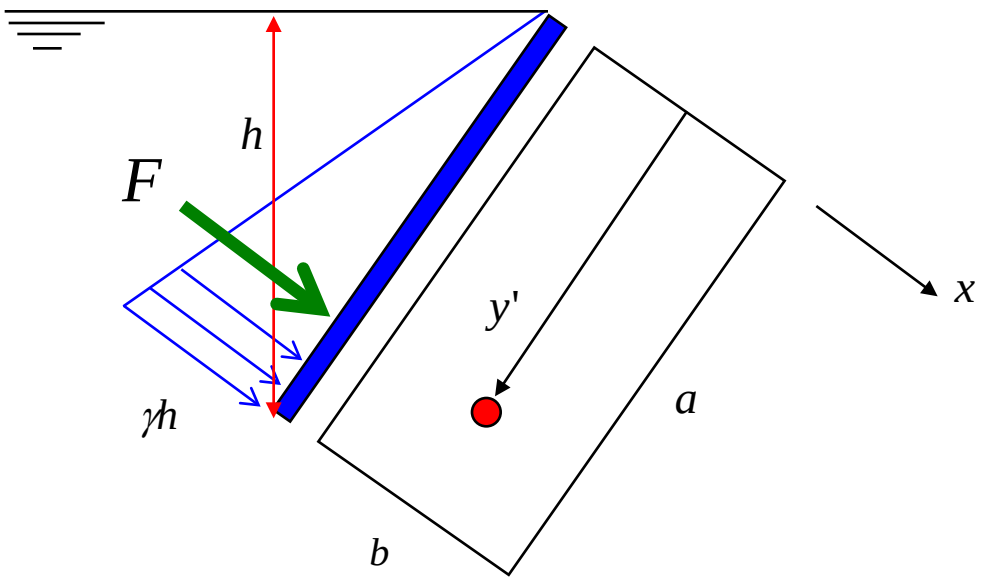
نیروی F از مرکز حجم منشور فشار می گذرد:

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V x dV \\ y_P = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V y dV \end{cases}$$

www.Mohandesyar.com

در بعضی شکلهای ساده روش منشور فشار بسیار مناسبتر از روش انتگرال گیری می باشد. مثلا در سطح مستطیل شکلی که ضلع فوقانی آن منطبق بر سطح آزاد مایع است، منشور فشار سه گوش (گوه ای شکل) است:

با استفاده از روابط قبل:



$$\begin{cases} F = P_c A = \gamma h/2\,(ab) = \dfrac{\gamma h a b}{2} \\ y' = y_c + \dfrac{I_{\zeta\zeta}}{A y_c} \\ = \dfrac{a}{2} + \dfrac{1/12\, b a^3}{a b (a/2)} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{6} = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

با استفاده از روش منشور فشار:

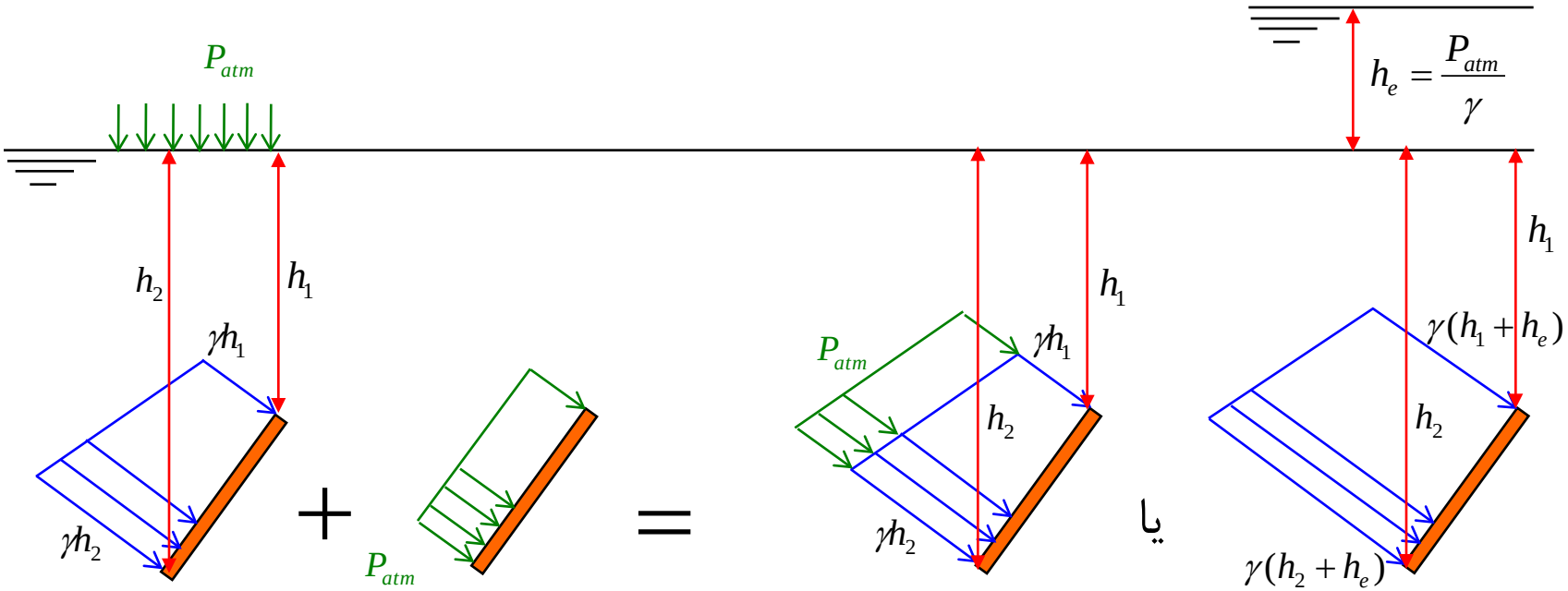
$$\begin{cases} F = V = 1/2\,(\gamma h \times a \times b) = \dfrac{\gamma h a b}{2} \\ y' = \dfrac{2a}{3} \end{cases}$$

(مرکز حجم در 1/3 قاعده قرار دارد)

www.Mohandesyar.com

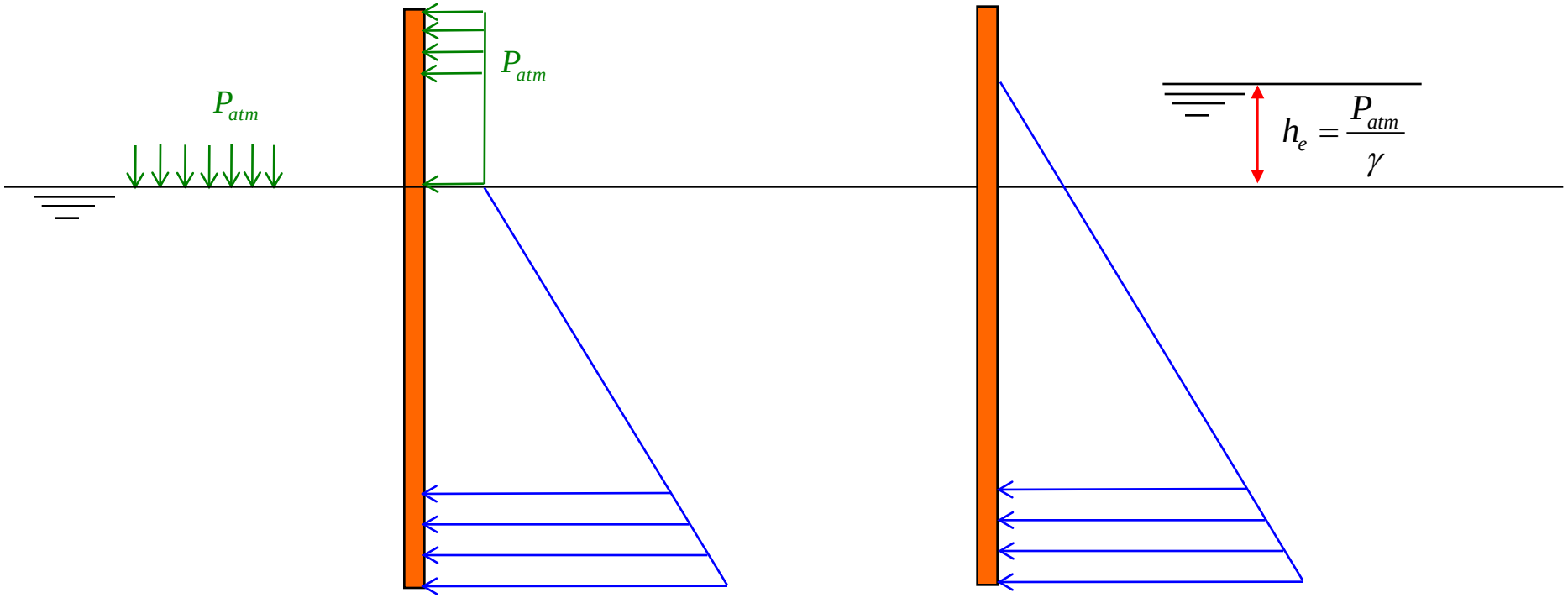
ارتفاع معادل سیال: (Equivalent height)

تاثیر فشار یکنواخت وارد بر سطح سیال را می توان با افزایش فرضی ارتفاع سیال جایگزین نمود. بدین منظور کافیست ارتفاع معادل به گونه ای انتخاب شود که فشار یکسانی در سطح سیال اعمال گردد:



استفاده از روش ارتفاع معادل گاهی راه حل ساده تری در تعیین مقدار و محل اثر نیروی وارده از طرف سیال ارائه می دهد.

واضح است که توزیع فشار صرفا در پایین تر از تراز سیال می تواند بدین روش تعیین شود و استفاده از این روش در بالاتر از تراز سیال اشتباه می باشد:



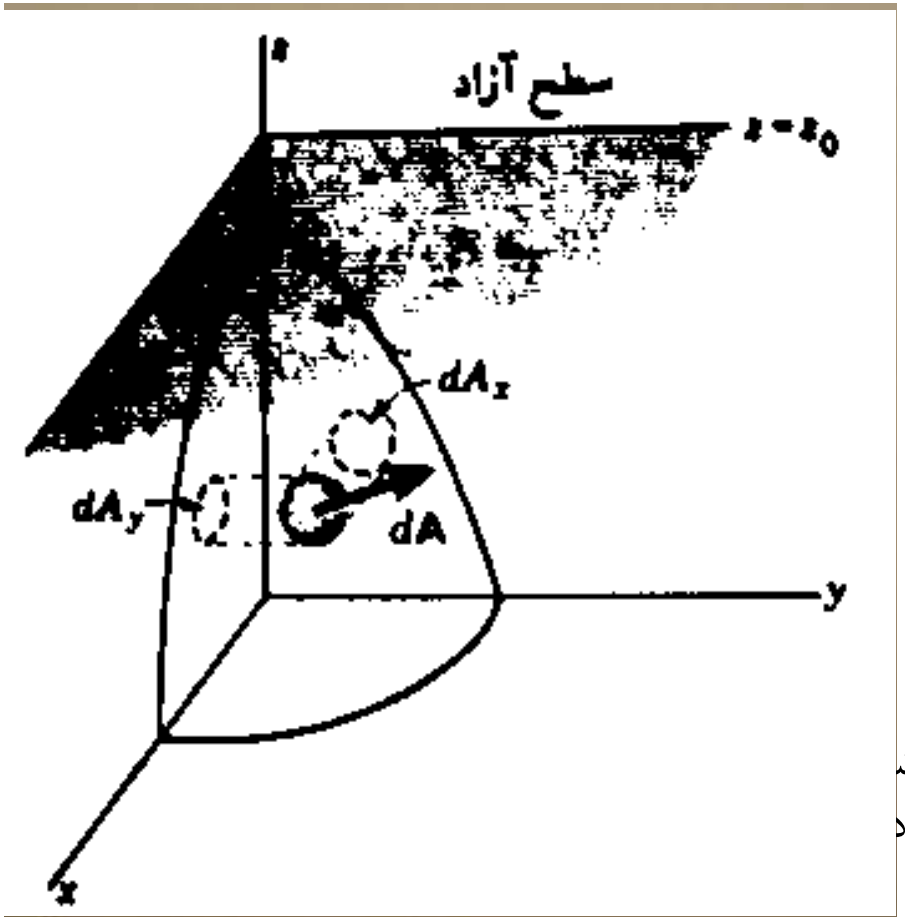
فشار صحیح

توزیع فشار در بالاتر از تراز آب غلط است.

www.Mohandesyar.com

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر سطوح منحنی غوطه ور:

(Hydrostatic force on curved submerged surfaces)



نیروی وارد بر المان عمود بر سطح آن المان بوده و برابر است با:

$$d\vec{F} = -pd\vec{A}$$

که در آن $d\vec{A}$ همراستا با $\vec{n}$ (طبق قرارداد به طرف خارج پوسته- صرفنظر از تقعر یا تحدب آن) است:

$$d\vec{A} = dA\vec{n}$$

با ضرب داخلی طرفین در بردار $\vec{i}$:

$$d\vec{F}.\vec{i} = -pd\vec{A}.\vec{i}$$

$$dF_x = -pdA_x$$

که در آن dA_x تصویر المان dA بر روی سطح yz می باش
با انتگرال گیری بر روی صفحه yz (یا هر صفحه دیگر عمود
بر محور x ها):

$$F_x = \int_{A_x} -pdA_x$$

http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

بنابراین مسئله نیروی وارد بر سطح منحنی به تعیین نیروی وارده به صفحه مسطح غوطه وری که بر سطح آزاد عمود است منجر می شود. به شکل مشابه:

$$F_y = \int_{A_y} -p dA_y$$

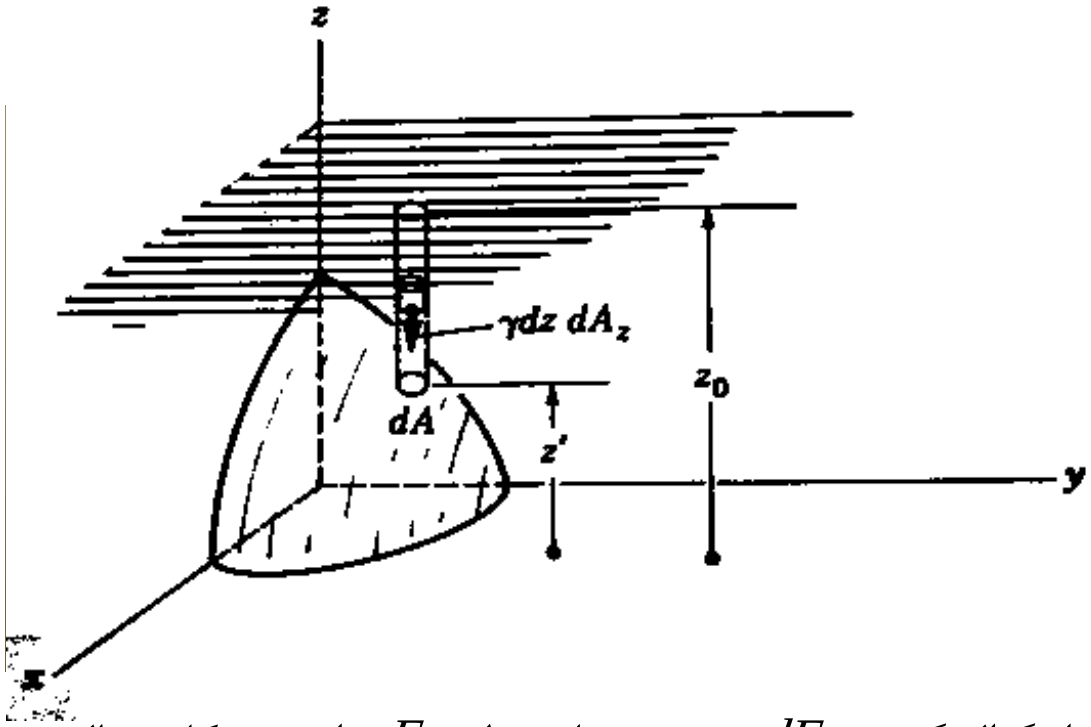
بدین ترتیب دو مولفه نیروی برآیند را می توان با روشهای مربوط به سطوح مسطح غوطه ور بدست آورد. این مولفه ها با سطح آزاد موازی هستند (مقدار و محل اثر نیروهای افقی وارده بر سطح مورب با مقدار و محل اثر نیروهای وارد بر تصاویر سطح مورب در دو راستا - سطوح مسطح – یکسانست).

نیروهای افقی و قائم ناشی از فشار جو وارد بر سطوح منحنی شکل نیز بسادگی به همین روش تعیین می گردند ($P=P_{atm}$) و تنها کافیست تصویر سطح منحنی شکل بر روی صفحات yz، xz یا xy در نظر گرفته شود:

$$\begin{cases} F_x = \int_{A_x} -p_{atm} dA_x = -p_{atm} A_x \\ F_y = \int_{A_y} -p_{atm} dA_y = -p_{atm} A_y \\ F_z = \int_{A_z} -p_{atm} dA_z = -p_{atm} A_z \end{cases}$$

www.Mohandesyar.com

برای تعیین مولفه عمود بر سطح آزاد:



$$d\vec{F} = -p d\vec{A}$$

$$d\vec{F}.\vec{k} = -p d\vec{A}.\vec{k}$$

$$dF_z = -p dA_z$$

$$= -(\int_{z'}^{z_0} \gamma dz) dA_z = -\int_{z'}^{z_0} \gamma dz dA_z$$

که در آن $\gamma dz dA_z$ وزن المان کوچکی از سیال است که داخل ستون سیال از روی المان تا سطح آزاد ادامه دارد.

رابطه فوق در سیال تراکم پذیر نیز صادق است. از انتگرال گیری dF_z بر روی تمام سطح، F_z برابر وزن کل سیال روی سطح منحنی بدست می آید.

علامت منفی نشان می دهد که به یک سطح منحنی که تصویر dA_z آن مثبت است (بخش فوقانی یک جسم) نیرویی در جهت خلاف محور z (به طرف پایین) وارد می شود.

با فرض γ ثابت:

$$F_z = \int_{A_z} -p dA_y$$

منشوری با قاعده dA_z و ارتفاع z_0-z'

حجم مایع بالای سطح منحنی غو طه ور

$$= -\int_{A_z} \gamma (z_0 - z') dA_z = -\gamma \int_{A_z} (z_0 - z') dA_z = -\gamma \int_V dV = -\gamma V$$

www.Mohandesyar.com

خط اثر مولفه قائم، با مساوی قرار دادن گشتاور مولفه های قائم جزئی (متناظر با dA_z) حول محورهای x و z بدست می آید:

$$\begin{cases} F_z\bar{x} = -\int_V x\gamma dV & (\text{لنگرگیری حول محور } y) \\ F_z\bar{y} = -\int_V y\gamma dV & (\text{لنگرگیری حول محور } z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x} = -\dfrac{\gamma\int_V xdV}{F_z} = \dfrac{\gamma\int_V xdV}{-\gamma V} = \dfrac{\int_V xdV}{V} \\ \bar{y} = -\dfrac{\gamma\int_V ydV}{F_z} = \dfrac{\gamma\int_V ydV}{-\gamma V} = \dfrac{\int_V ydV}{V} \end{cases}$$

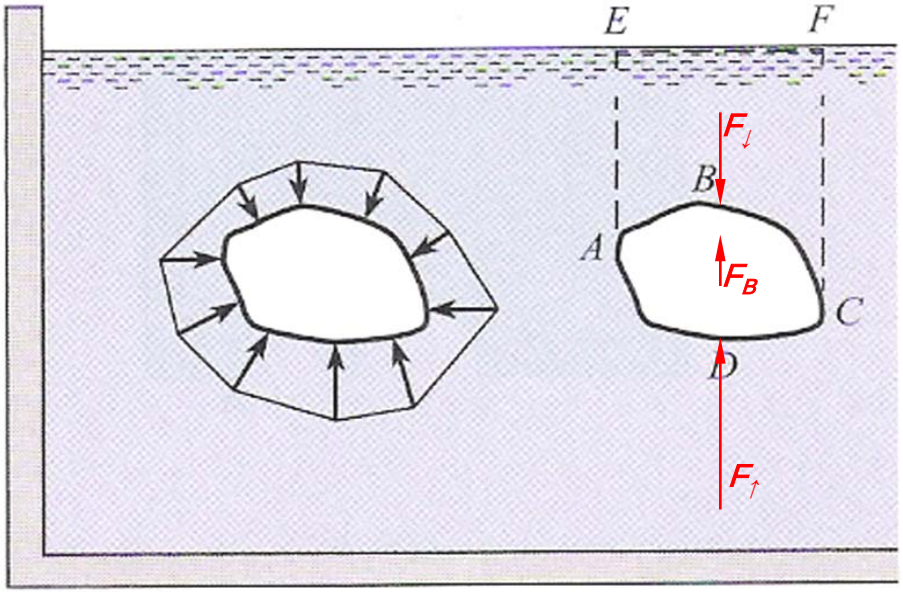
بنابراین خط اثر نیروی قائم از مرکز حجم سیال روی سطح منحنی تا سطح آزاد فرضی یا واقعی عبور می کند. در ساختن یک سطح آزاد ذهنی، مایع فرضی باید از همان وزن مخصوص مایع در تماس با سطح منحنی برخوردار باشد تا توزیع فشار روی سطح صحیح باشد.

خط اثر سه مولفه نیروهای افقی و نیروی قائم لزوما در یک نقطه تلاقی نمی کنند. به عبارت دیگر برآیند نیروهای وارده لزوما نیروی منفردی نیست. در مسائل عملی می توان از مولفه های قائم و موازی با سطح آزاد استفاده کرد.

نتایج این بخش محدود به سیالات غیر قابل تراکم نبوده و در هر سیالی معتبر است. در سیال تراکم پذیر، خط اثر نیروی قائم از مرکز ثقل (یا مرکز جرم با فرض شتاب ثقل ثابت) سیال بالای سطح منحنی می گذرد.

www.Mohandesyar.com

نیروی شناوری: (Buoyant force)



نیروی بر آیند اعمال شده بر یک جسم توسط سیال ایستا که جسم در آن غوطه ور یا روی آن شناور می باشد، نیروی شناوری نامیده می شود.

از آنجایی که تصویر قائم جسم غوطه ور یا ناحیه غوطه ور جسم شناور در مایع همواره صفر است، نیروی شناوری همواره به سمت بالا بوده و مولفه افقی ندارد.

در مسائل شناوری روابط مربوط به نیروهای وارد بر سطوح مستقیم یا منحنی قابل استفاده می باشند، اما با توجه به شرایط جسم کاملا غوطه ور یا شناور می توان روابط ساده تری ارائه نمود.

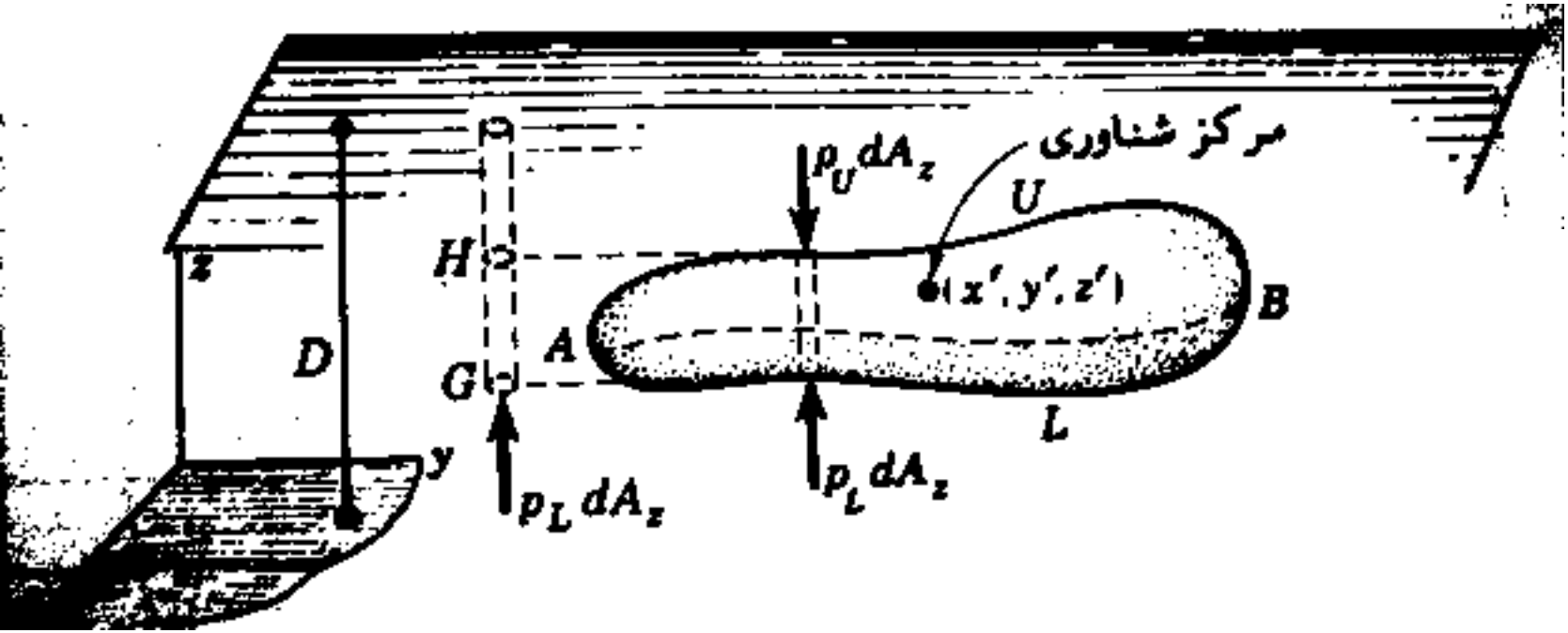
دو حالت زیر در نظر گرفته می شوند:

۱- جسم به طور کامل در سیال غوطه ور است.

۲- جسم در سطح مشترک دو سیال غیر محلول قرار دارد.

www.Mohandesyar.com

جسم کاملا غوطه ور در آب را به دو بخش فوقانی AUB و تحتانی ALB تقسیم می کنیم:

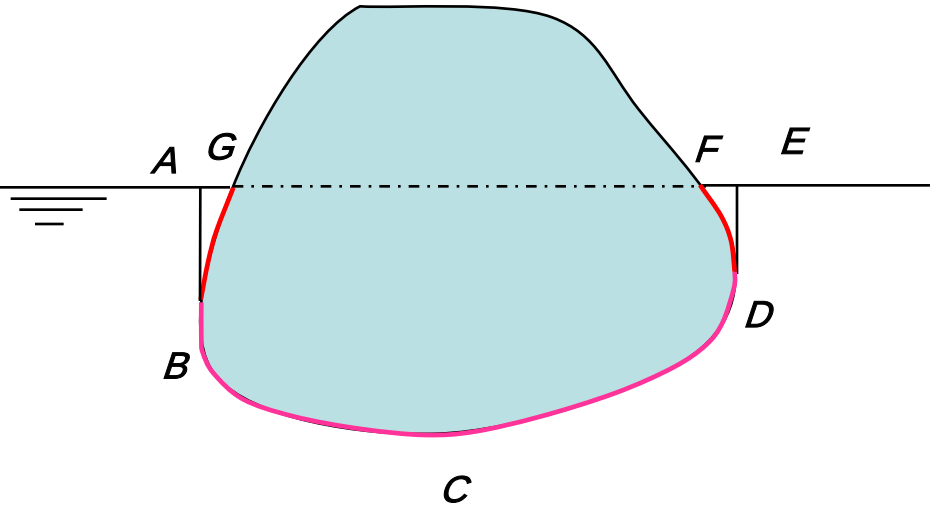


اگر ستون قائمی با سطح مقطع dA_z را در نظر بگیریم، نیروی قائم وارد بر بالای آن $P_u dA_z$ (وزن ستونی از سیال به سطح مقطع dA_z و ارتفاع روی المان تا سطح آزاد) می باشد.

فشار P_L پایین ستون با فشار ستونی فرضی از سیال که از کف المان تا سطح آزاد ادامه می یابد برابر است. بنابراین اختلاف بین نیروی فوقانی $P_u dA_z$ و نیروی تحتانی $P_L dA_z$ برابر است با وزن ستون سیال GH که مقطع و ارتفاع آن با ستون داخل جسم برابر است. با در نظر گرفتن تمام ستونهای داخل جسم غوطه ور، نیروی خالص بالابرنده جسم برابر است با وزن سیال جابجا شده (اصل ارشمیدس، Archimedes principle). در اصل ارشمیدس محدودیتی برای تراکم پذیری وجود ندارد.

www.Mohandesyar.com

به طریق مشابه در اجسام شناور نیز نیروی بالابرنده برابر با وزن سیال جابجا شده می باشد:



نیروی شناوری

نیروی وارد بر BCD

نیروی وارد بر BG

$$F_Z = W(ABCDE) - [W(ABG) + W(DEF)]$$
$$= W(GBCDF)$$

نیروی وارد بر FD

مرکز شناوری: (Center of buoyancy)

مرکز شناوری نقطه ای از فضا است که نیروی شناوری در آن اثر می کند. در شکل اسلاید قبل:

$$dF_B = (P_L - P_U)dA_Z$$

که در سیال تراکم پذیر و تراکم ناپذیر صحیح است. اگر سیال تراکم ناپذیر را در نظر بگیریم:

$$dF_B = [(D\gamma - (D-h)\gamma]dA_Z = \gamma h dA_Z$$

www.Mohandesyar.com

با انتگرال گیری بر روی کل جسم:

$$F_B = \gamma \int h dA_Z = \gamma V$$

که V حجم جسم غوطه ور است (این رابطه اثبات اصل ارشمیدس در سیال تراکم نا پذیر است). با لنگرگیری حول محور y ها:

$$x' F_B = \gamma \int x h dA_Z = \gamma \int_V x dV$$

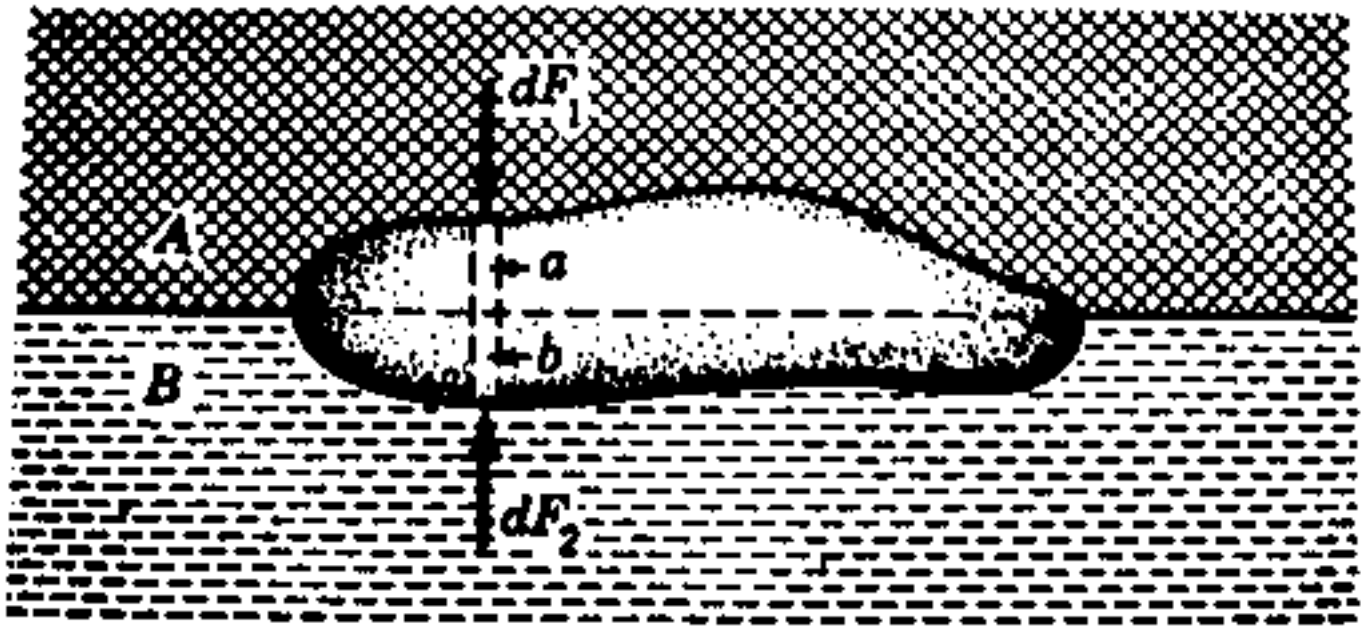
$$x' \gamma V = \gamma \int_V x dV \quad \Longrightarrow \quad x' = \frac{\int_V x dV}{V}$$

به طریق مشابه با لنگرگیری حول محور x ها:

$$y' = \frac{\int_V y dV}{V}$$

بنابراین نیروی شناوری وارده بر جسم واقع در سیال غیر قابل تراکم از مرکز حجم حجم جا بجا شده توسط جسم می گذرد. در سیالات تراکم پذیر باید مرکز ثقل سیال جابجا شده (یا مرکز جرم با ثابت فرض کردن شتاب ثقل در محدوده ارتفاع جسم غوطه ور) در نظر گرفته شود.

www.Mohandesyar.com



در حالتی که جسم در مرز بین دو سیال محلول قرار داشته باشد (مثلا جسم شناور در آب با در نظر گرفتن هوای روی آب):

$$dF_2 - dF_1 = W_a(A) + W_b(B)$$

وزن ستون a از سیال A وزن ستون b از سیال B

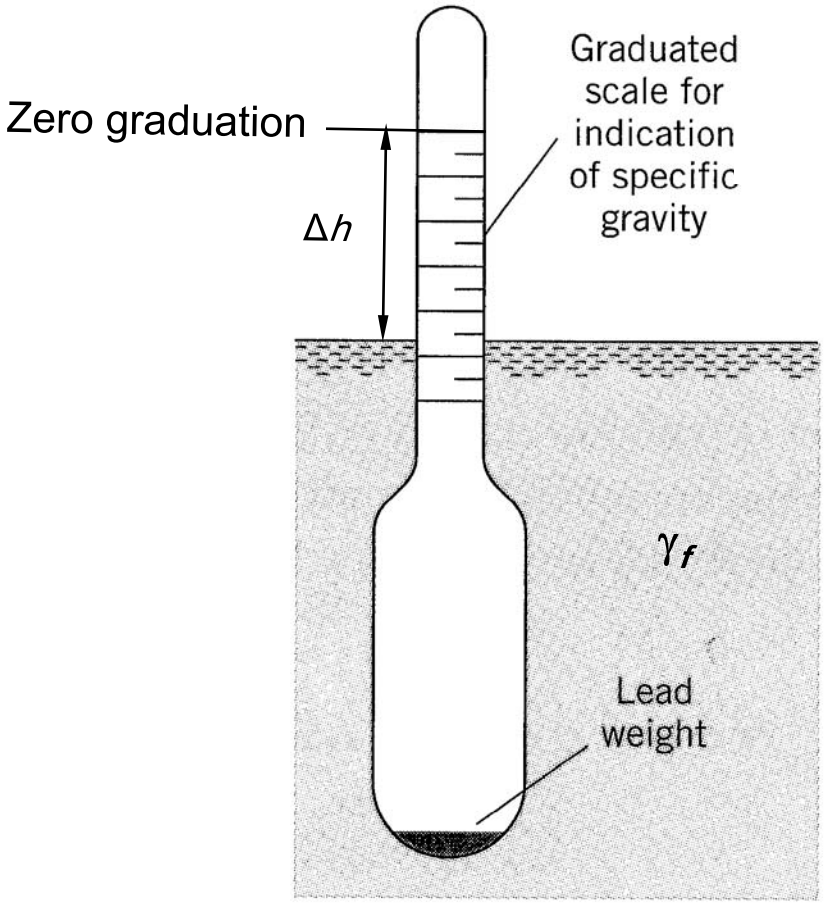
با انتگرال گیری بر روی کل جسم نیروی شناوری برابر وزن دو سیال جابجا شده خواهد بود. در صورتی که وزن مخصوص دو سیال متفاوت باشد مرکز شناوری لزوما از مرکز حجم سیال جابجا شده عبور نمی کند*.

با توجه به وزن مخصوص ناچیز هوا، در مباحث کشتیرانی می توان از تاثیر هوا صرفنظر کرده و مرکز شناوری را منطبق بر مرکز حجم سیال جابجا شده در نظر گرفت.

www.Mohandesyar.com

هیدرومتر: (Hydrometer)

ابزاری است که با استفاده از قانون شناوری برای تعیین وزن مخصوص سیالات بکار می رود. از آنجایی که نیروی شناوری تابعی از وزن مخصوص سیال است و با توجه به ثابت بودن وزن هیدرومتر، میزان فروروی هیدرومتر در سیال تابعی از وزن مخصوص سیال می باشد. بنابراین با مدرج کردن راستای قائم می توان ورن مخصوص سیال را بدست آورد*.



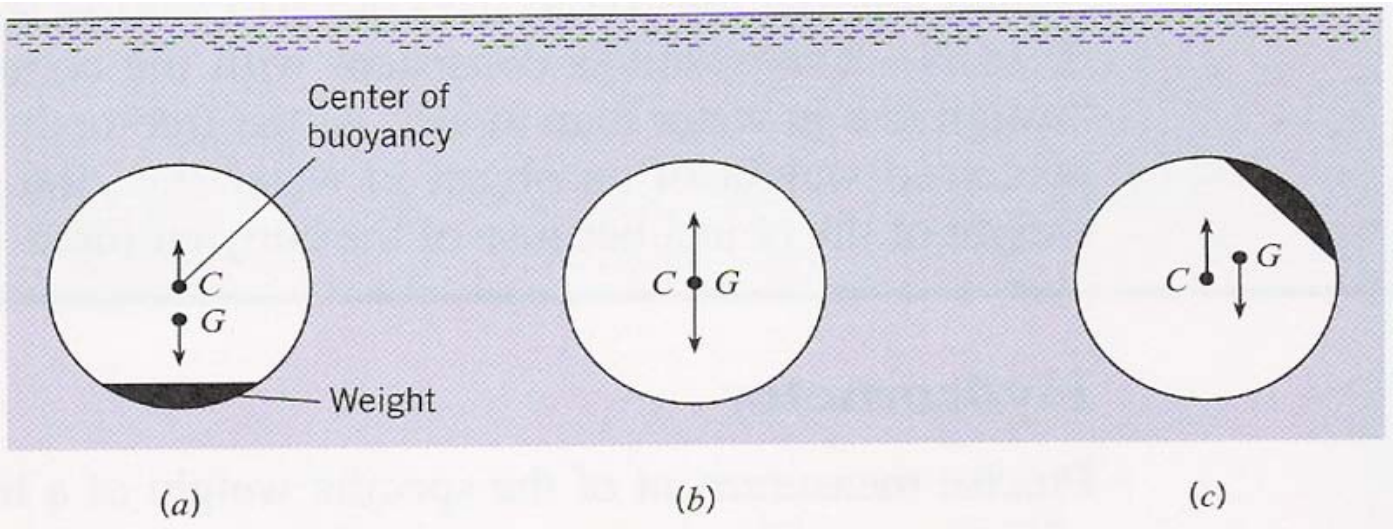
$$\Delta h = f(\gamma_f)$$

www.Mohandesyar.com

پایداری اجسام شناور و غوطه ور: (Hydrometer)

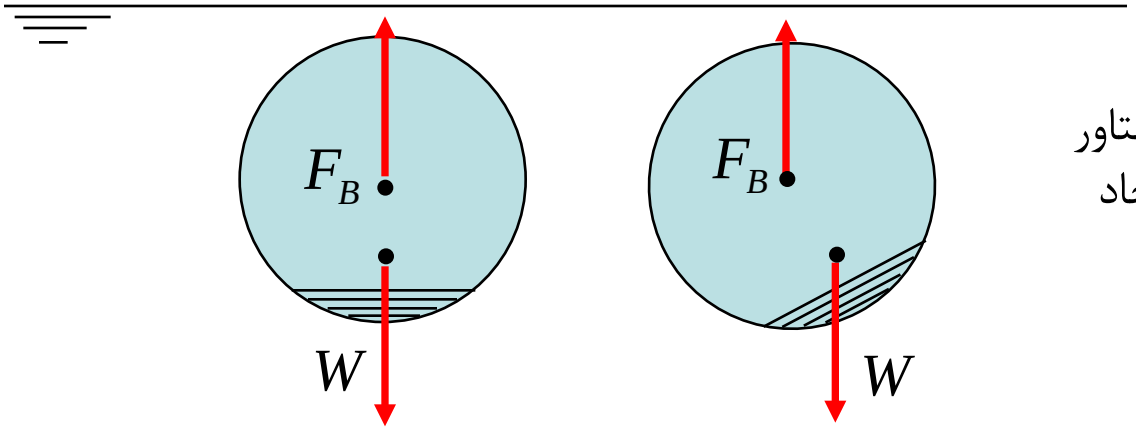
جسمی دارای پایداری خطی است که هر گاه تغییر مکان کوچک خطی به آن اعمال شود، نیروی بازگردانده ای در آن ایجاد شود که تمایل به بازگرداندن جسم به موفعیت اولیه اش داشته باشد. مثلا یک جسم شناور در مایع ایستا پایداری قائم دارد.

یک جسم ممکن است بطور پایدار، ناپایدار و یا خنثی در سیال شناور باشد:



پایدار (Stable)	خنثی (Neutral)	ناپایدار (Unstable)
مرکز ثقل پایینتر از مرکز شناوری قرار دارد.	مرکز ثقل و مرکز شناوری بر هم منطبق هستند.	مرکز ثقل بالاتر از مرکز شناوری قرار دارد.

www.Mohandesyar.com

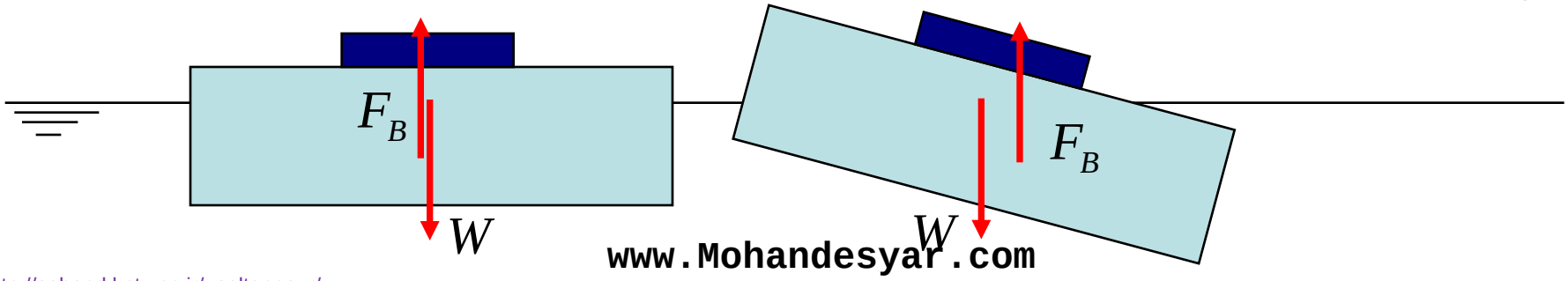


حرکت در جهت خلاف عقربه های ساعت گشتاور برگرداننده ای در جهت عقربه های ساعت ایجاد می کند.

شرط پایین بودن مرکز ثقل جسم نسبت به مرکز شناوری برای پایدار بودن اجسام غوطه ور کافیست (مثلا بالون ها) اما برای پایداری اجسام شناور در مرز مشترک سیالات ضروری نیست.*

همانگونه که در شکل زیر ملاحظه می شود با وجود بالاتر بودن مرکز ثقل نسبت به مرکز شناوری بدلیل اینکه در اثر چرخش جسم مرکز شناوری تغییر مکان می دهد، گشتاور ایجاد شده باز دارنده بوده و جسم را به وضعیت اولیه بر می گرداند.

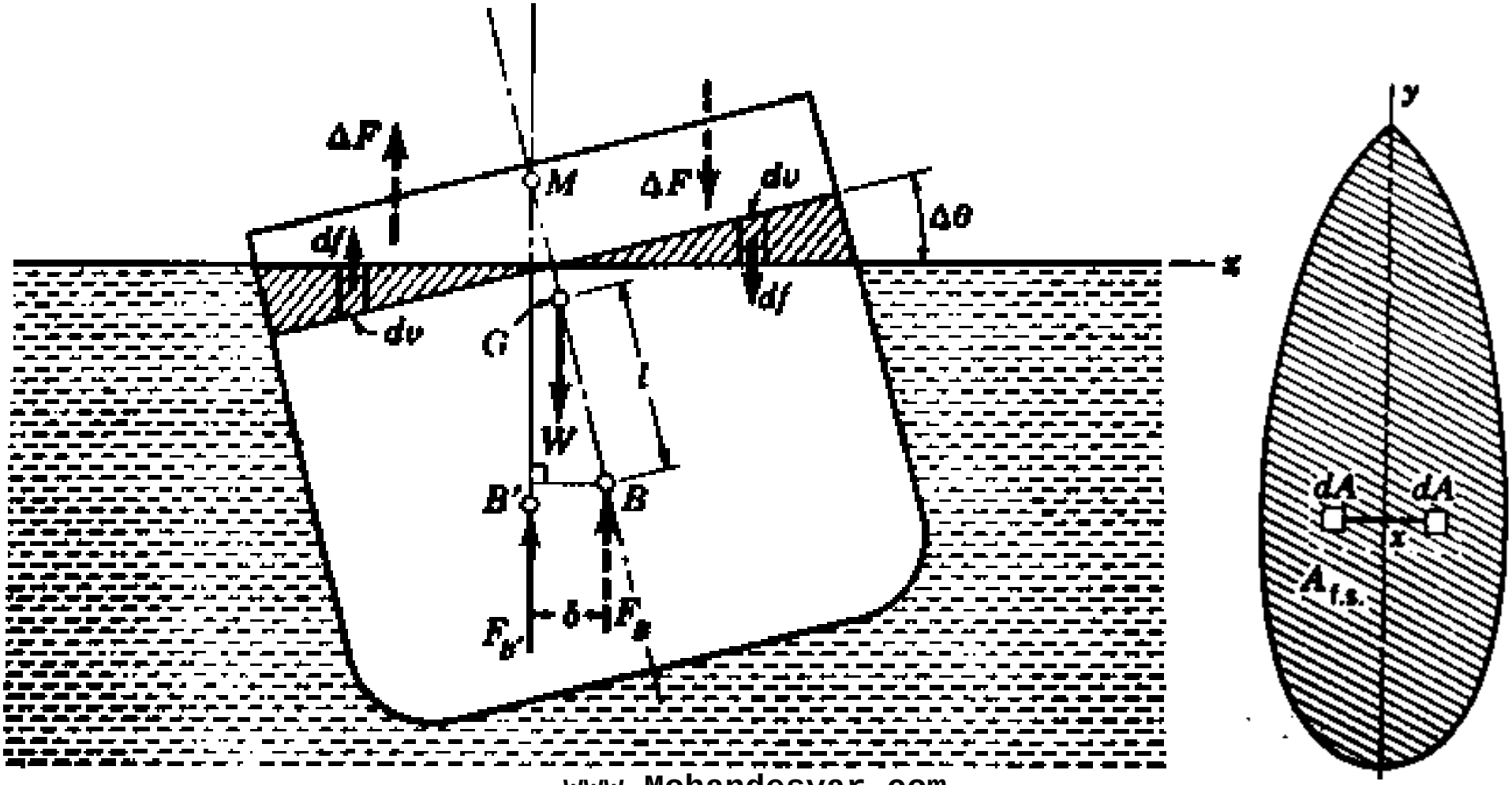
مقاطع مستطیلی عریض اشکال بسیار پایداری هستند زیرا در اثر غلطیدن مقدار زیادی سیال جابجا شده و باعث می شود که مرکز شناوری تغییر مکان زیادی به سمت قسمت کج شده بدهد و گشتاور برگرداننده نسبتا بزرگی ایجاد شود.



www.Mohandesyar.com

مطابق شکل دوران کوچک $\Delta\theta$ را حول محور تفارن y ها در نظر می گیریم. مرکز شناوری از B به B' منتقل می شود.

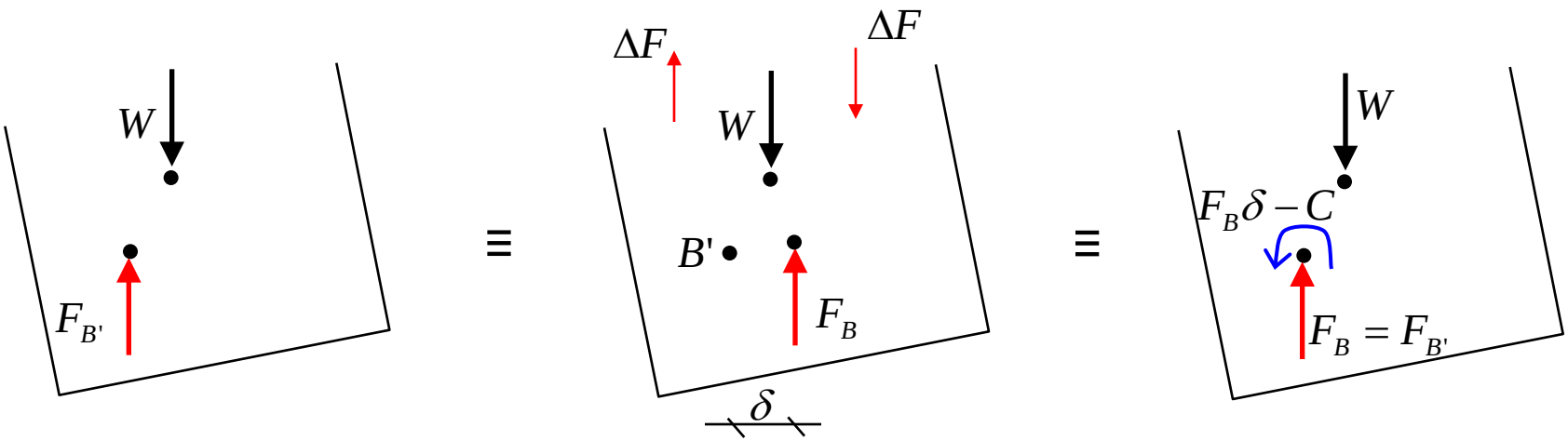
دوران کشتی در اثر افزایش حجم جابجا شده سمت چپ نیروی بالابرنده ΔF و بدلیل کاهش حجم آب جابجا شده در سمت راست نیروی رو به پایین ΔF ایجاد می شود. لنگر حاصل از این زوج نیرو C می باشد.



www.Mohandesyar.com

http://sahand.kntu.ac.ir/~soltanpour/

نیروی $F_{B'}$ (وارد بر مرکز شناوری جدید) حاصل جمع تاثیر F_B و C می باشد:



$$F_B\delta - C = 0 \Longrightarrow \delta = \frac{C}{F_B} = \frac{C}{W} \quad \text{(I)} \qquad (F_B = F_{B'} = W)$$

اما $\sin\Delta\theta = \dfrac{\delta}{\overline{MB}}$ و یا $\overline{MB} = \dfrac{\delta}{\sin\Delta\theta}$ (II)

اگر نقطه M که به شکل فوق تعیین می شود در بالای نقطه G قرار گیرد ($\overline{MB} > \overline{GB}$)، نیروی شناوری و نیروی وزن گشتاور بازدارنده ای ایجاد می کنند و به عبارت دیگر کشتی پایدار است. ضمنا هر چه $\overline{MG}$ بزرگتر باشد، گشتاور ایجاد شده بزرگتر بوده و کشتی پایدارتر است.

$\overline{MG}$ معیاری برای پایداری بوده و ارتفاع متاسنتریک (Metacentric) نامیده می شود. اگر M روی G واقع شود تعادل خنثی و اگر زیر آن باشد وضعیت ناپایدار خواهد بود.

www.Mohandesyar.com

برای تعیین لنگر MG باید C محاسبه شود:

جزء حجم $dV = (x\Delta\theta)dA$

$$\Longrightarrow \quad df = \gamma dV = \gamma x \Delta\theta dA$$

$$C = \int_{A_{f.s.}} x df \overset{*}{=} \int_{A_{f.s.}} \gamma x^2 \Delta\theta dA = \gamma\Delta\theta \int_{A_{f.s.}} x^2 dA = \gamma\Delta\theta I_{yy}$$

مقطع بدنه کشتی در امتداد سطح آزاد (free surface)

ممان دوم سطح حول محور y ها

با توجه به معادله (I):

$$\begin{cases} C = \gamma\Delta\theta I_{yy} \\ \delta = \dfrac{C}{W} \end{cases} \Longrightarrow \quad \delta = \frac{\gamma\Delta\theta I_{yy}}{W}$$

با در نظر گرفتن معادله (II):

$$\overline{MB} = \frac{\delta}{\sin\Delta\theta} = \frac{\gamma\Delta\theta I_{yy}}{W\sin\Delta\theta}$$

و یا (در $\Delta\theta$ کوچک):

$$\overline{MB} = \frac{\gamma I_{yy}}{W}$$

اگر فاصله $\overline{BG}$ را با l نمایش دهیم، ارتفاع متاسنتریک برابر است با:**

$$\overline{MG} = \overline{MB} - l = \frac{\gamma I_{yy}}{W} - l$$

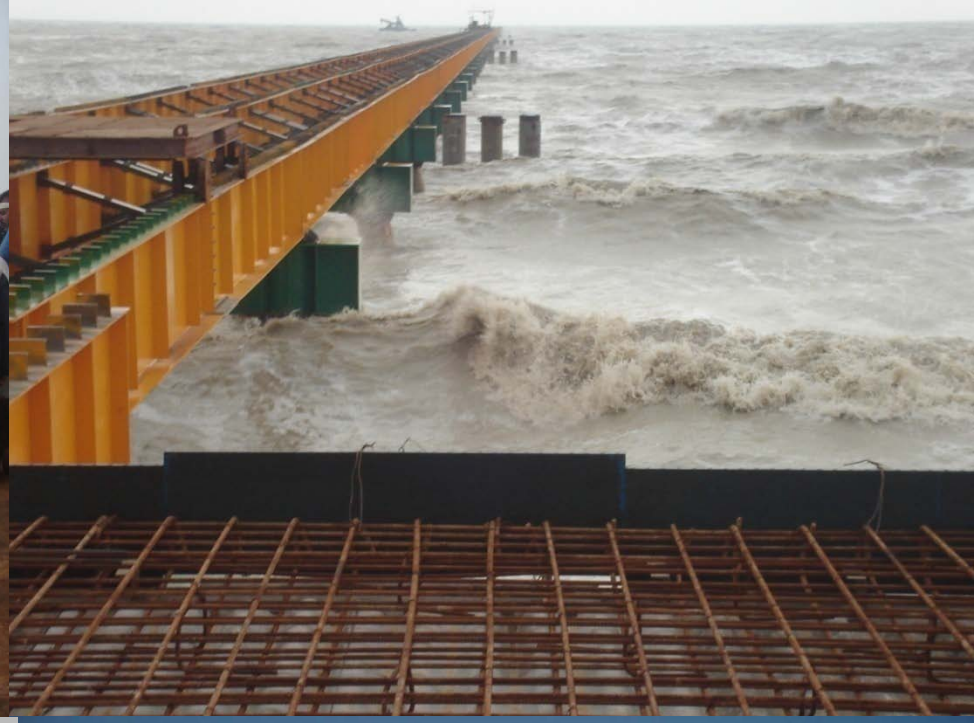
$\overline{MG} > 0$ تعادل پایدار

$\overline{MG} = 0$ تعادل خنثی

$\overline{MG} < 0$ تعادل ناپایدار

www.Mohandesyar.com

Hendijan (1385)



www.Mohandesyar.com

Morro Bay, California (December 4, 2007)

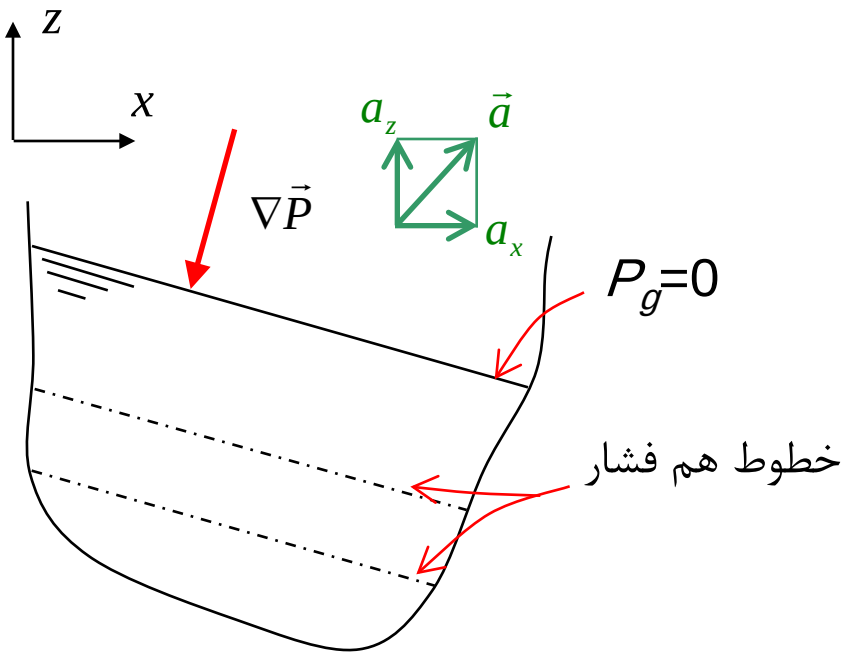
www.Mohandesyar.com

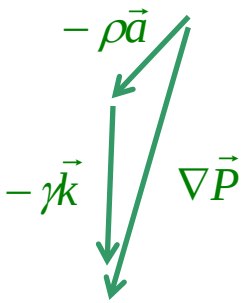
www.Mohandesyar.com

انتقال و دوران سیالات: (Translation and Rotation of fluids)

در سیالات ایستا بدلیل نبودن تنش برشی، محاسبه تغییرات فشار ساده است. سیال هنگام انتقال با سرعت یکنواخت نیز تحت قوانین تغییرات فشار استاتیک قرار دارد. همچنین زمانی که سیال شتاب ثابتی دارد، ذرات نسبت به یکدیگر حرکت نسبی نداشته (حرکت صلب گونه سیال) و تنش برشی ایجاد نمی گردد.

شتاب خطی یکنواخت





فرض می کنیم به مایعی که درون ظرفی باز قرار دارد شتاب یکنواخت a (در صفحه XZ) اعمال شود:

با استفاده از معادله اصلی حرکت یا قانون دوم نیوتن:

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k} = \rho\vec{a}$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) - \gamma\vec{k} = \frac{\gamma}{g}\left(a_x\vec{i} + a_z\vec{k}\right)$$

www.Mohandesyar.com

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{-\gamma}{g} a_x \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma(1+\dfrac{a_z}{g}) \end{cases}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$= -\frac{\gamma}{g} a_x dx - \gamma(1+\frac{a_z}{g}) dz$$

با انتگرال گیری برای سیالات غیر قابل تراکم (P_0 فشار در مبدا):

$$\boxed{P(x,z) = -\frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma(1+\frac{a_z}{g}) z + P_0}$$

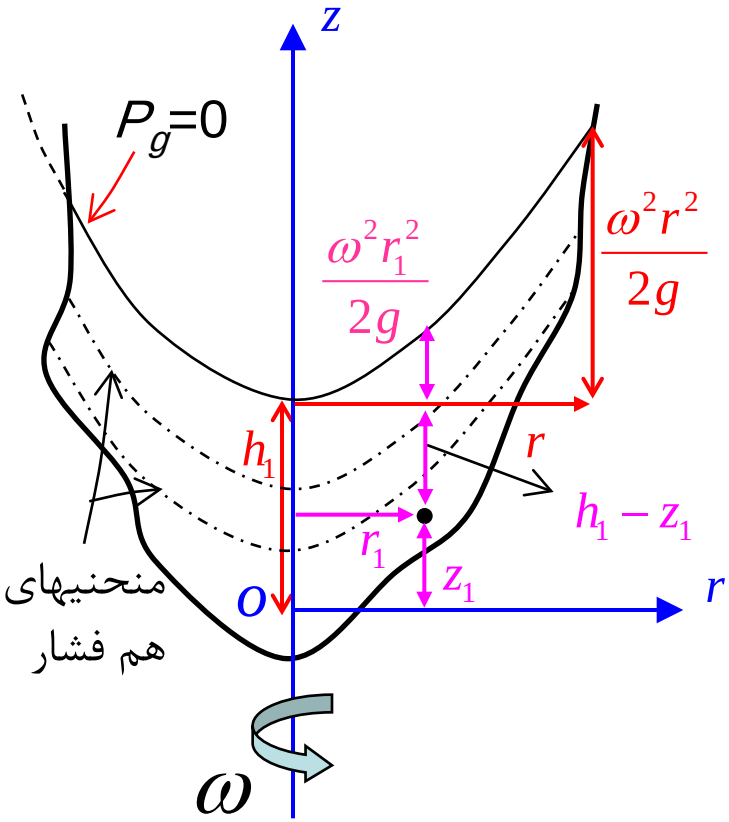
برای بدست آوردن معادله تراز آزاد آب کافیست فشار برابر صفر قرار داده شود:

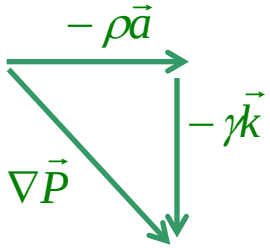
$$-\frac{\gamma}{g} a_x x - \gamma(1+\frac{a_z}{g}) z + P_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-\gamma/g \, a_x}{\gamma(1+\frac{a_z}{g})} = \frac{-a_x}{g+a_z}$$

با توجه به اینکه رابطه شیب سطح آزاد مستقل از شکل ظرف است ساده تر است حل مسائل با استفاده از آن شروع شود.

www.Mohandesyar.com

دوران حول یک محور قائم





در دوران سیال با سرعت زاویه ای ثابت حول یک محور قائم نیز سیال حرکت صلب گونه داشته و تنش برشی در هیچ نقطه ای از سیال ایجاد نمی گرددو در این وضعیت شتاب جانب مرکز (به سمت محور دوران) و شتاب ثقل وجود دارند.

با فرض سرعت زاویه ای ω، هر جزء از سیال دارای شتابی شعاعی به سمت محور دوران و متناسب با شعاع دوران می باشد:

$$\vec{a} = -r\omega^2\vec{i}$$

با استفاده از معادله اصلی حرکت (قانون دوم نیوتن):

$$d\vec{f} = -\vec{\nabla}P - \gamma\vec{k} = \rho\vec{a}$$

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial r}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right) - \gamma\vec{k} = -r\omega^2\rho\vec{i}$$

که در آن $\vec{j}$ بردار واحد در جهت محور y ها (جهت مماس) می باشد.

www.Mohandesyar.com

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{\gamma}{g}\omega^2 r \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\gamma \end{cases}$$

$$dP = \frac{\partial P}{\partial r}dr + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$= \frac{\gamma}{g}\omega^2 r dr - \gamma dz$$

با انتگرال گیری برای سیالات غیر قابل تراکم (P_0 فشار در مبدا o):

$$\boxed{P(r,z) = \frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + P_0}$$

اگر تراز آب در محور دوران با نشان h_1 داده شود:

$$\begin{cases} r = 0 \\ z = h_1 \end{cases} \quad P = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = -\gamma h_1 + P_0$$

و یا $P_0 = \gamma h_1 \Longrightarrow P(r,z) = \dfrac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + \gamma h_1$

$$= \gamma\Big(\underbrace{\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z + h_1}_{\text{ارتفاع سیال واقعی یا موهومی بالای نقطه } (r,z)^*}\Big)$$

بنابراین در این حالت بجای استفاده از رابطه فشار می توان از ضرب تراز آب واقعی یا موهومی در وزن مخصوص سیال نیز استفاده کرد.*

www.Mohandesyar.com

برای بدست آوردن معادله تراز آزاد آب:

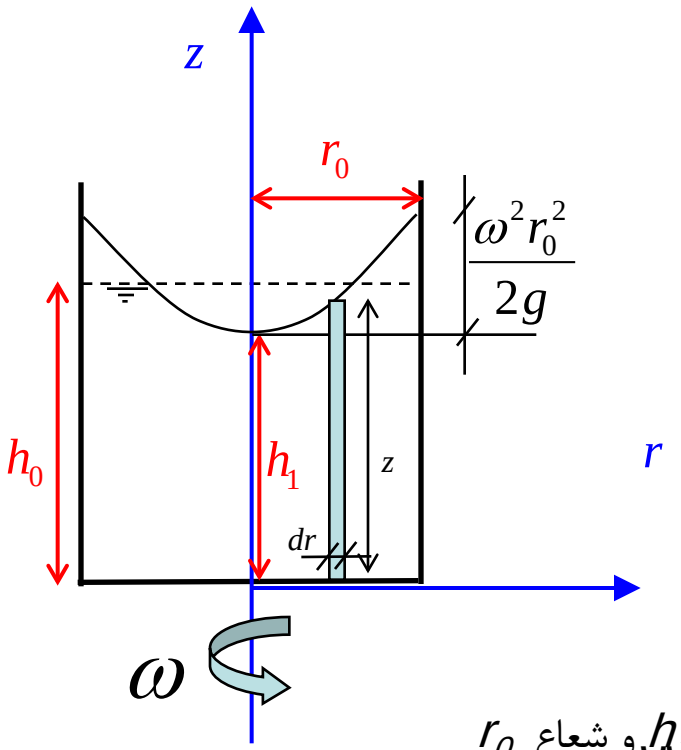
$$\frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g} - \gamma z + P_0 = 0$$

و یا

$$z = \frac{\gamma\omega^2 r^2}{2g\gamma} + \frac{P_0}{\gamma}$$

و $P_0 = \gamma h_1$ $\Longrightarrow$ $\boxed{z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h_1}$

بنابراین معادله سطح آزاد یک سهموی است که راس آن بر روی محور دوران در $z=h_1$ قرار دارد. در یک استوانه دوار می توان روابط صریحی با توجه به بقای جرم داخل استوانه ارائه نمود. اگر ارتفاع اولیه مایع قبل از دوران را h_0 فرض کنیم:



$$\pi r_0^2 h_0 = \int_0^{r_0} (2\pi r) z dr$$

$$= \int_0^{r_0} (2\pi r)(h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}) dr$$

$$= 2\pi \left[h_1 \frac{r^r}{2} + \frac{\omega^2 r^4}{8g} \right]_0^{r_0}$$

$$= \pi h_1 r_0^2 + \frac{\pi\omega^2 r_0^4}{4g}$$

حجم زیر سطح سهموی و بالای h_1 :* $\frac{1}{2} \times \pi r_0^2 \times \frac{\omega^2 r_0^2}{2g})$

حجم استوانه‌ای به ارتفاع h_1 و شعاع r_0

www.Mohandesyar.com

بنابراین:

$$\pi r_0^2 h_0 = \pi h_1 r_0^2 + \frac{\pi \omega^2 r_0^4}{4g}$$

و یا

$$h_0 = h_1 + \frac{\omega^2 r_0^2}{4g}$$

یعنی h_0 از وسط سهمی می گذرد.* $\frac{1}{2} \times \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$

$$z = h_1 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$= h_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

$$= h_0 - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}[0.5 - (\frac{r}{r_0})^2]$$

این رابطه معادله سطح آزاد استوانه‌ای به شعاع r_0 و ارتفاع اولیه h_0 را درحرکت دوار نشان می دهد. توجه شود که این معادله درصورت سرریزی مایع یا سر بسته بودن ظرف صادق نیست.

www.Mohandesyar.com