باسمه تعالی

فصل سوم : مقاطع مخروطی

❋ دایره

۱ : دسته خطوط به معـادلات $(m+۲)y+(m+۱)x+۱=۰$ قطـر هـای یـک دایـره انـد. اگـر ایـن دایـره از نقطـه ی $(۵,۲)$بگذرد ، شعاع آن چقدر است ؟ (کنکور۱۳۸۳)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

حل : قطر دایره از مرکز دایره می گذرد. پس محل تقاطع دسته خطوط فوق مرکز دایره می باشد. برای تعیـین مختـصات مرکـز دایره کافی است محل تقاطع دو خط دلخواه ، از دسته خطوط فوق را تعیین کنیم.

$$m=-۱\xrightarrow{(m+۲)y+(m+۱)x+۱=۰}(-۱+۲)y+(-۱+۱)x+۱=۰\rightarrow y=-۱$$

$$m=-۲\xrightarrow{(m+۲)y+(m+۱)x+۱=۰}(-۲+۲)y+(-۲+۱)x+۱=۰\rightarrow -x=-۱\rightarrow x=۱$$

پس مختصات مرکز دایره $(۱,-۱)$است. برای تعیین اندازه ی شعاع دایره کافی است مختصات مرکز را تـا نقطـه ی داده شـده روی دایره یعنی $(۵,۲)$ تعیین شود.

$$R=\sqrt{(۱-۵)^۲+(-۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

۲: طول قطعه ی مماسی که از نقطه ی $A(۴,۱)$ بر دایره ای به معادله ی $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۳=۰$ رسم شود. برابر کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳)۵ ۴) $۲\sqrt{۳}$

حل: ابتدا معادله ی داده شده را به صورت استاندارد تبدیل می کنیم.

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۳=۰\rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲+۴y+۴=۲\rightarrow (x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۲$$

با قرار دادن مختصات نقطه ی $A(۴,۱)$ در معادله ی دایره ، واضح است که این نقطه بیرون دایره است. پس از ایـن نقطـه دو مماس بر دایره رسم می شود. طول قطعه ی مماس برابر است با:

$$AT=\sqrt{(x_۰-\alpha)^۲+(y_۰-\beta)^۲-R^۲}$$
$$\rightarrow AT=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱+۲)^۲-۲}=\sqrt{۹+۹-۲}=\sqrt{۱۶}=۴$$

۳ : به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ و $x^۲+y^۲-۴y+b=۰$ مماس داخل اند؟

(کنکور۱۳۸۶)

۱) ۵−   ۲) ۴−   ۳) ۳−   ۴) ۲−

حل : ابتدا معادلات دو دایره را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$C_۱: x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰ \rightarrow (x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲ \rightarrow O_۱\left|\begin{matrix}-۱\\ ۱\end{matrix}\right. \ ,\ R_۱=\sqrt{۲}$$

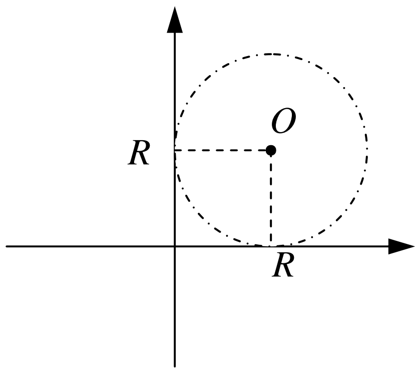
$$C_۲: x^۲+y^۲-۴y+b=۰ \rightarrow x^۲+(y-۲)^۲=-b+۴ \rightarrow O_۲\left|\begin{matrix}۰\\ ۲\end{matrix}\right. \ ,\ R_۲=\sqrt{-b+۴}$$

چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس :

$$O_۱O_۲=|R_۱-R_۲| \rightarrow \sqrt{(۰+۱)^۲+(۲-۱)^۲}=|\sqrt{۲}-\sqrt{-b+۴}|$$
$$\rightarrow \sqrt{۲}=|\sqrt{۲}-\sqrt{-b+۴}| \rightarrow b=-۴$$

۴ : دو دایره از نقطه ی (۲,۱) گذشته و بر محور های مختصات مماس اند. شعاع این دایره ها کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۷)

۱) ۴ و ۱   ۲) ۵ و ۱   ۳) ۴ و ۲   ۴) ۵ و ۲



حل : چون دو دایره از نقطه ی (۲,۱)واقع در ربع اول گذشته و بر محور های مختصات مماس اند، پس طول و عرض مرکز آنها برابر اندازه ی شعاع است.

لذا $(x-R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$

اط طرفی نقطه ی (۲,۱) روی دایره است. در نتیجه :

$$(۲-R)^۲+(۱-R)^۲=R^۲ \rightarrow R=۱\ ,\ ۵$$

۵ : معادله ی دایره ای که مرکز آن به طول ۱− و بر دو خط به معادلات $y=x$ و $y=x+۴$ مماس باشد. کدام است.

(کنکور ۱۳۸۹)

۱) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$ ۲) $x^۲+y^۲+۲x-y=۲$

۳) $x^۲+y^۲-۲x+y=۱$ ۴) $x^۲+y^۲+۲x-۲y=۱$

حل : با توجه به معادلات دو خط داده شده ، مشاهده می شود که این دو خط موازی هستند. لذا مرکز با روی خطی بین دو خط داده شده و موازی آنها و به فاصله ی مساوی از آنها باشد. $y = x + ۲$

$$\alpha = -۱ \xrightarrow{y=x+۲} \beta = -۱ + ۲ = ۱$$

از جهتی دیگر فاصله ی دو خط موازی برابر قطر دایره می باشد.

$$y = x \rightarrow x - y = ۰$$

$$y = x + ۴ \rightarrow x - y + ۴ = ۰$$

$$d = \frac{|c_۱ - c_۲|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{۴ - ۰}{\sqrt{(۱)^۲ + (۱)^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} \quad \Rightarrow ۲R = \frac{۴}{\sqrt{۲}} \rightarrow R = \sqrt{۲}$$

لذا معادله ی دایره بدین شکل است.

$$(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲ \rightarrow x^۲ + ۲x + y^۲ - ۲y = ۰$$

پس گزینه ی ۱ درست است.

***

*** بیضی**

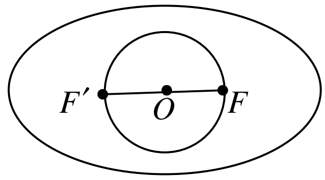
۱ : کانون های بیضی به معادله ی $۲x^۲ + ۷y^۲ - ۴x = ۱۲$ دو سر قطری از دایره اند. این دایره نیمساز ناحیه ی اول را با کدام طول قطع می کند. (کنکور ۱۳۸۵)

۱) ۲   ۲) $۱ + \sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

حل : ابتدا معادله ی بیضی داده شده را به صورت استاندارد می نویسیم، تا مختصات کانون های به دست آید. سپس معادله ی دایره ای را می نویسیم که مختصات دو سر قطری از آن معلوم باشند. در آخر محل تقاطع دایره را با نیمساز ربع اول و دوم تعیین می کنیم.

$$۲x^۲ + ۷y^۲ - ۴x = ۱۲ \rightarrow ۲x^۲ - ۴x + ۷y^۲ = ۱۲ \rightarrow ۲(x^۲ - ۲x) + ۷y^۲ = ۱۲$$

$$\rightarrow ۲(x^۲ - ۲x + ۱ - ۱) + ۷y^۲ = ۱۲ \rightarrow \frac{(x-۱)^۲}{۷} + \frac{y^۲}{۲} = ۱$$



$$\rightarrow\begin{cases} a^{۲}=۷ \\ b^{۲}=۲ \\ a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\end{cases}\rightarrow ۷=۲+c^{۲}\rightarrow c=\sqrt{۵}$$

شعاع دایره برابر c و مرکز دایره بر مرکز بیضی منطبق است. پس

$$\begin{cases} O\begin{vmatrix} ۱ \\ ۰\end{vmatrix} \\ R=c=\sqrt{۵}\end{cases}\xrightarrow{(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}}(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۵$$

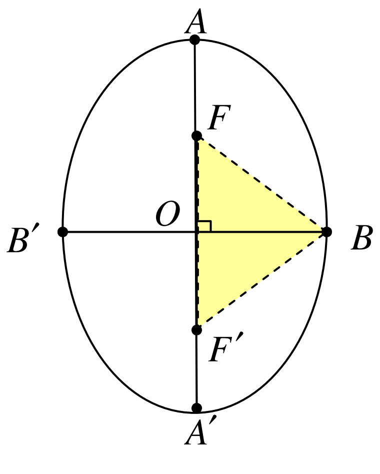
$$\begin{cases} y=x \\ (x-۱)^{۲}+y^{۲}=۵\end{cases}\rightarrow(x-۱)^{۲}+x^{۲}=۵\rightarrow ۲x^{۲}-۲x+۱=۵\rightarrow x^{۲}-x-۲=۰\rightarrow\begin{cases} x=۲ \\ x=-۱\end{cases}$$

۲ : بیش ترین مساحت از بین مثلث هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادلـه ی $۴x^{۲}+y^{۲}-۴x=۳$ و دو رأس دیگـر آن کانون های این بیضی باشند، کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۷)

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}$

حل: وقتی مثلث مورد نظر بیش ترین مساحت را دارد، که رأس واقع بر بیضی روی یکی از دو سر قطر کوچک آن باشد.

$$۴x^{۲}+y^{۲}-۴x=۳\rightarrow\frac{(x-\frac{۱}{۲})^{۲}}{۱}+\frac{y^{۲}}{۴}=۱$$ بیضی قائم است.



$$a^{۲}=۴\rightarrow a=۲$$

$$b^{۲}=۱\rightarrow b=۱$$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow ۴=۱+c^{۲}\rightarrow c=\sqrt{۳}$$

$$S_{\underset{FBF'}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}OB\times FF'=\frac{۱}{۲}b\times ۲c=bc=۱\times\sqrt{۳}=\sqrt{۳}$$

***

*** هذلولی**

۱ : دو نقطه ی M و N هر کدام بر روی یکی از دو شاخه ی هذلولی به معادلـه ی $۴y^۲ - ۹x^۲ + ۱۸x + ۱۶ = ۰$ حرکـت می کنند. کمترین فاصله ی MN کدام است؟ (کنکور۱۳۸۲)

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۵

حل : اگر دو نقطه ی M و N هر کدام بر روی یکی از دو شاخه ی هذلولی در حرکت هستند، کمترین فاصله ی بـین ایـن دو نقطه وقتی است که M و N بر رأس های هذلولی منطبق باشند. پس فاصله ی بین آنها برابر فاصله ی بین دو رأس هذلولی یعنی AA' است.

$$۴y^۲ - ۹x^۲ + ۱۸x + ۱۶ = ۰ \to ۴y^۲ - ۹(x^۲ - ۲x + ۱ - ۱) + ۱۶ = ۰$$

$$\to ۴y^۲ - ۹(x-۱)^۲ + ۹ + ۱۶ = ۰ \to ۹(x-۱)^۲ - ۴y^۲ = ۲۵ \to \frac{(x-۱)^۲}{\frac{۲۵}{۹}} - \frac{y^۲}{\frac{۲۵}{۴}} = ۱$$

چون $x^۲$ مثبت است، پس هذلولی افقی بوده و $a^۲ = \frac{۲۵}{۹}$ لذا :

$$a = \frac{۵}{۳} \to AA' = ۲a = \frac{۱۰}{۳}$$

***

۲ : هر دو کانون هذلولی به معادله ی $ax^۲ + ۴x + y^۲ - ۲y = ۰$ بر روی خطی مـوازی محـور x هـا اسـت. مجموعـه ی مقادیر a به کدام صورت است؟ (کنکور ۱۳۸۵)

۱) $-۸ < a < -۴$ ۲) $-۴ < a < ۰$ ۳) $-۲ < a < ۰$ ۴) $۰ < a < ۸$

حل : شرط اینکه معادله ی هذلولی $ax^۲ + ۴x + y^۲ - ۲y = ۰$ است،آن است که ضریب های $x^۲$ و $y^۲$ مختلف العلامـه باشند. پس $a < ۰$ از طرفی

$$ax^{۲}+۴x+y^{۲}-۲y=۰\to a(x^{۲}+\frac{۴}{a}x)+(y^{۲}-۲y)=۰$$

$$\to a(x^{۲}+\frac{۴}{a}x+\frac{۴}{a^{۲}}-\frac{۴}{a^{۲}})+(y^{۲}-۲y+۱-۱)=۰\to a(x+\frac{۲}{a})^{۲}+(y-۱)^{۲}=\frac{۴}{a}+۱$$

$$\xrightarrow{\div a}\frac{(x+\frac{۲}{a})^{۲}}{۱}+\frac{(y-۱)^{۲}}{a}=\frac{\frac{۴}{a}+۱}{a}$$

چون کسر $\frac{\frac{۴}{a}+۱}{a}$ برابر یک است و مخرج آن نیز منفی می باشد. لذا

$$\frac{۴}{a}+۱<۰\to\frac{۴+a}{a}<۰\xrightarrow{\times a}۴+a>۰\to a>-۴$$

$$\therefore\ -۴<a<۰$$

***

*** سهمی**

۱ : سهمی با کانون $F(۱,۱)$ و خط هادی به معادله ی $x=۳$ محور y ها را در دو نقطه ی B و A قطع می کند. فاصله ی دو نقطه ی B و A چقدر است؟ (کنکور ۱۳۸۳)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$

حل: چون خط هادی در نقطه ای بیشتر از طول کانون قطع می کند. لذا سهمی افقی منفی است.

پس مختصات کانون آن می شود $F(\alpha-p,\beta)$ و چون $F(۱,۱)$ پس:

$$\begin{cases}\alpha-p=۱\\ \beta=۱\end{cases}$$

و از طرفی معادله ی خط هادی این سهمی به صورت $x=\alpha+p$ پس :

$$\alpha+p=۳$$

لذا داریم:

$$\begin{cases}\alpha-p=۱\\ \alpha+p=۳\end{cases}\to\alpha=۲\ ,\ p=۱$$

معادله ی سهمی

$$(y-\beta)^2=-4p(x-\alpha)$$

$$\to (y-1)^2=-4(x-2)$$

در نهایت محل تقاطع سهمی را با محور عرض ها را تعیین می کنیم. کافی است که مقدار x را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases}(y-1)^2=-4(x-2)\\ x=0\end{cases}\to (y-1)^2=-4(0-2)\to (y-1)^2=8\to y-1=\pm\sqrt{8}\to\begin{cases}y=1+\sqrt{8}\\ y=1-\sqrt{8}\end{cases}$$

$$A\left|\begin{matrix}0\\ 1+\sqrt{8}\end{matrix}\right.\ ,\quad B\left|\begin{matrix}0\\ 1-\sqrt{8}\end{matrix}\right.\quad \Rightarrow AB=\sqrt{(0-0)^2+((1+\sqrt{8})-(1-\sqrt{8}))^2}=\sqrt{4\times 8}=4\sqrt{2}$$

***

* مقاطع مخروطی در حالت کلی

۱ : فاصله ی دو کانون مقطع مخروطی به معادله ی $x^2+xy+y^2=6$ کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۱)

۱) $2\sqrt{2}$　　　۲) ۳　　　۳) ۴　　　۴) $4\sqrt{2}$

حل: چون مقطع مخروطی شامل جمله ی xy است ، لذا به کمک دوران این جمله را حذف می کنیم، تا معادله ی استاندارد مقطع مخروطی به دست آید.

$$x^2+xy+y^2=6\xrightarrow{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}a=b=c=1$$

$$tg2\theta=\frac{b}{a-c}\to tg2\theta=\frac{1}{1-1}=\text{ن}\to 2\theta=\frac{\pi}{2}\to\theta=\frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases}x=x'Cos\theta-y'Sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\\ y=x'Sin\theta+y'Cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')\end{cases}$$

$$x^{۲}+xy+y^{۲}-۶=۰$$

$$\rightarrow [\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')]^{۲}+[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')][\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')]+[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')]^{۲}-۶=۰$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}(x'^{۲}+y'^{۲}-۲x'y')+\frac{۱}{۲}(x'^{۲}-y'^{۲})+\frac{۱}{۲}(x'^{۲}+y'^{۲}+۲x'y')-۶=۰$$

$$\rightarrow \frac{۳}{۲}x'^{۲}+\frac{۱}{۲}y'^{۲}-۶=۰\rightarrow \frac{x'^{۲}}{۴}+\frac{y'^{۲}}{۱۲}=۱$$

معادله ی به دست آمده مربوط به یک بیضی قائم است. از طرفی $a^{۲}=۱۲$ و $b^{۲}=۴$ حال چون $a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}$

در نتیجه:

$$۱۲=۴+c^{۲}\rightarrow c=\sqrt{۸}\rightarrow c=۲\sqrt{۲}$$

پس فاصله ی کانونی به شکل زیر است:

$$FF'=۲c=۴\sqrt{۲}$$

***

۲ : فاصله ی دو کانون مقطع مخروطی به معادله ی $xy+\sqrt{۲}x=۱$ کدام است؟ (کنکور۱۳۸۳)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

حل: چون مقطع مخروطی شامل جمله ی xy است ، لذا به کمک دوران این جمله را حذف می کنیم، تا معادله ی استاندارد مقطع مخروطی به دست آید.

$$xy+\sqrt{۲}x=۱\xrightarrow{ax^{۲}+bxy+cy^{۲}+dx+ey+f=۰}a=۰\,,\,b=۱\,,\,c=۰$$

$$tg۲\theta=\frac{b}{a-c}\rightarrow tg۲\theta=\frac{۱}{۰-۰}=ن\rightarrow ۲\theta=\frac{\pi}{۲}\rightarrow \theta=\frac{\pi}{۴}$$

$$\begin{cases} x=x'Cos\theta-y'Sin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y') \\ y=x'Sin\theta+y'Cos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y') \end{cases}$$

$$xy+\sqrt{۲}x-۱=۰$$

$$\rightarrow [\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'-y')][\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')]+\sqrt{۲}[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x'+y')]-۱=۰$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲}(x'^{۲}-y'^{۲})+(x'+y')-۱=۰\xrightarrow{\times ۲}(x'^{۲}-y'^{۲})+۲(x'+y')-۲=۰$$

$$\rightarrow x'^{۲}+۲x'-y'^{۲}+۲y'-۲=۰\rightarrow (x'^{۲}+۲x'+۱)-(y'^{۲}-۲y'+۱)=۲$$

$$\rightarrow (x'+۱)^{۲}-(y'-۱)^{۲}=۲\rightarrow \frac{(x'+۱)^{۲}}{۲}-\frac{(y'-۱)^{۲}}{۲}=۱$$

معادله ی به دست آمده مربوط به یک هذلولی افقی متساوی القطرین است.

لذا $a^{۲}=۲$ و $b^{۲}=۲$ حال چون $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$ در نتیجه:

$$c^{۲}=۲+۲\rightarrow c=\sqrt{۴}\rightarrow c=۲$$

فاصله ی کانونی $FF'=۲c=۴$

***

۳ : معادله ی یک بیضی پس از دوران محور های آن حول مبدأ به اندازه ی ۴۵ درجه در جهت مثلثاتی به صورت $x'^{۲}+۴y'^{۲}=۴$ است. معادله ی این بیضی قبل از دوران کدام است؟(کنکور۱۳۸۴)

۱) $۳x^{۲}+۳y^{۲}+۶xy=۴$

۲) $۳x^{۲}+۳y^{۲}-۶xy=۸$

۳) $۵x^{۲}+۵y^{۲}-۶xy=۸$

۴) $۵x^{۲}+۵y^{۲}+۶xy=۸$

حل : چون $\theta=\frac{\pi}{۴}$ لذا

$$\begin{cases} x'=xCos\theta-ySin\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-y) \\ y'=xSin\theta+yCos\theta=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y) \end{cases}$$

$$x'^{۲}+۴y'^{۲}-۴=۰$$
$$\to[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x-y)]^{۲}+۴[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y)]^{۲}-۴=۰$$
$$\to\frac{۱}{۲}(x^{۲}+y^{۲}-۲xy)+۴(\frac{۱}{۲})(x^{۲}+y^{۲}+۲xy)-۴=۰$$
$$\to\frac{۵}{۲}x^{۲}+\frac{۵}{۲}y^{۲}+۳xy-۴=۰\xrightarrow{\times۲}۵x^{۲}+۵y^{۲}+۶xy-۸=۰\to۵x^{۲}+۵y^{۲}+۶xy=۸$$

۴ : فاصله ی نقطه ی $M(x,y)$ از نقطه ای به طول ۱ واقع بر محور xها ، برابر نصف فاصله ی همین نقطه از خط به معادله ی $y=۳$ است. در منحنی مکان هندسی M اندازه ی بزرگترین وتر کدام است؟ (کنکور۱۳۸۸)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۴ ۴) ۶

حل : قرار می دهیم $A(۱,۰)$

فاصله ی نقطه ی M تا خط $y=۳$

$$y=۳\to۰x+۱y-۳=۰$$
$$D=\frac{|۰(x)+۱(y)-۳|}{\sqrt{۰^{۲}+۱^{۲}}}=\frac{|y-۳|}{۱}=|y-۳|$$

طول پاره خط AM

$$AM=\sqrt{(x-۱)^{۲}+(y-۰)^{۲}}=\sqrt{x^{۲}-۲x+۱+y^{۲}}$$

پس طبق مسئله داریم:

$$AM=\frac{D}{۲}\to\sqrt{(x-۱)^{۲}+y^{۲}}=\frac{|y-۳|}{۲}\to(x-۱)^{۲}+y^{۲}=\frac{y^{۲}-۶y+۹}{۴}$$
$$\to۴(x-۱)^{۲}+۴y^{۲}=y^{۲}-۶y+۹\to۴(x-۱)^{۲}+۳y^{۲}+۶y=۹$$
$$\to۴(x-۱)^{۲}+۳(y+۱)^{۲}=۱۲\to\frac{(x-۱)^{۲}}{۳}+\frac{(y+۱)^{۲}}{۴}=۱$$

مکان هندسی نقطه ی M بیضی قائم به مرکز $(۱,-۱)$ است. لذا بزرگترین وتر آن $AA'=۲a$ می باشد.

$$AA'=۲a\xrightarrow{a^{۲}=۴\to a=۲}AA'=۴$$

۵ : محور های مختصات را به اندازه ی مناسب در جهت مثلثاتی دوران می دهیم تا مقطع مخروطی به معادله ی $۵x^۲ - ۲\sqrt{۳}xy + ۷y^۲ = ۱$ به شکل استاندارد نوشته شود. مقدار x بر حسب مختصات در دستگاه دوران یافته کدام است؟ (کنکور ۱۳۸۹)

۱) $x = \frac{۱}{۲}(x' - \sqrt{۳}y')$

۲) $x = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}x' - y')$

۳) $x = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}x' + y')$

۴) $x = \frac{۱}{۲}(x' + \sqrt{۳}y')$

حل :

$$\tan ۲\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۵-۷} = \sqrt{۳} \rightarrow ۲\theta = ۶۰^\circ \rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x' - \frac{۱}{۲}y' = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۳}x' - y')$$

لذا گزینه ی ۲ درست است.

***