ریاضیات مهندسی پیشرفته

جلسه هشتم

استاد : دکتر قصوری

رشته : کارشناسی ارشد مهندسی مکاترونیک

دانشگاه : آزاد واحد کاشان

تهیه وتنظیم : ابراهیم شهنازی

سرفصل مطالب جلسه هشتم

به ریشه مخرج قطب گفته می شود.

قطب ساده : ریشه مرتبه اول مخرج.

قطب مکرر : ریشه مرتبه های بالاتر از یک.

مثال ۱) انتگرال روبرو را حل کنید.

$$\oint_c \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}\,dz \qquad c: |z|=4$$

روش تجزیه کسرها :

روش تبدیل به مسیر

$$\Rightarrow \oint_{c_1} + \oint_{c_2} + \cancel{\oint_{c'}}$$

$$\Rightarrow \oint_{c_1} \frac{\frac{\cos z}{(z-\pi)^2}}{z}\,dz + \oint_{c_2} \frac{\frac{\cos z}{z}}{(z-\pi)^2}\,dz$$

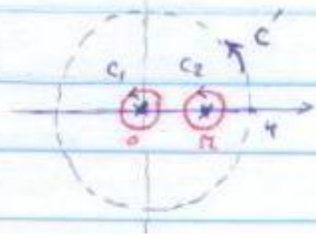
A : تحلیلی روی و درون خم بسته c_1

B : تحلیلی روی و درون خم بسته c_2

$$= 2\pi i\left(\frac{\cos z}{(z-\pi)^2}\right)\Big|_{z=0} + 2\pi i\left(\underbrace{\frac{d}{dz}\frac{\cos z}{z}}\Big|_{z=\pi}\right)$$

$$\frac{-z\sin z - \cos z}{z^2}\Big|_{z=\pi} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$= 2\pi i \times \frac{1}{\pi^2} + 2\pi i \times \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow \oint_c = \frac{4i}{\pi}$$



حل انتگرال مختلط با استفاده از مانده ها :

$$\underset{z=z_0}{Res}\, f(z) = 0$$

درصورتیکه $f(z)$ در نقطه $z=z_0$ تحلیلی باشد.

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res\, f(z)\Big|_{z=z_i}$$

n نقطه غیر تحلیلی روی و درون منحنی بسته c :

اگر قطب ساده باشد:

$$Res\, f(z)\Big|_{z=z_i} = \lim_{z\to z_i} (z-z_i) f(z) = \frac{P(z_i)}{q'(z_i)} \qquad f(z)=\frac{P(z)}{q(z)}$$

اگر قطب تکرار داشته باشیم = اگر $z=z_i$ ریشه مرتبه m ام باشد کلی

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}\,dz = 2\pi i\,\frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \qquad \boxed{m=n+1}$$

$$Res\, f(z)\Big|_{z=z_i} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_i)^m f(z)\right)$$

مثال ۲) مطلوبست حل انتگرال زیر با استفاده از مانده ها :

$$\oint_C \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}\,dz$$

$$C:\ |z|=4$$

$$\Rightarrow 2\pi i \sum_{k} \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=z_i}$$

$$= 2\pi i\left(\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} + \operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\pi}\right)$$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \frac{\cos z}{(z-\pi)^2+(2z(z-\pi))}\Big|_{z=0} = \frac{1}{(-\pi)^2+0} = \frac{1}{\pi^2}$$

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to\pi}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left(\cancel{(z-\pi)^2}\times\frac{\cos z}{z\cancel{(z-\pi)^2}}\right)$$

$$= \lim_{z\to\pi}\left(\frac{-z\sin z-\cos z}{z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \oint \frac{\cos z}{z(z-\pi)^2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\right) = \boxed{\frac{4i}{\pi}}$$

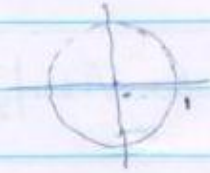
حل انتگرال های میدان حقیقی با استفاده از انتگرال های مختلط:

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, dt$$

$$e^{i\theta} = z \Rightarrow i e^{i\theta} d\theta = dz \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z}{2i} - \frac{1}{2iz}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$$



$$0 < \theta < 2\pi \qquad z = e^{i\theta} \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sin\theta, \cos\theta)\, dt = \oint_c f\left(\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right), \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)\right) \frac{dz}{iz}$$

دایره ای به مرکز صفر و شعاع واحد

مثال ۳) مطلوبست حل انتگرال روبرو.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta}$$

$$= \oint_c \frac{1}{\left(\sqrt{2} - \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)\right) iz} = \oint_c \frac{dz}{i2\sqrt{2} - \frac{iz^2}{2} - \frac{i}{2}}$$

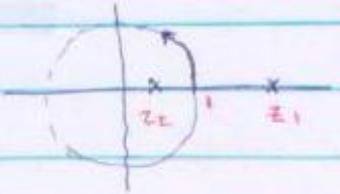
$c: |z| = 1$

دایره واحد به مرکز مختصات

$$= \frac{1}{-\frac{i}{2}} \oint_c \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}\, z + 1}$$

$\boxed{\Delta}$ $z = \sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 1} = \sqrt{2} \pm 1$

$$\begin{cases} z_1 = 2.414 = \sqrt{2} + 1 \\ z_2 = 0.414 = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$



$$= 2i\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}-1} f(z)\right) = 2i\left(2\pi i \times \frac{1}{2z-2\sqrt{2}}\Bigg|_{z=\sqrt{2}-1}\right)$$

$$\Rightarrow 2i\left(\frac{2\pi i}{2(\sqrt{2}-1)-2\sqrt{2}}\right) = 2i \times -\pi i = \boxed{2\pi}$$

پاسخ کمیت حقیقی است، چون انتگرال در ابتدا حقیقی بود.

حل انتگرال ناسره.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

درصورتیکه صورت حداقل دو درجه از مخرج کمتر باشد.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz + \int_R f(z)\,dz =$$

نیم صفحه فوقانی

به علت اینکه نیم صفحه فوقانی بی نهایت میشود برابر صفر است

چون برای انتگرال گیری صورت حداقل یک درجه از مخرج کوچکتر است و سپس به بی نهایت میل کند هر عدد تقسیم بر ∞ صفر می‌شود.

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z=z_i} \operatorname{Res} f(z)$$

z_i: ریشه‌ها در نیم صفحه فوقانی z

مثال ۴)

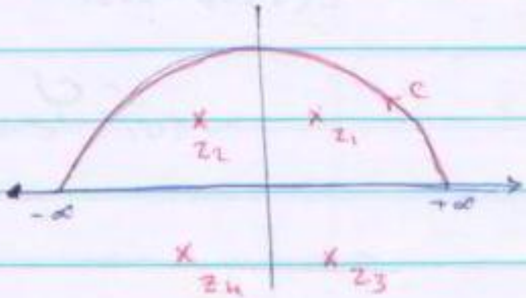
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$$

[illegible]

$$= \oint_C \frac{z^2+1}{z^4+1}\,dz$$

$$z^4+1=0 \Rightarrow z=\sqrt[4]{-1}=1\,e^{i\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = e^{i\pi/4} \\ z_2 = e^{i3\pi/4} \\ z_3 = e^{-i\pi/4} \\ z_4 = e^{-i3\pi/4} \end{cases}$$



$$= 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=e^{i\pi/4}} + \left.\frac{z^2+1}{4z^3}\right|_{z=e^{i3\pi/4}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{i\pi/2}+1}{4e^{i3\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/2}+1}{4e^{i\pi/4}} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{i+1}{4e^{i3\pi/4}} + \frac{-i+1}{4e^{i\pi/4}} \right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}}{e^{i3\pi/4}} + \frac{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}}{e^{i\pi/4}} \right)$$

$$= \frac{\pi i\sqrt{2}}{2} \left(e^{-i\pi/2} + e^{-i\pi/2} \right)$$

$$= \frac{-2i \times \pi i \sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}\,\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx \quad \& \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\cos x = Re\left\{ e^{ix} \right\}$$

$$\sin x = Im\left\{ e^{ix} \right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = Re\left\{ \oint_c f(z) \, e^{iz} \, dz \right\}$$

از جنس z

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin x \, dx = Im\left\{ \oint_c f(z) \, e^{iz} \, dz \right\}$$

مثال ۵)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} \, dx$$

$$= Re\left\{ \oint_c \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \, dz \right\} = \boxed{\frac{\pi}{e}}$$

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \oint_c \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \, dz$$

$$\Rightarrow 2\pi i \, \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-i)^2} \frac{e^{iz}}{(z+i)^2 \cancel{(z-i)^2}} \right)\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to i} \left(\frac{i e^{iz}(z+i)^2 - 2(z+i) e^{iz}}{(z+i)^4} \right) = 2\pi i \times \frac{i e^{-1} \times -4 - 4 i e^{-1}}{(2i)^4}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{-8 i e^{-1}}{16} \right) = \pi e^{-1} = \boxed{\frac{\pi}{e}}$$

مثال ۶)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(1+x^2)^2}\, dx$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left\{ \oint_c \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \right\} = 0$$

به خاطر فرد بودن

مثل انتگرال در مثال قبل حل می‌کنیم و جواب کلی آن به صورت $\frac{B}{C}$ به دست آمد در اینجا ما قسمت حقیقی داریم و قسمت موهومی آن صفر می‌باشد.

طبق فرمول اصلی Imag ؛ قسمت موهومی جواب انتگرال می‌شود که برابر صفر است.

مثال ۷)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2-1)}\, dx \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\text{زوج}}{\text{زوج}}\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \text{زوج}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{ \oint_c \frac{e^{iz}}{z^2-1}\, dz \right\}$$

$$\oint_c \frac{e^{iz}}{z^2-1}\, dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) + \frac{1}{2}\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) \right)$$

$$= \pi i \left(\frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=1} + \frac{e^{iz}}{2z}\Big|_{z=-1} \right) = \pi i \left(\frac{e^{i}}{2} + \frac{e^{-i}}{-2} \right)$$

$$= \pi i \times i \sin 1 = \boxed{-\pi \sin 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times -\pi \sin 1 = \boxed{-\frac{\pi}{2} \sin 1}$$

سری های مختلط :

ناحیه همگرایی :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

تصاعد هندسی :

$$\sum_{i=0}^{n} a q^i = \frac{a - a q^{n+1}}{1-q}$$

q : قدر نسبت

a : جمله اول

$$\left.\begin{matrix} n \longrightarrow \infty \\ |q| < 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a q^i = \frac{a}{1-q}$$

جمله nام یک سری w_n ، شرط همگرایی : $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| < 1$

سری تیلور تابع f(z) حول نقطه z=z₀ :

$$f(z) = \lim_{z \to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)(z-z_0)^n}{n!}$$

سری مک لورن :

هنگامی که سری تیلور حول نقطه صفر باشد به آن سری مک لورن گویند.

$$f(z)\Big|_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, z^n}{n!}$$

مثال ۸) مطلوبست محاسبه سری مک لورن سری زیر :

$$f(z) = e^z \qquad f^{(n)}(z) = (e^z)^{(n)} = e^z$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0 \times z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$R.o.c: \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim \frac{z}{(n+1)!} \Big| < 1 \Rightarrow |z| < \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!}$$

$$\Rightarrow |z| < \infty$$

بنابراین همه جا همگرا می‌باشد :

مثال ۹) مطلوبست محاسبه سری مک لورن تابع زیر :

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} \qquad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$RoC: \lim_{n \to \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{z^n} \right| < 1 \Rightarrow |z| < 1$$

مثال ۱۰) مطلوبست محاسبه سری مک لورن تابع زیر :

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = 1 - z - z^2 - z^3 - \dots$$

مثال ۱۱) مطلوبست محاسبه سری تیلور تابع زیر حول نقطه $z_0 = 2$:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

سری تیلور حول نقطه دو برابر است با سری مک لورن w حول نقطه صفر

$$z - z_0 = w \quad \Rightarrow z - 2 = w$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(w+2)} = \frac{1}{-1-w} = \frac{-1}{1+w}$$

$$= -1\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-w)^n\right)$$

$$R.o.c: \quad |w| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} w^n = \boxed{\sum_{n=0} (-1)^{n+1} (z-2)^n}$$

مثال۱۲) مطلوبست محاسبه سری مک لورن تابع زیر :

$$f(z) = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(1+z) - \ln(1-z) \qquad \int \frac{u'}{u} du = \ln u$$

$$\int \frac{1}{1+z} dz = \ln(1+z)$$

$$\int \frac{-1}{1-z} dz = \ln(1-z)$$

$$\ln(1+z) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{(n+1)}$$

$$-\ln(1-z)=\int \frac{dz}{1-z}=\int \sum_{n=0}^{\infty} z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

$$\Rightarrow f(z)=\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}\left((-1)^n+1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} 2\,\frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

$$R.o.C:\ \left|\frac{\frac{\cancel{2}\, z^{2(n+1)+1}}{\cancel{2(n+1)+1}}}{\frac{\cancel{2}\, z^{2n+1}}{\cancel{2n+1}}}\right| \Rightarrow \left|\frac{z^{2n+3}}{z^{2n+1}}\right| = |z^2|<1$$

سری لورانت – حول نقاط غیر تحلیلی

در سری لورانت مخرج کسر صفر می شود.

مثال ۱۳) مطلوبست محاسبه سری لورانت تابع زیر حول نقطه یک:

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^4}$$

$$z-1=w$$

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^4}=\frac{e^{w+1}}{w^4}=\frac{e}{w^4}\cdot e^w=\frac{e}{w^4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\right)$$

سری تیلور e^w را جایگزین می کنیم: سری مک لورن $e^w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} e\,\frac{w^{n-4}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e\,(z-1)^{n-4}}{n!}$$

مثال۱۴) مطلوبست محاسبه سری لورانت تابع زیر حول نقطه یک .

$$f(z)=\frac{\ln z}{1-z} \qquad z_0=1$$

$$z-1=w \Rightarrow z=1+w$$

$$\frac{\ln z}{1-z}=\frac{\ln(1+w)}{-w}=\frac{-1}{w}\left(\sum_{n=0}(-1)^n\frac{w^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}w^n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(z-1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

مثال۱۵) مطلوبست محاسبه سری لورانت تابع مقابل حول نقطه $z_0=\pi/4$.

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}$$

$$z-z_0=w \Leftrightarrow z-\pi/4=w \Rightarrow z=w+\pi/4$$

① ما ابتدا نقطه z را منتقل می‌کنیم.

② متغیر کامل را بیرون می‌آوریم.

$$\frac{\sin(w+\pi/4)}{w^3}=\frac{1}{w^3}\left(\sin w\ \cos\pi/4+\sin\pi/4\ \cos w\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2w^3}\left(\sin w+\cos w\right)$$

③ سری مک‌لورن sinw و cosw را بسط می‌دهیم:

$$\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iw)^n}{n!}-\frac{(-iw)^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(iw)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\cos w=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iw)^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iw)^{2n}}{(2n)!}$$

(4) به جای w مقدار $z-\frac{\pi}{4}$ می‌گذاریم.

$$f(z)=\frac{\sqrt{2}}{2w^2}\left(\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(iw)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{2(iw)^{2n}}{(2n)!}\right.$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}-i\,\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}\right)\right.$$

تمرین ۱) مطلوبست محاسبه و تعیین ناحیه همگرایی مثال قبل .